形式语言与自动机理论

正则表达式

丁效
xding@ir.hit.edu.cn

计算学部
哈尔滨工业大学

2023年2月

正则表达式

- 正则表达式
  - 语言的运算
  - 正则表达式的递归定义
  - 运算符的优先级
  - 正则表达式示例
- 有穷自动机和正则表达式
- 正则表达式的代数定律

正则表达式

- 有穷自动机
  - 通过机器装置描述正则语言
  - 用计算机编写相应算法，易于实现
- 正则表达式
  - 通过表达式描述正则语言，代数表示方法，使用方便
  - 应用广泛
    - `grep` 工具 (Global Regular Expression and Print)
    - Emacs / Vim 文本编辑器
    - `lex` / `flex` 词法分析器
    - 各种程序设计语言 Python / Perl / Haskull / ···

语言的运算

设 L 和 M 是两个语言，那么

并 $$L \cup M = \{ w \mid w \in L \text{ 或 } w \in M \}$$

连接 $$L \cdot M = \{ w \mid w = xy,\ x \in L \text{ 且 } y \in M \}$$

幂
$$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$L^1 = L$$
$$L^n = L^{n-1} \cdot L$$

克林闭包 $$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

例 1. 若有语言 $L = \{0, 11\}$ 和 $M = \{\varepsilon, 001\}$, 那么

$L \cup M =$ $\qquad$ $L^0 =$

$LM =$ $\qquad$ $L^1 =$

$ML =$ $\qquad$ $L^2 =$

例 2. 对于空语言 $\varnothing$

$$\varnothing^0 =$$

$$\forall n \geq 1, \quad \varnothing^n =$$

$$\varnothing^* =$$

四则运算表达式的递归定义:

1. 任何数都是四则运算表达式;
2. 如果 a 和 b 是四则运算表达式, 那么

$$a+b,\ a-b,\ a\times b,\ a\div b \text{ 和 } (a)$$

都是四则运算表达式.

正则表达式的递归定义

定义

如果 Σ 为字母表, 则 Σ 上的正则表达式递归定义为:

1. $\varnothing$ 是一个正则表达式, 表示空语言;
   $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是一个正则表达式, 表示语言 $\{\varepsilon\}$;
   $\forall a \in \Sigma$, $\mathbf{a}$ 是一个正则表达式, 表示语言 $\{a\}$;
2. 如果正则表达式 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 分别表示语言 R 和 S, 那么

$$\mathbf{r}+\mathbf{s},\ \mathbf{rs},\ \mathbf{r}^*\ \text{和}\ (\mathbf{r})$$

   都是正则表达式, 分别表示语言

$$R \cup S,\ R \cdot S,\ R^*\ \text{和}\ R.$$

运算符的优先级

正则表达式中三种运算以及括号的优先级:

1. 首先, “括号”优先级最高;
2. 其次, “星”运算: $\mathbf{r}^*$;
3. 然后, “连接”运算: $\mathbf{rs}$, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$;
4. 最后, “加”最低: $\mathbf{r}+\mathbf{s}$, $\mathbf{r}\cup\mathbf{s}$;

例 3.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}+\mathbf{01}^* &= \mathbf{1}+\big(\mathbf{0}(\mathbf{1}^*)\big)\\
&\neq \mathbf{1}+(\mathbf{01})^*\\
&\neq (\mathbf{1}+\mathbf{01})^*\\
&\neq (\mathbf{1}+\mathbf{0})\mathbf{1}^*
\end{aligned}
$$

正则表达式示例

例 4.

E	$\mathbf{L}(E)$
$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$\mathbf{L}(\mathbf{a})\cup\mathbf{L}(\mathbf{b})=\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}$
$\mathbf{bb}$	$\mathbf{L}(\mathbf{b})\cdot\mathbf{L}(\mathbf{b})=\{b\}\cdot\{b\}=\{bb\}$
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})$	$\{a,b\}\{a,b\}=\{aa,ab,ba,bb\}$
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*(\mathbf{a}+\mathbf{bb})$	$\{a,b\}^*\{a,bb\}=\{a,b\}^*\{a\}\cup\{a,b\}^*\{bb\}=$ $\left\{w\in\{a,b\}^* \,\middle|\, w \text{ 仅以}a\text{或}bb\text{结尾.}\right\}$
$\mathbf{1}+(\mathbf{01})^*$	$\{1,\varepsilon,01,0101,010101,\ldots\}$
$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$	$\left\{x01y \,\middle|\, x,y\in\{0,1\}^*\right\}$

例 5. 给出正则表达式 $(\mathbf{aa})^*(\mathbf{bb})^*\mathbf{b}$ 定义的语言.

