

Математический анализ

Михайлов Максим

26 августа 2021 г.

Оглавление

Лекция 1	8 февраля	4
1	Интеграл	6
1.1	Измеримые функции	6
1.2	Меры Лебега-Стилтьеса	10
Лекция 2	15 февраля	11
1.3	Сходимость почти везде и по мере	14
2	Интеграл	19
Лекция 3	22 февраля	22
2.1	Предельный переход под знаком интеграла	26
Лекция 4	1 марта	30
3	Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.	35
Лекция 5	15 марта	38
4	Возвращаемся в \mathbb{R}^m	40
Лекция 6	22 марта	45
4.1	Сферические координаты в \mathbb{R}^m	45
5	Произведение мер	46
Лекция 7	29 марта	52
6	Поверхностный интеграл	58
6.1	Поверхностный интеграл I рода	58
Лекция 8	5 апреля	60
6.2	Поверхностный интеграл II рода	60
7	Ряды Фурье	63
7.1	Пространства L^p	63
Лекция 9	12 апреля	66
8	Формула Грина	66
9	Ряды Фурье (возвращение)	69
9.1	Напоминание	71
Лекция 10	19 апреля	74
10	Формула Остроградского	74
Лекция 11	26 апреля	80
11	Гильбертово пространство	82
Лекция 12	3 мая	87
12	Тригонометрические ряды Фурье	89

Лекция 13	10 мая	94
13	Свертки и аппроксимационные единицы	98
Лекция 14	17 мая	101
14	Суммирование рядов Фурье	104
14.1	Метод средних арифметических (<i>Чезаро</i>)	104

Лекция 1

8 февраля

Лемма 1 (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда \exists ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Примечание. Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

Доказательство. $W := V^*V$ — самосопряженный оператор (*матрица симметрична относительно диагонали*).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные (*возможно с повторениями*)
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в \mathbb{R}^m (а не в \mathbb{C}^m), * есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

(1): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i .

- (2): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(5)}{=} \delta_{ij}$$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def } x}{=} V \left(\sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(6)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def } h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \stackrel{(7)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def } W}{=} \det W \stackrel{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

Теорема 1 (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

(3): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.

(4): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i .

(5): при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

(6): в силу линейности V

(7): в силу мультипликативности \det и инвариантности относительно транспонирования.

(8): т.к. \det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

Доказательство.

1. Если $\det V = 0$ $\text{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \ V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если $\det V \neq 0$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти k , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ — единичный куб на векторах g_i .

По 1 $V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом, $k = |\det V|$

□

1 Интеграл

1.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$ — разбиение множества.
2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — ступенчатая, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ f|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется допустимым для этой функции.

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$
2. $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

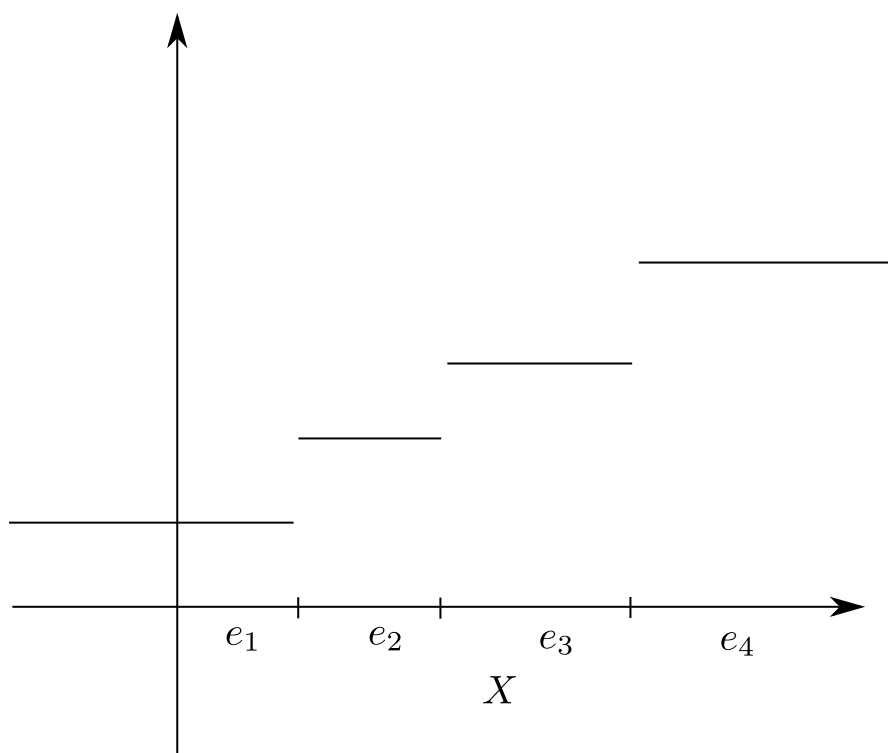


Рис. 1.1: Ступенчатая функция

Свойства.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые:

\exists разбиение X , допустимое и для f , и для g :

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$

$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$ — ступенчатые.

Определение. $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество** функции f

Аналогично можно использовать $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

Примечание.

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f **измерима** на множестве E , если $\forall a \in \mathbb{R} \ E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

Вместо “ f измерима на X ” говорят просто “измерима”.

Если $X = \mathbb{R}^m$, мера — мера Лебега, тогда f — измеримо по Лебегу.

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \ E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \ E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \ E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \ E(f \geq a)$ — измеримо

Доказательство. Тривиально по соображениям выше. □

Пример.

1. $E \subset X, E$ — измеримо $\Rightarrow \chi_E$ — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \emptyset, & a \leq 0 \\ X \setminus E, & 0 < a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно. Тогда f — измеримо по Лебегу.

Доказательство. $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто по топологическому определению непрерывности, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

Свойства.

1. f измеримо на $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ E(f = a)$ измеримо.

В обратную сторону неверно, пример — $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2. f — измеримо $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha f$ — измеримо.

$$\text{Доказательство. } E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \emptyset, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases} \quad \square$$

3. f — измеримо на $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ измеримо на $E = \bigcup E_k$

4. f — измеримо на $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$ измеримо на E'

$$\text{Доказательство. } E'(f < a) = E(f < a) \cap E' \quad \square$$

5. $f \neq 0$, измеримо на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ измеримо на E .

6. $f \geq 0$, измеримо на $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$ измеримо на E .

Это неверно, т.к. при $f \equiv 0, \alpha = -1 \nexists f^\alpha$

Теорема 2. f_n — измеримо на X . Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.

2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.

3. Если $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

(9):

• $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

$$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

• $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. \sup и \inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

\square

1.2 Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ -конечный объем (и даже σ -конечная мера на \mathcal{P}^1)

Также можно определить для монотонной, но не непрерывной g . Тогда в точках разрыва $\exists g(a+0), g(a-0)$. Пусть $\mu[a, b) = g(b-0) - g(a-0)$. Такое изменение нужно, потому что исходное μ не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру μ_g на некоторой σ -алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

Пример. $g(x) = [x]$, тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если μ_g определена на борелевской σ -алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.

Лекция 2

15 февраля

Теорема 3 (о характеристике измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X \left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n} \right) \quad k = 1 \dots n^2$$

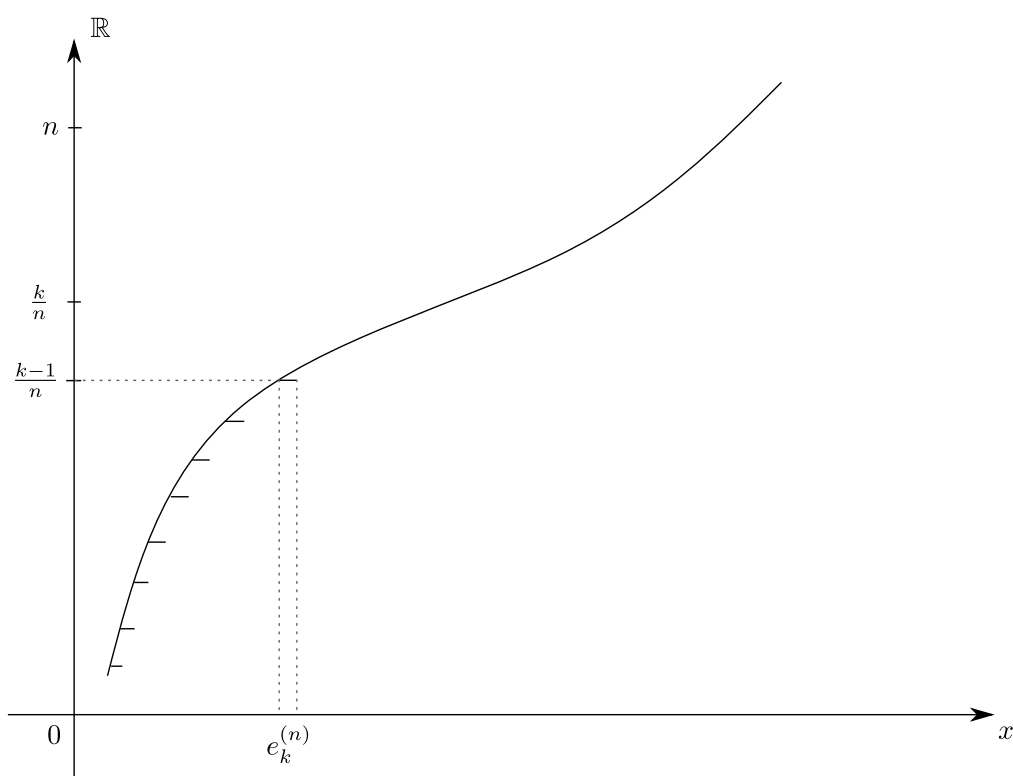
$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : \begin{cases} g_n(x) \leq f(x) \\ f(x) = +\infty : \forall n \quad x \in e_{n^2+1}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n \\ f(x) < +\infty : |g_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$



$$f_n = \max(g_1, \dots, g_n)$$

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

□

Следствие 3.1.

- f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые : $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки f^+, f^- , дальше очевидно.

□

Следствие 3.2.

- f, g — измеримо

Тогда fg — измеримо (пусть $0 \cdot \infty = 0$).

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \rightarrow fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. \square

Следствие 3.3.

- f, g — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

Примечание. Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

Доказательство.

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

\square

Теорема 4 (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание. $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измеримо.

Доказательство. f — измеримо на E' , т.к. $E'(f < a)$ открыто в E' по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e, \lambda_m$ — полная в \mathbb{R}^m ¹ $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в E .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. \square

Пример. $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\text{Irr}}$, где Irr — множество иррациональных чисел. f непр. на Irr и разрывно на \mathbb{R} .

Следствие 4.1.

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$

¹ Любое подмножество множества нулевой меры измеримо.

- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- f измеримо на E'

Тогда можно так переопределить f на e , что полученная функция \tilde{f} будет измерима.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E' \\ \text{const}, & x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f < a)} \cup \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\emptyset \text{ или } e}$$

□

Следствие 4.2. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонна.

Тогда f измерима.

Доказательство. f — непрерывно на $\langle a, b \rangle$ за исключением, возможно, счётного множества точек. □

Упражнение. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна.

Доказать: $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ — измеримо.

Упражнение. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримо.

Доказать: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x - y)$ — измеримо.

Упражнение. Доказать, что \exists измеримая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$, если f непрерывно на e , то полученная \tilde{f} разрывна всюду.

1.3 Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно при почти всех x из E = почти всюду на E = почти везде на E = п.в. E , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$ и $W(x)$ истинно при $\forall x \in E \setminus e$

Пример. $X = \mathbb{R}$, W = иррационально.

Определение. Если $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ при п.в. $x \in E$, тогда говорят, что f_n **сходится на E почти везде**.

Свойства.

1.
 - μ — полная
 - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 - $f_n \rightarrow f$ п.в. X
 - f_n измеримо

Тогда f измеримо.

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ на X' , где $e = X \setminus X'$, $\mu e = 0$

f — измеримо на X'

μ — полная $\Rightarrow f$ измеримо на X , т.к. $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e}$ □

2. В условии пункта один можно переопределить f на множестве e . Тогда получится \tilde{f} и $f_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ почти везде и \tilde{f} измеримо.
3. Пусть $\forall n \ W_n(x)$ истинно при почти всех x .

Тогда утверждение “ $\forall n \ W_n(x)$ истинно” — верно при почти всех x

Доказательство. $\triangleleft e_n : \mu(e_n) = 0$. Искомое высказывание верно при $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right)$, $\mu(\bigcup e_i) = 0$ □

Определение. Будем говорить, что f эквивалентна g если $f = g$ почти всюду.

Определение. $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

f_n **сходится к f по мере μ** , обозначается $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

Упражнение. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f; f_n \xrightarrow[\mu]{} g$. Тогда f и g эквивалентны.

Доказательство. Пусть существует множество $X(|f - g| > \varepsilon)$ положительной меры.

$$X(|f - g| > \varepsilon) \subset X(|f - f_n| > \varepsilon) \cup X(|g - f_n| > \varepsilon)$$

$$\mu X(|f - g| > \varepsilon) \leq \underbrace{\mu X(|f - f_n| > \varepsilon) + \mu X(|g - f_n| > \varepsilon)}_{\rightarrow 0}$$

Следовательно предположение неверно. Но тогда $\mu(\bigcup X(|f - g| > \varepsilon)) = 0$, а следовательно $f \sim g$.

