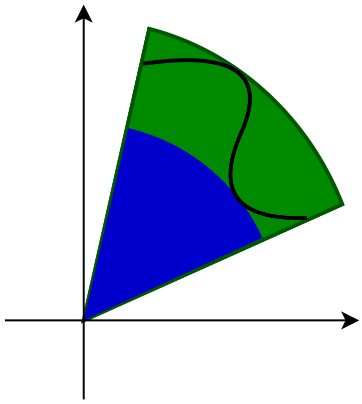
$\Phi([\alpha,\beta]) := S_{\text{сектор}(\alpha,\beta)} \quad g(\varphi) := r^2(\varphi)/2$

$\forall \Delta \in Segm \ \ |\Delta| \inf_\Delta g \le \Phi(\Delta) \le |\Delta| \sup_\Delta g$ очевидно выполняется, т.к. $|\Delta| \inf_\Delta g$ — площадь синего сектора, а $|\Delta| \sup_\Delta g$ — площадь зеленого:

По теореме о вычислении аддитивной функции отрезка по плотности:



$$\Phi([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Пример. $\triangleleft x(t), y(t)$ — кривая в $\mathbb{R}^2$

$$S := \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} r^2(\varphi(t))d\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} r^2(t)\varphi'(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}^2 \left(\operatorname{arctg}\frac{y(t)}{x(t)}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(x^2(t)+y^2(t)\right) \frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(x^2(t)+y^2(t)\right) \frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(x^2(t)+y^2(t)\right) \frac{x^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(y'(t)x(t)-y(t)x'(t)\right) dt$$

$x := \sin t, y := \cos t$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 t - \cos^2 t dt = -\frac{\pi}{4} \text{ — проблема, отрицательная площадь}$$

1 Выпуклость функций

$\forall z \in [x,y] \ \ \exists \alpha \in [0,1] : z = \alpha x + (1-\alpha)y$

α — доля отрезка zy от xy, т.е. $\alpha = \frac{|zy|}{|xy|}$

Определение. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \le \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Примечание. f — выпуклая $\Leftrightarrow$ всякая хорда графика f расположена "выше" графика *(нестрого выше)* $\Leftrightarrow$ НГ$(f, \langle a, b\rangle)\{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle \;\; y \ge f(x)\}$

Выпуклый = выпуклый вниз; вогнутый = выпуклый вверх

Определение. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Определение. $A \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклое множество в** $\mathbb{R}^m$, если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Это определение с вики

Определение. **Надграфик** функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ это множество $\{(x, y) \mid x \in \langle a, b\rangle, y \ge f(x)\}$

Лемма 1. о трех хордах

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a, b\rangle$
2. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle \;\; x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \le f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f\left(x_3\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) = f(x_2) \le f(x_3)\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1)\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

Примечание. Если f — строго выпуклая, то в лемме оба неравенства строгие.

Теорема 1. об односторонней дифференциируемости выпуклой функции.

f — вып. $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) \;\; \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0 < x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ □

Следствие 1.1. f — вып. на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ непр. на (a, b)

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

Теорема 2. выпуклость в терминах касательных

f — вып. на $\langle a, b\rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной

т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. "$\Rightarrow$"

Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы

$x < x_0$ аналогично

"$\Leftarrow$" фиксируем x_0. Берем $x_1 < x_0 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$; $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$. Это верно по лемме. $\square$

Определение. $A \subset \mathbb{R}^2$ — вып. $l \subset \mathbb{R}^2$ — прямая

l — **опорная прямая** к A, если:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l
2. $l \cap A \neq \varnothing$

Теорема 3. дифференциальный критерий выпуклости

1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифф. в (a, b)

   Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a, b)

   Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дважды дифф. на (a, b)

   f — вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

   (a) "$\Rightarrow$" $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \quad (x_1 < x_2)$

   "$\Leftarrow$" $?f$ вып. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

   Теперь утверждение 2. очевидно.

Примечание. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — вып.

Тогда f — дифф. на (a, b) за исключением, может быть, счетного множества точек.

Доказательство. $\forall x \ \exists f'_+(x), f'_-(x)$

$f'_\pm$ возрастает

$f'_-(x) = f'_+(x) \Rightarrow f$ дифф. в x

$f'_-(x) < f'_+(x) \Rightarrow f$ не дифф. в x

Тогда x — точка скачка для f'_+, f'_-, их НБСЧ, т.к. f^+ и f^- возрастают. $\square$

Пример. Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)

$diamG = \sup\{\rho(x,y),\ x,y \in G\}$

$diamG \leq 1$

Тогда $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ *(возвращает длину пути)*. Очевидно, что $r^2(\varphi)+r^2(\varphi-\frac{\pi}{2}) \leq (diamG)^2 \leq 1$

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^2(\varphi)d\varphi + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) d\varphi \leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$\square$