Bacanje atomske bombe (Hirošima)

Branko Grbić Daniil Grbić Igor Kandić

27. maj 2024.

1. Opis problema

Atomska bomba na Hirošimu je bačena iz bombardera B-29 koji nije bio mnogo okretan. Zbog toga pretpostavimo da se kretao na istoj visini od $9600m$ sve vreme leta. Leteo je maksimalnom brzinom od $530\frac{km}{h}$. U trenutku $t = 0$ izbacio je bombu koja je posle nekog vremena eksplodirala na tlu proizvodeći udarni talas brzine $350\frac{m}{s}$. Da bi se našao što dalje od cilja u trenutku kada ga sustigne udarni talas, avion može da skreće u horizontalnoj ravni maksimalnom krivinom radijusa $4700m$. Izračunati koliko daleko je bombarder bio u trenutku kada ga je stigao udarni talas i koliko vremena je do tada proteklo, ako se kretao optimalnom putanjom koja maksimizuje tu daljinu.

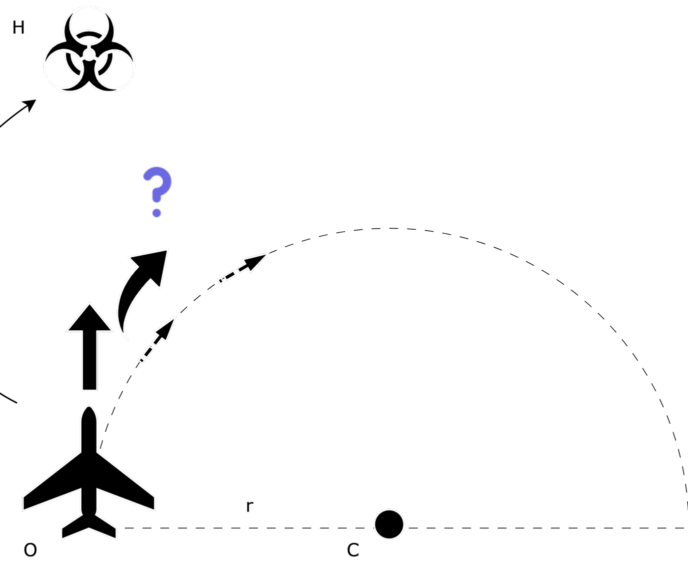
2. Analiza problema

Iz opisa problema, jasno se zaključuje da u simulaciji kontrola postoji jedino nad avionom, odnosno nad njegovim pravcem i smerom kretanja. S obzirom na ograničenje radijusa kretanja aviona $r \in [4700, \infty)$, zaključeno je da se mora otkriti optimalan radijus koji daje avionu najveću distancu od bombe (kada $r = +\infty$ avion se krece pravolinijski). Optimalan radijus zavisi i od vremena koje je prošlo od inicijalnog stanja, pa se mora uzeti u obzir i promena pravca posle nekog vremena.

U toku simulacije, bomba pada i eksplodira svojom brzinom, sustižući avion u kojem god pravcu da se kretao ($v_{bomba} \geqslant v_{avion}$). Sa ovim podatkom, sigurno je da će se simulacija završiti - mora se utvrditi u kom će se trenutku to desiti.

2.1. Ideja

Neka je početno rastojanje između aviona i Hirošime neko d. Kako se na početku simulacije avion kreće prema Hirošimi (a samim tim i prema nultoj tački - nazovimo je H), rastojanje do grada se inicijalno smanjuje. Ukoliko je moguće, bilo bi poželjno da se avion udalji od tačke H na rastojanje veće od d, što bi značilo da će u nekom trenutku morati da preleti iznad kružnice sa centrom u H poluprečnika d.



Slika 2.1: Modeliranje kretanja aviona iz tačke O, tako da je distanca od tačke H što veća

Ideja je svesti problem na pronalaženje tačke na ovoj kružnici iznad koje prolazi tražena optimalna putanja aviona. Intuitivno, to bi mogla biti tačka do koje bombarder najbrže stiže. Ipak, treba obratiti pažnju na pravac i smer kretanja - najbolje bi bilo da u tom trenutku avion leti direktno od centra eksplozije.