例 5. 给出正则表达式 $\mathbf{(aa)^*(bb)^*b}$ 定义的语言.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\big(\mathbf{(aa)^*(bb)^*b}\big) &= \mathbf{L}\big(\mathbf{(aa)^*}\big)\cdot\mathbf{L}\big(\mathbf{(bb)^*}\big)\cdot\mathbf{L}\big(\mathbf{b}\big)\\
&= \big(\{a\}\cdot\{a\}\big)^*\cdot\big(\{b\}\cdot\{b\}\big)^*\cdot\{b\}\\
&= \{a^2\}^*\cdot\{b^2\}^*\cdot\{b\}\\
&= \{\, a^{2n} \mid n \ge 0 \,\}\cdot\{\, b^{2n} \mid n \ge 0 \,\}\cdot\{b\}\\
&= \{\, a^{2n} b^{2m+1} \mid n \ge 0, m \ge 0 \,\}
\end{aligned}$$

例 6. Design regular expression for $L = \{w \mid w$ consists of 0's and 1's, and the third symbol from the right end is 1.$\}$

$$\mathbf{(0+1)^* 1 (0+1)(0+1)}$$

例 7. Design regular expression for $L = \left\{w \,\middle|\, w \in \{0,1\}^* \text{ and } w \text{ has no pair of consecutive 0's.}\right\}$

$$\mathbf{1^*(011^*)^*(0+\varepsilon)} \text{ 或 } \mathbf{(1+01)^*(0+\varepsilon)}$$

课堂练习.

Give regular expressions for each of the following languages over $\Sigma = \{0, 1\}$.

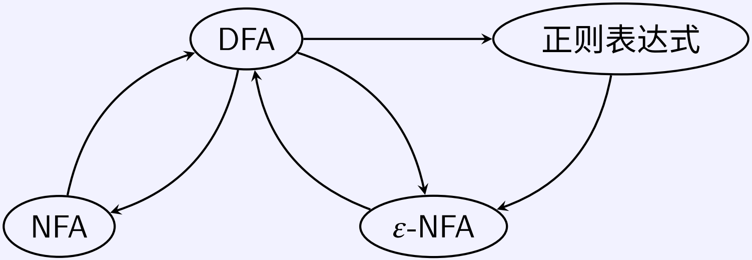
1. All strings containing the substring 000.

2. All strings *not* containing the substring 000.

正则表达式

- 正则表达式
- 有穷自动机和正则表达式
  - 由 DFA 到正则表达式, 递归表达式法
  - 由 DFA 到正则表达式, 状态消除法
  - 由正则表达式到 ε-NFA
- 正则表达式的代数定律

DFA, NFA, ε-NFA 和正则表达式的等价性



由 DFA 到正则表达式, 递归表达式法

定理 3

若 $L = \mathbf{L}(A)$ 是某 *DFA* A 的语言, 那么存在正则表达式 R 满足 $L = \mathbf{L}(R)$.

由 DFA 到正则表达式, 递归表达式法

定理 3

若 $L = \mathbf{L}(A)$ 是某 *DFA* A 的语言, 那么存在正则表达式 R 满足 $L = \mathbf{L}(R)$.

