Branislav Lukić, PTI: Domaći 5 Strateške igre

Rješenje:

1.

N – broj proizvođača na tržištu

a_i -Količina robe i-tog proizvođača

$c_i(a_i)$ -troškovi proizvodnje

$p(\sum_i a_i)$ -jedinična cijena robe

Nešov ekvilibrijum u slučaju N = 1, 2, 3 (monopol, duopol, tipol)

Pretpostavka:

i-ti igrač zna strategije drigih igrača tj. $(a_j (j \neq i)\ poznato\ kada\ a_i\ donosi\ odluku)$

Funkcija dobiti za i-tog proizvođača

$$u_i(a_1, \dots, a_N) = p\left(\sum_j a_j\right) a_i - c_i(a_i)$$

Gdje su:

- $p\left(\sum_j a_j\right)$ jedinična cijena
- a_i količina proizvedene robe
- $c_i(a_i)$ troškovi proizvodnje

Optimalna proizvedena količina robje je maksimum funkcije $u_i(a_1, \dots, a_N)$ po a_i tj.

$$\frac{du_i}{da_i} = 0$$

$$p'\left(\sum_j a_j\right) a_i - {c_i}'(a_i) = 0, za\ svako\ i = 1, \dots N$$

Pošto je cijena troškova ista za svaki proizvod $c_i(a_i) = ca_i$

$$p(a) = max\{d - (\textstyle\sum_i a_i), 0\} \Rightarrow$$

$$p(a) = \begin{cases} d - (a_1 + \dots + a_N), Max\ ako\ je\ a_1 + \dots + a_N < d \\ 0, \quad u\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

Funkcija dobiti u opštem slučaju:

$$u_i(a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} (d - a_i - \cdots a_N - c)a_i, Max\ ako\ je\ a_1 + \cdots + a_N < d \\ -a_i c, \qquad u\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

a)

Za monopol, N = 1:

$$u_1(a_1) = \begin{cases} (d - a_1 - c)a_i, Max\ ako\ je\ a_1 < d \\ -a_i c, \qquad u\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

Za optimalnu količinu robe:

$$\frac{du_1}{da_1} = 0$$

$$\big((d - a_1 c)a_1\big)' = 0$$

$$d - c = 2a_1$$

Nešov ekvilibrijum za N = 1 (monopol):

$$a_1 = \frac{d - c}{2}$$

Dobit za monopol je:

$$u_i(a_1) = \left(d - \frac{d - c}{2} - c\right)\frac{d - c}{2}$$

$$\boxed{u_1(a_1) = \frac{(d - c)^2}{4}}$$

Jedinična cijena:

$$p(a_1) = (d - a_1)$$

$$= \left(d - \frac{d - c}{2}\right)$$

$$= \frac{2d - d + c}{2}$$

$$\boxed{= \frac{d + c}{2}}$$

Za duopol, N = 2:

$$u_i(a_1, a_2) = \begin{cases} (d - a_1 - a_2 - c)a_i, Max\ ako\ je\ a_1 + a_2 < d \\ -a_i c, \quad\quad u\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

i=1,2

$$\frac{du_1}{da_1} = 0\ i\ \frac{du_2}{da_2} = 0$$

$$\frac{du_1}{da_1} = 0$$

$$(da_1 - a_1{}^2 - a_1 a_2 - ca_1)' = 0$$

$$d - 2a_1 - a_2 - c = 0$$

$$a_1 = \frac{d - a_2 - c}{2}$$

$$\frac{du_2}{da_2} = 0$$

$$(da_2 - a_2{}^2 - a_1 a_2 - ca_2)' = 0$$

$$d - 2a_2 - a_1 - c = 0$$

$$a_2 = \frac{d - a_1 - c}{2}$$

Jednačine $a_1\ i\ a_2$ su Nešovi ekvilibrijumi za duopol.