Аналогичное доказательство есть в более подробном виде по следующей [ссылке](#) □

Пример.

$$1. f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$$

$$f_n \rightarrow f \text{ всюду на } (0, +\infty)$$

$$f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X\left(x \leq \frac{1}{\varepsilon n}\right)$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \rightarrow 0$$

$$2. f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x$$

$$f_n(x) \not\rightarrow 0$$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

$$3. n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$ не существует ни при каком x !²

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\lambda]{} 0$$

Теорема 5 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- μX конечно
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \rightarrow f$ п.в.

² Это восклицательный знак, а не факториал.

Тогда $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \rightarrow f$, $\varphi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \rightarrow 0$, $\varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

Теорема 6 (Рисс).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

Доказательство.

$$\forall k \quad \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0 \\ \exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(10)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при $x \notin E$ $f_{n_k} \rightarrow f$.

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

Следствие 6.1. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ $|f_n| \leq g$ почти всюду. Тогда $|f| \leq g$ почти всюду.

Доказательство. $\exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f$ почти всюду. □

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \Rightarrow f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

Теорема 7 (Егорова).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечно, измеримо
- $f_n \rightarrow f$ почти везде

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

Доказательство.

Примечание. Кажется, доказательство знать не нужно, т.к. нам его не давали.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующее семейство множеств:

$$E_{n,k} = \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

(10): по счётной полуаддитивности меры.

Т.к. $f_n \rightarrow f$ почти везде:

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Т.к. $\mu X < +\infty$, то μ непрерывно сверху, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu E_{n,k} = \mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Тогда по определению предела $\exists(n_k)$:

$$\mu E_{n_k,k} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Пусть $e = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n_k,k}$. По σ -аддитивности μ :

$$\mu(e) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_{n_k,k}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Кроме того, $f_n \xrightarrow{X \setminus e} f$.

□

2 Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — зафиксировали.

Определение (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

Свойства.

1. Не зависит от представления f в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

Примечание. При $E_k \cap E'_j \neq \emptyset$ $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$ можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

$$2. \underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

Определение (2).

- $f \geq 0$
- f измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ст.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Свойства.

- Если f ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f - \text{измеримая}, g - \text{ступенчатая} \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение (3).

- f измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

Теорема 8 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измерима
- Записывается как $f(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение.

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима на \mathbb{R}^n
2. Функция $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$, измерима и корректно задана.
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Примечание. Неформально говоря, можно разбить \mathbb{R}^{m+n} на \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.

Лекция 3

22 февраля

Определение. Если оказалось, что $\int_X f^+, \int_X f^-$ оба конечны, то f называется суммируемой.

Примечание.

1. Если f измеримо и \geq , то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

Определение (4).

- $E \subset X$ — измеримо
- f измеримо на X

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

Примечание.

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f \text{ на } E, g - \text{степ.}\}$ и мы считаем, что $g \equiv 0$ вне E .
- $\int_E f$ не зависит от значений f вне множества E .

Свойства. (X, \mathcal{A}, μ) — пространство с мерой, $E \subset X$ — измеримо, g, f — измеримо.

1. Монотонность $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

Доказательство.

- (а) При $f, g \geq 0$ — очевидно из определения.
- (б) При произвольных f, g $f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ (очевидно из определения). Из предыдущего случая $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$.

□

$$2. \int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$$

$$3. \mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$$

Доказательство.

(a) f — ступ. Тривиально.

(b) f — измеримо, $f \geq 0$. $\sup 0 = 0$, поэтому искомое выполнено.

$$(c) \int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$$

□

Примечание. f — измерима. Тогда f суммируема $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

Доказательство.

$$\Leftarrow \text{ следует из } f^+, f^- \leq |f|$$

\Rightarrow будет доказано позже на этой лекции.

□

$$4. \int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$$

Доказательство.

(a) $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$, тогда искомое очевидно.

(b) Можно считать $c > 0$ без потери общности, тогда для $f \geq 0$ тривиально.

□

$$5. \exists \int_E f d\mu. \text{ Тогда } \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} -|f| &\leq f \leq |f| \\ -\int |f| &\leq \int f \leq \int |f| \\ \left| \int f \right| &\leq \int |f| \end{aligned}$$

□

$$6. \mu E < +\infty, a \leq f \leq b. \text{ Тогда}$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

Следствие 8.1. f — измеримо на E , f — ограничено на E , $\mu E < +\infty$. Тогда f суммируемо на E

7. f суммируема на E . Тогда f почти везде конечна.

Доказательство.

(a) $f \geq 0$ и $f = +\infty$ на $A \subset E$. Тогда $\int_E f \geq n\mu A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

(b) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

Лемма 2.

- $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ — измеримо
- g — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{(11)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu \end{aligned}$$

□

Теорема 9.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на A
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

(11): переставлять можно, т.к. члены суммы ≥ 0 .

Доказательство. Докажем, что части равенства \leq и \geq , тогда равенство выполнено.

\leq \triangleleft ступенчатую $g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \stackrel{(12)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$$\int_A f d = \sup_g \int_A g \leq \sum \int_{A_i} f$$

\geq 1. $A = A_1 \sqcup A_2$

\triangleleft ступенчатые $g_1, g_2 : 0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$. Пусть E_k — совместное разбиение, у g_1 коэффициенты α_k , у g_2 — β_k .

$$\begin{aligned} 0 \leq g_1 + g_2 &\leq f \cdot \chi_A \\ \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 &= \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\stackrel{(13)}{\leq} \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\stackrel{(14)}{\leq} \int_A f \end{aligned}$$

2. Для $n \in \mathbb{N} : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ тривиально по индукции.

3. $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$\int_{B_n} f \geq 0$, т.к. $f \geq 0$. Таким образом:

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

Следствие 9.1. $f \geq 0$ — измеримо. Пусть $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\nu E := \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

Следствие 9.2 (Счётная аддитивность интеграла). f суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

(12): по лемме 2.

(13) и (14): переход к \sup

Доказательство. Очевидно, если рассмотреть срезки. □

Следствие 9.3. $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

2.1 Пределный переход под знаком интеграла

Пусть $f_n \rightarrow f$. Можно ли утверждать, что $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$?

Пример (контр).

$$f_n := \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \rightarrow f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \lambda[0, n] = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 10 (Леви).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n измеримо
- $\forall n \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде.
- $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Примечание. f задано везде, кроме множества e меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e . Тогда f измеримо на X .

Доказательство.

\leq очевидно, т.к. $f_n \leq f$ почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_0 = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

\geq достаточно проверить, что \forall ступенчатой $g : 0 \leq g \leq f$ выполняется следующее

$$\lim \int_X f_n \geq \int_X g$$

Сильный трюк: достаточно проверить, что $\forall c \in (0, 1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$$\bigcup E_n = X, \text{ т.к. } c < 1$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

$$\text{Тогда } \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \stackrel{(15)}{=} c \int_X g$$

□

Теорема 11.

- $f, g \geq 0$
- f, g измеримо на E

$$\text{Тогда } \int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

$$1. f, g - \text{ступенчатые, т.е. } f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

$$2. f \geq 0, \text{ измеримо. } \exists \text{ ступ. } f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \lim f_n = f$$

$$g \geq 0, \text{ измеримо. } \exists \text{ ступ. } g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \quad \lim g_n = g$$

$$\begin{aligned} f_n + g_n &\rightarrow f + g \\ \int_E f + \int_E g &\stackrel{\text{т. Леви}}{\longleftarrow} \int_E f_n + \int_E g_n \stackrel{\text{пункт 1}}{=} \int_E f_n + g_n \stackrel{\text{т. Леви}}{\longrightarrow} \int_E f + g \end{aligned}$$

□

Следствие 11.1. f, g суммируемы на E . Тогда $f + g$ суммируемо и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$. Таким образом, доказано 3.

Доказательство суммируемости. $|f + g| \leq |f| + |g|$. Пусть $h = f + g$. Тогда

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^- \\ \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^- \\ \int_E h^+ - \int_E h^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \end{aligned}$$

(15): по непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых на X функций

Следствие 11.2 (следствия). $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ это линейный функционал¹ на $\mathcal{L}(X)$, т.е.:

$$\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X) \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X) \text{ и } \int_X \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X f_k$$

Теорема 12 (об интегрировании положительных рядов).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$ почти везде
- u_n измеримо

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

$$S_n \rightarrow S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k, \text{ тогда } \int_E S_n \rightarrow \int_E S$$

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = \int_E S \leftarrow \int_E S_n \xrightarrow{\text{линейность } \int} \sum_{k=1}^n \int_E u_k$$

□

Следствие 12.1. u_n измеримо и $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда ряд $\sum u_n(x)$ абсолютно сходится при почти всех x .

¹ т.е. функция функций

Доказательство.

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произвольная последовательность, $\sum a_n$ абсолютно сходится.

Тогда $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ абсолютно сходится при почти всех x .

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде.

$$\begin{aligned} \int_{[-N, N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^N \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\stackrel{(16)}{\leq} |a_n| \int_{-N}^N \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &= 4\sqrt{N} |a_n| \\ \sum_n \int_{[-N, N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &\leq 4\sqrt{N} \sum |a_n| < +\infty \end{aligned}$$

□

(16): Т.к. $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ чётна и при этом для $x \geq 0$ убывает, площадь под симметричным относительно 0 отрезком максимальна среди всех отрезков такой же длины.

Лекция 4

1 марта

Теорема 13 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E - \text{изм.}, \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 13.1. f суммируемо на X , $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \rightarrow 0$

Доказательство. ¹

$$\begin{aligned} X_n &:= X(|f| \geq n) \\ X_n \supset X_{n+1} \supset \dots &\Rightarrow \mu \left(\bigcap X_n \right) \stackrel{(17)}{=} 0 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon &\int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \stackrel{(19)}{\leq} \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{< \delta} \cdot n_\varepsilon < \varepsilon$$

□

¹ Теоремы, не следствия

(17): Т.к. f на $\bigcap X_n$ бесконечна и f почти везде конечна.

(18): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

(19): Т.к. $|f|$ на $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$ не превосходит n_ε по построению X_{n_ε}

Примечание. Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \xRightarrow[\mu]{} f \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, но $\int |f_n - f| = +\infty$ при всех n .

Из 2 следует 1, т.к.

$$\underbrace{\mu X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Теорема 14 (Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:

1. $\forall n \quad |f_n| \stackrel{(20)}{\leq} g$ почти везде
2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Примечание. Почти везде конечность f_n и f следует из (20), поэтому в условии этого можно не требовать.

Доказательство. f_n — суммируемы в силу неравенства (20), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1. $\mu X < +\infty$

Зафиксируем ε . $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \xRightarrow{\mu} f$, т.е. $\mu X_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq 2g \\ \int_X |f_n - f| &= \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{сл. т. об абс. непр.}}} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \end{aligned} \tag{21}$$

2. $\mu X = +\infty$

Утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$, изм., конечной меры : $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$. Докажем его.

$$\int_X g = \sup \left\{ \int g_n \mid 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\}$$

Возьмём достаточно большое n и положим:

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon$$

$$\int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g = \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon \implies \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Вернёмся к теореме. Зафиксируем $\varepsilon > 0$:

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

Теорема 15 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо
- $f_n \xrightarrow{(22)} f$ почти везде
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:
 1. $\forall n \ |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — суммируемо на X

Тогда f_n, f — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$, и тем более $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$

Доказательство. Суммируемость f_n, f , а также утверждение “и тем более” доказываются так же, как в теореме [Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере](#).

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots)$$

$$0 \stackrel{(23)}{\leq} h_n \stackrel{(24)}{\leq} 2g$$

h_n монотонно убывает, что очевидно по определению \sup .

$$\lim h_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \stackrel{(25)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \geq 0$ и возрастает как последовательность функций, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде. Тогда по теореме [Леви](#):

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

Пример. $x > 0, x_0 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Равенство выполнено, т.к. $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t^{x_0-1} e^{-t}$ при $t > 0$ и суммируемая мажоранта $t^{\alpha-1} e^{-t} + t^{\beta-1} e^{-t}$, где $0 < \alpha < x_0, 0 < \beta$

Теорема 16 (Фату).

- X, \mathfrak{A}, μ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$
- f_n измеримо
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $\exists C > 0 \forall n \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

Примечание. Странность: здесь не требуется, чтобы $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ и это может быть неверно.

Пример.

$$f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \leq 1$$

По теореме [Фату](#) $\int_{\mathbb{R}} f \leq 1$, что верно, т.к. $\int_{\mathbb{R}} f = 0 \leq 1$

(23): по построению

(24): по (21)

(25): по (22)

Пример. Условие $f_n \geq 0$ важно:

$$f_n = -\frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = -1 \leq -1, \text{ но } \int_{\mathbb{R}} f = 0 \not\leq -1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} g_n &:= \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \\ 0 &\leq g_n \leq g_{n+1} \\ \lim g_n &\stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.} \\ \int_X g_n &\leq \int_X f_n \leq C \\ \int_X g_n &\stackrel{(27)}{\rightarrow} \int_X f \end{aligned} \tag{26}$$

Значит $\int_X f \leq C$ по предельному переходу в (26)

□

Следствие 16.1.

