

数理逻辑第 2 次习题作业参考解答

教材课后习题作业 (P85-86)

1. 在 PC 中证明下列事实:

$$(1) \vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$1) (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理 1}$$

$$2) A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \quad 1) + \text{定理 6}$$

$$3) (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad 2) + A2 + r_{mp}$$

//或直接用 A2: $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$, 然后前件交换即可//

//或直接调用定理 14//

$$(2) \neg A \vdash A \rightarrow B$$

$$1) (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad A3$$

$$2) \neg A \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)] \quad 1) + \text{定理 2}$$

$$3) [\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)] \rightarrow [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \quad 2) + A2 + r_{mp}$$

$$4) \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad A1$$

$$5) \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad 3) 4) r_{mp} // \text{也可以由已证定理直接来调用} //$$

$$6) \neg A \quad \text{前提}$$

$$7) (A \rightarrow B) \quad 5) 6) r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(3) A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$$

$$1) (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad A3$$

$$2) \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \quad \text{前提}$$

$$3) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad 1) 2) r_{mp}$$

$$4) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad A2$$

$$5) (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad 3) 4) r_{mp}$$

6) $A \rightarrow B$ 前提

7) $(A \rightarrow C)$ 5) r_{mp}

////////////////////////////////////

(4) $\vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$

1) $(B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]$ 定理 5

2) $A \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$ 1) 加前件

3) $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$ 2) $+ A_2 + r_{mp}$

4) $\{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$ A_2

5) $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$ 3) 4) $+ \text{定理 } 7 + r_{mp}$

////////////////////////////////////

(5) $\vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$

1) $(B \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)]$ 定理 7

2) $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$

同理上题(4)的证明

3) $[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$

2) 前件交换

4)

$(C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}\}$ 3) 加前件

5) $(C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$ 4) $+ A_2 + A_1 + r_{mp}$

6) $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$ 5) 前件交换

////////////////////////////////////

(6) $\vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C)$

1) $[B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C)\}$ 传递

2) $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ A_1

3) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C)$ 1) 2) r_{mp}

//或把尾件一样通过逆否变形, 变为前件一样来做。//

//或直接调用定理 14//

////////////////////////////////////

$$(7) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$$

方案一:运用传递的方法

$$1) [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]\} \text{ 定理 7}$$

$$2) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \quad 1) +A1+rmP$$

$$3) [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{习题 1. (1) 已证结论}$$

$$6) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 2) 3) + \text{定理 7}$$

方案二:考虑调用定理 14 来证。

$$1) \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理 3}$$

$$2) \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \quad 1) + \text{定理 13}+rmP$$

$$3) B \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \quad 2) + \text{定理 2}$$

$$4) \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 3) + \text{定理 6}$$

$$5) (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{定理 1}$$

$$6) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 4) 5) + \text{定理 14}+rmP$$

//注意参见定理 14 后的说明//

方案三:考虑对前提来个前件交换, $A \rightarrow B$ 与 B 交换。

////////////////////////////////////

$$(8) \vdash A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]$$

$$1) (C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)] \quad \text{定理 7}$$

$$2) A \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]\} \quad 1) \text{ 定理 2}$$

$$3) [A \rightarrow (C \rightarrow A)] \rightarrow \{A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]\} \quad 2) +A2+rmP$$

$$4) A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)] \quad 3) +A1+rmP$$

////////////////////////////////////

$$(9) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$$

$$1) [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)\} \text{ 定理 7}$$

$$2) \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ 定理 3}$$

3) $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ 1) 2) rmp

4) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理 8

5) $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$ 3) 4) 定理 7

//或也可以调用定理 14 来证：只需证 $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 及 $A \rightarrow A$ 即可，显然//

// 或 用 $(P \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$ 即 $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 改 为 $(P' \rightarrow \varepsilon_1) \rightarrow \varepsilon_2$ 即

$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ //

////////////////////////////////////

(10) $\vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$

方案一：直接由传递定理

1) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\}$ 定理 7

2) $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$ (9) 题已证

3) $(C \rightarrow A) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A\}$ 2) 定理 2

4) $\{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$ 3) +A2+rmp

5) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$ 1) 4) 定理 7

方案二：

1) $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (\neg A \rightarrow C)\}$ 定理 7

2) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理 3

3) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ 1) 2) rmp

4) $(C \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg C)$ 定理

5) $\neg A \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow \neg C]$ 4) +定理 6

6) $[(C \rightarrow A) \rightarrow \neg C] \rightarrow [C \rightarrow \neg(C \rightarrow A)]$ 定理

7) $\neg A \rightarrow [C \rightarrow \neg(C \rightarrow A)]$ 5) 6) +定理 7

8) $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow [\neg A \rightarrow \neg(C \rightarrow A)]$ 7) +A2+rmp

9) $[\neg A \rightarrow \neg(C \rightarrow A)] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$ A3

