数理逻辑第 3 次课后习题作业参考解答

3. 将 PC 中公理 $A3$ 改为 $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$，记所得系统为 PC'。

证明：

（1） $\vdash_{PC} (\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

方案一：

1) $\neg B \to (B \to A)$ 定理 3

2) $\neg A \to (\neg B \to (B \to A))$ 1)+定理 2

3) $(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to (B \to A))$ 2)+A2+r_{mp}

4) $(\neg A \to (B \to A)) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ A2

5) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ 3)4)+定理 7

6) $(\neg A \to A) \to A$ 定理 8

7) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to A) \to A)$ 6)+定理 2

8) $((\neg A \to B) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 7)+A2+r_{mp}

9) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 5)8)+定理 7

//即反证法的形式化定理描述//

方案二：

由 $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 知，只需证 $(B \to A) \to ((\neg A \to B) \to A)$，

尾件一样，可以用逆否变形转化为前件一样即可（这里的后推前的模式已失效）。

方案三：

使用定理 14 来做：$(A \to A) \to ((B \to A) \to ((\neg A \to B) \to A))$，

又 $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$，传递即可。

///////////////////////////////////////

（2） $\vdash_{PC'} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

//注意观察 $A3'$ 与上述字符串的对比关系，马上可以看出我们思考题的功能调用类方法：由 $\varepsilon_1 \to (P \to \varepsilon_2)$ 改写为 $\varepsilon_1 \to (P' \to \varepsilon_2)$，其中 $P' \to P$。//

1) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ $A3'$

2) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 1)+定理 6+rmp

3) $B \to (\neg A \to B)$ A1

4) $B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 2）3）+传递定理 7+rmp

5) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 4）+定理 6+rmp

注：
1. 上述证明中均要说明所使用的定理 6、定理 7 的本身的证明过程中（在 PC 中）没有用到 PC 的 $A3$（因为这里要证的就是 $A3$），否则存在用结论证结论的问题。
2. 在 PC 中证明定理 6，7 只用到了公理 A1，A2，未使用 A3，故定理 6，7 仍可以在 PC' 中直接调用。

//

4. 证明：对 PC 有下列导出规则：

1）若 $\vdash A \to (B \to C)$，$\vdash B$，那么 $\vdash A \to C$

① $A \to (B \to C)$ 假设定理

② $B \to (A \to C)$ ①前件交换

③ B 假设定理

④ $(A \to C)$ ②③ r_{mp}

//

2）若 $\Gamma; \neg A \vdash B$, 及 $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$，那么 $\Gamma \vdash A$

① $\Gamma; \neg A \vdash B$ 已知

② $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$ 已知

③ $\neg B \to (B \to A)$ 定理

④ $\Gamma; \neg A \vdash A$ ①②③ r_{mp}

⑤ $\Gamma \vdash \neg A \to A$ ④演绎定理

⑥ $(\neg A \to A) \to A$ 定理

⑦ $\Gamma \vdash A$ ⑤⑥ r_{mp}

6. 在 *ND* 中证明：

1） $\vdash (\neg A \to A) \to A$

①$\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A$　　公理

②$\neg A \to A, \neg A \vdash \neg A \to A$　公理

③$\neg A \to A, \neg A \vdash A$　　①②$\to$消去

④$\neg A \to A, A \vdash A$　　公理

⑤$\neg A \to A \vdash A$　③④假设消除

/////////////////////

2） $\vdash A \to (B \to C) \leftrightarrow (A \wedge B \to C)$

略

3） $\vdash (A \vee B) \to C \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

先证$\vdash ((A \vee B) \to C) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$

①$((A \vee B) \to C), A \vdash A$　公理

②$((A \vee B) \to C), A \vdash A \vee B$　①$\vee$引入

③$((A \vee B) \to C), A \vdash A \vee B \to C$　公理

④$((A \vee B) \to C), A \vdash C$　②③$\to$消去

⑤$((A \vee B) \to C) \vdash A \to C$　④$\to$引入

⑥$((A \vee B) \to C) \vdash B \to C$　同理可得

⑦$((A \vee B) \to C) \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$　⑤⑥$\wedge$引入

再证$\vdash (A \to C) \wedge (B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$

只需证：$A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$

①$A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A$　公理

②$A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A \to C$　公理+$\wedge$消除

③$A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash C$　①②$\to$消去

④ $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; B \vdash C$ 同理可得

⑤ $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash A \vee B$ 公理

⑥ $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$ ③④⑤ $\vee$消除

//

4) $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash A \to C$

略

5) $\vdash \neg(A \to B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$

先证： $\vdash \neg(A \to B) \to A \wedge \neg B$

1) $\neg(A \to B), \neg A; A \vdash \neg A$ 公理

2) $\neg(A \to B), \neg A; A \vdash A$ 公理

3) $\neg(A \to B), \neg A; A \vdash B$ 1）2）$\neg$消除//即系统不一致的规则。

4) $\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$ 3）$\to$引入//注意这里没有直接调用PC的定理3来做。