- $f_n, f \geq 0$
- f_n, f измеримы
- f_n, f почти везде конечны
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

Доказательство.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \xRightarrow[\text{Т. Рисса}]{} \exists(n_k) : f_{n_k} \rightarrow f \text{ п.в.}$$

По теореме [Фату](#) получим искомое.

□

Следствие 16.2.

- $f_n \geq 0$
- f_n измеримо

Тогда $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

(27): по теореме [Леви](#)

Доказательство. Возьмём g_n как в теореме, тогда выполняется неравенство $\int_X g_n \leq \int_X f_n$. Выберем $(n_k) : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\begin{array}{c} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \\ \downarrow \\ \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n \end{array}$$

□

3 Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, (Y, \mathfrak{B}, ν) , $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Упражнение. Проверить, что Φ^{-1} — σ -алгебра.

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$. Тогда ν — мера:

$$\nu\left(\bigcup E_n\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigcup E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом** μ при отображении Φ и $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

Наблюдение 1. $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо относительно \mathfrak{B} . Тогда $f \circ \Phi$ — измеримо относительно \mathfrak{A} .

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \stackrel{(28)}{\in} \mathfrak{A}$$

Определение. $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$, измеримо на X .

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда ν называется “**взвешенный образ меры** μ при отображении Φ ”, ω называется **весом**.

(28): т.к. $Y(f < a) \in \mathfrak{B}$

Теорема 17 (о вычислении интеграла по взвешенному образу меры).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- (Y, \mathfrak{B}, ν) — пространство с мерой
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо на X
- ν взвешенный образ μ при отображении Φ с весом ω

Тогда \forall измеримой относительно \mathfrak{B} f на Y , $f \geq 0$ выполнено следующее:

1. $f \circ \Phi$ измеримо на X относительно \mathfrak{A}
- 2.

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (29)$$

То же самое верно для суммируемой f .

Доказательство. Измеримость $f \circ \Phi$ выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть $f = \chi_B$, $B \in \mathfrak{B}$

$$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда (29) это:

$$\int_Y \chi_B d\nu = \int_B 1 \cdot d\nu = \nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Это выполнено по определению νB

1. Пусть f — ступенчатая
(29) следует из линейности интеграла.
2. Пусть $f \geq 0$, измеримая

По теореме о характеристизации измеримых функций с помощью ступенчатых и теореме Леви $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ — ступенчатые, $h_i \leq f$, $h_i \rightarrow f$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \quad (29)$$

3. Пусть f измерима.

Тогда для $|f|$ выполнено (29); $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_- = f_- \circ \Phi \cdot \omega$$

Таким образом, искомое выполнено для f_+ и f_- , а следовательно и для f .

□

Следствие 17.1 (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f суммируемо на Y

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

Доказательство. В условие теоремы подставим $f \cdot \chi_B$

□

Определение. Рассмотрим частный случай: $X = Y$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\Phi = \text{id}$ - тождественное отображение. Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё ω .

$$\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$$

В этой ситуации ω называется **плотностью** меры ν относительно меры μ и тогда по теореме [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#):

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$

Лекция 5

15 марта

Определение.

- X, \mathfrak{A}, μ — пространство с мерой
- $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера

Плотность меры ν относительно μ есть положительная измеримая функция $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, такая что:

$$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$$

Теорема 18 (критерий плотности).

- X, \mathfrak{A}, μ — пространство с мерой
- ν — мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо

Тогда ω — плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом $0 \cdot \infty$ считается $= 0$.

Пример (отсутствие плотности). $X = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^1, \mu = \lambda_1$

ν — одноточечная мера: $\nu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$. Тогда $\nu(\{0\}) = 1$, но $\int_{\{0\}} \omega d\mu = 0$ — несостыковка.

Необходимое условие существования плотности — $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Это и достаточное условие по теореме Радона-Никодима¹.

Доказательство теоремы *критерий плотности*.

“ \Rightarrow ”

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega(x) d\mu(x)$$

$$\inf \omega \cdot \mu A = \int_A \inf \omega d\mu \leq \int_A \omega(x) d\mu(x) \leq \int_A \sup \omega d\mu = \sup \omega \cdot \mu A$$

“ \Leftarrow ” Рассмотрим $\omega > 0$. Общность не умаляется, т.к. пусть $e = X(\omega = 0)$, тогда $\nu(e) \stackrel{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$, поэтому в случае $A \cap e \neq \emptyset$ всё ещё только лучше.

Фиксируем число $q \in (0, 1)$.

$$A_j := A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(30)}{\leq} \nu A_j \stackrel{(31)}{\leq} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(32)}{\leq} \int_{A_j} \omega d\mu \stackrel{(33)}{\leq} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu &= q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\stackrel{(34)}{\leq} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(35)}{\leq} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\stackrel{(36)}{\leq} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(37)}{\leq} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

¹ Возможно, мы разберём её в конце семестра.

То есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

Тогда предельный переход при $q \rightarrow 1 - 0$ дает искомое.

□

Лемма 3.

- f, g суммируемы
- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде.

Доказательство. $h := f - g$. Дано: $\forall A \quad \int_A h = 0$; доказать: $h = 0$ почти везде.

$$A_+ := X(h \geq 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_-$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.}$$

□

Примечание. Если $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, отображение $l_A : f \mapsto \int_A f$ есть линейный функционал. Таким образом, множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ разделяет точки, т.е. $\forall f \neq g \in \mathcal{L}(X) \quad \exists A : l_A(f) \neq l_A(g)$

Примечание. В \mathbb{R}^m $a = (a_1 \dots a_m)$, $l_a : x \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$. Тогда $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \exists a : l_a(x) = {}^2 l_a(y)$.

4 Возвращаемся в \mathbb{R}^m

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- O открыто

(34): по (33)

(35): по (30)

(36): по (31)

(37): по (32)

² Кажется, здесь должно быть “ \neq ”

- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \ \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется неравенство $\lambda\Phi(Q) < c\lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать, что Q — замкнутые кубы.

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо³

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a) \\ \underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o^4(x - a)\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^5}(a) \ \forall x \in B_{\varepsilon}(a) \ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$$

Пусть $Q \subset B_{\varepsilon}(a), a \in Q, Q$ — куб со стороной h .

При $x \in Q$:

$$|x - a| \leq \sqrt{m}h^6$$

$$|\Psi(x) - x| \stackrel{(38)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ куб со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$, т.к. при $x, y \in Q$

$$\begin{aligned}|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h\end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L|(1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем ε такое, чтобы $|\det L|(1 + 2\varepsilon)^m < c$, потом берём $\delta = \text{радиус } B_{\varepsilon}(a)$ □

³ Т.к. $\det \Phi'(a) \neq 0$.

⁴ Это не то же самое o , что строчкой выше.

⁵ Это не радиус шара, а параметр.

⁶ Это диагональ куба со стороной h в \mathbb{R}^m .

(38): т.к. $x \in B_{\varepsilon}(a)$

Лемма 5.

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- O открыто
- f непрерывна
- A измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- Q — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр. } \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство. Упражнение.

□

Теорема 19.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Φ диффеоморфизм

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \quad \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство.

Обозначение.

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера

Надо доказать, что J_Φ — плотность ν относительно λ .

Достаточно проверить условие теоремы [критерий плотности](#), что \forall измеримого A :

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu(A) \stackrel{(39)}{\leq} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

$$\lambda\Phi(A) \leq \lambda A \cdot \frac{1}{\inf \frac{1}{|\det \Phi'|}}$$

$$\lambda\Phi(A) \leq \lambda A \cdot \sup |\det \Phi'|$$

1. Проверяем (39) для случая A — кубическая ячейка, $A \subset \bar{A} \subset O$

От противного: $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

Возьмём $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$.

Запускаем половинное деление: режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем “мелкую” ячейку $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu(Q_1)$. Опять делим на 2^m частей, берём $Q_2 \cdot \lambda Q_2 < \nu(Q_2)$ и т.д.

$$a \in \bigcap \bar{Q}_i$$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n \quad C \cdot \lambda Q_n < \nu(Q_n) \quad (40)$$

$C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\bar{Q}} J_\Phi$, в частности $c > |\det \Phi'(a)|$. Мы получили противоречие с леммой о мере образа малых кубических ячеек: в сколько угодно малой окрестности a имеются кубы \bar{Q}_n , где выполнено (40)

2. Проверяем (39) для случая A открыто.

Это очевидно, т.к. $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \bar{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \lambda Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \cdot \sum \lambda Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (41)$$

3. По лемме 5 неравенство (39) выполнено для всех измеримых A :

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \bar{Q}_j \subset O, A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_G (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} J_\Phi \cdot \lambda A_j$$

Аналогично формуле (41) получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

□

Теорема 20.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Φ - диффеоморфизм

Тогда \forall измеримой $f \geq 0$, заданной на $O' = \Phi(O)$:

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой f .

Доказательство. Применяем теорему о **вычислении интеграла по взвешенному образу меры** при $X = Y = \mathbb{R}^m, \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m, \mu = \lambda, \nu(A) = \lambda(\Phi(A))$:

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}B} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

По теореме 19 $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} J_\Phi d\lambda$, т.е. λ — взвешенный образ исходной меры по отношению к Φ . \square

Пример.

1. Полярные координаты в \mathbb{R}^2 :

$$\Phi = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det \Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\lambda_2$$

2. Сферические координаты в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} \quad J_\Phi = r^2 \cos \psi$$

$$\det \Phi' = r^2(\sin^2 \psi \cos \psi + \cos^3 \psi) = r^2 \cos \psi$$

Лекция 6

22 марта

4.1 Сферические координаты в \mathbb{R}^m

Координаты задаются $r, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}$. Зададим их по индукции:

- φ_1 — угол между \bar{e}_1 и $\overline{OX} \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между \bar{e}_2 и $P_{2(e_2 \dots e_n)}(x) \in [0, \pi]$
- \vdots
- φ_{m-1} — полярный угол в \mathbb{R}^2

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$

Примечание. В \mathbb{R}^3 “географические” координаты имеют якобиан $J = r^2 \cos \psi$

Поймём, почему якобиан именно такой. Можно его посчитать руками, но это трудно.

1 шаг

$$x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}$$

$$(x_1 \dots x_m) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})$$

$$J = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & J_2 \end{vmatrix} = \rho_{m-1}$$

2 шаг

$$\rho_{m-1} = \rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}$$

$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}$$

$$(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})$$

последний шаг

$$(x_1 \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1})$$

$$\rho_2 = r \sin \varphi_1$$

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d\lambda_m \\ &\stackrel{1 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \\ &\stackrel{2 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \underbrace{\rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}}_{\text{замена } \rho_{m-1}} \cdot \underbrace{\rho_{m-2}}_J \\ &\stackrel{3 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \underbrace{\rho_{m-3}^2 \sin^2 \varphi_{m-3}}_{\text{замена } \rho_{m-2}^2} \cdot \underbrace{\sin \varphi_{m-2}}_{\text{с прошлого шага}} \cdot \underbrace{\rho_{m-3}}_J \\ &= \dots \\ &= \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} d\lambda \end{aligned}$$

Тогда по теореме о единственности плотности искомое верно.

5 Произведение мер

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой

Лемма 6. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — полукольца $\Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$ — полукольцо.

Доказательство. Тривиально. □

Обозначение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — называем измеримыми прямоугольниками.

$m_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, при этом $0 \cdot \infty$ принимаем за 0.

Теорема 21.

1. m_0 — мера на \mathcal{P}
2. μ, ν — σ -конечны $\Rightarrow m_0$ тоже σ -конечно¹.

Доказательство.

1. Проверим счётную аддитивность m_0 , т.е. $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k$ ², если $A \times B = P = \bigsqcup P_k$, где $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$.

Тогда $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$, где $\forall x \in X, y \in Y \quad \chi_A(x) \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$

Слева измеримая функция, справа — неотрицательный ряд \Rightarrow можем интегрировать.

Проинтегрируем по y по мере ν по пространству Y :

$$\chi_A(x) \nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

Проинтегрируем по x по мере μ по пространству X :

$$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:

- μ σ -конечно $\Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k$ — конечно $\forall k$
- ν σ -конечно $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n$ — конечно $\forall n$

Тогда $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$. Конечное произведение конечных конечно, поэтому m_0 σ -конечно.

□

Определение.

- $\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой

¹ Т.е. пространство можно представить в виде счётного объединения множеств конечной меры.

² Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

- μ, ν σ -конечны

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 на σ -алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ³

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ — произведение пространств с мерой (X, \mathfrak{A}, μ) и (Y, \mathfrak{B}, ν)

Примечание.

- Это произведение ассоциативно.
- σ -конечность нужна для единственности произведения, которая выполняется по теореме о продолжении меры.

Теорема 22. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$

Доказательство. Не будет. □

Определение. X, Y — множества, $C \subset X \times Y$

$$\forall x \in X \quad C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$\forall y \in Y \quad C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

C_x, C^y называется **сечением**.

Примечание.

