

形式语言与自动机理论

下推自动机

丁效

xding@ir.hit.edu.cn

计算学部

哈尔滨工业大学

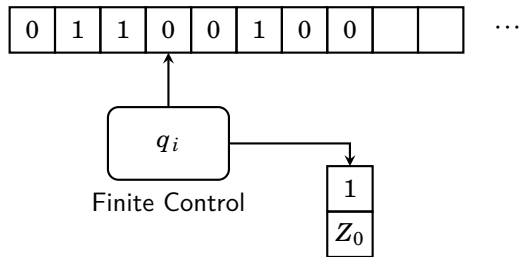
2023年3月

下推自动机

- 下推自动机
 - 形式定义
 - 瞬时描述和转移符号
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机



下推自动机



下推自动机的形式定义

定义

下推自动机(*PDA*, *Pushdown Automata*) P 为七元组

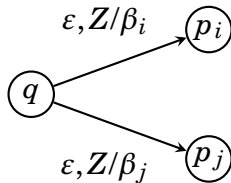
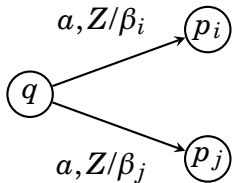
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

- ① Q , 有穷状态集;
- ② Σ , 有穷输入符号集;
- ③ Γ , 有穷栈符号集;
- ④ $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$, 状态转移函数;
- ⑤ $q_0 \in Q$, 初始状态;
- ⑥ $Z_0 \in \Gamma - \Sigma$, 栈底符号;
- ⑦ $F \subseteq Q$, 接收状态集或终态集.

PDA 的动作和状态转移图

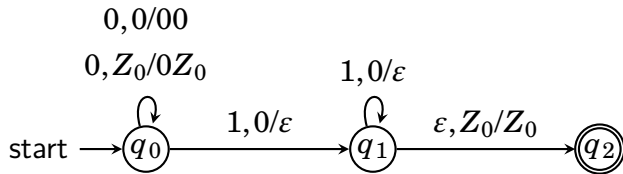
如果 $q, p_i \in Q$ ($1 \leq i \leq m$), $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$, $\beta_i \in \Gamma^*$, 可以有动作:

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \dots, (p_m, \beta_m)\}, \text{ 或}$$
$$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \dots, (p_m, \beta_m)\}.$$



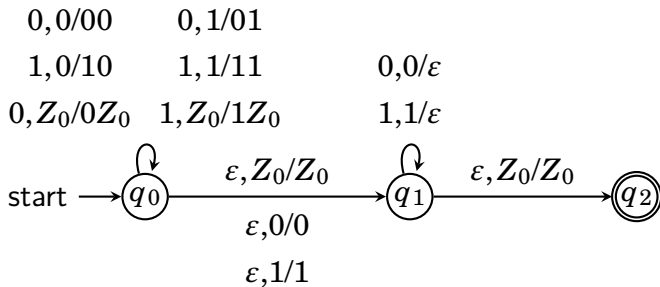
例 1. 设计识别 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA.

例 1. 设计识别 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA.

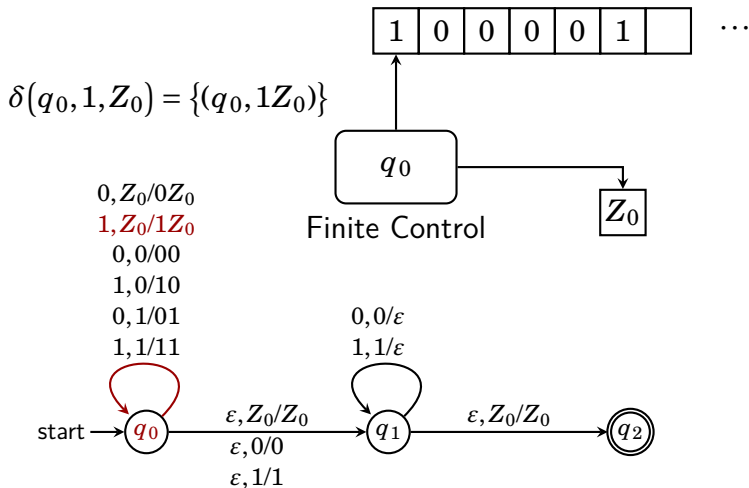


例 2. 设计识别 $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA.

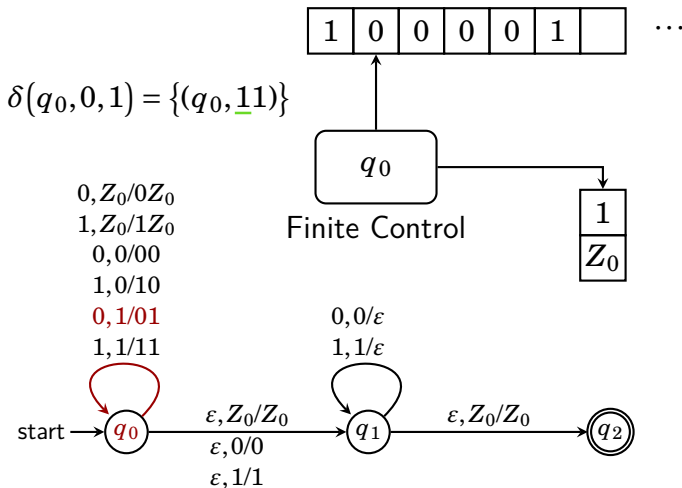
例 2. 设计识别 $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA.



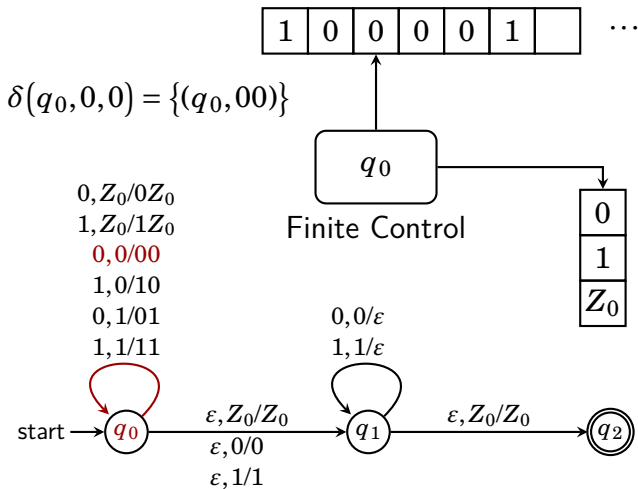
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