证明: 对 DFA A 的状态编号, 令 1 为开始状态, 即

$$A = \big(\{1, 2, \ldots, n\}, \Sigma, \delta, 1, F\big),$$

设正则表达式 $R_{ij}^{(k)}$ 表示从 i 到 j 但中间节点不超过 k 全部路径的字符串集:

$$R_{ij}^{(k)} = \{\, x \mid \hat{\delta}(i, x) = j,\ x\text{经过的状态除两端外都不超过 } k \,\}.$$

那么与 $A=\left(\{1,2,\ldots,n\},\Sigma,\delta,1,F\right)$ 等价的正则表达式为

$$\bigcup_{j\in F} R_{1j}^{(n)}$$

且递归式为

$$R_{ij}^{(k)}=R_{ij}^{(k-1)}+R_{ik}^{(k-1)}\left(R_{kk}^{(k-1)}\right)^{*}R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)}=\begin{cases}\left\{\, a \;\middle|\; \delta(q_i,a)=q_j \,\right\} & i\neq j\\ \left\{\, a \;\middle|\; \delta(q_i,a)=q_j \,\right\}\cup\{\varepsilon\} & i=j\end{cases}$$

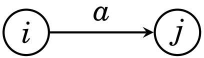
下面对 k 归纳，证明可用以上递归式求得 $R_{ij}^{(k)}$.

归纳基础: 当 $i \neq j$, $k = 0$ 时, 即 i 到 j 没经过任何中间节点

- 没有 i 到 j 的状态转移

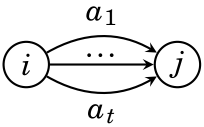
$$R_{ij}^{(0)} = \varnothing$$

- 有一个 i 到 j 的状态转移



$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}$$

- 有多个 i 到 j 的状态转移



$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_t$$

归纳基础 (续): 当 $i = j$, $k = 0$ 时, 即从 i 到自身没经过任何中间节点

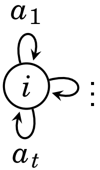
- 状态 i 没有到自己的转移

$$R_{ii}^{(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

- 状态 i 有一个到自身的转移

$$R_{ii}^{(0)} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- 状态 i 有多个到自身的转移

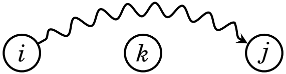


$$R_{ii}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_t + \boldsymbol{\varepsilon}$$

归纳假设: 假设已知 $R_{ij}^{(k-1)}$, $R_{ik}^{(k-1)}$, $R_{kk}^{(k-1)}$ 和 $R_{kj}^{(k-1)}$.

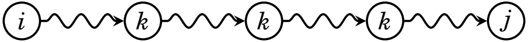
归纳递推: 那么 $R_{ij}^{(k)}$ 中全部路径, 可用节点 k 分为两部分

- 从 i 到 j 不经过 k 的



$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)}$$

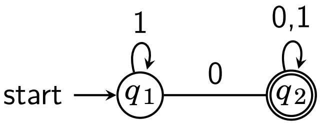
- 从 i 到 j 经过 k 的



$$R_{ij}^{(k)} = R_{ik}^{(k-1)}\left(R_{kk}^{(k-1)}\right)^{*} R_{kj}^{(k-1)}$$

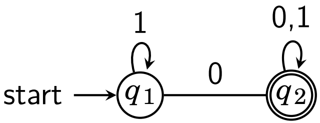
因此 $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}\left(R_{kk}^{(k-1)}\right)^{*} R_{kj}^{(k-1)}$. □

例 8. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



- 计算 $R_{ij}^{(0)}$

例 8. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



- 计算 $R_{ij}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=0$
$R_{11}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\varnothing$
$R_{22}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}$

- 计算 $R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(0)} + R_{i1}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{1j}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=0$
$R_{11}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\varnothing$
$R_{22}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}$

- 计算 $R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(0)} + R_{i1}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{1j}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=0$
$R_{11}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\varnothing$
$R_{22}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$
$R_{11}^{(1)}$	$(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})+(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0}+(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\varnothing+\varnothing(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})$
$R_{22}^{(1)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}+\varnothing(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$

- 几个基本的化简规则

  如果 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 是两个正则表达式

$$(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{r})^* = \mathbf{r}^*$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{r})\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*$$

$$\mathbf{r}+\mathbf{r}\mathbf{s}^* = \mathbf{r}\mathbf{s}^*$$

$$\varnothing\mathbf{r} = \mathbf{r}\varnothing = \varnothing$$ 零元

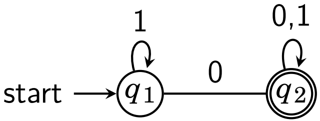
$$\varnothing+\mathbf{r} = \mathbf{r}+\varnothing = \mathbf{r}$$ 单位元