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup (C_{\alpha})_x \quad \left(\bigcap C_{\alpha} \right)_x = \bigcap (C_{\alpha})_x \quad (C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 23 (принцип Кавальери). ⁴

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- μ, ν — σ -конечны.
- μ, ν — полные.
- $m = \mu \times \nu$
- $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

³ \otimes — не тензорное произведение

⁴ Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая⁵ функция на X
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y .

Пример. ???

Доказательство. Пусть \mathfrak{D} — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

1. $C = A \times B$, где A и B измеримы в соответствующих пространствах $\Rightarrow C \in \mathfrak{D}$, так как:

$$(a) C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A \\ B, x \in A \end{cases} \quad \text{и оба случая очевидно} \in \mathfrak{B}$$

$$(b) x \mapsto \nu(C_x) — \text{функция } \nu B \cdot \chi_A$$

$$(c) \int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

2. $E_i \in \mathfrak{D}$, дизъюнкты $\stackrel{?}{\Rightarrow} \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}$. Обозначим $E = \bigsqcup E_i$

$E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x$ измеримы почти везде \Rightarrow при почти всех x все $(E_i)_x$ измеримы.

Тогда при этих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$ по определению σ -алгебры — это 1.

$$\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow \text{Функция } x \mapsto \nu E_x \text{ измерима — это 2.}$$

$$\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE — \text{это 3.}$$

3. $E_i \in \mathfrak{D}, E_1 \supset E_2 \supset \dots, E = \bigcap_i E_i, \mu E_i < +\infty$. Тогда $E \in \mathfrak{D}$.

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x — \text{конечно при почти всех } x.$$

$$\forall x \text{ верно } (E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x$$

Тогда E_x измеримо п.в. (это 1.) и $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при п.в. x — непрерывность сверху ν .

Таким образом, $x \mapsto \nu E_x$ измерима — это 2.

$$\int_x \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE — \text{это 3.}$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_i)_x$ суммируемо.

⁵ Функция задана при почти всех X ; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду.

Итого: Если $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathfrak{D}$. Строго говоря, мы это не доказали, т.к. ещё нужно упомянуть процесс дизъюнктивизации в полукольце и то, что пересечение множеств лежит в полукольце, следовательно любое пересечение можно свести к тому, которое мы рассматривали.

4. $E \subset X \times Y, mE = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{D}$

$mE = \inf \{ \sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \}$ — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

\exists множество H вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$, т.е. пересечение аппроксимаций. По пункту 3 $H \in \mathfrak{D}$. При этом $E \subset H, mH = mE = 0$.

$$0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ про почти всех } x.$$

$E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow E_x$ — измеримо при почти всех x — это 1 и $\nu E_x = 0$ почти везде, это 2.

$$\int \nu E_x d\mu = 0 = mE \text{ — это 3.}$$

5. C — m -измеримо, $mC < +\infty$. Тогда $C \in \mathfrak{D}$.

$C = H \setminus e$, где H имеет вид $\bigcap \bigcup P_{kl}$, $me = 0$. Почему? Из предыдущих соображений $C \subset H$, а нулевая мера $H \setminus C$ следует из того, что мера C конечна. **Как оно следует?**

$$mC = mH - 0 = mH$$

(а) $C_x = H_x \setminus e_x$ — оба “слагаемых” измеримы при почти всех x , т.к. H_x по третьему пункту $\in \mathfrak{B}$, а e_x измеримы по полноте ν . В силу замкнутости по вычитанию $C_x \in \mathfrak{B}$ п.в.

(б) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x$ п.в. \Rightarrow измеримо.

$$(c) \int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

$X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$ по полноте обеих мер.

$C = \bigsqcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{m(\dots) < +\infty}$, тогда по пункту 5 все элементы объединения $\in \mathfrak{D}$ и по

пункту 2 объединение лежит в \mathfrak{D} .

□

Следствие 23.1. C измеримо в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \emptyset\}$ — проекция C на X .

Если $P_1(C)$ измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Аналогично для проекции на y .

Доказательство. При $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$

□

Примечание.

1. C измеримо $\nRightarrow P_1(C)$ измеримо.

Пример. Пусть $C = (\text{неизмеримое множество в } X) \times \{y\}$, где y — фиксированный элемент в Y . Тогда C измеримо в $X \times Y$ и имеет меру 0.

2. C измеримо $\nRightarrow \forall x \ C_x$ измеримо.

Пример. Пусть $C = \{\tilde{x}\} \times (\text{неизмеримое множество в } Y)$, где \tilde{x} — фиксированный элемент в X . Тогда C измеримо в $X \times Y$ и имеет меру 0, но при этом $C_{\tilde{x}}$ неизмеримо.

3. $\forall x, \forall y \ C_x, C_y$ измеримо $\nRightarrow C$ измеримо.

Пример Серпинского.

Лекция 7

29 марта

Следствие 23.2.

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- f непрерывно

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

Доказательство. Рассмотрим случай $f > 0$. $C = \Pi\Gamma^1(f, [a, b])$ — измеримое в \mathbb{R}^2 множество. Доказать это — упражнение.

$C_x = [0, f(x)]$, $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

Примечание.

- λ_2 можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением конечной аддитивности и это продолжение можно сделать не единственным образом.
- Для $\lambda_m, m > 2$ аналогичным образом продолжить невозможно.

Для обоих случаев требуется инвариантность меры относительно движения \mathbb{R}^m .

В множествах размерности > 2 действует парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского, вследствие чего аддитивность невозможна.

Определение.

¹ подграфик

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$\forall x \in X$ f_x — функция $f_x(y) = f(x, y)$

$\forall y \in Y$ f_y — функция $f_y(x) = f(x, y)$

Теорема 24 (Тонелли).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- μ, ν — σ -конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измеримо относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. При почти всех x f_x измерима на Y .
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измерима² на X
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Аналогичные утверждения верны, если поменять местами X и Y :

1. f_y измеримо на X почти везде.
2. $y \mapsto \psi(y) = \int_X f_y d\mu$ — измерима³ на Y
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_Y \psi d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство.

1. $f = \chi_C, C \subset X \times Y$, измеримо. Тогда $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$

C_x измеримо при почти всех x по [принцип Кавальери](#) $\Rightarrow f_x$ измеримо при почти всех x

$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$ — измеримая⁴ функция по [принцип Кавальери](#)

² почти везде

³ почти везде

⁴ почти везде

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \stackrel{(42)}{=} mC = \int_{X \times Y} f dm$$

2. f — ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{C_k}$, $f_x = \sum \alpha_k \chi_{(C_k)_x}$ — измеримо почти везде.

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x \text{ — измерима}^5$$

$$\int_X \varphi(x) = \sum \int_X \alpha_k \nu(C_k)_x = \sum \alpha_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$, измеримо.

$$f = \lim g_n, g_n \uparrow f, g_n \geq 0, \text{ ступенчатые}$$

$$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x \text{ — измеримо на } y \text{ по теореме об измеримости пределов.}$$

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \stackrel{(43)}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)} \Rightarrow \varphi \text{ — измерима}^6$$

$\varphi_n(x)$ измерима почти везде по пункту 2, поэтому φ измерима почти везде.

$$\int_X \varphi(x) \stackrel{(44)}{=} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X \times Y} g_n \stackrel{(45)}{=} \int_{X \times Y} f dm$$

□

Следствие 24.1. Если в условиях теоремы **Тонелли** $C \subset X \times Y$, $P_1(C)$ измеримо, то $\int_C f dm = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Доказательство. Очевидно, т.к. вместо f можно взять $f \cdot \chi_C$

□

Теорема 25 (Фубини).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- μ, ν — σ -конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$

(42): по **принцип Кавальери**

⁵ почти везде

(43), (44), (45): по теореме **Леви**

- f — суммируемо на $X \times Y$

Тогда:

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — суммируема на X
3. $\int_{X \times Y} f d\mu = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Доказательство. Слишком неинтересно.

Общий подход: берём f_+ и f_- . □

Пример. $B(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx, s, t > 0$.

Тогда $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$, где $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^{s-1} y^{t-1} e^{-x-y} dy \right) dx \\
 y &:= u - x \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx \\
 &= \int \dots d\lambda_2 \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du \\
 x &:= u \cdot v \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 (uv)^{s-1} (u-uv)^{t-1} e^{-u} \cdot u dv \right) du \\
 &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du \\
 &= B(s, t) \Gamma(s+t)
 \end{aligned}$$

□

Пример (Объём⁷ шара в \mathbb{R}^m). $\alpha_m := \lambda_m(B(0, 1)), \lambda_m(B(0, r)) = r^m \cdot \alpha_m$ — получается заменой координат.

⁷ на самом деле мера

$$B(0, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1 \right\}$$

$$B(0, 1)_{x_m} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \leq 1 - x_m^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \int_{-1}^1 \lambda_{m-1} \left(B \left(0, \sqrt{1-y^2} \right) \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \alpha_{m-1} (1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy \\ &= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= B \left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \alpha_{m-1} \\ &= \frac{\Gamma \left(\frac{m+1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{m+2}{2} \right)} \alpha_{m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\cancel{\Gamma \left(\frac{m+1}{2} \right)} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{m+2}{2} \right)} \cdot \frac{\Gamma \left(\frac{m}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{\cancel{\Gamma \left(\frac{m+1}{2} \right)}} \cdots \frac{\Gamma \left(\frac{3}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{4}{2} \right)} \underbrace{\alpha_1}_{=2} \\ &= \frac{\Gamma \left(\frac{3}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{m}{2} + 1 \right)^{m-1}} \cdot 2 \\ &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma \left(\frac{m}{2} + 1 \right)} \end{aligned}$$

В случае $m = 3$ $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$

Примечание.

$$\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Переход в полярные координаты:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{m-1} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-1} \\
x_m &= r \sin \varphi_1 \dots \cos \varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m \\
&= \int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \dots \int_0^\pi d\varphi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \cdot r^{m-1} \cdot \sin^{m-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \\
&\stackrel{\text{по (47)}}{=} 2\pi \frac{R^m}{m} \prod_{k=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \\
&= \pi \frac{R^m}{m} \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2} + 1\right)} \\
&\stackrel{(46)}{=} \frac{\pi^{\frac{m}{2}} R^m}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2} + 1\right)}
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin^k \alpha d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[dt = \frac{t}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \right] = B\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (47)$$

Мы потеряли двойку в (46).

6 Поверхностный интеграл

6.1 Поверхностный интеграл I рода

Определение.

- $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие
- $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — параметризация M , т.е. $\varphi(G) = M$

$E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в \mathbb{R}^2 по Лебегу.

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M : E \text{ изм.}\} = \{\varphi(A), A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

Определение (Мера на \mathfrak{A}_M).

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ .

Примечание.

1. \mathfrak{A}_m — σ -алгебра, S — мера.
2. $E \subset M$ — компакт $\Rightarrow \varphi^{-1}(E)$ — компакт, т.к. непрерывный образ компакта компактен \Rightarrow измерим \Rightarrow замкнутые множества измеримы \Rightarrow открытые относительно M множества измеримы, т.к. их дополнения замкнуты и следовательно измеримы, а также σ -алгебра замкнута по дополнению.
3. \mathfrak{A}_m не зависит от параметризации φ по теореме о двух параметризациях⁸.
4. S не зависит от φ !⁹

$$\begin{aligned} |\vec{\varphi}'_s \times \vec{\varphi}'_t| &= |(\vec{\varphi}'_u \cdot u'_s + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_s) \times (\vec{\varphi}'_u \cdot u'_t + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_t)| \\ &= |(\vec{\varphi}'_u \times \vec{\varphi}'_v)(u'_s v'_t - v'_s u'_t)| \\ &= |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

5. $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима, если $M(f < a)$ измеримо относительно \mathfrak{A}_m , что в свою очередь $\Leftrightarrow M(f \circ \varphi < a)$ измеримо относительно \mathfrak{M}^2 .

f измеримо относительно $\mathfrak{A}_m \Leftrightarrow f \circ \varphi$ измеримо относительно \mathfrak{M}^2 .

Определение (поверхностный интеграл первого рода).

⁸ Которая гласит, что треугольник коммутирует.

⁹ Это восклицательный знак, а не факториал.

- M — простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3
- φ — параметризация M
- $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемо по мере S на M

Тогда $\iint_M f dS = \iint_M f(x, y, z) dS$ называется **интегралом первого рода** от f по многообразию M .

Примечание. Как вычислять этот интеграл? По теореме [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#):

$$\iint_M f dS = \iint_G f(\varphi(u, v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{vmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \sin \alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 |\varphi'_v|^2 (1 - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$

Пример. M — график функции $f = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, z = f(x, y)\}$

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix} \quad \varphi'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \quad \varphi'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = \sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v}$$

$$\iint_M g dS = \iint_G g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy$$

Лекция 8

5 апреля

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно-гладкое двумерное многообразие, если M — конечное объединение:

- Простых гладких многообразий M_i
- Гладких кривых
- Точек

Определение. $E \subset M$ измеримо, если $E \cap M_i$ измеримо.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

6.2 Поверхностный интеграл II рода

Обозначение. Будем называть простое двумерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^3 поверхностью.

Определение. Сторона поверхности есть непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности.