2.2. Dubinsove putanje [Wik24]

Dubins putanja u ravni je najkraća glatka kriva koja spaja dve tačke u toj ravni uz dato ograničenje radijusa skretanja i zadate vektore tangenti u tim tačkama. Lester Dubins je dokazao da se takva kriva sastoji od odsečaka maksimalne dozvoljene zakrivljenosti i pravih segmenata.

Pošto se kretanje aviona odvija pod istim ograničenjima, Dubinsove putanje će biti od velikog značaja u daljem tekstu.

3. Matematički model

3.1. Pretpostavke

Avion koji se nalazi na visini h_{avion}, pušta bombu koja će inicijalno imati brzinu aviona v_{avion}. S obzirom na date podatke, uveden je red pretpostavki u cilju pojednostavljenja problema modeliranja:

- Eksperiment se odvija u 3D prostoru
- Avion i bomba su tačke u prostoru pozitivne mase

- Tlo je ravan (dvodimenzionalna površ)
- Udarni talas se širi sferno konstantnom brzinom u svim pravcima iznad tla
- Avion se kreće konstantnom brzinom u ravni $z = 9600m$
- Bez umanjenja opštosti, avion skreće udesno
- Otpor vazduha ne postoji
- Kretanje bombe koristi model kosog hica

3.2. Koordinatni sistem

Koordinatni sistem je postavljen tako da mu je početak projekcija položaja aviona na tlo na početku eksperimenta. X i Y ose leže u ravni tla. Pravac i smer Y ose su od koordinatnog početka ka Hirošimi. X osa je normalna na Y osu, sa smerom prema desno u odnosu na smer kretanje aviona. Z osa je usmerena naviše i normalna je na tlo.

U ovom koordinatnom sistemu izdvojene su sledeće tačke:

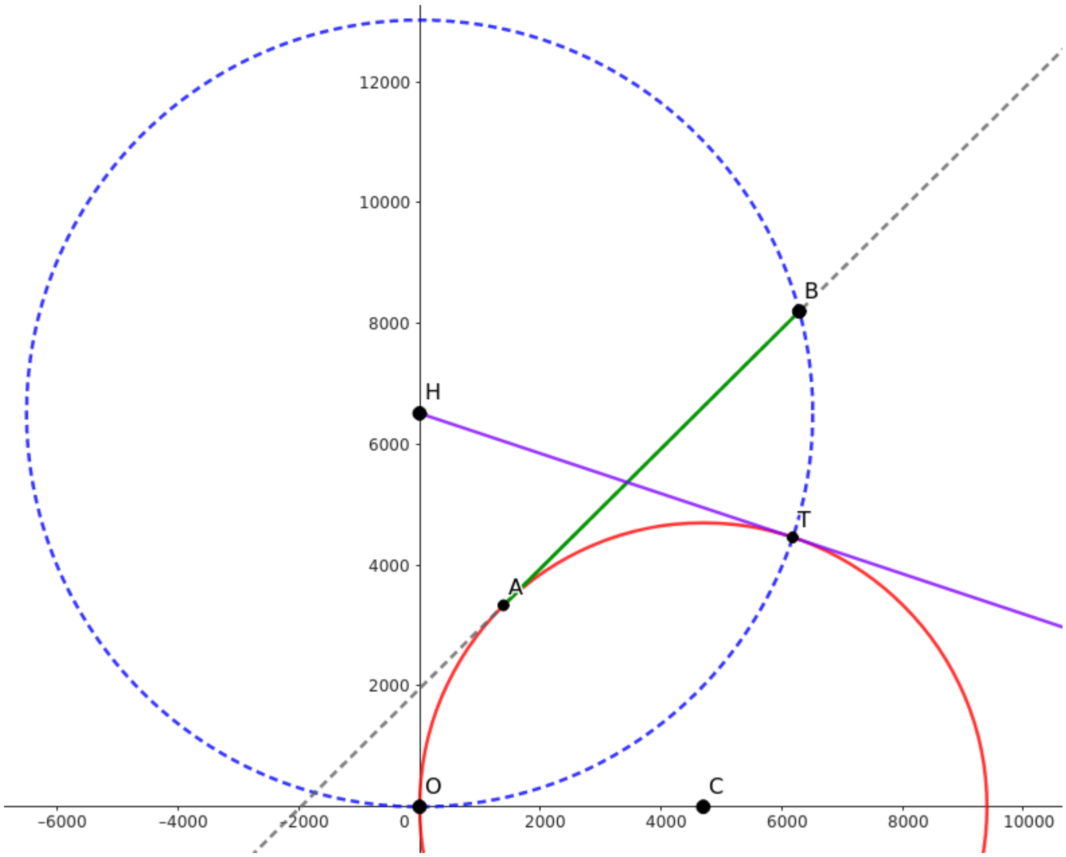
- $P(0, 0, h_{avion})$ - početna pozicija aviona, gde je h_{avion} poznato
- O - koordinatni početak i projekcija tačke P na XY ravan (tlo)
- $H(0, d, 0)$ - Hirošima i nulta tačka eksplozije, gde se d može odrediti računski
- $C(4700, 0, 0)$ - centar kružnice K_C minimalnog radijusa skretanja aviona $4700m$
- T - presek K_C i kružnice K_H sa centrom u H poluprečnika d

