数理逻辑课后习题作业 1 参考解答

1. 判定下列逻辑蕴涵和逻辑等价是否成立，其中 A，B，C，D 为任意命题公式。

(1) $A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to (A \to C)$

解:成立。

方案 1：根据定义用真值表法。//注意这里课堂上所提的计算量优化。

方案 2：调用逻辑蕴涵的判定定理。

证 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 为永真式：

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \to (B \to C)) \vee ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee (\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee ((A \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C))$$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee (\neg B \vee \neg A \vee C) \Leftrightarrow T$ 为永真式。

(2) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow A \wedge B \to C$

解:成立。

方案 1：根据定义用真值表法。

方案 2：调用逻辑等价的判定定理。

证 $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C)$ 为永真式。证明方法可以同上(3)。

$$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C) \Leftrightarrow T$$

方案 3：利用替换原理进行等价变换。

$$A \to (B \to C) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C$$

$$\Leftrightarrow A \wedge B \to C$$

(3) $(A \vee B) \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

解：成立。解法同上.

(4) $\neg A \vee B, A \to (B \wedge C), D \to B \Rightarrow \neg B \to C$

解：不成立。

方案 1：根据定义用真值表法。//注意优化，比如从结论 $\neg B \to C$ 来看，显然 B 为 T 时不用考虑了，因为此时结论 $\neg B \to C$ 自动为真。故只需要考虑 B 为 F

的情况。以此类推，可以进一步优化。

方案 2：调用逻辑蕴涵的判定定理。//此处较为麻烦。

证 $(\neg A\vee B)\wedge(A\to(B\wedge C))\wedge(D\to B)\to(\neg B\to C)$ 是否为永真式。

$(\neg A\vee B)\wedge(A\to(B\wedge C))\wedge(D\to B)\to(\neg B\to C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee(B\wedge C))\wedge(\neg D\vee B)\to(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)\wedge(\neg D\vee B)\to(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge\neg C)\vee(D\wedge\neg B)\vee(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge\neg C)\vee((D\wedge\neg B)\vee(B\vee C))$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge\neg C)\vee(D\vee B\vee C)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee((A\wedge\neg C)\vee(D\vee B\vee C))$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(A\vee D\vee B\vee C)$

$\Leftrightarrow A\vee D\vee B\vee C$ 显然为非永真式，故不成立。

方案 3：举反例法。由 $\neg B\to C$ 为假：知 B 为 F，C 为 F，在此基础上寻找前提为真的指派：A 为 F，D 为 F 即可。从而找到前提均为真而结论为假的指派，故原逻辑蕴涵不成立。

(5) $A,\ \neg B\vee C,\ \neg D\to(C\to\neg A)\Rightarrow B\to D$

解：成立。

举反例法。由 $B\to D$ 为假：知 B 为 T，D 为 F，在此基础上寻找前提为真的指派：

A 只能为 T，由 $\neg B\vee C$ 为真知 C 只能为 T，但在此指派下 $\neg D\to(C\to\neg A)$ 为

F，即使得前提均真结论为假的指派不存在，故反例不存在。

由此题可看出，举反例的方法，如果逻辑蕴涵是成立的，此时应该是根据你的举例使得结论为假，但前提找不到同时为真的指派。

2. 求下列公式的主合取范式与主析取范式。

(1) $p\to(p\wedge q)$

解： $p\to(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\vee q$ 为主合取范式。

主析取范式：$(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

(2) $(p\vee q)\to(q\to r)$

解：$(p\vee q)\to(q\to r)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$ 为主合取范式。

主析取范式：$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee$

$(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

(3) $(p\to(p\wedge q))\vee r$

解：$(p\to(p\wedge q))\vee r\Leftrightarrow(\neg p\vee(p\wedge q))\vee r\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q))\vee r$

$\Leftrightarrow\neg p\vee q\vee r$ 为主合取范式。

主析取范式：$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee$

$(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

//以上求主范式大家可以用最基本的补项法，也可以用两者关系并结合课堂所讲编码方法来加快处理，还可以使用真值表的方法求解。//

3. 用 {↑}、{↓}分别等价表示下列公式。

（1） $\neg p\vee q$

$=\neg(p\wedge\neg q)=p\uparrow(q\uparrow q)$

$=\neg\neg(\neg p\vee q)=(\neg p\downarrow q)\downarrow(\neg p\downarrow q)=((p\downarrow p)\downarrow q)\downarrow((p\downarrow p)\downarrow q)$

（2） $p\wedge\neg q$

$=\neg(\neg p\vee q)=(\neg p\downarrow q)=((p\downarrow p)\downarrow q)$

$=\neg\neg(p\wedge\neg q)=(p\uparrow\neg q)\uparrow(p\uparrow\neg q)=(p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q))$

(3) $(p\to r)\to(p\wedge q)$

不用化简的方法：

$=\neg(\neg p\vee r)\vee(p\wedge q)$

$=\neg[\neg(p\wedge\neg r)\wedge\neg(p\wedge q)]$

$= [p \uparrow (r \uparrow r)] \uparrow (p \uparrow q)$

$= \neg(\neg p \vee r) \vee (p \wedge q)$

$= \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)$

$= [(p \downarrow p) \downarrow r] \vee [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)]$

$= \{[(p \downarrow p) \downarrow r] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)]\}$

$\downarrow \{[(p \downarrow p) \downarrow r] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)]\}$

用化简的方法：

$= \neg(\neg p \vee r) \vee (p \wedge q)$

$= (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q)$

$= p \wedge (\neg r \vee q)$

$= p \wedge \neg (r \wedge \neg q)$

$= \{p \uparrow [r \uparrow (q \uparrow q)]\} \uparrow \{p \uparrow [r \uparrow (q \uparrow q)]\}$

$= p \wedge (\neg r \vee q)$

$= \neg [\neg p \vee \neg (\neg r \vee q)]$

$= (p \downarrow p) \downarrow [(r \downarrow r) \downarrow q)]$

注：以上完备集的相互表示结果不唯一，依赖于化简的结果。