Для поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ сторона есть отображение

$$W : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall x \quad |W(x)| = 1, W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$$

Примечание. Локально каждая поверхность двусторонняя. В общем случае сторон либо две, либо одна (*лента Мёбиуса*). Для поверхностей с одной стороной нельзя задать сторону поверхности. Формально мы это не доказали и это требует трюков с топологией. В

\mathbb{R}^4 можно сделать дырку в окружности и заткнуть её лентой Мёбиуса и тогда всё станет совсем странно.

Пример. График функции $z(x, y)$.

$$\begin{aligned}\Phi : (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix} \\ \Phi'_x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} \\ n &:= \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} \\ n_0 &= \pm \begin{pmatrix} -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \\ -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Другие способы задания стороны:

1. u, v — касательные непараллельные вектора к M . Тогда (u, v) будем называть **касательным репéром**. Нормаль в таком случае можно восстановить векторным произведением $u \times v$. После нормировки по полю реперов мы получаем поле единичных нормалей, т.е. сторону поверхности.
2. Пусть задана петля и задано направление движения, то бишь **ориентированный контур**. Тогда с помощью гомотопий его можно стянуть в любую точку нашего многообразия M . Заметим, что направление движения на самом деле задаёт два вектора — касательный вектор и вектор нормали “внутри” петли. Тогда мы по ориентированному контуру получим поле касательных реперов, а следовательно зададим и сторону поверхности.

Определение.

- M — поверхность в \mathbb{R}^3
- n_0 — сторона
- γ — контур (*петля*) в M , ориентированная
- $N_{\text{внутр.}}$ — вектор нормали, направленный внутрь петли

Говорят, что сторона поверхности n_0 согласована с ориентацией γ , если:

$$(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$$

Т.е. если ориентация γ задаёт сторону n_0 .

Определение (интеграл II рода).

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ — непрерывное векторное поле

Тогда $\int_M \langle F, n_0 \rangle dS$ — **интеграл II рода** векторного поля F по поверхности M .

Примечание.

- Смена стороны = смена знака
- Не зависит от параметризации
- $F = (P, Q, R)$, тогда интеграл обозначается $\iint_M P dydz + Q dzdx + R dx dy$
- Φ - параметризация, $n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$ - нормирование

Пусть $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\begin{aligned}
 \int_M \langle F, n_0 \rangle ds &= \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| dudv \\
 &= \int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\text{смешанное произведение: (48)}} dudv \\
 &= \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv \\
 \langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle &= \begin{vmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{vmatrix} \tag{48}
 \end{aligned}$$

Сторона поверхности учитывается в порядке переменных u, v .

Пример. Рассмотрим график функции $z(x, y)$ над областью G по верхней стороне.

$$\begin{aligned}
 n_0 &= \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \quad -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \quad \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \right) \\
 \int_{\Gamma_z} R dx dy &= \int_{\Gamma_z} 0 dy dz + 0 dz dx + R(x, y, z) dx dy \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Gamma_z} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} dS
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_G R(x, y, z(x, y)) dx dy \\
&= \iint_G R dx dy
\end{aligned}$$

Т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции.

Следствие. $V \subset \mathbb{R}^3$, $M = \partial^1 V$ — гладкая двумерная поверхность, n_0 — внешняя нормаль.

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} z dx dy = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

Следствие. Ω — гладкая кривая в \mathbb{R}^2 , M — цилиндр над Ω , т.е. $M = \Omega \times [z_0, z_1]$

Тогда $\int_M R dx dy = 0$ по любой стороне.

Доказательство. $n_0 \perp (0, 0, R)$

□

7 Ряды Фурье

7.1 Пространства L^p

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
 - $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, т.е. $x = f(x) = u(x) + iv(x)$, $u = \Re f$, $v = \Im f$

f измеримо, если u и v измеримы².

f суммируемо, если u и v суммируемы.

Если f суммируемо, то $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

Упражнение.

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

- Неравенство Гёльдера.

- $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- E — измеримо
- $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$

¹ Это не дифференциал, а граница.

² Или измеримы почти везде.

- f, g — измеримы

$$\text{Тогда } \int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Не будет, но общая идея следующая:

- (а) Для ступенчатых функций — из неравенства Гёльдера для сумм³
- (б) Для суммируемых функций — по теореме [Леви](#).

□

3. Неравенство Минковского.

$$\text{В тех же условиях } \left(\int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Не будет, можно вывести аналогично выводу во втором семестре. □

Примечание. Для $p = 1$ тоже верно.

4. Определение пространства $L^p, 1 \leq p < +\infty$

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой.
- $E \subset X$ — измеримо.

$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \{f : \text{почти везде } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}^4), f \text{ — изм.}^5, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$ — это линейное пространство по неравенству Минковского.

Зададим отношение эквивалентности \sim на $\mathcal{L}^p(E, \mu)$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ почти везде.

$\mathcal{L}^p / \sim = L^p(E, \mu)$ — линейное пространство.

Задаём норму на L^p : $\|f\|_{L^p(E, \mu)} = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, обозначается $\|f\|_p$

Эта функция корректно определена, т.к. для $f \sim g$: $\|f\|_p = \|g\|_p$. Кроме того, она является нормой, т.к.:

- (а) $\|f\|_p \geq 0$ — очевидно, т.к. $\int |f|^p \geq 0$
- (б) $\|f\|_p = 0 \Rightarrow \int |f|^p = 0 \Rightarrow \int |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. $\Rightarrow f \sim 0$.
- (в) $\|f \cdot \alpha\|_p = \left(\int |f \cdot \alpha|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \cdot \|f\|_p$
- (д) $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ по неравенству Минковского.

5. $L^\infty(E, \mu)$

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой.

³ Мы его рассматривали во втором семестре.

⁴ $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

⁵ Или измерима почти везде.

- $E \subset X$ — измеримо.
- f : почти везде на $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо

Определение (существенный супремум⁶).

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf \{ A \in \overline{\mathbb{R}}, f \leq A \text{ почти везде} \}$$

При этом A называется существенной вещественной границей.

Свойства.

- $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$ — очевидно.
- $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$ почти везде — пусть $B = \operatorname{ess\,sup} f$, тогда $\forall n \quad f \leq B + \frac{1}{n}$ почти везде.
- f — суммируемо, f, g — почти везде $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, $\operatorname{ess\,sup}_E |g| < +\infty$. Тогда $|\int_E fg| \leq \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$

Доказательство.

$$\left| \int_E fg \right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot |f| = \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f| \quad (49)$$

□

$L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{почти везде } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), \text{ изм., } \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\} / \sim$ — линейное пространство.

$$\|f\|_{L^\infty(E, \mu)} := \operatorname{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

Примечание.

- В новых обозначениях неравенство Гёльдера: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ — здесь можно брать $p = 1, q = +\infty$ — это (49).
- $f \in L^p \Rightarrow f$ — почти везде конечно, если $1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow$ можно считать, что f задана всюду на E и всюду конечна.

⁶ Также называется истинным супремумом

Лекция 9

12 апреля

В третьем семестре у нас был криволинейный интеграл функции и векторного поля вдоль кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\int_{\gamma} f \underbrace{dS}_{|\gamma'|dt} = \int \langle F, \gamma' \rangle dt$$

Мера на кривой, т.е. гладком одномерном многообразии, с параметризацией γ , является мерой Лебега в \mathbb{R}^1 с весом $|\gamma'|$. Такой интеграл — первого рода.

В общем случае интеграл II рода по $m - 1$ -мерной поверхности в \mathbb{R}^m от векторного поля F есть: $\int \langle F, n_0 \rangle dS_{m-1}$

Определение (мера Лебега на k -мерном многообразии в \mathbb{R}^m).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\exists \Phi'_1 \dots \Phi'_k$

$\lambda_k(\text{ПРЛП}(\Phi'_1 \dots \Phi'_k))^1$ — это и будет плотность меры.

8 Формула Грина

Теорема 26 (формула Грина).

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное², ограниченное множество.
- D ограничено кусочно-гладкой кривой ∂D
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

¹ Объём параллелепипеда на этих векторах

² Любая петля стягиваема

Пусть ∂D ориентирована согласованно с ориентацией D (против часовой стрелки) — обозначим ∂D^+ . Тогда:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + Q dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем D — “криволинейный четырёхугольник”.

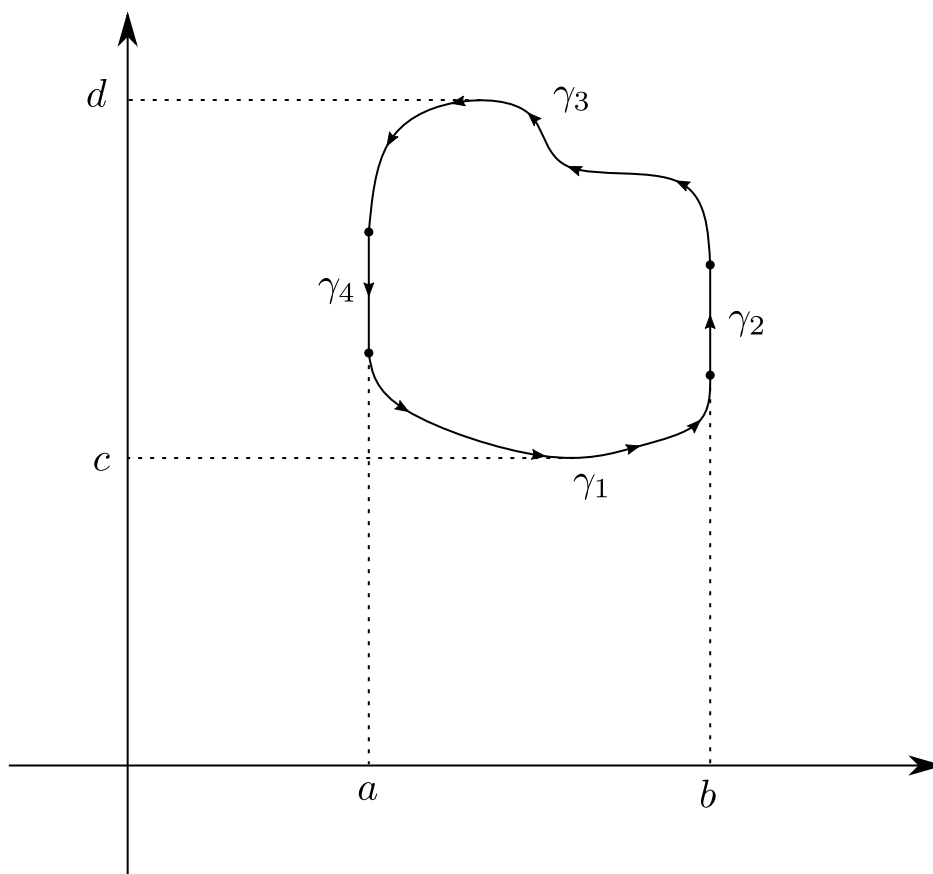


Рис. 9.1: Криволинейный четырёхугольник с ∂D

∂D состоит из путей $\gamma_1 \dots \gamma_4$, где γ_2 и γ_4 — вертикальные отрезки³, γ_1 и γ_3 — гладкие кривые — можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$.

Аналогично можно описать ∂D по отрезкам, параллельным оси OY .

Проверим, что $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + 0 dy$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

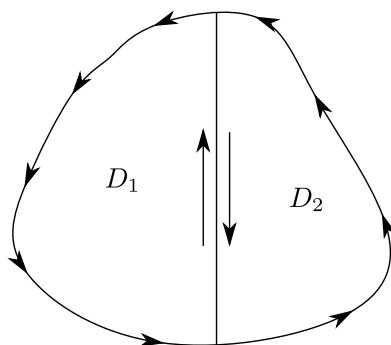
³ Возможно, вырожденные

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx \\
\int_{\partial D^+} P dx + 0 dy &= \int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_0 + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_0 \\
&= \int_a^b P(x, \gamma_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \gamma_3(x)) dx
\end{aligned}$$

Таким образом, искомое доказано. □

Примечание. Теорема верна для любой области D с кусочно-гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные четырёхугольники.

Такой разрез — безобидное действие, которое можно выполнить вертикальным разрезанием по середине:



Кажется, такими разрезами можно достичь искомого в любой области, но мы не будем это утверждать.

Теорема 27 (формула Стокса).

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 (двустороннее)
- $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — параметризация Ω
- L^+ — граница G
- n_0 — сторона Ω
- $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — кривая с согласованной ориентацией
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

Тогда:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Примечание. $dxdy = -dydx$, $dx dx = 0$

$$dPdx + dQdy + dRdz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx + \dots$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$, т.е. параметризация Ω дважды гладко дифференцируема.

Достаточно показать, что:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Пусть $\Phi = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Запараметризуем L^+ как $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (u(t), v(t))$. Тогда $\Phi \circ \gamma$ — параметризация $\partial\Omega^+$. Тогда $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} Pdx &= \int_{L^+} P \left(\frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) dt \\ &= \int_{L^+} P \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\ &\stackrel{(50)}{=} \iint_G \frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv \\ &\stackrel{(51)}{=} \iint_G (\cancel{P'_x x'_u} + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v + \cancel{P'_x x'_{uv}} - (\cancel{P'_x x'_v} + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u - \cancel{P'_x x'_{uv}} dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} (z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y} (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial x} dxdy \end{aligned}$$

□

9 Ряды Фурье (возвращение)

Теорема 28.