Kada riješimo ovaj sistem jednačina:

$$a_1 = \frac{d - a_2 - c}{2}$$

$$a_2 = \frac{d - a_1 - c}{2}$$

Dobijemo da je

$$a_1 = a_2 = \frac{d - c}{3}$$

Računanje dobiti za duopol:

Pošto smo dobili da je $a_1 = a_2$ slijedi da je :

$$u_1(a_1, a_2) = u_2(a_1, a_2) = (d - a_1 - a_2 - c)a_1$$

$$= \left(d - \frac{d-c}{3} - \frac{d-c}{3} - c\right)\frac{d-c}{3}$$

$$\boxed{u_1(a_1, a_2) = \frac{(d-c)^2}{9}}$$

Jedinična cijena:

$$p(a_1, a2) = (d - a_1 - a_2)$$

$$= \left(d - \frac{d-c}{3} - \frac{d-c}{3}\right)$$

$$= \frac{3d - d + c - d + c}{3}$$

$$\boxed{= \frac{d+2c}{3}}$$

Za tripol, N = 3:

$$u_i(a_1, a_2, a_2) = \begin{cases} (d - a_1 - a_2 - a_3 - c)a_i, Max\ ako\ je\ a_1 + a_2 + a_3 < d \\ -a_i c, \qquad u\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

i = 1,2,3

$$\frac{du_1}{da_1} = 0\ , \frac{du_2}{da_2} = 0\ i\ \frac{du_3}{da_3} = 0$$

$$\frac{du_1}{da_1} = 0$$

$$(da_1 - {a_1}^2 - a_2 a_1 - a_3 a_1 - c a_1)' = 0$$

$$d - 2a_1 - a_2 - a_3 - c = 0$$

$$\frac{du_2}{da_2} = 0$$

$$(da_2 - a_2 a_1 - {a_2}^2 - a_3 a_{2-} c a_2)' = 0$$

$$d - a_1 - 2a_2 - a_3 - c = 0$$

$$\frac{du_3}{da_3} = 0$$

$$(da_3 - a_1a_3 - a_2a_3 - {a_3}^2 - a_3c)' = 0$$

$$d - a_1 - a_2 - 2a_3 - c = 0$$

Nešovi ekvilibrijumi:

$$a_1 = \frac{d - a_2 - a_3 - c}{2}$$

$$a_2 = \frac{d - a_1 - a_3 - c}{2}$$

$$a_3 = \frac{d - a_1 - a_2 - c}{2}$$

Računanje dobiti za duopol:

Kada riješimo ovaj sistem jednačina dobijemo da je $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{d-c}{4}$

$$u_1(a_1, a_2, a_3) = u_2(a_1, a_2, a_3) = u_3(a_1, a_2, a_3) = (d - a_1 - a_2 - a_3 - c)a_1$$

$$= \left(d - c - 3\frac{d-c}{4}\right)\frac{d-c}{4}$$

$$\boxed{u_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{(d-c)^2}{16}}$$

Jedinična cijena:

$$p(a_1, a_2, a_3) = (d - a_1 - a_2 - a_3)$$

$$= \left(d - \frac{d-c}{4} - \frac{d-c}{4} - \frac{d-c}{4}\right)$$

$$= \frac{4d - d + c - d + c - d + c}{4}$$

$$\boxed{= \frac{d + 3c}{4}}$$

i=1,2,3	N=1	N=2	N=3
a_i	$\frac{d-c}{2}$	$\frac{d-c}{3}$	$\frac{d-c}{4}$
u_i	$\frac{(d-c)^2}{4}$	$\frac{(d-c)^2}{9}$	$\frac{(d-c)^2}{16}$
p_i	$\frac{d+c}{2}$	$\frac{d+2c}{3}$	$\frac{d+3c}{4}$

b) Oligopol (za proizvoljan broj (N) proizvođača)