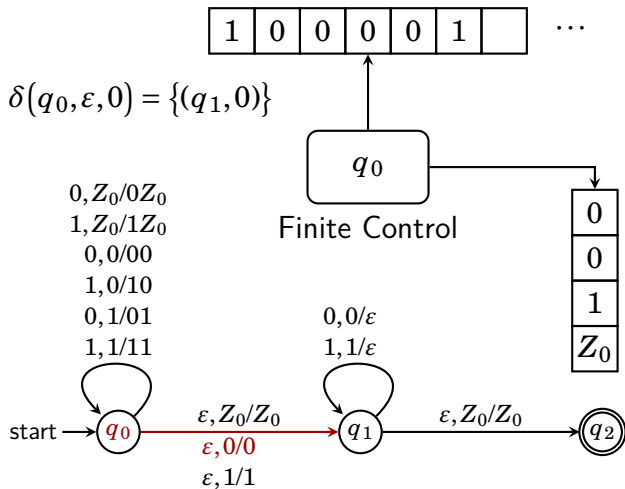
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



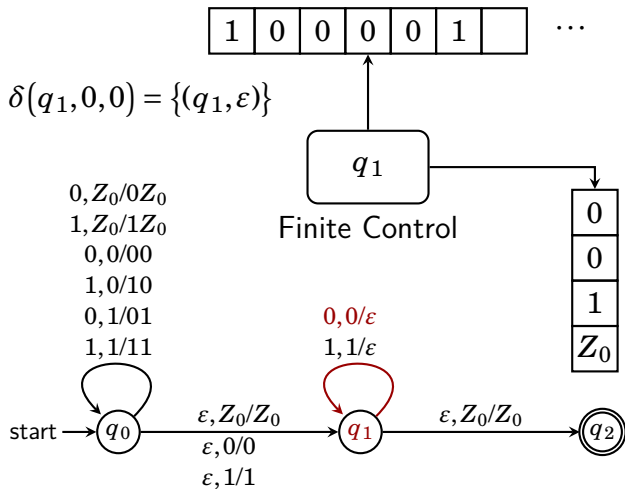
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (0+1)^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



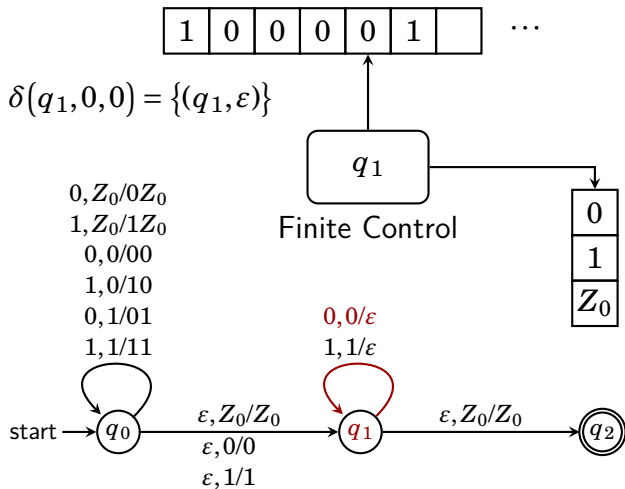
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



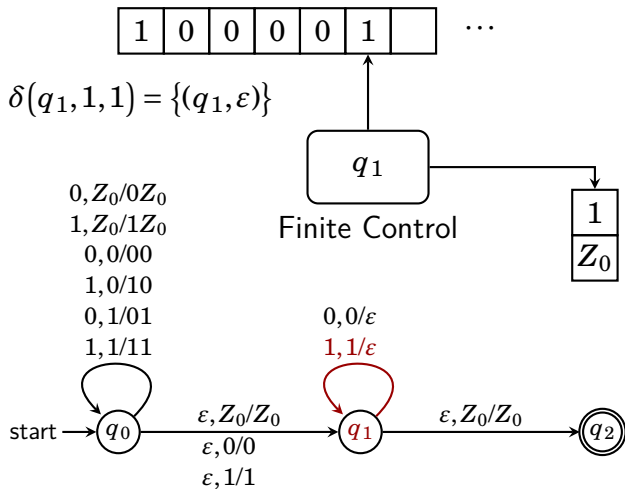
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



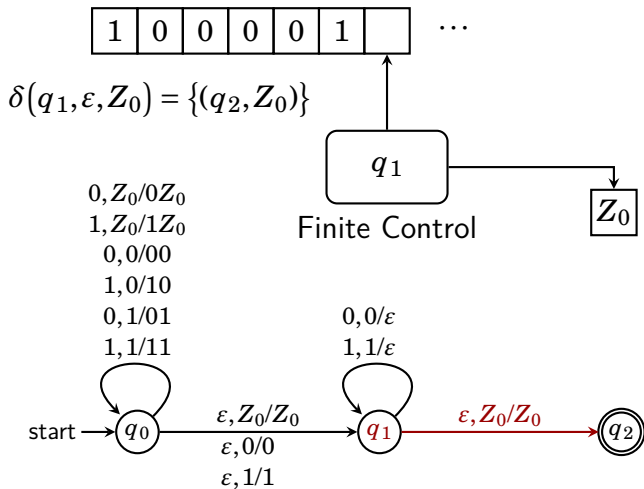
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (0+1)^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



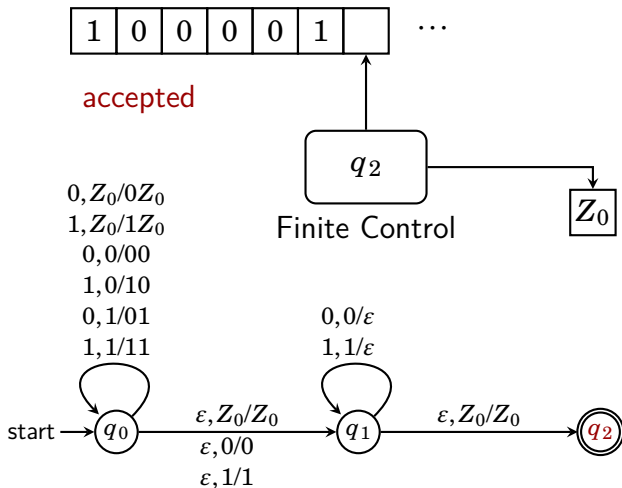
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (0+1)^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



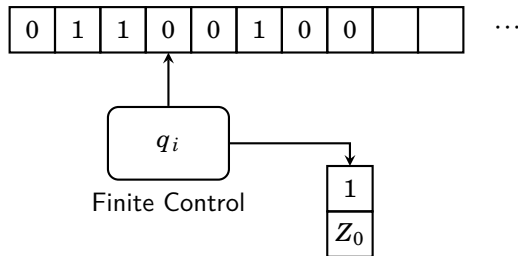
瞬时描述

定义

为描述 PDA 瞬间的格局, 定义 $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ 中三元组

$$(q, w, \gamma)$$

为**瞬时描述**(*ID*, *Instantaneous Description*), 表示此时 PDA 处于状态 q , 剩余输入串 w , 栈为 γ .