3.3. Kretanje aviona do kružnice

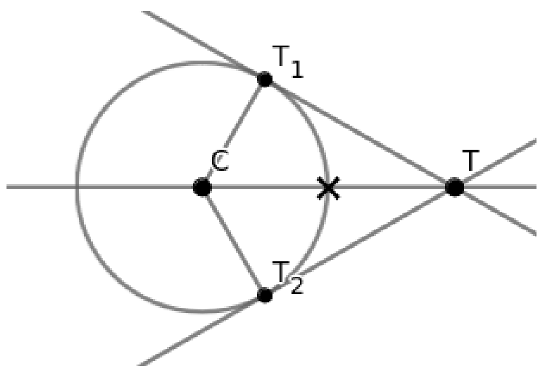
U nastavku ovog dela za sve tačke će se zapravo posmatrati njihove istoimene projekcije na proizvoljnu ravan paralelnu ravni XY. Ovo sme da se uradi jer se avion kreće u jednoj takvoj ravni, i putanja aviona u toj ravni do kružnice će odgovarati vertikalnoj translaciji njegove prave putanje u prostoru. Ovo se radi zarad olakšanja pisanja na račun izbacivanja z koordinate svih objekata.

Kao što je navedeno u analizi, bombarder će pokušati da izađe izvan granica kružnice K_H u nekoj tački. Neka je to tačka B i neka je A tačka dodira tangente iz B na kružnicu K_C (od dve moguće takve tačke se uzima ona unutar kruga K_H). Takva tačka A postoji zbog pretpostavke da će se avion kretati udesno, pa je x koordinata tačke B pozitivna (3.1).

Kriva koja se sastoji od kraćeg luka OA i duži AB je Dubinsova putanja [2.2] i najkraći je put od O do B. Postavlja se pitanje: kako optimalno izabrati tačku B?



