Evoutivne igre:

1. Igra sokola I goluba

	G	S
G	$\frac{V}{2}/\frac{V}{2}$	0/V
S	V/0	$\frac{V-C}{2}/\frac{V-C}{2}$

- G: GOLUB
- S: SOKO
- V: VRIJEDNOST NAGRADE
- C: CIJENA PORAZA

Replikatorska jednačina igre sokola i goluba:

$$\dot{x} = x(u_g(x) - \bar{u}(x))$$

Srednja vrijednost dobiti:

$$\bar{u}(x) = u_g(x) + u_s(x)(1-x)$$

Dobiti za goluba:

$$u_g(x) = \frac{V}{2}x$$

Dobit sokola:

$$u_s(x) = Vx + \frac{V-C}{2}(1-x)$$

Radne tačke $x_0 = \left\{0,1,\frac{C-V}{C}\right\}$

Radimo linearizaciju u okolini radnih tačaka, ako dobijemo da je sistem stabilan onda će biti stabilna i radna tačka.

$$x_0 = x_0 + \Delta x$$

Uvrstimo u replikatorsku jednačinu:

$$x_0 = x_0 + \Delta x$$

$$u_g(x) = \frac{V}{2}x$$

$$u_s(x) = Vx + \frac{V-C}{2}(1-x)$$

$$\dot{x} = x(u_g(x) - \bar{u}(x))$$

$$(x_0 \dot{+} \Delta x) = (x_0 + \Delta x)(\frac{V}{2}(x_0 + \Delta x) - \frac{V}{2}((x_0 + \Delta x)(x_0 + \Delta x) - (V(x_0 + \Delta x) +$$

$$+\frac{V - C}{2}(1 - x_0 - \Delta x))(1 - x_0 - \Delta x))$$

$$(x_0 \dot{+} \Delta x) = (x_0 + \Delta x)(\frac{V}{2}(x_0 + \Delta x) - \frac{V}{2}((x_0 + \Delta x)^2 - (V(x_0 + \Delta x) +$$

$$+\frac{V - C}{2}(1 - x_0 - \Delta x))(1 - x_0 - \Delta x))$$

$$x_0 = const =>$$

$$\dot{\Delta x} = (x_0 + \Delta x)(\frac{V}{2}(x_0 + \Delta x) - \frac{V}{2}((x_0 + \Delta x)^2 - (V(x_0 + \Delta x) +$$

$$+\frac{V - C}{2}(1 - x_0 - \Delta x))(1 - x_0 - \Delta x))$$

$$\dot{\Delta x} = \frac{Cx_0^3}{2} + \frac{3}{2}Cx_0^2\Delta x - Cx_0^2 + \frac{3}{2}Cx_0\Delta x^2 - 2C\Delta x + \frac{Cx_0}{2} + \frac{C\Delta x^3}{2} -$$

$$-C\Delta x^2 - \frac{C\Delta x}{2} + \frac{Vx_0^2}{2} + Vx_0\Delta x - \frac{Vx_0}{2} + \frac{V\Delta x^2}{2} - \frac{V\Delta x}{2}$$

$$\dot{\Delta x} = \frac{Cx_0^3}{2} + \frac{3}{2}Cx_0^2\Delta x - Cx_0^2 - 2C\Delta x + \frac{Cx_0}{2} - \frac{C\Delta x}{2} + Vx_0\Delta x - \frac{Vx_0}{2} - \frac{V\Delta x}{2}$$

Za $x_0 = 0$

$$\dot{\Delta x} = \frac{C0^3}{2} + \frac{3}{2}C0^2\Delta x - C0^2 - 2C\Delta x + \frac{C0}{2} - \frac{C\Delta x}{2} + V0\Delta x - \frac{V0}{2} - \frac{V\Delta x}{2}$$

$$\dot{\Delta x} = \frac{(C - V)}{2}\Delta x$$

Stistem će biti stabilan kada je V > C

Za $x_0 = 1$

$$\dot{\Delta x} = \frac{1}{2}V\Delta x$$

Sistem će biti stabilan za V < 0

Za $x_0 = \frac{C-V}{C}$

$$\dot{\Delta x} = \frac{1}{2} V \Delta x \frac{V-C}{C}$$

Sistem će biti stabilan kada je $\dot{\Delta x} < 0$

- **C < 0 , V > 0**
- **C < 0, V > 0**
- **C > 0, 0 < V < C**

2. Zadatak

	BUNAR	PAPIR	MAKAZE
BUNAR	a	-1	1
PAPIR	1	a	-1
MAKAZE	-1	1	a

Funkcija početnog igrača:

Strategije (x,y,z)

Modelujemo dinamiku igrača kada igra čistu strategiju protiv miješane strategije α. Prvi igrač ne može promijeniti svoju strategiju jer je tako genetički preodređena.

Funkcije dobiti prvog igrača:

$$u_1(x, \alpha) = \alpha x - y + z$$

$$u_1(y, \alpha) = x + \alpha y - z$$

$$u_1(z, \alpha) = -x + y + \alpha z$$

Funkcija dobiti za strategiju igrača koji igra protiv sebe:

$$u_1(\alpha, \alpha) = u_1(x, \alpha)x + u_1(y, \alpha)y + u_1(z, \alpha)z$$

Replikatorska jednačina u opštem slučaju:

$$\dot{p_i} = (u_1(s_i, \alpha) - u_1(\alpha, \alpha))p_i, i = 1, \dots, n$$

Iz ovoga dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\dot{x} = (z - y)x$$

$$\dot{y} = (x - z)y$$

$$\dot{z} = (y - z)z$$

Pošto znamo da je x+y+z=1, možemo se riješiti 3. jednačine tako da ćemo imati:

$$z = 1 - x - y$$

$$\dot{x} = (1 - x - 2y)x$$

$$\dot{y} = (2x + y - 1)y$$

Imamo sistem drugog reda:

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} = 0$$

Rješavanjem ovog sistema jednačina dobijamo 4 tačke:

- (0,0)
- (1,0)
- $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- (0,1)

Ispitivanje stabilnosit:

$$(x_0 \dot{+} \Delta x) = (1 - x_0 - \Delta x - 2y_0 - 2\Delta y)(x_0 - \Delta x)$$

$$(y_0 \dot{+} \Delta y) = (2x_0 + 2\Delta x + y_0 + \Delta y - 1)(y_0 + \Delta y)$$

Izvodi konstanti su 0 tako da dobijamo sledeće jednačine:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{\Delta x} = \Delta x(1 - 2x_0 - 2y_0) - 2x_0\Delta y$$

$$\dot{\Delta y} = \Delta x(2y_0) - 2x_0 + 2y_0 - 1$$

Iz ovog dobijamo matricu A:

$$A\begin{bmatrix} 1 - 2x_0 - 2y_0 & 2x_0 \\ 2y_0 & 2x_0 + 2y_0 - 1 \end{bmatrix}$$

Tačka će biti stabilna ako je det(A) > 0

Za tačku (0,0)

$$A\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Det(A) = -1 => nestabilna tačka.

Za tačku (1,0):

$$A\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Det(A) = -1 => nestabilna tačka.

Za tačku (0,1):

$$A\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Det(A) = -1 => nestabilna tačka

Za tačku $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$A\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Det(A) =$\frac{1}{3}$ => stabilna tačka.