转移符号

定义

在 PDA P 中如果 $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$, 由 $(q, aw, Z\alpha)$ 到 $(p, w, \beta\alpha)$ 的变化, 称为 ID 的转移 \vdash_P , 记为

$$(q, aw, Z\alpha) \vdash_P (p, w, \beta\alpha)$$

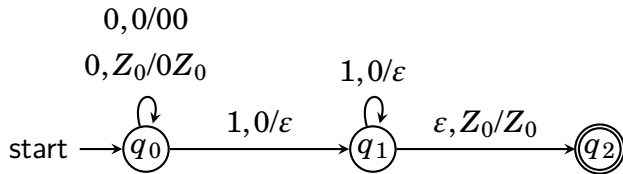
其中 $w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$.

若有 $ID I, J$ 和 K , 递归定义 \vdash_P^* 为:

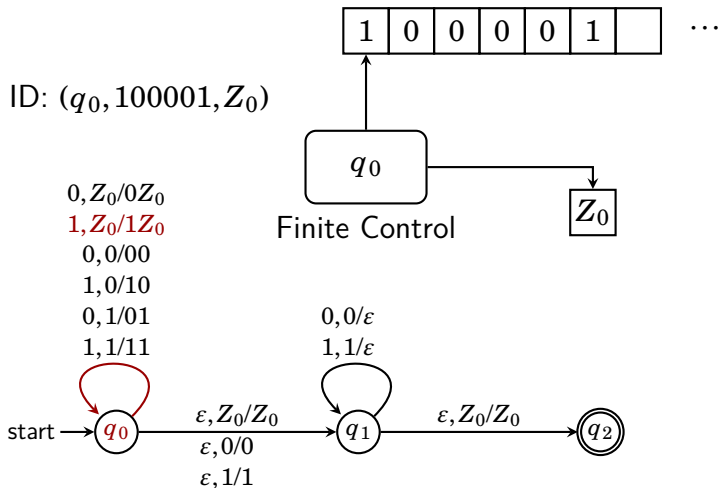
- ① $I \vdash_P^* I$;
- ② 若 $I \vdash_P J$, $J \vdash_P^* K$, 则 $I \vdash_P^* K$.

若 P 已知, 可省略, 记为 \vdash 和 \vdash^* .

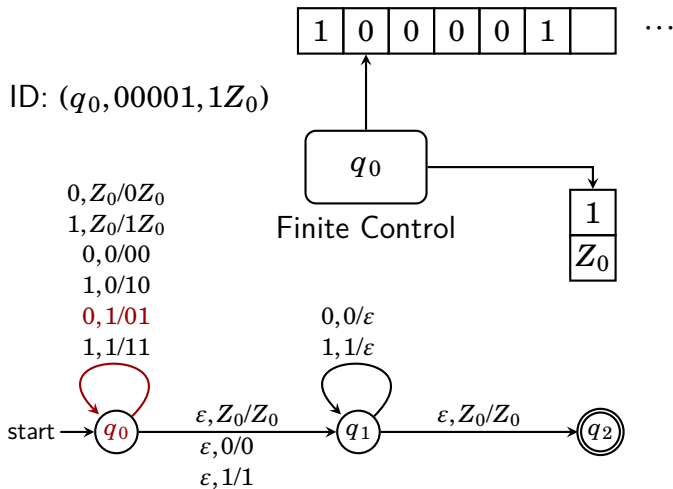
续例 1. 语言 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA, 识别 0011 时的 ID 序列.



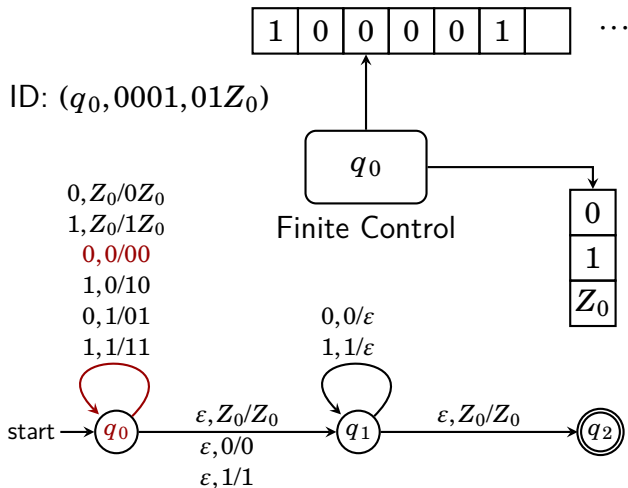
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



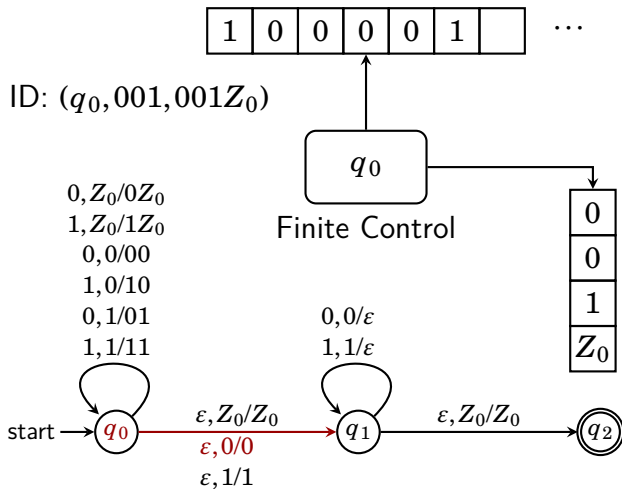
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



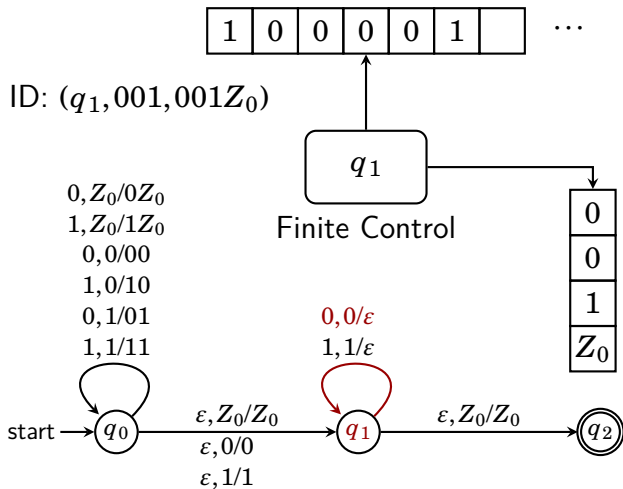
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



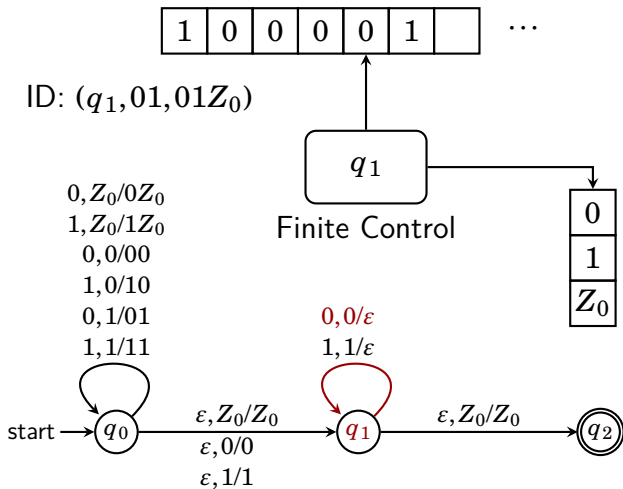
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