Slika 3.1: Izdvojene tačke i moguća Dubins putanja bombardera O-A-B



Slika 3.2: Ilustracija ze lemu 3.1

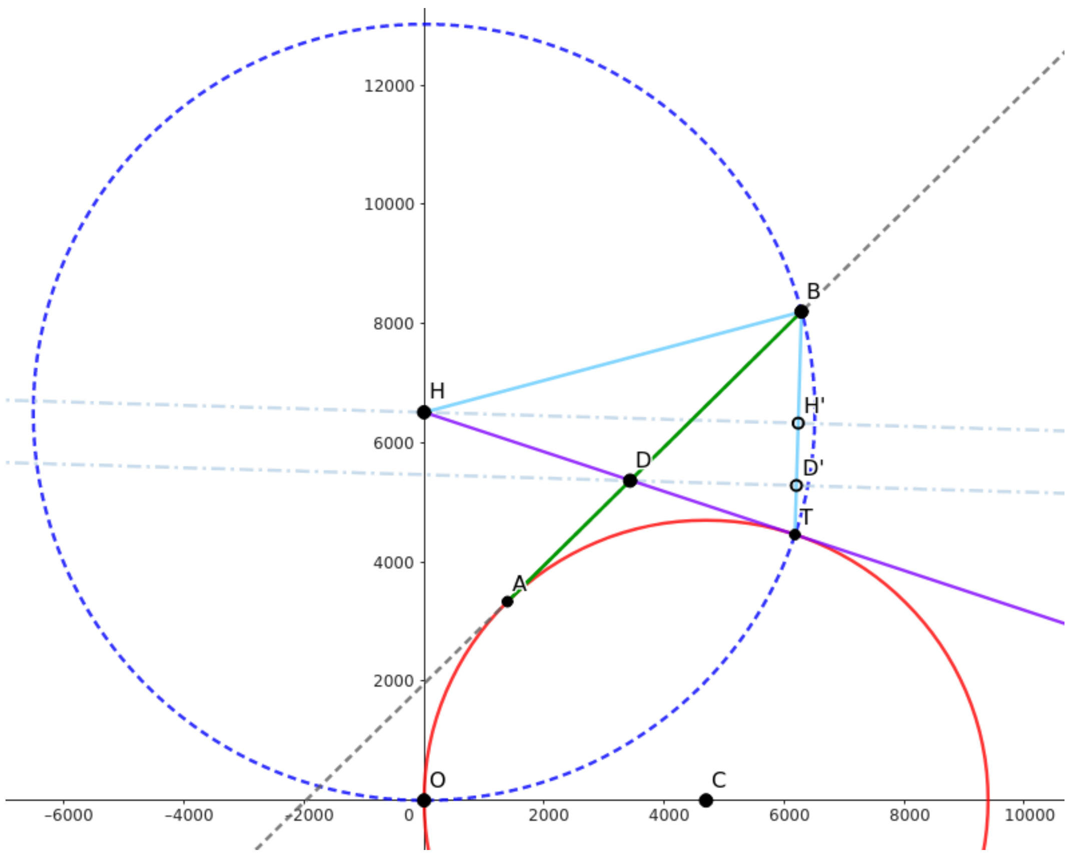
Lemma 3.1. *Neka je data kružnica K_C sa centrom C i tačka T izvan kružnice. Neka su T_1 i T_2 tangentne tačke ni kružnici iz tačke T. Zbir dužina $\overline{T_1T}$ i $\overline{T_2T}$ je veći od dužine kraćeg luka $\widehat{T_1T_2}$.*

Proof: Neka je poluprečnik kružnice K_C dužine $r = \overline{T_1C} = \overline{T_2C}$ i neka je $\phi = \angle T_1CT = \angle T_2CT$. Tada je $\overline{T_1T} = \overline{T_2T} = r\tan\phi$, odnosno $\overline{T_1T} + \overline{T_2T} = 2r\tan\phi$.

Dužina luka T_1T_2 se računa kao udeo obima kružnice $\overset{\frown}{T_1T_2} = \frac{2\phi}{2\pi}2\pi r = 2\phi r$.
Za proizvoljan ugao $\phi \in [0, \pi/2)$ važi nejednakost $\tan\phi \geqslant \phi$, pa se može dobiti

$$\tan\phi \geqslant \phi \implies 2r\tan\phi \geqslant 2\phi r \implies \overline{T_1T} + \overline{T_2T} \geqslant \overset{\frown}{T_1T_2} \qquad \blacksquare$$

Theorem 3.2. *Za svako B izabrano prema gore navedenom opisu važi da je dužina duži $\overline{AB}$ veća od dužine kratkog luka $\overset{\frown}{AT}$ kružnice K_C.*



Slika 3.3: Ilustracija za teoreme 3.2 i 3.3

Proof: Neka je tačka D presek duži HT i AB. Neka su tačke D' i H' redom projekcije tačaka D i H na duž BT.

Kako tačka H' deli duž BT na pola, a D' pripada $H'T$, zaključuje se da važi $\overline{TD'} \leqslant \overline{D'B}$. Trouglovi $\triangle DTD'$ i $\triangle DBD'$ su pravougli i iz Pitagorine teoreme dobija se da važi odnos $\overline{TD} \leqslant \overline{DB}$.