- 化简 $R_{ij}^{(1)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$	化简
$R_{11}^{(1)}$	$(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})+(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0}+(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\varnothing+\varnothing(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})$	$\varnothing$
$R_{22}^{(1)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}+\varnothing(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}$

- 计算 $R_{ij}^{(2)} = R_{ij}^{(1)} + R_{i2}^{(1)}\left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{2j}^{(1)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$	$R_{ij}^{(k)}$	$k=2$
$R_{11}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*$	$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\varnothing$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$	$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})$
$R_{21}^{(1)}$	$\varnothing$	$R_{21}^{(2)}$	$\varnothing + (\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\varnothing$
$R_{22}^{(1)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$R_{22}^{(2)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1} + (\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})$



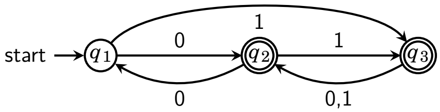
- 化简 $R_{ij}^{(2)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=2$	化简
$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\varnothing$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}+\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\varnothing+(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\varnothing$	$\varnothing$
$R_{22}^{(2)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}+(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1})$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$

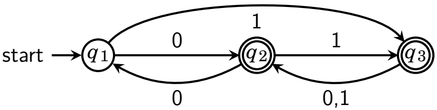
- 因只有 q_2 是接受状态, 所以该 DFA 正则表达式为

$$R_{12}^{(2)} = \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*.$$

例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.

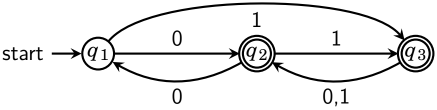


例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$R_{11}^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$(\mathbf{00})^*$
$R_{12}^{(k)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{13}^{(k)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{21}^{(k)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{22}^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{00}$	$(\mathbf{00})^*$
$R_{23}^{(k)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}+\mathbf{01}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{31}^{(k)}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*\mathbf{0}$
$R_{32}^{(k)}$	$\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*$
$R_{33}^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1}$

例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



仅状态 2 和 3 是接受状态:

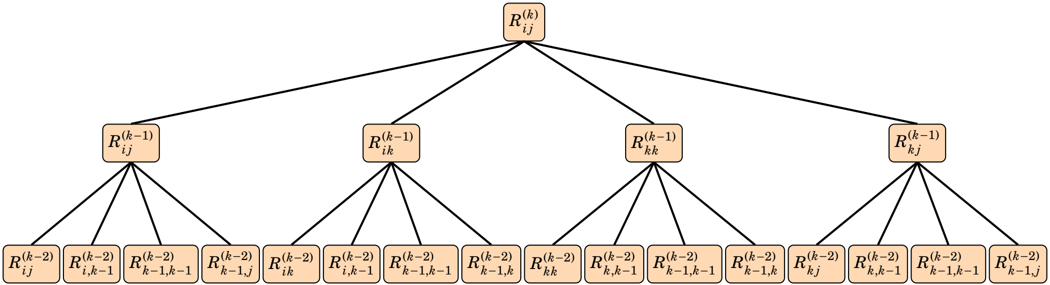
$$
\begin{aligned}
R_{12}^{(3)} &= R_{12}^{(2)} + R_{13}^{(2)}\left(R_{33}^{(2)}\right)^* R_{32}^{(2)} \\
&= \mathbf{0(00)^* + 0^*1}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{(0+1)0^*1}\right)^*\mathbf{(0+1)(00)^*} \\
&= \mathbf{0(00)^* + 0^*1}\left(\mathbf{(0+1)0^*1}\right)^*\mathbf{(0+1)(00)^*}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{13}^{(3)} &= R_{13}^{(2)} + R_{13}^{(2)}\left(R_{33}^{(2)}\right)^* R_{33}^{(2)} \\
&= \mathbf{0^*1 + 0^*1}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{(0+1)0^*1}\right)^*\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{(0+1)0^*1}\right) \\
&= \mathbf{0^*1}\left(\mathbf{(0+1)0^*1}\right)^*
\end{aligned}
$$

$$
R_{12}^{(3)} + R_{13}^{(3)} = \mathbf{0^*1}\left(\mathbf{(0+1)0^*1}\right)^*\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{(0+1)(00)^*}\right) + \mathbf{0(00)^*}.
$$