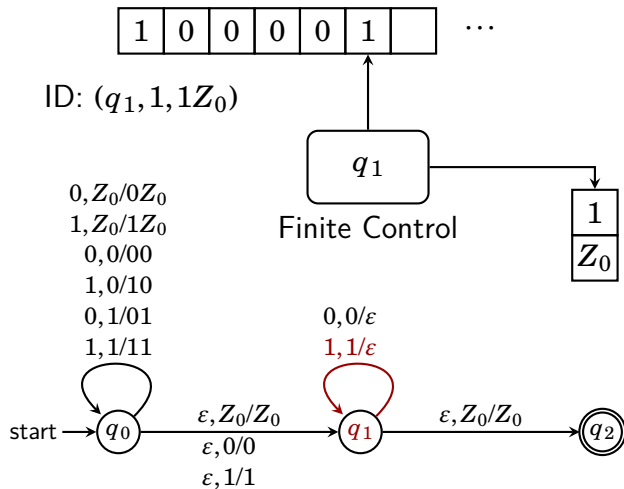
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



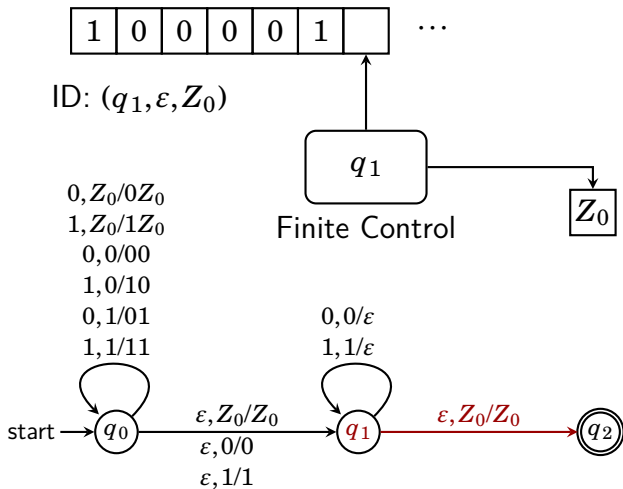
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



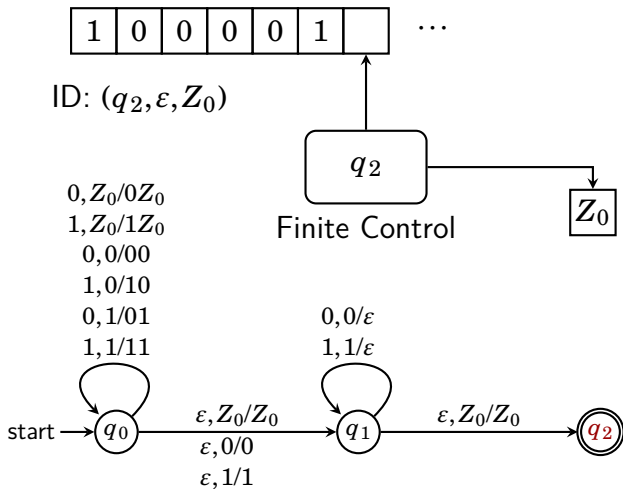
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



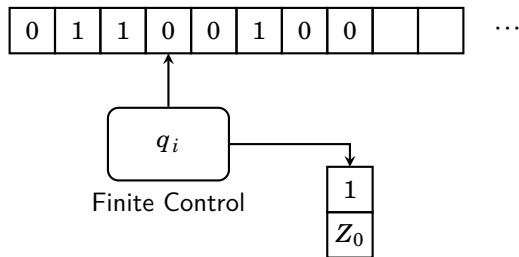
续例 2. $L_{ww^R} = \{ ww^R \mid w \in (0+1)^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



有关 ID 的序列

对 PDA P 的一个合法 ID 序列 (计算):

- ① 把相同字符串加到所有 ID 的输入串末尾, 得到的计算合法;
- ② 把相同栈符号串加到所有 ID 的栈底之下, 得到的计算合法;
- ③ 把所有 ID 中都未消耗的部分输入串去掉, 得到的计算合法.



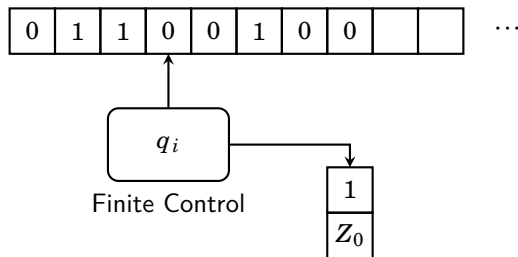
定理 23

对 $\forall w \in \Sigma^*, \forall \gamma \in \Gamma^*$, 如果

$$(q, x, \alpha) \models_P^* (p, y, \beta),$$

那么

$$(q, xw, \alpha\gamma) \models_P^* (p, yw, \beta\gamma).$$



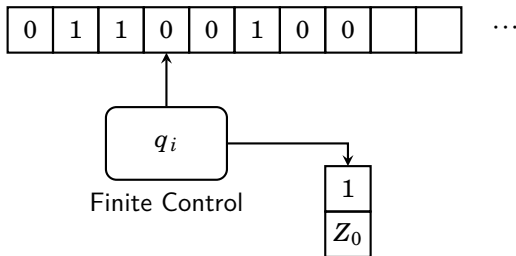
定理 24

对 $\forall w \in \Sigma^*$, 如果

$$(q, xw, \alpha) \models_P^* (p, yw, \beta),$$

那么

$$(q, x, \alpha) \models_P^* (p, y, \beta).$$



下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
 - 从终态方式到空栈方式
 - 从空栈方式到终态方式
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机



下推自动机接受的语言

定义

PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, 以两种方式接受语言:

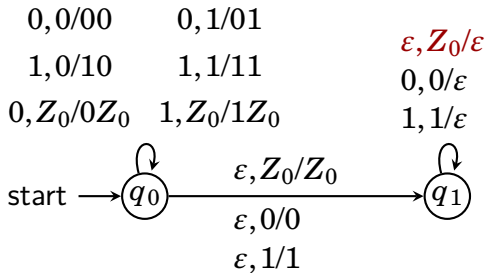
- P 以终态方式接受的语言, 记为 $\mathbf{L}(P)$, 定义为

$$\mathbf{L}(P) = \{ w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \gamma), p \in F \}.$$

- P 以空栈方式接受的语言, 记为 $\mathbf{N}(P)$, 定义为

$$\mathbf{N}(P) = \{ w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \}.$$

续例2. 识别 L_{wwr} 的 PDA P , 从终态方式, 改为空栈方式接受.
 用 $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ 代替 $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ 即可.