(50): по формула грин

(51): это дифференцирование произведения

- $\mu E < +\infty$
- $1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда:

1. $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2. $\|f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

Доказательство. 1 следует из 2, т.к. если $f \in L^r(E, \mu)$, то $\|f\|_s$ конечно. Докажем 2.

При $r = \infty$ очевидно:

$$\left(\int_E |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

При $r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}, q := \frac{r}{r-s}$

$$\begin{aligned} \|f\|_s^s &= \int_E |f|^s d\mu \\ &= \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \\ &\leq \left(\int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} d\mu \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu \right)^{\frac{r-s}{r}} \\ &\leq \|f\|_r^s \mu E^{1 - \frac{s}{r}} \end{aligned}$$

□

Следствие 28.1. $\mu E < +\infty, 1 \leq s, r \leq +\infty, f_n \xrightarrow{L^r} f$. Тогда $f_n \xrightarrow{L^s} f$

Доказательство. $\|f_n - f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f_n - f\|_r \rightarrow 0$

□

Теорема 29 (о сходимости в L^p и по мере).

- $1 \leq p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p, f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$
2.
 - $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (либо $f_n \rightarrow f$ п.в.)
 - $|f_n| \leq g$

$$\bullet g \in L^p$$

Тогда $f \in L^p$ и $f_n \rightarrow f$ в L^p

Доказательство.

1. Пусть $X_n(\varepsilon) = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

2. Пусть $f_n \Rightarrow f$. Тогда по теореме Рисса $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде. $|f| \leq g$ почти везде. $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ — суммируема, т.к. $g \in L^p$.

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

9.1 Напоминание

- Фундаментальная последовательность : $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, n > N \|f_n - f_k\| < \varepsilon$, т.е. $\|f_n - f_k\| \xrightarrow{n, k \rightarrow +\infty} 0$
- $f_n \rightarrow f \Rightarrow (f_n)$ — фундаментальная, т.к. $\|f_n - f_k\| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f - f_k\|}_{\rightarrow 0}$
- $C(K)$ — пространство непрерывных функций на компакте K .

$\|f\| = \max_K |f|$. Утверждение: $C(K)$ — полное, т.е. любая фундаментальная последовательность сходится.

Упражнение. $L^\infty(X, \mu)$ — полное

Теорема 30. $L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$ — полное.

Доказательство. Рассмотрим f_n — фундаментальную. Куда бы она могла сходиться?

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда $\exists N_1 \forall n_1, k > N_1 \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$. Зафиксируем какой-либо n_1 .

Аналогично для $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

В общем случае $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_k \frac{1}{2^k} = 1$. Рассмотрим ряд $S(x) = \sum |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, $S(x) \in [0, +\infty]$ и его частичные суммы S_N .

$$\|S_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Таким образом, $\int_X S_N^p < 1$. По теореме Фату $\int_X S^p d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируемо $\Rightarrow S$ почти везде конечно.

$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ — его частичные суммы это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. сходимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде. Таким образом, кандидат — f . Проверим, что $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берём $m = n_k > N$.

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

Это выполнено при всех достаточно больших k . Тогда по теореме Фату $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$, т.е. $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. \square

Определение. Y — метрическое пространство, $A \subset Y$, A — **(всюду)** плотно в Y , если:

$$\forall y \in Y \quad \forall U(y) \quad \exists a \in A : a \in U(y)$$

Пример. \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} .

Лемма 7.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $1 \leq p \leq +\infty$

Множество ступенчатых функций (из L^p) плотно в L^p .

Доказательство.

1. $p = \infty$

$\triangleleft f \in L^\infty$. Изменив f на множестве меры 0, считаем, что $|f| \leq \|f\|_\infty$, т.к. $f > A$ на множестве меры 0.

Тогда из доказательства теоремы о характеристизации неотрицательных функций с помощью ступенчатых \exists ступенчатые функции φ_n , такие что $0 \leq \varphi_n \Rightarrow f^+$ и ψ_n , такие что $0 \leq \psi_n \Rightarrow f^-$

Тогда сколь угодно близко к f можно найти ступенчатую функцию вида $\varphi_n + \psi_n$, т.е. $|f - \varphi_n - \psi_n| \leq \frac{1}{n}$, что и требовалось показать.

2. $p < +\infty$. Пусть $f \geq 0$.

$\exists \varphi_n \geq 0$ ступенчатые : $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X \underbrace{|\varphi_n - f|^p}_{\leq |f|^p - \text{мажоранта}} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

Если f любого знака, то при рассмотрении срезов искомое очевидно.

□

Примечание. $\varphi \in L^p$ — ступенчатая $\Rightarrow \mu X(\varphi \neq 0) < +\infty$

Определение. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0, r) : f \equiv 0$ вне $B(0, r)$.

Обозначение. $C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции

Очевидно, что $\forall p \geq 1 \quad C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Определение. Топологическое пространство X **нормальное**, если:

1. Точки X суть замкнутые множества
2. $\forall F_1, F_2 \subset X$ — замкнутых⁴, тогда $\exists U(F_1), U(F_2)$ — открыты, $U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

Загадка: \mathbb{R}^m — нормальные.⁵

⁴ И непересекающихся, но это не было сказано на лекции.

⁵ Если очень хочется, то [здесь](#) можно почитать доказательство того, что все метрические пространства (кои \mathbb{R}^m является) нормальные.

Лекция 10

19 апреля

10 Формула Остроградского

Теорема 31 (Формула Остроградского).

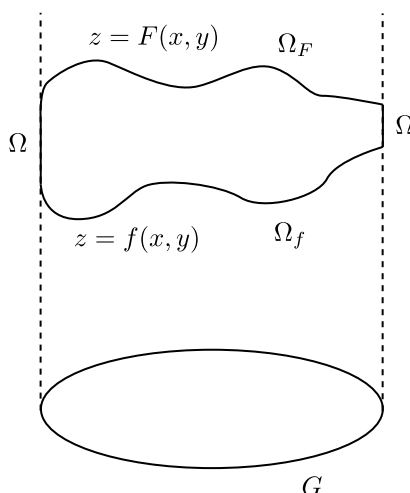
- $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$
- G — компакт
- ∂G — кусочно-гладкая кривая в \mathbb{R}^2
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- $R : \text{окрестность } V \rightarrow \mathbb{R}, R \in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V_{\text{внешн.}}} R dx dy = \iint_{\partial V} 0 dy dz + 0 dz dx + R dx dy$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_G R(x, y, F(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z) dx dy \stackrel{(52)}{+} \iint_{\Omega_f} R dx dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R dx dy}_0 \\ &= \iint_{\partial V} R dx dy \end{aligned}$$



□

Следствие 31.1 (обобщенная формула Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Определение. V — гладкое векторное поле. Тогда **дивергенция** $\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Наблюдение:

$$\operatorname{div} V(a) \stackrel{(53)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V dx dy dz \stackrel{(54)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, n_0 \rangle dS$$

— не зависит от координат.

Физический смысл — мы измеряем поток воды и обнаруживаем, что поток по замкнутой поверхности пропадает или же появляется. Тогда $\operatorname{div} V$ — мера¹ интенсивности стока/источка.

Следствие 31.2. $l \in \mathbb{R}^3, f \in C^1(\text{окр.}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dx dy dz = \iint_{\partial V} f \cdot \langle l, n_0 \rangle dS$$

Доказательство. Загадка.

□

Определение. Ротор (вихрь)

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

(52): “-” спрятан в нормали, направленной вниз.

(53): по непрерывности div

(54): по формуле Стокса

¹ Не та, что в теории меры; “измерение”

Аналогично можно определить ротор:

$$\operatorname{rot} F(a) = \lim_{\Omega \rightarrow x_0} \frac{1}{S(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} A, n_0 \rangle dS$$

Примечание. Поле $V = (P, Q, R)$ — потенциально $\Leftrightarrow \exists f : V = \nabla f$. По теореме Пуанкаре при Ω — односвязной: V — потенциально $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$, т.к. $\operatorname{rot} (\nabla f) \equiv 0$

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если \exists гладкое векторное поле B в Ω , такое что $A = \operatorname{rot} B$.

Теорема 32 (Пуанкаре').

- Ω — открытый параллелепипед
- A — векторное поле в Ω
- $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

Доказательство.

$\Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} B \equiv 0$, что всегда выполнено.

\Leftarrow Дано:

$$A'_{1x} + A'_{2y} + A'_{3z} = 0 \quad (55)$$

Найдём векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, где $A = \operatorname{rot} B$.

Пусть $B_3 \equiv 0$.

$$\begin{cases} B'_{3y} - B'_{2z} = A_1 \\ B'_{1z} - B'_{3x} = A_2 \\ B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \end{cases}$$

$$-B'_{2z} = A_1 \quad (56)$$

$$-B'_{1z} = A_2 \quad (57)$$

$$B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \quad (58)$$

$$(57) \quad B_1 = \int_{z_0}^z A_2 dz$$

$$(56) \quad B_2 = - \int_{z_0}^z A_1 dz + \varphi(x, y)$$

$$(58) \quad A_3 = - \int_{z_0}^z A'_{1x} dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^z A'_{2y} dz$$

По (55):

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z A'_{3z} + \varphi'_x &= A_3 \\ A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x &= A_3(x, y, z) \\ \varphi'_x &= A_3(x, y, z_0) \end{aligned}$$

Отсюда найдём $\varphi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z_0) dx$

□

Лемма 8 (Урысона).

- X нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутые
- $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывное, $0 \leq f \leq 1$, $f|_{F_0} \equiv 0$, $f|_{F_1} \equiv 1$

Доказательство. Переформулируем нормальность: если $F \subset G$, F замкнутое, G открытое, то $\exists U(F)$ — открытое, такое что $F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$. Почему это нормальность? Первое замкнутое множество — F , а второе замкнутое — G^c .

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^c \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^c}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$G_0 \subset \overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}}$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом, \forall двоично рациональной $\alpha \in [0, 1]$ задаётся открытое множество G_α .

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональная} : x \in G_\alpha\}$$

f — непрерывно $\Leftrightarrow f^{-1}(a, b)$ — всегда открыто.

Достаточно проверить:

1. $\forall b \ f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a \ f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

, так как:

$$f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \setminus f^{-1}(-\infty, a]$$

1. $f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q < b \\ q \text{ дв. рац.}}} G_q$ — открыто. Почему это так?

$f^{-1}(-\infty, b) \subset \bigcup$, т.к. $f(x) = b_0 < b$. Возьмём $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

$f^{-1}(-\infty, b) \supset \bigcup$ очевидно, т.к. при $x \in G_q \ f(x) \leq q < b$.

2. $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q > a} G_q = \bigcap_{q > a} \overline{G_q}$ — замкнуто

(\supset) — тривиально

(\subset) Для двоично рациональных q, r :

$$\bigcap_{\substack{q > a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

, так как $\forall \alpha < \beta : G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$ по построению.

□

Теорема 33.

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_m)$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_m)$, $1 \leq p < +\infty$ множество непрерывных финитных функций плотно.

Доказательство. По уже доказанной теореме множество ступенчатых функций плотно в $L^p(E, \lambda_m)$. Достаточно научиться приближать характеристические функции финитными, т.е.:

$$\forall A - \text{огр.} \ \exists f - \text{финитная непрерывная} : \|f - \chi_A\|_p < \varepsilon$$

Тогда можно будет приближать ступенчатые функции финитными, а следовательно искомым будет верно.

По регулярности меры лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underbrace{F}_{\text{замкн.}} \subset A \subset \underbrace{G}_{\text{откр.}} \quad \lambda_m(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона \exists непрерывное $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$: $f|_F \equiv 1, f|_{G^c} \equiv 0$

$$\|f - \chi_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \chi_A|^p d\lambda_m = \int_{G \setminus F} |f - \chi_A|^p \leq 1 \cdot \lambda_m(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

Примечание. При $p = +\infty$ утверждение теоремы неверно!

Упражнение. $\triangleleft L^{+\infty}(\mathbb{R}, \lambda), B(\chi_{[a,b]}, \frac{1}{2})$ не содержит непрерывных функций, т.к. $\sup_{\mathbb{R}} |f - \chi_A| \geq \max(\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x) - \chi_A|, \lim_{x \rightarrow a-0} |f(x) - \chi_A|) \geq \frac{1}{2}$.

В $L^p(E, \lambda_m)$ плотны:

- Линейные комбинации характеристических функций ячеек
- Гладкие финитные функции
- Рациональные линейные комбинации характеристических функций рациональных ячеек, а это множество счётно.
- Непрерывные функции

Вопрос: что-либо из упомянутого плотно ли в $L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$?

Ответ не совсем на этот вопрос: в $L^{+\infty}$ нет счётного плотного множества, зато конечные линейные комбинации характеристических функций плотны.

Лекция 11

26 апреля

Соглашение. $L^p[0, T], T \in \mathbb{R}$ можно понимать как пространство T -периодических функций, т.е. $\forall x \ f(x) = f(x + T)$.

Удобство: $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.

Соглашение. $f \in C[a, b] \Rightarrow \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

$\tilde{C}[0, T]$ — непрерывные T -периодические функции.

- $f \in C[0, T]$ или $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна по теореме Кантора о непрерывной на компакте функции.
- В $L^p[0, T]$ функции из \tilde{C} образуют плотное множество.