10) $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$ 8) 9) + 定理 7

//此结论也可以直接由传递来做或调用定理 14 做//

11) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$ 3) 10) + 定理 7

//或此题也可以调用定理 14 来证//

////////////////////////////////////

(11) $\vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$

方案一：运用证明定理 14 的证明方法。

1) $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$ 定理 3

2) $A \rightarrow [\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)]$ 1) 定理 2

3) $\neg C \rightarrow [A \rightarrow (C \rightarrow B)]$ 2) 定理 6

4) $[A \rightarrow (C \rightarrow B)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$ A_2

5) $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$ 3) 4) 定理 7

6) $[(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ 定理 12

7) $\neg C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ 5) 6) 定理 7

8) $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ **7)** $A_2 + r_{mp}$

//由此可以看出与证明定理 14 的方法相同//

9) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$ 定理 12

10) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ 9) 8) 定理 7

11) $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ A_3

12) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ 10) 11) 定理 7

方案二：直接调用定理 14 来证。

1) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow C]\}$ 定理 14

2) $\{(A \rightarrow C) \rightarrow [(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow C]\}$

$\rightarrow \{(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$ 定理 6

3) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$ 1) 2) + 定理 7

4) $(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$ 3) +定理 6

5) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理 3

6) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 5) +定理 13+rm

7) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ 4) 6) rm

方案三：根据定理 14 只需证明 $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$

及 $C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ (显然)。

证 $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ ：

1) $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$ 定理

2) $A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B))$ 1) +定理 2

3) $\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B))$ 2) +定理 6

4) $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$ A2

5) $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$ 3) 4) +定理 7

6) $(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)]$ 5) +定理 6

7) $[\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C]$ 定理

8) $(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C]$ 6) 7) +定理 7

9) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ 8) +定理 6

////////////////////////////////////

(12) $\vdash [[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$

//采用证明定理 14 的证明方法//

1) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]$ 定理 3

2) $\{\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$ 定理 13

3) $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)$ 1) 2) r_{mp}

4) $\neg D \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$ 3) 定理 2

5) $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)]$ 4) $A_2 + r_{mp}$

6) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 已证定理

7) $\neg D \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ 6) 定理 2

8) $[\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ 7) $A_2 + r_{mp}$

9) $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ 5) 8 定理 7

10) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\}$ 定理 12

11) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\}$ 10) 9) 定理 7

12) $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$ A_2

13) $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)] \rightarrow$

$\{[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]\}$ 定理 7

14) $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)]$ 定理 12

15) $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$ 13) 14) r_{mp}

16) $[(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ A_3

17) $(B \rightarrow D) \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 16) 定理 2

18) $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 17) $A_2 + r_{mp}$

19) $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 15) 18) 定理 7

20) $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 12) 19) 定理 7

21) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 11) 20) 定理 7

//这里也可以仿照 (11) 题的方法来处理。//

//上述(1), (3), (5), (7)题作为需要提交的作业, 第 8 周(即下周)周五上课时收取, 收取对象为学号模 6 余数为 0 的同学, 用单独纸张书写即可。另, 提交本次作业的同学下周五就不用提交思考题作业了。//

2. 利用演绎定理在 PC 中证明:

$$(1) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$$

只需证: $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$

只需证: $B \rightarrow A \vdash \neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$ (由 $(\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ 即 A3 可知)

只需证: $B \rightarrow A, \neg\neg B \vdash \neg\neg A$

1) $\neg\neg B$ 前提

2) $\neg\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B$ 1) + 定理 2

3) $(\neg\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg\neg B)$ A3

4) $\neg B \rightarrow \neg\neg\neg B$ 2) 3) rmp

5) $(\neg B \rightarrow \neg\neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow B)$ A3

6) $\neg\neg B \rightarrow B$ 4) 5) rmp

7) B 1) 6) rmp

//此处由 $\neg\neg B$ 演绎 B 的过程也可直接调用定理 4: $\neg\neg B \vdash B$

8) $B \rightarrow A$ 前提

9) A 7) 8) rmp

10) $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ 同理 1) 至 6) + 演绎定理 // $\neg\neg\neg A \vdash \neg A$

11) $(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg\neg A)$ A3

12) $A \rightarrow \neg\neg\neg A$ 10) 11) rmp //也可以直接调用定理

13) $\neg\neg A$ 9) 12) rmp

////////////////////////////////////

$$(2) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

只需证: $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$, 显然。

////////////////////////////////////

$$(3) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

只需证: $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$

1) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理

2) $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 前提

3) $\neg A \rightarrow A$ 1) 2) 传递

4) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理

5) A

////////////////////////////////////

(4) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

只需证: $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$

1) $B \rightarrow (A \rightarrow B)$

2) B

3) $A \rightarrow B$

4) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理

5) $\neg(A \rightarrow B)$ 前提

6) A

////////////////////////////////////

上述 1 题的 (1), (3), (5), (7) ;

2 题的: (1), (4)

为需要提交的作业, 第 8 周 (即下周) 周五上课时收取, 收取对象为学号模 6 余数为 0 的同学, 用单独纸张书写即可。另, 提交本次作业的同学下周五就不用提交思考题作业了。