从终态方式到空栈方式

定理 25

如果 $PDA P_F$ 以终态方式接受语言 L , 则存在 $PDA P_N$ 以空栈方式接受 L .

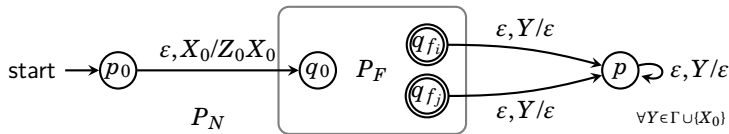
从终态方式到空栈方式

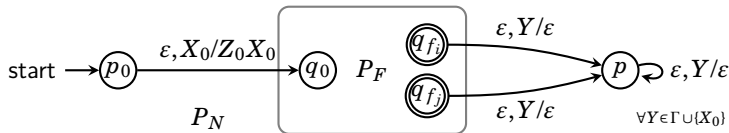
定理 25

如果 PDA P_F 以终态方式接受语言 L , 则存在 PDA P_N 以空栈方式接受 L .

证明: 设 $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, 构造 PDA P_N ,

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0, \emptyset).$$





其中 δ_N 定义如下:

- 1 P_N 首先将 P_F 的栈底符号压栈, 开始模拟 P_F :

$$\delta_N(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\};$$

- 2 P_N 模拟 P_F 的动作: $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, \forall Y \in \Gamma$:

$$\delta_N(q, a, Y) \text{ 包含 } \delta_F(q, a, Y) \text{ 的全部元素};$$

- 3 从 $q_f \in F$ 开始弹出栈中符号, 即 $\forall q_f \in F, \forall Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$:

$$\delta_N(q_f, \epsilon, Y) \text{ 包含 } (p, \epsilon);$$

- 4 在状态 p 时, 弹出全部栈中符号, 即 $\forall Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$:

$$\delta_N(p, \epsilon, Y) = \{(p, \epsilon)\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$w \in \mathbf{L}(P_F) \Rightarrow (q_0, w, Z_0) \models_{P_F}^* (q_f, \varepsilon, \gamma)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \models_{P_F}^* (q_f, \varepsilon, \gamma X_0)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \models_{P_N}^* (q_f, \varepsilon, \gamma X_0)$$

$$\Rightarrow (p_0, w, X_0) \models_{P_N} (q_0, w, Z_0 X_0) \models_{P_N}^* (q_f, \varepsilon, \gamma X_0)$$

$$\Rightarrow (p_0, w, X_0) \models_{P_N}^* (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) \models_{P_N}^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N)$$

定理23

P_N 模拟 P_F

δ_N 构造 p_0 部分

δ_N 构造 q_f 和 p 部分

即 $\mathbf{L}(P_F) \subseteq \mathbf{N}(P_N)$.

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$w \in \mathbf{N}(P_N) \Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_N}^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_N} (q_0, w, Z_0 X_0) \vdash_{P_N}^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \vdash_{P_N}^* (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) \vdash_{P_N}^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash_{P_N}^* (q_f, \varepsilon, \gamma)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash_{P_F}^* (q_f, \varepsilon, \gamma)$$

$$\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F)$$

其他状态不可能空栈

第一个动作必然到 q_0

必经 $q_f \in F$ 消耗完 w

P_N 中未用过栈底的 X_0

均为模拟 P_F

即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$. 所以 $\mathbf{N}(P_N) = \mathbf{L}(P_F)$.



从空栈方式到终态方式

定理 26

如果 $PDA P_N$ 以空栈方式接受语言 L , 则存在 $PDA P_F$ 以终态方式接受 L .

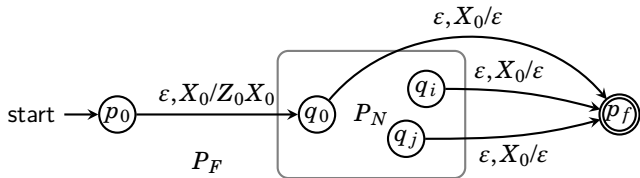
从空栈方式到终态方式

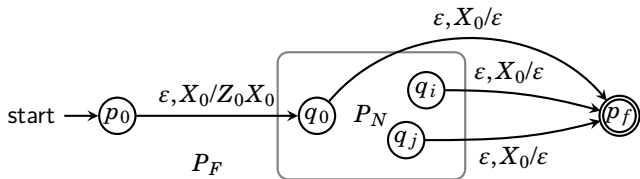
定理 26

如果 PDA P_N 以空栈方式接受语言 L , 则存在 PDA P_F 以终态方式接受 L .

证明: 设 $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0, \emptyset)$. 构造 PDA P_F ,

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$





其中 δ_F 定义如下:

- 1 P_F 开始时, 将 P_N 栈底符号压入栈, 并开始模拟 P_N ,

$$\delta_F(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\};$$

- 2 P_F 模拟 P_N , $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $\forall Y \in \Gamma$:

$$\delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y);$$

- 3 在 $\forall q \in Q$ 时, 看到 P_F 的栈底 X_0 , 则转移到新终态 p_f :

$$\delta_F(q, \epsilon, X_0) = \{(p_f, \epsilon)\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$w \in \mathbf{N}(P_N) \Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash_{P_N}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \vdash_{P_N}^* (q, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \vdash_{P_F}^* (q, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0 X_0) \vdash_{P_F}^* (q, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F}^* (q, \varepsilon, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F}^* (p_f, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F)$$

定理23

P_F 模拟 P_N

δ_F 构造, p_0 部分

δ_F 构造, p_f 部分

即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$.

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$\begin{aligned}
 w \in \mathbf{L}(P_F) &\Rightarrow (p_0, w, X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{P_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) \\
 &\Rightarrow (p_0, w, X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{P_F} (q, \varepsilon, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) \\
 &\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0 X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{P_F} (q, \varepsilon, X_0) \\
 &\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{P_F} (q, \varepsilon, X_0) \\
 &\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \stackrel{*}{\vdash}_{P_N} (q, \varepsilon, \varepsilon) \\
 &\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N)
 \end{aligned}$$

经 q 才可达 p_f
 P_F 第一个动作
 即上式
 P_N 与 X_0 无关

即 $\mathbf{N}(P_F) \subseteq \mathbf{L}(P_N)$. 所以 $\mathbf{L}(P_F) = \mathbf{N}(P_N)$.



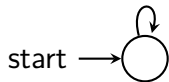
例 3. 接受 $L_{\text{eq}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ 中字符 } 0 \text{ 和 } 1 \text{ 的数量相同}\}$ 的 PDA.

例 3. 接受 $L_{\text{eq}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ 中字符 } 0 \text{ 和 } 1 \text{ 的数量相同}\}$ 的 PDA.