5) $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg(A \to B)$ 公理

6) $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A$ 4)5) $\neg$引入

7) $\neg(A \to B) \vdash A$ 6) $\neg\neg$消除

8) $\neg(A \to B), B \vdash B \to (A \to B)$ ND 中已证定理

9) $\neg(A \to B), B \vdash B$ 公理

10) $\neg(A \to B), B \vdash A \to B$ 8)9) $\to$消除

11) $\neg(A \to B), B \vdash \neg(A \to B)$ 公理

12) $\neg(A \to B) \vdash \neg B$ 10)11) $\neg$引入

13) $\neg(A \to B) \vdash A \wedge \neg B$ 7)12) $\wedge$引入

41) $\vdash \neg(A \to B) \to A \wedge \neg B$ 13) $\to$引入

再证： $\vdash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$

1） $A \wedge \neg B, A \to B \vdash A \wedge \neg B$ 公理

2） $A \wedge \neg B, A \to B \vdash A$ 1） $\wedge$消除

3） $A \wedge \neg B, A \to B \vdash A \to B$ 公理

4) $A \wedge \neg B, A \to B \vdash B$ 2)3） $\to$消除

5) $A \wedge \neg B, A \to B \vdash \neg B$ 1) $\wedge$消除

6) $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \to B)$ 4)5) $\neg$引入

7） $\vdash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$ 6） $\to$引入

///

6） $\vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to A \vee C$

1) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A$ 公理

2) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A \vee C$ 1) $\vee$引入

3) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \vdash C$ 公理

4) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \vdash A \vee C$ 3) $\vee$引入

5） $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash B$ 公理

6) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash \neg B$ 公理

7) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash A \vee C$ 5)6) $\neg$消除

8) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ 公理

9) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash \neg B \vee C$ 8） $\wedge$消除

10) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash A \vee C$ 4)7)9） $\vee$消除

11) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee B$ 8） $\wedge$消除

12) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee C$ 2)10)11） $\vee$消除

13） $\vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (A \vee C)$

///

7） $\vdash (A\wedge B)\leftrightarrow A\wedge(\neg A\vee B)$

先证： $\vdash (A\wedge B)\rightarrow A\wedge(\neg A\vee B)$

① $A\wedge B\vdash A$ 　公理+ $\wedge$ 消除

② $A\wedge B\vdash B$ 　公理+ $\wedge$ 消除

③ $A\wedge B\vdash \neg A\vee B$ ② $\vee$ 引入

④ $A\wedge B\vdash A\wedge(\neg A\vee B)$ ①③ $\wedge$ 引入

再证： $\vdash A\wedge(\neg A\vee B)\rightarrow(A\wedge B)$

① $A\wedge(\neg A\vee B)\vdash A$ 　公理+ $\wedge$ 消除

② $A\wedge(\neg A\vee B);\neg A\vdash A$ 　公理+ $\wedge$ 消除

③ $A\wedge(\neg A\vee B);\neg A\vdash \neg A$ 公理

④ $A\wedge(\neg A\vee B);\neg A\vdash B$ 　②③ $\neg$ 消除

⑤ $A\wedge(\neg A\vee B);B\vdash B$

⑥ $A\wedge(\neg A\vee B)\vdash \neg A\vee B$ 公理+ $\wedge$ 消除

⑦ $A\wedge(\neg A\vee B)\vdash B$ ④⑤⑥ $\vee$ 消除

⑧ $A\wedge(\neg A\vee B)\vdash A\wedge B$ ①⑦ $\wedge$ 引入

//

8） $\vdash ((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)\leftrightarrow B$

先证: $\vdash B\rightarrow((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)$

只需证： $B, A\leftrightarrow B\vdash A$ 及 $B, A\vdash A\leftrightarrow B$

1） $B, A\leftrightarrow B\vdash B\rightarrow A$ 公理及 $\leftrightarrow$ 消除

2） $B, A\leftrightarrow B\vdash B$ 公理

3） $B, A\leftrightarrow B\vdash A$ 1）2） $\rightarrow$ 消除

4） $B, A\vdash B\rightarrow(A\rightarrow B)$ 已证定理

5） $B, A \vdash B$ 公理

6） $B, A \vdash A \to B$ 4）5） $\to$消除

7） $B, A \vdash B \to A$ 同理 6）

8） $B, A \vdash A \leftrightarrow B$ 6）7） $\leftrightarrow$引入

再证: $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \to B$

1） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A$ 公理

2） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \to (A \leftrightarrow B)$ 公理及$\leftrightarrow$消除

3） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \leftrightarrow B$ 1）2） $\to$消除

4） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \to B$ 3） $\leftrightarrow$消除

5） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash B$ 1）4） $\to$消除

6） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A \to (A \to B)$ 定理

7） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A$ 公理

8） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A \to B$ 6）7） $\to$消除

9） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg B \to (B \to A)$ 定理

10） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg B$ 公理

11） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash B \to A$ 9）10） $\to$消除

12） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A \leftrightarrow B$ 8）11） $\leftrightarrow$引入

13） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash (A \leftrightarrow B) \to A$ 公理及$\leftrightarrow$消除

14） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A$ 12）13） $\to$消除

15） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A$ 公理

16） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash \neg\neg B$ 14）15） $\neg$引入

17） $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash B$ $\neg\neg$消除

18）$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A \vdash B$ 5）17）假设消除

19）$\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \to B$ 18）$\to$引入

注：

1. 上述证明我们都是基于ND的公理、推理规则和ND已证的基本定理来完成的，尽量少调用中间结论，希望大家熟悉这种基于给定规则的推理方法。
2. 在 ND 推理中，由于 PC 的公理已作为定理推出，因此可以在 ND 中直接调用，但 PC 的定理我们不调用，大家在 ND 中证明时也不要调用 PC 的定理了。