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} \geqslant \overline{AD} + \overline{DT} \overset{3.1}{\geqslant} \overset{\frown}{AT} \qquad \blacksquare$$

Ovim je dokazano da je T optimalna tačka kružnice K_H u smislu da će avion do nje stići ranije nego do bilo koje druge tačke te kružnice (ne uzimajući u obzir početni položaj). Potrebno je odgovoriti na pitanje da li je neka druga tačka kružnice sveukupno bolja zbog ugla pod kojim bombarder stiže do nje.

Theorem 3.3. *Prava HT je tangenta kružnice K_C u tački T.*

Proof: Važi $\overline{HO} = \overline{HT}$ i $\overline{CO} = \overline{CT}$, pa su $\triangle HOC$ i $\triangle HTC$ podudarni (dele treću stranicu HC). Iz toga sledi da $\angle HTC = \angle HOC$, a pošto je $\angle HOC$ prav onda je i $\angle HTC$ prav. To znači da je HT zaista tangenta kružnice K_C u T. ∎

Iz ovoga sledi da u trenutku kada stigne do T bombarder je okrenut suprotno od Hirošime, što znači da će se od tog trenutka od nulte tačke udaljavati najvećom mogućom brzinom, što povlači i činjenicu da će što duže izbeći udarni talas. Ostaje proveriti da li bombarder uopšte može da stigne do T pre talasa.

U ovom trenutku će biti pretpostavljeno da je to moguće i pod tom pretpostavkom pronađena je optimalna putanja bombardera unutar kružnice K_H. Ova pretpostavka će kasnije biti proverena pokretanjem simulacije u MATLAB-u.

Zarad pisanja simulacije potrebno je definisati funkcije položaja aviona u kružnici

$$x_a(t) = r - r\cos\frac{tv}{r} \tag{3.1}$$

$$y_a(t) = r\sin\frac{tv}{r} \tag{3.2}$$

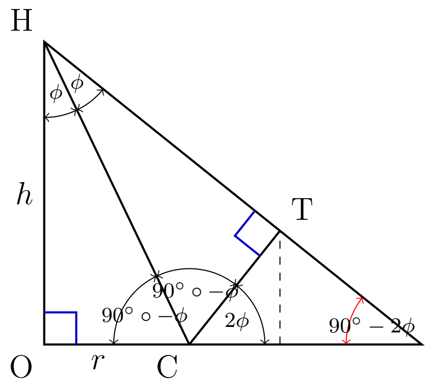
3.4. Kretanje aviona izvan kružnice

Nakon kretanja po kružnici avion dolazi u tačku $T(x_t, y_t)$ u trenutku t_{tang} i okrenut je od Hirošime [3.3]. Sada mu preostaje samo da se kreće pravo da bi napravio sto veće rastojanje u trenutku kada ga stigne eksplozija. Funkcija položaja koja opisuje to kretanje je oblika $x_a(t) = x_0 + v_x t$. U slučaju ovog problema $x_0 = x_t$. Takođe treba da je $x_a(t_{tang}) = x_t$ jer avion ne može da se teleportuje. Sa trougla 3.4 se vidi da je $v_x = v\cos(\pi/2 - 2\phi)$ što znači da je $x_a(t) = x_t + v\cos(\pi/2 - 2\phi)t$. Ovo nije tražena funkcija jer ne važi $x_a(t_{tang}) = x_t$, ali može se posmatrati funkcija $x_{a'} = x_a \circ \tau$ gde τ predstavlja vremenski pomeraj. Za $\tau(t) = t - t_{tang}$ se dobija $x_{a'}(t) = x_t + v_x(t - t_{tang})$ što ispunjava sve preduslove. Analogno se radi i za y komponentu i dobijaju se jednačine

$$x_a(t) = x_t + v\cos(\pi/2 - 2\phi)(t - t_{tang}) \tag{3.3}$$

$$y_a(t) = y_t - v\sin(\pi/2 - 2\phi)(t - t_{tang}) \tag{3.4}$$

Jednačine (3.3) i (3.4) se mogu iskombinovati sa (3.1) i (3.2) čime se dobija kompletna funkcija položaja aviona kroz vreme (3.5), (3.6).