$0, Z_0/0Z_0$ $1, 0/10$ $0, 0/00$

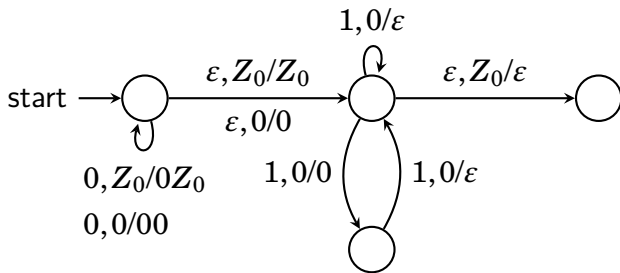
$1, Z_0/1Z_0$ $1, 1/11$ $0, 1/01$

$\varepsilon, Z_0/\varepsilon$ $1, 0/\varepsilon$ $0, 1/\varepsilon$



例 4. 接受 $L = \{ 0^n 1^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n \}$ 的 PDA.

例 4. 接受 $L = \{ 0^n 1^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n \}$ 的 PDA.



课堂练习. Design PDA for $L = \{ a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, j = i + k \}$.

下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
 - 由 CFG 到 PDA
 - 由 PDA 到 CFG
- 确定型下推自动机

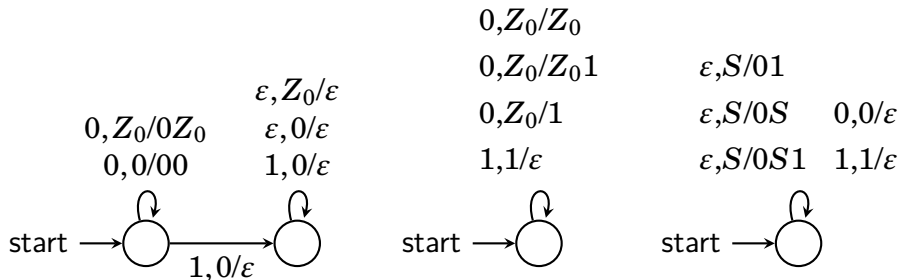


由 CFG 到 PDA

例 5. 设计语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n \}$ 的 PDA.

由 CFG 到 PDA

例 5. 设计语言 $L = \{0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n\}$ 的 PDA.



续例 5. 设计语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n \}$ 的 CFG.

CFG G :

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0A \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 0B1 \mid 01$$

字符串 00011 的最左派生:

$$S \xRightarrow{\text{lm}} AB \xRightarrow{\text{lm}} 0AB \xRightarrow{\text{lm}} 0B \xRightarrow{\text{lm}} 00B1 \xRightarrow{\text{lm}} 00011$$

续例 5. 语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n \}$.

用 PDA 栈顶符号的替换, 模拟文法的最左派生:

PDA		CFG	
PDA 的 ID 转移	PDA 的动作	产生式	最左派生
$(q_0, 00011, S)$			S
$\vdash (q_0, 00011, AB)$	$\varepsilon, S/AB$	$S \rightarrow AB$	$\Rightarrow_{lm} AB$
$\vdash (q_0, 00011, 0AB)$	$\varepsilon, A/0A$	$A \rightarrow 0A$	$\Rightarrow_{lm} 0AB$
$\vdash (q_0, 0011, AB)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 0011, B)$	$\varepsilon, A/\varepsilon$	$A \rightarrow \varepsilon$	$\Rightarrow_{lm} 0B$
$\vdash (q_0, 0011, 0B1)$	$\varepsilon, B/0B1$	$B \rightarrow 0B1$	$\Rightarrow_{lm} 00B1$
$\vdash (q_0, 011, B1)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 011, 011)$	$\varepsilon, B/01$	$B \rightarrow 01$	$\Rightarrow_{lm} 00011$
$\vdash (q_0, 11, 11)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 1, 1)$	$1, 1/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$	$1, 1/\varepsilon$		

续例 5. 语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n \}$.

$$S \rightarrow AB$$

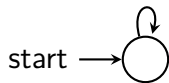
$$A \rightarrow 0A \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 0B1 \mid 01$$

$$\varepsilon, S/AB$$

$$\varepsilon, A/0A \quad \varepsilon, A/\varepsilon \quad 0, 0/\varepsilon$$

$$\varepsilon, B/0B1 \quad \varepsilon, B/01 \quad 1, 1/\varepsilon$$



定理 27

任何 CFL L , 一定存在 PDA P , 使 $L = \mathbf{N}(P)$.

构造与文法等价的 PDA

如果 CFG $G = (V, T, P', S)$, 构造 PDA

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset),$$

其中 δ 为:

① $\forall A \in V:$

$$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \in P'\},$$

② $\forall a \in T:$

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\},$$

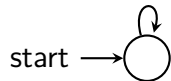
那么 $\mathbf{L}(G) = \mathbf{N}(P)$.

例 6. 为文法 $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS \mid bS \mid a$ 构造 PDA.

例 6. 为文法 $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS \mid bS \mid a$ 构造 PDA.

$\epsilon, S/aAA \quad \epsilon, A/aS \quad a, a/\epsilon$

$\epsilon, A/a \quad \epsilon, A/bS \quad b, b/\epsilon$



证明: 往证

$$S \xRightarrow{*} w \iff (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

[充分性] 往证

$$S \xRightarrow[\text{lm}]{*} w \implies (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

设 $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} w$ 中第 i 个左句型为 $x_i A_i \alpha_i$, 其中 $x_i \in \Sigma^*$, $A_i \in V$, $\alpha_i \in (V \cup T)^*$. 并将 S 看作第 0 个左句型 $x_0 A_0 \alpha_0 = S$, 那么

$$x_0 = \varepsilon, A_0 = S, \alpha_0 = \varepsilon.$$

将 w 看作为第 n 个左句型 $x_n A_n \alpha_n = w$, 那么

$$x_n = w, A_n = \varepsilon, \alpha_n = \varepsilon.$$

再对派生步骤 i 归纳, 往证

$$S \xRightarrow[\text{lm}]{i} x_i A_i \alpha_i \wedge w = x_i y_i \implies (q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i).$$

归纳基础: 最左派生在第 0 步时, 显然成立

$$(q, w, S) \vdash^* (q, y_0, A_0 \alpha_0) = (q, w, S).$$

归纳递推: 假设第 i 步时成立, 当第 $i+1$ 步时, 一定是 $A_i \rightarrow \beta$ 应用到 $x_i A_i \alpha_i$

$$S \xrightarrow[\text{lm}]{i} x_i A_i \alpha_i \xrightarrow{\text{lm}} x_i \beta \alpha_i = x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1}.$$

即最左变元 A_{i+1} 一定在 $\beta \alpha_i$ 中, 设 A_{i+1} 之前的终结符为 x' , 那么由

$$\begin{aligned} x_i \beta \alpha_i &= x_i x' A_{i+1} \alpha_{i+1} = x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1} \\ x_i y_i &= x_i x' y_{i+1} = x_{i+1} y_{i+1} = w \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \beta \alpha_i &= x' A_{i+1} \alpha_{i+1}, \\ y_i &= x' y_{i+1}. \end{aligned}$$

那么, 在 PDA 中从 $ID(q, y_i, A_i \alpha_i)$ 模拟最左派生, 用产生式 $A_i \rightarrow \beta$ 替换栈顶 A_i 后, 有

$$\begin{array}{ll}
 (q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i) & \text{归纳假设} \\
 \vdash (q, y_i, \beta \alpha_i) & A_i \rightarrow \beta \\
 = (q, x' y_{i+1}, x' A_{i+1} \alpha_{i+1}) & \\
 \vdash^* (q, y_{i+1}, A_{i+1} \alpha_{i+1}) & \text{弹出栈顶终结符}
 \end{array}$$

因此 $S \xrightarrow[n]{\text{lm}} w \implies (q, w, S) \vdash^* (q, y_n, A_n \alpha_n) = (q, \varepsilon, \varepsilon)$, 即充分性得证.