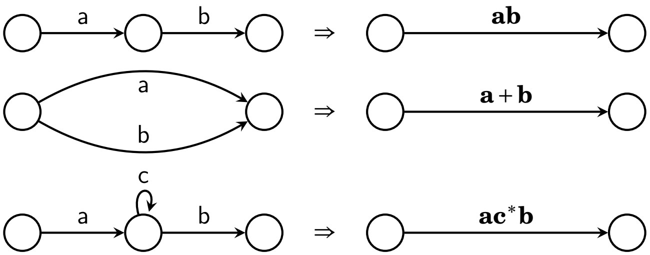
分治 (Divide and Conquer) – 普遍且实用的递归求解方式

1. 将问题实例分解为子问题实例 – divide step
2. 子问题实例可递归解决
3. 将子问题实例合并可得到原问题实例 – conquer step

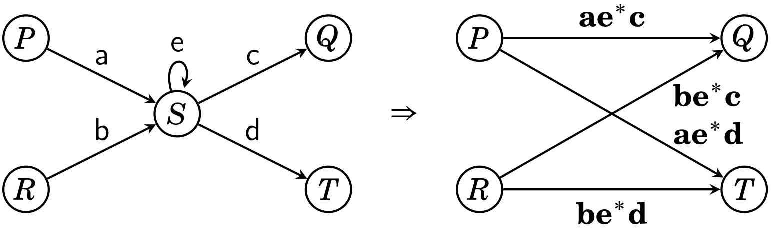


由 DFA 到正则表达式, 状态消除法

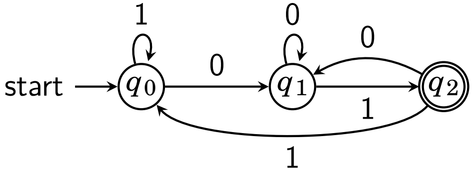
- 从 DFA 中逐个删除状态
- 用标记了正则表达式的新路径替换被删掉的路径
- 保持 “自动机” 等价.



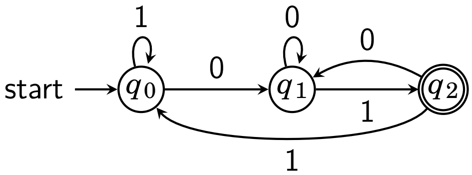
- 更一般的情况如图，若要删除状态 S，需添加相应路径



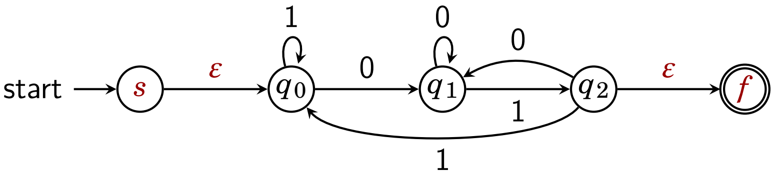
例 10. 利用状态消除法, 设计下图自动机的正则表达式.



例 10. 利用状态消除法，设计下图自动机的正则表达式.

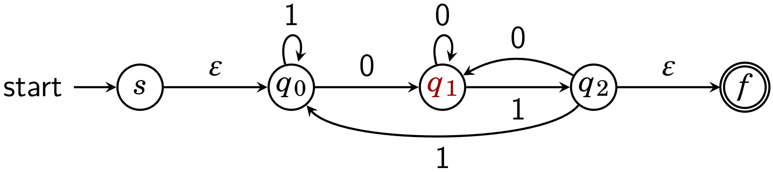


❶ 利用空转移，添加新的开始 s 和结束状态 f：

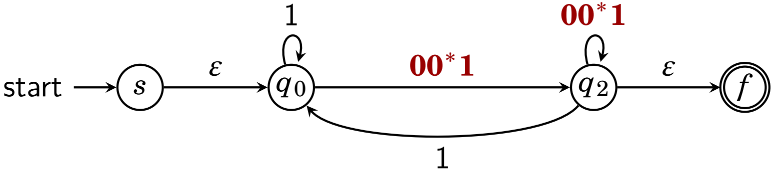


例 10. 利用状态消除法, 设计下图自动机的正则表达式.

