

# Formulacija Modela Evolucije Podvrsta Gujavica

## Uvod

Ovaj dokument detaljno opisuje formulaciju modela evolucije podvrsta gujavica temeljenog na stohastičkom modelu iz članka “On a model of evolution of subspecies.” Prilagodba uključuje biološke aspekte gujavica, uključujući faze razvoja, fitness funkciju i specifične stope reprodukcije, mutacija i smrti.

## 1. Definicija modela

Model koristi diskretne vremenske korake gdje se događaji rođenja, mutacija i smrti događaju s određenim vjerojatnostima. Fitness parametar ( $f$ ) predstavlja sposobnost preživljavanja i reprodukcije jedinke, pri čemu su gujavice podijeljene u tri razvojne faze:

- **Faza 1:** Jaja ( $E$ )
- **Faza 2:** Mlade jedinke ( $J$ )
- **Faza 3:** Odrasle jedinke ( $A$ )

Svaka faza ima specifične stope prijelaza i preživljavanja.

## 2. Formalizacija prijelaza

Neka  $n$  označava trenutni vremenski korak. Broj jedinki u svakoj fazi označavamo kao: -  $E_n$ : broj jaja -  $J_n$ : broj mladih jedinki -  $A_n$ : broj odraslih jedinki

Stohastički proces definiran je slijedećim pravilima:

### a) Rođenje

- Pri svakom koraku  $n$ , broj novih jaja  $B_n$  generira se prema reproduksijskoj stopi odraslih jedinki:

$$B_n \sim \text{Poisson}(\lambda A_n),$$

gdje je  $\lambda$  prosječna stopa polaganja jaja po odrasloj jedinki.

### b) Mutacija

- Svako jaje može mutirati s vjerojatnošću  $r$ , dajući novu fitness vrijednost iz intervala  $[0, 1]$ . Ako nema mutacije, fitness je naslijeđen:

$$f_{\text{novi}} = \begin{cases} U[0, 1], & \text{s vjerojatnošću } r, \\ f_{\text{roditelj}}, & \text{inače.} \end{cases}$$

### c) Preživljavanje i prijelaz između faza

- Stope preživljavanja ovise o fitnessu:
  - Jaja preživljavaju do mladih jedinki s vjerojatnošću  $s_E(f)$ .
  - Mlade jedinke prelaze u odrasle s vjerojatnošću  $s_J(f)$ .
  - Odrasle jedinke preživljavaju s vjerojatnošću  $s_A(f)$ .

Prijelazne jednadžbe su:

$$\begin{aligned}E_{n+1} &= B_n, \\J_{n+1} &= \sum_{i=1}^{E_n} \text{Bernoulli}(s_E(f_i)), \\A_{n+1} &= \sum_{j=1}^{J_n} \text{Bernoulli}(s_J(f_j)) + \sum_{k=1}^{A_n} \text{Bernoulli}(s_A(f_k)).\end{aligned}$$

#### d) Smrt

- Jedinke s najmanjim fitnessom imaju veću vjerojatnost smrtnosti. Smrt odraslih jedinki modelirana je stohastičkom funkcijom:

$$P(\text{smrt}|f) \propto \frac{1}{f + \epsilon},$$

gdje je  $\epsilon$  mali pozitivni parametar koji sprječava dijeljenje s nulom.

### 3. Simulacija u R-u

Sljedeći kod implementira opisani model:

```
# Inicijalizacija parametara
set.seed(42)
t_steps <- 100 # Broj vremenskih koraka
lambda <- 5    # Stopa polaganja jaja
r <- 0.1       # Vjerojatnost mutacije
s_E <- function(f) 0.8 * f # Stopa preživljavanja jaja
s_J <- function(f) 0.6 * f # Stopa prijelaza mladih
s_A <- function(f) 0.9 * f # Stopa preživljavanja odraslih

epsilon <- 0.01 # Parametar za smrtnost

# Inicijalizacija populacije
E <- J <- A <- vector("list", t_steps)
E[[1]] <- runif(50, 0.2, 0.8) # Početna jaja
J[[1]] <- numeric()
A[[1]] <- runif(10, 0.5, 1)    # Početne odrasle jedinke

# Simulacija
for (t in 1:(t_steps - 1)) {
  # Rođenje
  B <- rpois(1, lambda * length(A[[t]]))
  new_eggs <- runif(B, 0, 1) # Fitness novih jaja

  # Mutacija
  mut <- runif(B) < r
  new_eggs[mut] <- runif(sum(mut), 0, 1)

  # Preživljavanje jaja
  survived_eggs <- new_eggs[runif(length(new_eggs)) < s_E(new_eggs)]

  # Preživljavanje mladih
  survived_juveniles <- J[[t]][runif(length(J[[t]])) < s_J(J[[t]])]
```

```

# Preživljavanje odraslih
survived_adults <- A[[t]][runif(length(A[[t]])) < s_A(A[[t]])]

# Ažuriranje populacije
E[[t + 1]] <- survived_eggs
J[[t + 1]] <- survived_juveniles
A[[t + 1]] <- c(survived_adults, survived_juveniles[runif(length(survived_juveniles)) < 0.5])
}

# Vizualizacija rezultata
library(ggplot2)
pop_sizes <- data.frame(
  Time = rep(1:t_steps, each = 3),
  Stage = rep(c("Eggs", "Juveniles", "Adults"), times = t_steps),
  Count = c(sapply(E, length), sapply(J, length), sapply(A, length))
)

ggplot(pop_sizes, aes(x = Time, y = Count, color = Stage)) +
  geom_line(size = 1) +
  labs(title = "Populacijska dinamika gujavica", x = "Vrijeme", y = "Broj jedinki") +
  theme_minimal()

```

## Zaključak

Ova formalizacija i simulacija omogućuju analizu dinamike evolucije podvrsta gujavica. Model se može proširiti uključivanjem specifičnih okolišnih faktora i međusobne interakcije jedinki.