[必要性] 往证更一般的, 对任何变元 A , 都有:

$$(q, x, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \implies A \xrightarrow{*} x.$$

对 ID 转移 $(q, x, A) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ 的次数 i 归纳证明.

归纳基础: 当 $i = 1$ 步时, 只能是 $x = \varepsilon$ 且 $A \rightarrow \varepsilon$ 为产生式, 所以 $A \xRightarrow{*} \varepsilon$.

归纳递推: 假设 $i \leq n$ ($n \geq 1$) 步时上式成立. 当 $i = n + 1$ 时, 因为 A 是变元, 其第 1 步转移一定是应用某产生式 $A \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_m$

$$(q, x, A) \vdash (q, x, Y_1 Y_2 \cdots Y_m)$$

其中 Y_i 是变元或终结符. 而其余的 n 步转移

$$(q, x, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

中每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 将消耗掉的那部分 x 记为 x_i , 那么显然有

$$x = x_1 x_2 \cdots x_m.$$

而每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 都不超过 n 步, 所以由归纳假设,

$$(q, x_i, Y_i) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \implies Y_i \xRightarrow{*} x_i.$$

再由产生式 $A \rightarrow Y_1Y_2\cdots Y_m$, 有

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow Y_1Y_2\cdots Y_m \\ &\stackrel{*}{\Rightarrow} x_1Y_2\cdots Y_m \\ &\stackrel{*}{\Rightarrow} x_1x_2\cdots Y_m \\ &\stackrel{*}{\Rightarrow} x_1x_2\cdots x_m = x. \end{aligned}$$

因此当 $A = S$, $x = w$ 时,

$$(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \Longrightarrow S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$$

成立, 即必要性得证.

所以, 任何 CFL 都可由 PDA 识别.



构造与 GNF 格式文法等价的 PDA

如果 GNF 格式的 CFG $G = (V, T, P', S)$, 那么构造 PDA

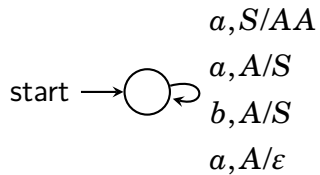
$$P = (\{q\}, T, V, \delta, q, S, \emptyset),$$

为每个产生式, 定义 δ 为:

$$\delta(q, a, A) = \{ (q, \beta) \mid A \rightarrow a\beta \in P' \}.$$

续例 6. 文法 $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS \mid bS \mid a$ 为 GNF 格式, 构造等价的 PDA.

续例 6. 文法 $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS \mid bS \mid a$ 为 GNF 格式, 构造等价的 PDA.



由 PDA 到 CFG

定理 28

如果 PDA P , 有 $L = \mathbf{N}(P)$, 那么 L 是上下文无关语言.

构造与 PDA 等价的 CFG

如果 PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, 那么构造 CFG $G = (V, \Sigma, P', S)$, 其中 V 和 P' 为

- ① $V = \{ [qXp] \mid p, q \in Q, X \in \Gamma \} \cup \{ S \};$
- ② 对 $\forall p \in Q$, 构造产生式 $S \rightarrow [q_0 Z_0 p];$
- ③ 对 $\forall (p, Y_1 Y_2 \cdots Y_n) \in \delta(q, a, X)$, 构造 $|Q|^n$ 个产生式

$$[qXr_n] \rightarrow a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{n-1}Y_nr_n]$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X, Y_i \in \Gamma$, 而 $r_i \in Q$ 是 n 次 $|Q|$ 种状态的组合;
若 $i = 0$, 为 $[qXp] \rightarrow a$.

证明: 只需证明

$$(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \iff [qXp] \xRightarrow{*} w.$$

并令 $X = Z_0$, $q = q_0$, 与开始符号 S 的产生式一起, 即可完成定理的证明.

[充分性] 对 PDA 中 $(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ 的转移次数 i 归纳证明.

归纳基础: 当 $i = 1$ 时, P 只能消耗不超过一个的字符, 即 $w = a$

$$(q, w, X) = (q, a, X) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon),$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ 且 $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, X)$, 则由文法的构造会有

$$[qXp] \rightarrow a,$$

因此 $[qXp] \xRightarrow{*} a = w$.

归纳递推: 假设当 $i \leq m$ ($m \geq 1$) 时命题成立. 当 $i = m + 1$ 时, 转移的第 1 步, 一定由某个 $(r_0, Y_1 Y_2 \cdots Y_n) \in \delta(q, a, X)$ 开始

$$(q, ax, X) \vdash (r_0, x, Y_1 Y_2 \cdots Y_n),$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, w = ax$. 而其余的 m 步为

$$(r_0, x, Y_1 Y_2 \cdots Y_n) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

而这些转移, 会从栈中依次弹出 Y_i 并消耗掉部分 x . 若分别记为 x_i , 则有

$$w = ax = ax_1 x_2 \cdots x_n.$$

若设弹出 Y_i 之前和之后的状态分别是 r_{i-1} 和 r_i , 这里 $i = 1, 2, \cdots, n$, 那么有

$$(r_{i-1}, x_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon),$$

且转移步数都不会超过 m . 那么, 由归纳假设有

$$(r_{i-1}, x_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon) \implies [r_{i-1} Y_i r_i] \xRightarrow{*} x_i.$$

而由动作 $(r_0, Y_1 Y_2 \cdots Y_n) \in \delta(q, a, X)$ 所构造的产生式会包含

$$[qXr_n] \rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{n-1}Y_nr_n].$$

而显然弹出 X 后的状态 p 与弹出 Y_n 后的状态 r_n 是同一个, 所以

$$[qXp] = [qXr_n] \Rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{n-1}Y_nr_n] \xRightarrow{*} ax_1x_2 \cdots x_n = w$$

因此充分性得证. 那么当 $X = Z_0, q = q_0$ 时有

$$(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \Longrightarrow [q_0Z_0p] \xRightarrow{*} w,$$

以及产生式 $S \rightarrow [q_0Z_0p]$ 有 $S \xRightarrow{*} w$, 即 PDA 接受的串可由文法派生得到.

[必要性]: 略.