Slika 3.4: Trougao

$$x_a(t) = \begin{cases} r - r\cos\frac{vt}{r} & \text{kada } t < t_{tang} \\ x_t + v\cos(\pi/2 - 2\phi)(t - t_{tang}) & \text{kada } t \geq t_{tang} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$y_a(t) = \begin{cases} r\sin\frac{vt}{r} & \text{kada } t < t_{tang} \\ y_t - v\sin(\pi/2 - 2\phi)(t - t_{tang}) & \text{kada } t \geq t_{tang} \end{cases} \tag{3.6}$$

Ovaj rezultat ima smisla samo ako su funkcije (3.5) i (3.6) neprekidne i glatke. Pošto su i (3.1) i (3.3) obe neprekidne u t_{tang} i obe iznose x_t, očigledno je da je onda (3.5) neprekidna u t_{tang}.

Za glatkost je dovoljno proveriti da su prvi izvodi (3.1) (nadalje označena x_1) i (3.3) (x_2) jednaki u t_{tang} posto su obe funkcije neprekidne u toj tački.

$$x_1'(t_{tang}) = x_2'(t_{tang}) \tag{3.7}$$

$$x_1'(t) = v\sin(\frac{vt}{r}) \tag{3.8}$$

$$x_2'(t) = v\sin(2\phi) \tag{3.9}$$

tj.

$$\sin(\frac{vt_{tang}}{r}) = \sin(2\phi) \tag{3.10}$$

Iz $t_{tang} = \frac{\frac{\pi-2\phi}{2\pi}2\pi r}{v} = \frac{r(\pi-2\phi)}{v}$ se dobija $\frac{t_{tang}v}{r} = \pi - 2\phi$.
Zamenom u (3.10) se dobija $\sin(\pi - 2\phi) = \sin(2\phi)$ tako da jesu jednaki prvi izvodi u t_{tang}.
Analogno se radi za y koordinatu.

3.5. Širenje udarnog talasa

Kao što je pre rečeno, kretanje bombe se može svesti na kosi hitac i iz toga možemo da dobijemo red bitnih infomacija, kao što su vreme od početka ekperimenta do detonacije $t_{detonacije}$ i rastojanje od koordinatnog početka do Hirošime $y_{detonacije}$.a

$$h_{avion} = \frac{gt^2_{detonacija}}{2} \tag{3.11}$$

$$t_{detonacija} = \sqrt{\frac{2h_{avion}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9600m}{9.81\frac{m}{s^2}}} \approx 44.24010s \tag{3.12}$$

$$y_{detonacija} = v_{avion} \cdot t_{detonacija} = 530\frac{km}{h} \cdot 44.24010s \approx 6513.12599m \tag{3.13}$$

Udarni talas je polusfernog oblika i širi se konstantnom brzinom v_{talas} u svim pravcima iznad tla ($z > 0$) od momenta detonacije. Formula za radijus udarnog talasa u zavisnosti od vremena je

$$r_{talas}(t) = \begin{cases} 0 & \text{kada } t < t_{detonacija} \\ v_{talas}(t - t_{detonacija}) & \text{kada } t \geq t_{detonacija} \end{cases} \tag{3.14}$$

4. Simulacija

4.1. Kod

Naredni kod prikazuje srž simulacije napisan u MATLAB-u. Funkcija *constants*() sadrži predodređene vrednosti dobijene iz postavke zadatka, ali i konstantu gravitacionog ubrzanja postavljenu na $G = 9.81\frac{m}{s^2}$ i pomeraj vremena $dt = 0.1s$. Funkcija *bomb_position*() računa koliko je vremena prošlo od početka simulacije do detonacije i njeno stanje u tom trenutku.

```
function [plane_xs, plane_ys, ts, xs, ys, rs] = simulation()
    [JET_H, JET_VEL, G, EXPLOSION_VEL, MIN_RADIUS, dt] =
       constants();
    [drop_time, detonation_y] = bomb_position();

    v = JET_VEL;
    h = JET_H;
    r = MIN_RADIUS;

    ts = 0:dt:300;
    [xs, ys] = bomb_location(ts);

    phi = atan(r / detonation_y);
    tangent_x = r + r * cos(2 * phi);
    tangent_y = r * sin(2 * phi);
```