❶ 利用空转移, 添加新的开始 s 和结束状态 f:

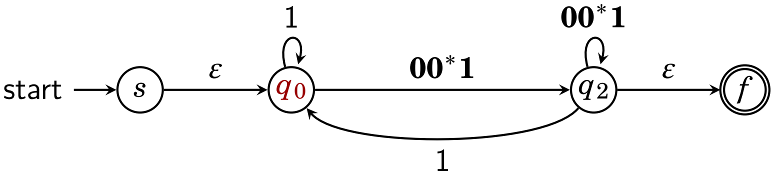


❷ 消除状态 q_1, 添加路径 $q_0 \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

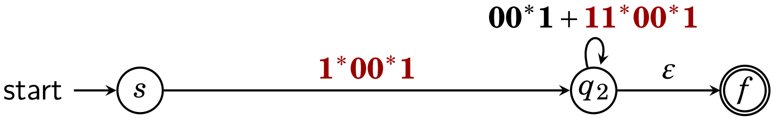


例 10. 利用状态消除法，设计下图自动机的正则表达式.

❷ 消除状态 q_1，添加路径 $q_0 \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

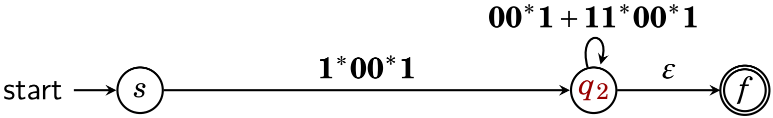


❸ 消除状态 q_0，添加路径 $s \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

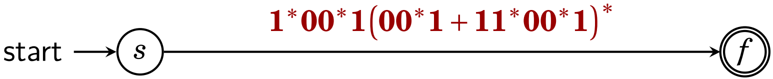


例 10. 利用状态消除法, 设计下图自动机的正则表达式.

❸ 消除状态 q_0, 添加路径 $s \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

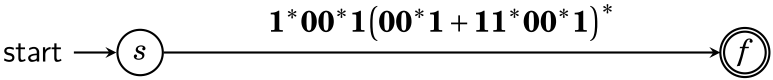


❹ 消除状态 q_2, 添加路径 $s \to f$:



例 10. 利用状态消除法，设计下图自动机的正则表达式.

4 消除状态 q_2，添加路径 $s \to f$:



5 因此该自动机的正则表达式为

$$\mathbf{1^*00^*1\left(00^*1+11^*00^*1\right)^*}.$$

由正则表达式到有穷自动机

定理 4

正则表达式定义的语言, 都可被有穷自动机识别.

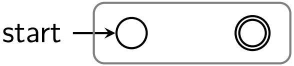
由正则表达式构造 ε-NFA

任何正则表达式 $\mathbf{r}$, 都存在等价的 ε-NFA A, 即 $\mathbf{L}(A) = \mathbf{L}(\mathbf{r})$, 并且 A 满足:

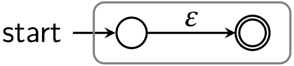
1. 仅有一个接收状态;
2. 没有进入开始状态的边;
3. 没有离开接受状态的边.

证明: 归纳基础:

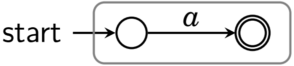
1. 对于 $\varnothing$, 有 ε-NFA:



2. 对于 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 有 ε-NFA:

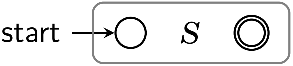


3. $\forall a \in \Sigma$, 对于 $\mathbf{a}$, 有 ε-NFA:



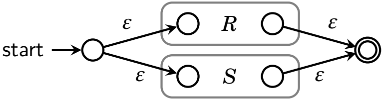
归纳递推: 假设正则表达式 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 的 ε-NFA 分别为 R 和 S

和

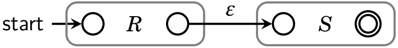


那么 $\mathbf{r}+\mathbf{s}$, $\mathbf{rs}$ 和 $\mathbf{r}^*$, 可由 R 和 S 分别构造如下:

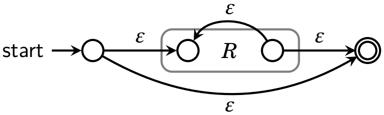
1. 对于 $\mathbf{r}+\mathbf{s}$, 有 ε-NFA:



2. 对于 $\mathbf{rs}$, 有 ε-NFA:

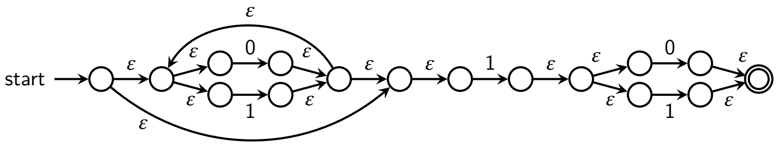


3. 对于 $\mathbf{r}^*$, 有 ε-NFA:



因此任何结构的正则表达式, 都有等价的 ε-NFA. $\square$

例 11. 正则表达式 $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$ 构造为 ε-NFA.



思考题

正则表达式到 ε-NFA 构造方法中的 3 个限制条件, 都有必要吗?

正则表达式

- 正则表达式
- 有穷自动机和正则表达式
- 正则表达式的代数定律
  - 基本的代数定律
  - 发现与验证代数定律

正则表达式的代数定律

定义

含有变量的两个正则表达式，如果以任意语言替换其变量，二者所表示的语言仍然相同，则称这两个正则表达式**等价**．在这样的意义下，正则表达式满足一些**代数定律**．

- 并运算

$(L+M)+N=L+(M+N)$	结合律
$L+M=M+L$	交换律
$L+L=L$	幂等律
$\varnothing+L=L+\varnothing=L$	单位元 $\varnothing$

- 连接运算

$$(LM)N = L(MN) \quad \text{结合律}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} L = L\boldsymbol{\varepsilon} = L \quad \text{单位元}\ \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\varnothing L = L\varnothing = \varnothing \quad \text{零元}\ \varnothing$$

$$LM \neq ML$$

- 分配率

$$L(M+N) = LM + LN \quad \text{左分配律}$$

$$(M+N)L = ML + NL \quad \text{右分配律}$$

- 闭包运算

$$
\begin{aligned}
(L^*)^* &= L^* \\
\varnothing^* &= \boldsymbol{\varepsilon} \\
\boldsymbol{\varepsilon}^* &= \boldsymbol{\varepsilon} \\
L^* &= L^+ + \boldsymbol{\varepsilon} \\
(\boldsymbol{\varepsilon} + L)^* &= L^*
\end{aligned}
$$

发现与验证正则表达式的代数定律

检验方法

要判断表达式 E 和 F 是否等价, 其中变量为 $L_1, \ldots, L_n$:

1. 将变量替换为具体表达式, 得正则表达式 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$, 例如替换 L_i 为 $\mathbf{a}_i$;
2. 判断 $\mathbf{L}(\mathbf{r}) \stackrel{?}{=} \mathbf{L}(\mathbf{s})$, 如果相等则 $E = F$, 否则 $E \neq F$.

例 12. 判断 $(L+M)^*=(L^*M^*)^*$.

1. 将 L 和 M 替换为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$;
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \stackrel{?}{=} (\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*)^*$;
3. 因为 $\mathbf{L}\left((\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\right)=\mathbf{L}\left((\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*)^*\right)$;
4. 所以 $(L+M)^*=(L^*M^*)^*$.

例 13. 判断 $L+ML=(L+M)L$.

1. 将 L 和 M 替换为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$;
2. 判断 $\mathbf{a}+\mathbf{ba}\stackrel{?}{=}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{a}$;
3. 因为 $aa\notin\mathbf{a}+\mathbf{ba}$ 而 $aa\in(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{a}$;
4. 所以 $\mathbf{a}+\mathbf{ba}\neq(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{a}$;
5. 即 $L+ML\neq(L+M)L$.

注意

这种方法**仅限于**判断正则表达式，否则可能会发生错误.

例 14. 若用此方法判断 $L \cap M \cap N \stackrel{?}{=} L \cap M$, 以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 替换 L, M, N, 有

$$\{a\} \cap \{b\} \cap \{c\} = \varnothing = \{a\} \cap \{b\},$$

而显然

$$L \cap M \cap N \neq L \cap M.$$

哈爾濱工業大學

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

xding@ir.hit.edu.cn

http://ir.hit.edu.cn/~xding/