例 7. 将 PDA $P = (\{p, q\}, (0, 1), \{X, Z\}, \delta, q, Z)$ 转为 CFG, 其中 δ 如下:

$$(1) \quad \delta(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$$

$$(2) \quad \delta(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$$

$$(3) \quad \delta(q, 0, X) = \{(p, X)\}$$

$$(4) \quad \delta(q, \varepsilon, Z) = \{(q, \varepsilon)\}$$

$$(5) \quad \delta(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$(6) \quad \delta(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$$

δ	产生式
(0)	$S \rightarrow [qZq]$ $S \rightarrow [qZp]$
(1)	$[qZq] \rightarrow 1[qXq][qZq]$ $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$ $[qZp] \rightarrow 1[qXq][qZp]$ $[qZp] \rightarrow 1[qXp][pZp]$
(2)	$[qXq] \rightarrow 1[qXq][qXq]$ $[qXq] \rightarrow 1[qXp][pXq]$ $[qXp] \rightarrow 1[qXq][qXp]$ $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$
(3)	$[qXq] \rightarrow 0[pXq]$ $[qXp] \rightarrow 0[pXp]$
(4)	$[qZq] \rightarrow \varepsilon$
(5)	$[pXp] \rightarrow 1$
(6)	$[pZp] \rightarrow 0[qZp]$ $[pZq] \rightarrow 0[qZq]$

消除无用符号	重命名 (可选)
$S \rightarrow [qZq]$	$S \rightarrow A$
$[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$	$A \rightarrow 1BC$
$[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$	$B \rightarrow 1BD$
$[qXp] \rightarrow 0[pXp]$	$B \rightarrow 0D$
$[qZq] \rightarrow \varepsilon$	$A \rightarrow \varepsilon$
$[pXp] \rightarrow 1$	$D \rightarrow 1$
$[pZq] \rightarrow 0[qZq]$	$C \rightarrow 0A$

下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机
 - 正则语言与 DPDA
 - DPDA 与无歧义文法



确定型下推自动机

定义

如果 $PDA\ P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ 满足

- ① $\forall a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, \delta(q, a, X)$ 至多有一个动作;
- ② $\exists a \in \Sigma$, 如果 $\delta(q, a, X) \neq \emptyset$, 那么 $\delta(q, \epsilon, X) = \emptyset$.

则称 P 为**确定型下推自动机**($DPDA$).

定义

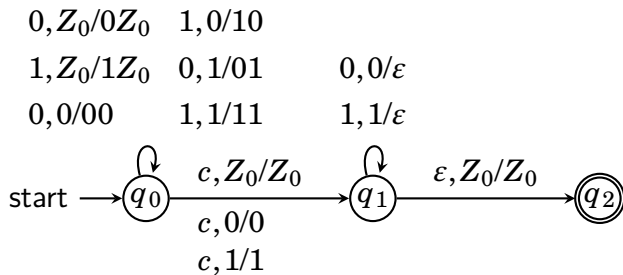
$DPDA\ P$ 以终态方式接受的语言 $L(P)$ 称为**确定的上下文无关语言**($DCFL$).

- $DPDA$ 中 $\forall (q, a, Z) \in Q \times \Sigma \times \Gamma$ 满足 $|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$

DPDA 与 PDA 不等价

例 8. 任何 DPDA 都无法接受 L_{ww^R} , 但是可以接受

$$L_{wcw^R} = \{wcw^R \mid w \in (0+1)^*\}.$$



正则语言与 DPDA

定理 29

如果 L 是正则语言, 那么存在 DPDA P 以终态方式接受 L , 即 $L = \mathbf{L}(P)$.

证明: 显然, 因为 DPDA P 可以不用栈而模拟任何 DFA. □

- L_{wcwr} 显然是 CFL, 所以 DCFL 语言类真包含正则语言
- DPDA 无法识别 L_{wwr} , 所以 DCFL 语言类真包含于 CFL

定义

如果语言 L 中不存在两个不同的字符串 x 和 y , 使 x 是 y 的前缀, 称语言 L 满足前缀性质.

定理 30

如果有 $DPDA P$ 且 $L = N(P)$, 当且仅当 L 有前缀性质且存在 $DPDA P'$ 使 $L = L(P')$.

证明: $[\Rightarrow]$ $\forall x \in N(P)$ 会弹空 P 的栈, 所以不会接受以 x 为前缀的其他串; 而转换为终态方式不改变确定性. $[\Leftarrow]$ 到达终态则弹空栈, 即可. \square

- $DPDA P$ 的 $N(P)$ 更有限, 即使正则语言 0^* 也无法接受

DPDA 与无歧义文法

定理 31

DPDA P , 语言 $L = N(P)$, 那么 L 有无歧义的 CFG.

证明: 利用定理 28 由 P 构造的文法 G 一定无歧义, 因为:

- ① P 是确定的, 那么它接受 w 的 ID 序列也是确定的;
- ② 而由 $\delta(q, a, X) = \{(p, Y_1 \cdots Y_n)\}$ 继续弹出 Y_i 后的状态 r_i 也是确定的;
- ③ 那么由每个动作构造的一组产生式

$$[qXr_n] \rightarrow a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{n-1}Y_nr_n]$$

中, 仅会有一个有效的;

- ④ 那么, G 中最左派生 $S \xRightarrow{*}_{\text{lm}} w$ 就是唯一的, 所以是无歧义的.



定理 32

DPDA P , 语言 $L = \mathbf{L}(P)$, 那么 L 有无歧义的 CFG.

证明:

- ① 设符号 $\$$ 不在 L 中出现, 令 $L' = \{w\$ \mid w \in L\}$, 则 L' 具有前缀性质;
- ② 可修改 P 接受 L' , 则由定理 30, 存在 DPDA P' 使 $\mathbf{N}(P') = L'$;
- ③ 由定理 31, 存在无歧义文法 G' 使 $\mathbf{L}(G') = L'$;
- ④ 将 $\$$ 看作变元, 增加产生式 $\$ \rightarrow \varepsilon$, 修改 G' 为文法 G ;
- ⑤ 则文法 G 和 G' 一样无歧义, 且 $\mathbf{L}(G) = L$.



DCFL/DPDA 的重要应用

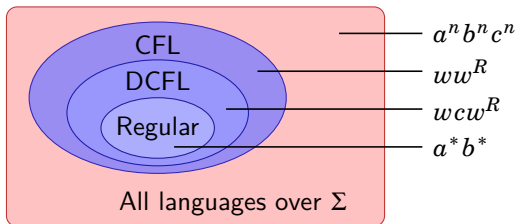
- 程序设计语言的语法分析器

如 $LR(k)$ 文法, Yacc 的基础, 解析的时间复杂度为 $O(n)$ 的算法

- 非固有歧义语言的真子集

如 L_{wwr} 有无歧义文法 $S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$

语言类之间的关系





哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

xding@ir.hit.edu.cn

<http://ir.hit.edu.cn/~xding/>