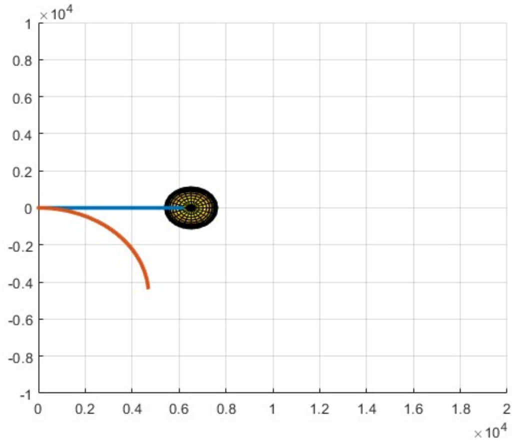
```
    time_to_tangent = r * (pi - 2 * phi) / v;
    fprintf('  Time to tangent: %.4f\n', time_to_tangent);

    plane_xs = r - r * cos(v * ts / r);
    plane_ys = r * sin(v * ts / r);

    plane_xs(ts >= time_to_tangent) = tangent_x + sin(pi - 2 * phi) * v * (ts(ts > time_to_tangent) - time_to_tangent);
    plane_ys(ts >= time_to_tangent) = tangent_y + cos(pi - 2 * phi) * v * (ts(ts > time_to_tangent) - time_to_tangent);

    rs = shockwave_radius(ts - drop_time);

    time_of_impact = 0;
    for i = 1:length(ts)
        if rs(i) > sqrt( (detonation_y - plane_ys(i))^2 + (0 + plane_xs(i))^2 + h^2)
            time_of_impact = ts(i);
            break
        end
    end

    fprintf('  Time of impact: %.4f\n', time_of_impact);
end
```

4.2. Rezultati simulacije

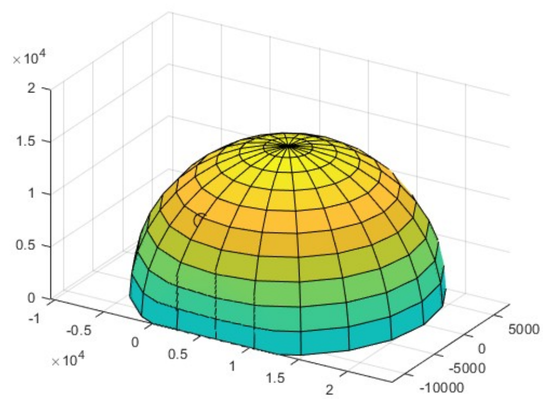
Data simulacija nam služi kako za vizuelizaciju, tako i za potvrdu da su izvedene formule valjane. Na kraju rada, kod daje sledeći ispis:

- **Vreme dolaska do tangente T:** 60.3825
- **Vreme sudara aviona sa bombom:** 83.8000
- **Finalna pozicija aviona:** $(9453.11, 3373.98, 9600.00)$

Ovaj rezultat pruža još jednu potvrdu tačnosti formula, jer bomba sustiže avion tek nakon dolaska do tangentne tačke T.



Slika 4.1: Početak detonacije - avion (narandžasta) beži od bombe (plava) koja se detonira



Slika 4.2: Bomba sustiže avion

Literatura

[Wik24] Wikipedia contributors. *Dubins path — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 27-May-2024]. 2024.

Изјава о ауторству

Потписани (име, презиме, број индекса)

Даниил Грбић 42/2020

Игор Кандић 70/2020

Бранко Грбић 2/2020

Изјављујемо

да је семинарски рад из предмета *Основе математичког моделирања* под насловом

Бацање Атомске Бомбе (Хирошима)

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложен рад у целини ни у деловима није био предложен за добијање било које оцене/испуњење испитне обавезе, према студијским програмима других (високо)школских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потписи студената

У Београду, 27.05.2024.

Игор Кандић