

# Алгоритмы в математике (*теория чисел*)

Михайлов Максим

13 сентября 2021 г.

## Оглавление

Лекция 1	4 сентября	2
1	Вводная лекция . . . . .	2
Лекция 2	11 сентября	3
2	Алгебраические структуры . . . . .	4
2.1	Структуры с одним законом композиции . . . . .	4
2.2	Структуры с двумя законами композиции . . . . .	5
2.3	Основные алгебраические структуры . . . . .	5

# Лекция 1

## 4 сентября

### 1 Вводная лекция

Хотя этот курс формально называется “теория чисел”, мы не будем рассматривать только теорию чисел. Теория чисел, разумеется, про числа, делители, простоту, алгоритм Евклида и т.д.. Однако, её можно обобщить на произвольные полугруппы, группы, кольца и поля. Поэтому мы будем рассматривать теорию чисел через призму общей алгебры.

Например, в кольце целых чисел есть понятие “простое число”. А в каких ещё кольцах есть “простые” элементы и каким условиям эти кольца удовлетворяют? Оказывается, кольцо многочленов содержит простые элементы и поэтому там применим алгоритм Евклида.

Мы также затронем теорию категорий (*терминальные объекты*), алгебраическую геометрию (*криптографию на эллиптических кривых*).

# Лекция 2

## 11 сентября

План курса:

- Полугруппа
- Группа
  - Гомоморфизм
  - Фактор-группа
  - Теорема о ядре
  - Произведение групп
- Кольцо
  - $\mathbb{Z}$
  - Остатки
  - Китайская теорема об остатках
  - Алгоритм Евклида
  - Кольцо многочленов
  - Алгебра многочленов
- Поле
  - Поля Галуа
  - Расширения Галуа
  - Алгебраические кривые
  - Диофантовы уравнения

Начиная с групп мы будем использовать формализм теории категорий.

## 2 Алгебраические структуры

### 2.1 Структуры с одним законом композиции

Пусть  $M$  — множество с законом композиции  $T : \forall x, y \in M \exists xTy \in M$ .

*Примечание.* Такой закон называется **внутренним**, т.к. оба его аргумента  $\in M$ .

*Обозначение.*  $x \cdot y, x \circ y, x + y, x^y, x * y$

Закон задает структуру на множестве.

**Определение.**  $e_L \in M : \forall x \in M e_L \cdot x = x$  — **левый нейтральный элемент**

$e_R \in M : \forall x \in M x \cdot e_R = x$  — **правый нейтральный элемент**

**Лемма 1.**  $\exists e_L, e_R \in M \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\text{def}}{=} e$

*Доказательство.*  $e_L = e_L \cdot e_R = e_R$  □

**Лемма 2.**  $e, e' — нейтральные элементы \Rightarrow e = e'$ .

*Доказательство.*  $e = e \cdot e' = e'$  □

**Определение.**  $p \in M : p \cdot p = p$  — **идемпотент**

**Определение.**  $z \in M : z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$  — **регулярный элемент (левый)**

**Определение.**  $x \in M, \exists e \in M$ . Элемент  $z \in M : z \cdot x = e$  — **левый обратный элемент к  $x$** .

$y \in M : x \cdot y = e$  — **правый обратный элемент к  $x$** .

**Лемма 3.** Если  $\exists y, z$ , то  $y = z \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1}$  — **обратный элемент**.

*Доказательство.*  $z = z \cdot e = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = e \cdot y = y$ . Здесь мы воспользовались **ассоциативностью** закона композиции. □

**Определение.**  $\Theta_L : \forall x \in M \Theta_L \cdot x = \Theta_L$  — **поглощающий (слева) элемент**

$\Theta_R : \forall x \in M x \cdot \Theta_R = \Theta_R$  — **поглощающий (справа) элемент**

**Лемма 4.**  $\exists \Theta_L, \Theta_R \Rightarrow \Theta_L = \Theta_R \stackrel{\text{def}}{=} \Theta$

*Доказательство.*  $\Theta_L = \Theta_L \cdot \Theta_R = \Theta_R$  □

$\triangleleft x, y, z \in M, x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$  или  $x \cdot (y \cdot z)$ . Какое выбрать? Без ассоциативности непонятно. Поэтому мы требуем ассоциативность в рамках этого курса.

То же самое можно сказать для семейства элементов.

**Теорема 1** (об ассоциативном законе).  $1 \leq k \leq n \Rightarrow T_{i=1}^n x_i = (T_{i=1}^k x_i) T (T_{i=k+1}^n x_i)$

**Определение.**  $\triangleleft \forall x, y \in M \ xTy = yTx$ . Тогда  $T$  называется **коммутативным**.

**Определение.**  $\exists x, y \in M : xTy = yTx$ . Тогда  $x, y$  называются **перестановочными** относительно закона.

**Теорема 2** (об ассоциативном, коммутативном законе). Аргументы ассоциативного, коммутативного закона можно переставлять как угодно.

## 2.2 Структуры с двумя законами композиции

Пусть  $M$  — множество с законами композиции  $*$ ,  $\circ$ . Нас интересует случай, когда эти два закона взаимосвязаны.

Как воспринимать  $x * y \circ z$ ? Может иметь место **дистрибутивность**  $*$  относительно  $\circ$  (слева):  $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$\triangleleft e$  — нейтральный элемент по  $\circ$ .  $\triangleleft x * y = x * (e \circ y) = (x * e) \circ (x * y) \Rightarrow x * e = e$ . Поэтому из поля нельзя убрать ноль.

## 2.3 Основные алгебраические структуры

- **Полугруппа** — множество с ассоциативным законом
- **Моноид** — полугруппа с единицей
- **Группа** — моноид с обратным элементом для любого
- **Абелева группа** — группа с коммутативным законом
- **Кольцо** — два закона, по первому — абелева группа, по второму — полугруппа
- **Поле** — по двум законам группа