Линейная функция на $L^p(X, \mu), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Берём $g \in L^q(x, \mu)$ и строим отображение $L^p \rightarrow \mathbb{R}, \alpha : f \mapsto \int_X fg d\mu$. Нам известно неравенство $|\int_X fg| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q)^{\frac{1}{q}}$, поэтому интеграл конечен. Несложно заметить, что α действительно линейно. Непрерывно ли α ? Сходится ли $\alpha(f_n)$ к $\alpha(f)$? Да, т.к.:

$$|\alpha(f_n) - \alpha(f)| = \left| \int_X (f_n - f) \cdot g \right| \leq \|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Определение.

- $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) := f(x + h)$ — сдвиг.

Теорема 34 (о непрерывности сдвига).

1. f — равномерно непрерывно на \mathbb{R}^m . Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ ¹
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < +\infty$. Тогда $\|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
3. $f \in \tilde{C}[0, T]$. Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ ²
4. $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p[0, T] \Rightarrow \|f_h - f\|_p \rightarrow 0$

Примечание.

1. Для L^∞ непрерывности сдвига нет: $f = \chi_{[0,1]}$, $f_n = \chi_{[-h,1-h]}$, $\text{ess sup } |f - f_n| = 1$
2. В случаях 2 и 4 $h \mapsto \|f_h - f\|_p$ непрерывно в нуле \Rightarrow непрерывно всюду.

$$|\|f_n - f\|_p - \|f_{h_0} - f\|_p| \leq \|f_n - f_{h_0}\|_p = \|f_{h-h_0} - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

Доказательство. Пункты 1 и 3 очевидны по определению равномерной непрерывности.

Докажем пункты 2 и 4.

По плотности непрерывных функций в L^p :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall f \in L^p[0, T] \quad \exists g - \text{непр.} \in \tilde{C}[0, T] \quad \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_h\|_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

Покажем, что $\|g - g_h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$

4:

$$\begin{aligned} \|g_h - g\|_p &= \left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\|g_h - g\|_\infty^p \cdot \int_0^T 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= T^{\frac{1}{p}} \|g_h - g\|_\infty \end{aligned}$$

, что $< \frac{\varepsilon}{3}$ для достаточно малых h .

2: g — финитное, носитель³ $g \subset B(0, R)$, пусть $|h| < 1$.

$$\|g_h - g\|_p = \|g_h - g\|_{L^p(B(0, R+1), \lambda_m)} \leq \|g_n - g\|_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}}$$

□

¹ Т.е. $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$

² Или $\|f_n - f\|_{\tilde{C}} \rightarrow 0$

³ Множество точек, где $g \neq 0$

11 Гильбертово пространство

Пусть X — линейное пространство над \mathbb{R} (или \mathbb{C}) со скалярным произведением $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}) со следующими свойствами:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ или $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ в \mathbb{C} .

Нам известно неравенство Коши-Буняковского: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма порожденная, скалярным произведением.

Определение. \mathcal{H} — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при этом \mathcal{H} — полное, то оно называется **Гильбертовым**.

Пример.

1. $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$
2. $L^2(X, \mu), \langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$

Корректно по неравенству КБШ для интегралов: $|\int_X f \bar{g}| \leq (\int_X |f|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_X |\bar{g}|^2)^{\frac{1}{2}}$

Это скалярное произведение:

$$\langle g, f \rangle = \int_X g \bar{f} = \overline{\left(\int_X f g \right)}$$

$\|f\| = \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$ — норма, порожденная скалярным произведением. Именно эту норму мы и рассматривали с самого начала.

3. Антипример: $L^p, p \neq 2$ не Гильбертово.
4. $l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\text{или } \mathbb{C})\} : \sum |x_j|^2 < +\infty$

$$\langle x, y \rangle := \sum_j x_j \bar{y}_j$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_j|^2}$$

Определение. Сходящийся ряд: $\sum a_n, a_n \in \mathcal{H} : S_N := \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$, если $\exists S \in \mathcal{H} : S_N \xrightarrow[\text{в } \mathcal{H}]{}$ S

Определение. $x, y \in \mathcal{H}$. x ортогонален y , если $\langle x, y \rangle = 0$ и обозначается $x \perp y$

Определение. $A \subset \mathcal{H}$ $x \perp A : \forall a \in A \langle x, a \rangle = 0$

Определение. Ряд $\sum a_k$ ортогональный, если $\forall k, l \ a_k \perp a_l$.

Пример. $a_k \in l^2 : (0 \dots 0, \frac{1}{k}, 0 \dots)$

Теорема 35 (свойства сходимости в Гильбертовом пространстве).

1. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ в \mathcal{H} . Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$, т.е. скалярное произведение непрерывно в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.
2. $\sum x_k$ сходится. Тогда:

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \left\langle \sum x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y \rangle \quad (59)$$

3. $\sum x_k$ — ортогональный ряд. Тогда $\sum x_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum \|x_k\|^2$ сходится.

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\text{бесконечно малое}} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\text{огр.}} + \underbrace{\|x\|}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\text{бесконечно малое}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$2. \ S_N = \sum_{k=1}^N x_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$$

$$\langle S_n, y \rangle \rightarrow \langle S, y \rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$

$$\langle S_n, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, y \rangle$$

Это член суммы ряда из правой части (59).

$$3. \ S_N = \sum_{k=1}^N x_k$$

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, \sum_{j=1}^N x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 =: C_N$$

\Rightarrow Очевидно

\Leftarrow Аналогично формуле выше: $\|S_M - S_N\|^2 = |C_M - C_N|$. Таким образом, если C_N сходится, то C_N фундаментально $\Rightarrow S_N$ фундаментально в \mathcal{H} .

□

Примечание. Равенство $\|S_N\|^2 = \sum \|x_k\|^2$ — теорема Пифагора.

Определение. $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — ортогональное семейство, если:

1. $\forall k, l \quad e_k \perp e_l$
2. $\forall k \quad e_k \neq 0$

Если потребовать $\|e_k\| = 1$, то такое семейство называется **ортонормированным**.

Примечание. $\{e_k\}$ — ортогональное семейство $\Rightarrow \left\{ \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\}$ — ортонормированное семейство.

Пример.

1. $l^2, e_k := (0 \dots 0, 1, 0 \dots)$ — ортонормированное семейство.
2. L^2 над \mathbb{R} или \mathbb{C} , $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$ — ортогональное семейство:

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos lt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(kt - lt) + \cos(kt + lt) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi, & k = l \end{cases}$$

Можно разобрать остальные случаи и подтвердить искомое.

Если поделить все элементы⁴ на $\sqrt{\pi}$, то мы получим ортонормированное семейство.

3. $L^2[0, 2\pi]$ над \mathbb{C} , $\left\{ \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ — ортонормированное семейство.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ilt}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt \stackrel{k \neq l}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(k-l)i} e^{i(k-l)t} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

4. $L^2[0, 2\pi], \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2t \dots \right\}$ — ортонормированное семейство.

Теорема 36.

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в \mathcal{H}
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}$ или \mathbb{C}

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — ЛНЗ

⁴ Кроме единицы, её на $\sqrt{2\pi}$

$$2. c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

3. $c_k e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$. $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$.

Доказательство.

$$1. \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0 \Rightarrow \alpha_n \|e_n\|^2 = 0$$

$$2. \langle x, e_k \rangle = \langle \sum c_j e_j, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2$$

$$3. \langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = 0$$

□

Определение.

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в \mathcal{H}
- $x \in \mathcal{H}$

$c_k := \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ — называется коэффициентом Фурье по системе $\{e_k\}$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$ — ряд Фурье вектора x по системе e_k .

Примечание. При замене ортогонального семейства на ортонормированное семейство $\{\frac{e_k}{\|e_k\|} = \tilde{e}_k\}$ ряд Фурье не изменится.

$$\tilde{c}_k = \frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{\|\tilde{e}_k\|^2} = \frac{\left\langle x, \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\rangle}{1} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|}$$

$$\tilde{c}_k \cdot \tilde{e}_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|} \cdot \frac{e_k}{\|e_k\|} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} \cdot e_k = c_k(x) \cdot e_k$$

Теорема 37 (о свойствах частичных сумм ряда Фурье).

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в \mathcal{H}
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k$
- $\mathcal{L}_n = \text{Lin}(e_1 \dots e_n)$

Тогда:

1. S_n — проекция x на \mathcal{L}_n , т.е. $x = S_n + z \Rightarrow z \perp \mathcal{L}_n$

2. S_n — элемент наилучшего приближения для x в \mathcal{L}_n :

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$$

3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Доказательство.

1. $k = 1 \dots n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \|e_k\|^2 = 0$$

2. $x = S_n + z$

$$\|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n} \right\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

3. $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$

□

Лекция 12

3 мая

Неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

Теорема 38 (Рисс, Фишер).

- $\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathcal{H}
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье вектора x сходится в \mathcal{H} .
2. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z, z \perp e_k \quad \forall k$
3. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Доказательство.

1. Ряд Фурье ортогонален. Тогда по теореме о свойствах сходимости сходимость ряда Фурье \Leftrightarrow сходимость $\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$, что выполнено по неравенству Бесселя.
2. $z = x - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k(x) e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \|e_n\|^2 = 0$$

3. \Rightarrow по теореме о свойствах сходимости, пункт 3.

⇐ из пункта 2:

$$\|x\|^2 = \left\| \sum c_k(x) e_k \right\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$$

$$\text{Дано: } \|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = \sum c_k(x) e_k$$

□

Примечание.

1. $\mathcal{L} := \text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2 \dots))$
2. \mathcal{H}, e_k — ортонормированная система. Тогда последовательность $(c_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \in l_2$.
Обратное тоже верно:

$$\forall (c_k) \in l_2 \exists x \in \mathcal{H} \quad c_k = c_k(x)$$

Доказательство. Берём в качестве x ряд $\sum c_k e_k$, который сходится по теореме. □

3.

Упражнение. Если ортогональный ряд сходится, то он является рядом Фурье своей суммы.

Равенство $\sum_k |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$ называется уравнением замкнутости или **равенством Персиваля**.

Определение. Ортогональная система $\{e_k\}$ — базис \mathcal{H} , если $\forall x \in \mathcal{H} \quad x = \sum c_k(x) e_k$

Определение. Ортогональная система **полная** (нечего добавить), если $\nexists z \neq 0 : z \perp c_k \quad \forall k$.

Определение. Ортогональная система **замкнутая**, если $\forall x \quad \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Теорема 39 (о характеристике базиса).

- $\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathcal{H} .

Тогда эквивалентно следующее:

1. $\{e_k\}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполняется обобщенное уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ замкнуто
4. $\{e_k\}$ полно

5. $\text{Lin}(e_1, e_2 \dots)$ плотна в \mathcal{H} , т.е. $\text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2 \dots)) = \mathcal{H}$.

Доказательство.

1 \Rightarrow 2 Берём x , раскладываем его по базису и скалярно умножаем на y :

$$\begin{aligned}\langle e_k, y \rangle &= \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y) \cdot \|e_k\|^2} = \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2 \\ \langle x, y \rangle &= \sum_k c_k(x) \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2\end{aligned}$$

2 \Rightarrow 3 Из обобщенного следует частное при подстановке y вместо x .

3 \Rightarrow 4 Если $\exists z : \forall n \langle z, e_n \rangle = 0$, то $c_n(z) = 0$, но тогда по уравнению замкнутости для z выполняется $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = 0$, а следовательно $z = 0$.

4 \Rightarrow 1 По теореме Рисса-Фишера $x = \sum c_k(x) e_k + z$, где $z \perp$ всем e_k . По полноте $z = 0$.

4 \Rightarrow 5 $\mathcal{L} := \text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2 \dots))$. Надо проверить, что $\mathcal{L} = \mathcal{H}$. Если $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, то по теореме Рисса-Фишера $\exists z : \forall k \ z \perp e_k$.

5 \Rightarrow 4 Если $z \perp e_k \ \forall k$, то $z \perp \text{Lin}(e_1, e_2 \dots) \Rightarrow z \perp \mathcal{L}$, но $\mathcal{L} = \mathcal{H} \Rightarrow z \perp z$, т.е. $\langle z, z \rangle = 0$, но тогда $z = 0$.

□

Примечание. В \mathcal{H} существование ортогональной системы $\Leftrightarrow \mathcal{H}$ сепарабельно, т.е. “счётномерно”, т.е. имеет счётное плотное подмножество.

12 Тригонометрические ряды Фурье

Определение.

- $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический полином степени не выше n** .
- $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический ряд**, где a_k, b_k — коэффициенты тригонометрического ряда.
-

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

Тогда при подстановке этих формул в $T_n(x)$ получается $T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ — **тригонометрический полином в комплексной записи**.

- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ — **тригонометрический ряд в комплексной записи**, понимается как $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$.

Лемма 9.

- Дан тригонометрический ряд (*вещественный или комплексный*)
- Пусть $S_n \rightarrow f$ в $L^1[-\pi, \pi]$, т.е. $\|S_n - f\|_1 = \int_{-\pi, \pi} |S_n - f| \rightarrow 0$

Тогда:

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$, в том числе при $k = 0$
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$
- $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

Доказательство. Докажем для a_k . Пусть $n \geq k$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt = \pi a_k$$

$$\left| \pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t)) \cos kt dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| dt = \|S_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

□

Определение. $f \in L^1[-\pi, \pi]$. $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$, заданные в лемме, называются **коэффициентами Фурье** функции f , а ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ или $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ называется **рядом Фурье** этой функции.