Nešov ekvilibrijum:

$$a_n = \frac{d - (\sum_{i \neq n} a_i) - c}{2}, n = 1, \dots, N$$

Funkcija dobiti:

$$u_i(a_1, \dots, a_N) = \frac{(d-c)^2}{(1+N)^2}$$

Jedinična cijena:

$$p(a_1, \dots, a_N) = \frac{d + Nc}{1 + N}$$

c) Numerički (python)

Broj proizvođača N = 2,

Broj prozivoda

2. Zadatak. Igra zabušavanja

Igrači: Čuvar i lopov

LOPOV	**ČUVAR**		
		ČUVA	SPAVA
	KRADE	**N/-Z**	**-P/B**
	SPAVA	**-Č/0**	**S/0**

- **N**: Nagrada čuvara kada uhvati lopova
- **Z**: Zatvorska kazna
- **P**: Vrijednost zaposlenja
- **B**: Vrijednost „blaga" za lopova
- **Č**: Trošak aktivnog čuvanja
- **S**: Dobit odmaranja za čuvara

Nešov ekvilibrijum miješanog proširenja

Strategije:

- X je strategija $(x, 1-x)$, x$\in[0,1]$
- Y je strategija $(y, 1-y)$, , y$\in[0,1]$
-

Funkcije dobiti za lopova i čuvara

$$u_{č} = N(1-x)(1-y) - Č(1-x)y - Px(1-y) + Sxy$$

$$= (N - Ny - Nx + Nxy - Čy + Čxy - Px + Pxy + Sxy)$$

$$u_l = -Z(1-x)(1-y) + 0(1-x)y + Bx(1-y) + 0xy$$

$$= (-Z + Zy + Zx - Zxy + Bx - Bxy)$$

$$\frac{du_{č}}{dx} = 0 \; i \; \frac{du_l}{dy} = 0$$

$$\frac{du_{č}}{dx} = \left(N - Ny - Nx + Nxz - Čy + Čxy - Px + Pxy + Sxy\right)'$$

$$= \left(-N + Ny + Čy - P + Py + Sy\right)$$

$$\left(-N + Ny + Čy - P + Py + Sy\right) = 0$$

$$\boxed{y = \frac{N + P}{N + Č + P + S}}$$

$$\frac{du_l}{dy} = (-Z + Zy + Zx - Zxy + Bx - Bxy)'$$

$$= Z - Zx - Bx$$

$$\boxed{x = \frac{Z}{Z + B}}$$

b)

Igra sa gledišta zakonodavca:

	ČUVAR	
LOPOV	ČUVA	SPAVA
KRADE	**-N**	**- B**
SPAVA	**0**	**0**

Dobit zakonodavca je najmanji gubitak tj. Zakonodavac gubi kada lopov ukrade ili čuvaru isplatimo nagradu.

$$u_z = -N(1 - x)(1 - y) - Bx(1 - y)$$

$$x = \frac{Z}{Z + B}$$

$$y = \frac{N + P}{N + Č + P + S}$$

Kada uvrstimo x i y iz prethodnog rješenja dobijemo:

$$u_z = \frac{-B(N + Z)(Č + S)}{(Z + B)(N + Č + P + S)}$$

$$\frac{du_Z}{dN} = 0 \;\; i \;\; \frac{du_Z}{dZ} = 0$$

$$\frac{du_Z}{dN} = -\frac{B(Č + S)(Č + S + P - Z)}{(Č + N + P + S)^2 (B + Z)} = 0$$

$$\check{C} + S + P - Z = 0$$

$$\frac{du_Z}{dZ} = \frac{B(B-N)(\check{C}+S)}{(\check{C}+N+P+S)(B+Z)^2}$$

$$B - N = 0$$

$$N = B$$

$$u_Z(N,Z) = \frac{-N\left(\check{C}+S\right)(N+Z)}{(Z+N)(Z+N)}$$

$$= -\frac{N\left(\check{C}+S\right)}{(Z+N)}$$

Ako povećamo kaznu lopovu čuvar će manje čuvati. U slučaju da povećamo nagradu za čuvara lopov će manje da krade.