Примечание. В $L^1[0, 2\pi]$ всё то же самое.

Примечание. $\triangleleft f \in L^1[-\pi, \pi]$

- f — чётная $\Rightarrow \forall k \quad b_k(f) = 0, a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt dt$
- f — нечётная $\Rightarrow \forall k \quad a_k(f) = 0, b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt$

Примечание. $\triangleleft f \in L^1[0, \pi]$ — для таких функций рассматриваются два ряда Фурье — для чётного и нечётного продолжения f :

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k(f) \cos kx \quad f \sim \sum b_k(f) \sin kx$$

Обозначение. $A_k(f, x) := \begin{cases} \frac{1}{2} a_0(f) & k = 0 \\ a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx & k = 1, 2, \dots \end{cases}$

Тогда:

Лемма 10.

$$A_k(f, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) dt, & k = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos kt dt & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 A_k(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx + f(t) \sin kt \sin kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k(t-x)) dt \\
 t &:= x + \tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \tau) \cos k\tau d\tau
 \end{aligned}$$

При сдвиге промежутков интегрирования не изменился, т.к. функция периодична. \square

Не дописано

Несколько “контрпримеров”, где ряд Фурье ведёт себя странно:

Чей	Какое пространство	Что странно
До Буа Реймонд	\tilde{C}	Расходится в некоторой точке
Лебег	\tilde{C}	Сходится неравномерно
Колмогоров	L^1	Расходится в каждой точке
Карлесон	L^2	Сходится почти везде
Хант	$L^p, 1 < p < +\infty$	Сходится почти везде

Теорема 40 (Римана-Лебега).

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_E f(t) e^{i\lambda t} dt &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \\
 \int_E f(t) \cos \lambda t dt &\rightarrow 0 \\
 \int_E f(t) \sin \lambda t dt &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

В частности для $f \in L^1[-\pi, \pi] : a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Доказательство. Не умаляя общности $E = \mathbb{R}$, т.к. иначе дополним f до \mathbb{R} так, что $f = 0$ вне E .

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \stackrel{t := \tau + \frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\tau} \cdot e^{i\pi} = - \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\tau}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \left(\int + \int \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| \underbrace{|e^{i\lambda t}|}_{=1} dt \rightarrow 0$$

, что выполнено по лемме о непрерывности сдвига. \square

Следствие 40.1. Пусть $\omega(f, h) = \sup_{\substack{x, y \in E \\ |x-y| \leq h}} |f(x) - f(y)|$ — модуль непрерывности. Если $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$ при $k \neq 0$.

Доказательство.

$$|2c_{-k}(f)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{k}\right) \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right) dt = \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$$

\square

Примечание. $\omega(f, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Тогда f равномерно непрерывна.

Следствие 40.2. $E \subset \mathbb{R}, E = \langle a, b \rangle$ ¹

Определение. Класс Липшица для $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1]$:

$$\text{Lip}_M^\alpha(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha\}$$

Пусть $f \in \text{Lip}_M^\alpha$, тогда при $k \neq 0$ $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$

Доказательство. Аналогично. \square

Примечание. $f \in \text{Lip}_M^\alpha \Rightarrow \omega(f, h) \leq M \cdot h^\alpha$

Наблюдение 2. $f \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$. Тогда при $k \neq 0$ $a_k(f') = kb_k(f), b_k(f') = -ka_k(f), c_k(f') = ikc_k(f)$

Доказательство. Интегрирование по частям:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{f(t) e^{-ikt}}_0 \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot ike^{-ikt} dt \right) = ikc_k(f)$$

\square

¹ Промежуток с любым видом скобки, а не скалярное произведение.

Следствие 40.3.

1. $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \leq \frac{\text{const}}{|k|^r}$.
2. $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi], f^{(r)} \in \text{Lip}_m \alpha, 0 < \alpha \leq 1$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$.

Доказательство. Очевидно из наблюдения выше.

□

Лекция 13

10 мая

Определение. 1. Ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

2. Ядро Фейера:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

Лемма 11.

1.

$$D_n(t) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2\pi \cdot \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right)$$

2.

$$\Phi_n = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

3. D_n, Φ_n — чётные, $\Phi_n \geq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$

4. $f \in L^1[-\pi, \pi]$

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

, где S_n — частичная сумма ряда Фурье.

Доказательство.

1.

$$2 \sin \frac{t}{2} \cos kt = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t$$

Тогда при домножении D_n на $\sin \frac{t}{2}$ благодаря телескопической сумме получается искомое.

2. Достаточно проверить, что

$$\sum \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

Это очевидно из того факта, что:

$$\sin \frac{t}{2} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t = \frac{1}{2} (\cos kt - \cos(k+1)t)$$

И по телескопической сумме получается $\frac{1}{2}(1 - \cos(n+1)t) = \sin^2 \frac{n+1}{2} t$.

3. Очевидно, т.к. чётные функции замкнуты по линейной комбинации, по пункту 2 ядро Фейера неотрицательно и $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt = 0$, поэтому $\int D_n = \int \frac{1}{2\pi} = 1$. Арифметическое среднее единиц равно единице, поэтому это выполнено и для Φ_n тоже.

4.

$$S_n(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n A_k(f, x) \stackrel{\text{по лемме}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)$$

□

Теорема 41 (принцип локализации Римана).

- $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) = g(x)$ ¹

Тогда ряды Фурье f и g ведут себя одинаково в точке x_0 :

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Переформулировка:

- $h := f - g, h \in L^1[-\pi, \pi]$

¹ С оговоркой, что либо почти везде, либо существуют такие представители данного класса эквивалентности.

- $h \equiv 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда $S_n(h, x_0) \rightarrow 0$

Доказательство переформулировки.

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где:

$$h_1(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$$

Так можно сказать, если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$.

- Для h_2 это очевидно.
- Для h_1 : $h_1 \equiv 0$ при $t \in (-\delta, \delta)$, поэтому:

$$|h_1(t)| \leq |h(x_0 + t)| \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда $b_n(h_1) \rightarrow 0, a_n(h_2) \rightarrow 0$ по теореме Римана-Лебега. □

Примечание.

1. Если $[a, b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то $S_n(h, x) \rightarrow 0$ на $[a, b]$.
2. Для определения ряда Фурье нужен весь $[-\pi, \pi]$ по лемме о вычислении коэффициентов Фурье, а его поведение в точке x_0 зависит лишь от его окрестности.
3. $f \in L^1[0, \pi]$ — можно разложить по \sin или по \cos . Фокус: эти разложения в $(0, \pi)$ ведут себя одинаково.

Теорема 42 (признак Дини).

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$ или \mathbb{C}
-

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)|}{t} dt < +\infty \quad (60)$$

Тогда ряд Фурье f сходится к S в точке x_0 , т.е. $S_n(f, x_0) \rightarrow S$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = f(x_0 + t) - 2s + f(x_0 - t)$.

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S &\stackrel{(61)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0 \dots = \\ &= \int_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2) \end{aligned}$$

, где

$$h_1 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t), & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Искомое следует из теоремы Римана-Лебега, если h_1 и $h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$.

- Для h_2 это очевидно.
- Для h_1 : по формуле (60):

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t}$$

при $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1| = \int_0^{\pi} |h_1| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} \stackrel{(62)}{<} +\infty$$

□

Примечание.

1. (60) $\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$
2. $\triangleleft f(x) = \frac{1}{\ln|x|}, x \in [-\pi, \pi]$. Тогда $\forall S$ интеграл (60) расходится при $x_0 = 0$.

Следствие 42.1.

- $f \in L^1$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$
- Существуют четыре конечных предела: $f(x_0+0), f(x_0-0), \alpha_{\pm} := \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда ряд Фурье в точке x_0 сходится к $S = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

(61): т.к. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$

(62): по условию дини

Доказательство.

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ — ограничена вблизи 0 на $[0, \pi]$ \implies по замечанию 1, интеграл (60) сходится. \square

Следствие 42.2.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- f — непрерывно в точке x_0 .
- \exists конечные односторонние производные в точке x_0

Тогда $S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$.

Доказательство. Следует из следствия 1. \square

13 Свертки и аппроксимационные единицы

Определение. $f, K \in L^1[-\pi, \pi]$. $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)K(t)dt$ называется **сверткой** функций f, K .

Лемма 12. Свертка корректно задана.

Доказательство.

$$g(x, t) := f(x - t) \cdot k(t)$$

1. Проверим, что $\varphi(x, y) := f(x - t)$ измерима как функция $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Если это так, то g тоже измерима как произведение измеримых.

Обозначим $\forall a \in \mathbb{R} \ E_a := \mathbb{R}(f(x) < a), v(x, t) = \langle x - t, t \rangle$. Тогда $V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$ измеримо в \mathbb{R}^2 , т.к. это декартово произведение измеримых множеств. Следовательно $\mathbb{R}^2(\varphi < a)$ тоже измеримо в \mathbb{R}^2 .

2. Лежит ли $g \in L^1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$?

$$\iint_{[-\pi, \pi]^2} |g(x, t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt |k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)| dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1 < +\infty$$

Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)k(t)dt$$

— при почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ этот интеграл сходится и задает по x функцию из $L^1[-\pi, \pi]$, т.е. $f * k$ определен при почти всех x , и при этом $\in L^1[-\pi, \pi]$

□

Свойства.

$$1. f * K = K * f$$

Доказательство. Очевидно после замены t на $-t$ под интегралом.

□

$$2. c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) \cdot c_k(K)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f * K) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) \cdot e^{-inx} dt dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)} dx dt = 2\pi c_n(f) \cdot 2\pi c_n(K) \end{aligned}$$

□

- $$3. \begin{aligned} &\bullet f \in L^p[-\pi, \pi] \\ &\bullet K \in L^q[-\pi, \pi] \\ &\bullet \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \leq p \leq +\infty \end{aligned}$$

Тогда $f * K$ — непрерывная функция и $\|f * K\|_{\infty} \leq \|K\|_q \cdot \|f\|_p$

Доказательство. Неравенство очевидно, т.к. это неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |K(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|K\|_q \end{aligned}$$

Если p или $q = +\infty$, то это неравенство надо модифицировать.

Непрерывность:

$$|f * K(x+h) - f * K(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t)) K(t) dt \right| \leq \|K\|_q \cdot \underbrace{\|f_h(x) - f(x)\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ по т. о непр. сдвига}}$$

Это всё верно, если $p < +\infty$. Если же $p = +\infty$, то поменяем местами f и K .

□

- $$4. \begin{aligned} &\bullet 1 \leq p \leq +\infty \\ &\bullet f \in L^p[-\pi, \pi] \\ &\bullet K \in L^1[-\pi, \pi] \end{aligned}$$

Тогда $f * K \in L^p[-\pi, \pi]$ и $\|f * K\|_p \leq \|K\|_1 \cdot \|f\|_p$

Примечание. $*$ похоже на умножение, т.к. $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$ и можно сделать вывод, что L^1 — алгебра.

Примечание. Линейный оператор $A : L^p \rightarrow L^p, f \mapsto f * K$:

$$\forall f \quad \|Af\| \leq C \cdot \|f\|$$

Это значит, что оператор ограничен: $\|A\| \leq C$.

Лекция 14

17 мая

Обозначение. $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

Определение (аппроксимативная единица).

- $D \subset \mathbb{R}$
- h_0 — предельная точка D в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$, удовлетворяющее нижеуказанным аксиомам, называется **аппроксимативной единицей**.

Аксиома 1. $\forall h \in D \quad K_h \in L^1[-\pi, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

Аксиома 2. L_1 нормы функций K_h ограничены в совокупности:

$$\exists M \quad \forall h \quad \int_{[-\pi, \pi]} |K_h| \leq M$$

Аксиома 3. $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h| dx \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

Примечание.

1. Если $K_h \geq 0 \quad \forall h$, то аксиома 1 \Rightarrow аксиома 2.
2. Рассмотрим аксиому 3': $K_h \in L^{+\infty}[-\pi, \pi]$ и $\forall \delta \in (0, \pi) \quad \text{ess sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$

Утверждение. Аксиома 3' \Rightarrow аксиома 3.

Определение. Семейство функций, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3' называется **усиленной аппроксимативной единицей**.

3. Если K_h — (возможно усиленная) аппроксимативная единица, то $\frac{|K_h|}{\|K_h\|_1}$ — тоже (возможно усиленная) аппроксимативная единица.

Доказательство. Первая аксиома очевидна.

Вторая аксиома следует из того, что $\|K_h\|_1 \geq 1$, т.к. $\int K_h = 1$. Аксиомы 3 и 3' тоже следуют из этого соображения. \square

Теорема 43.

- K_h — аппроксимативная единица

Тогда:

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow f * K_h \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{[-\pi, \pi]} f$
2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$
3. K — усиленная аппроксимативная единица, $f \in L^1[-\pi, \pi]$, f непрерывно в x .

Тогда $f * K_h$ непрерывно в x и $f * K_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} f(x)$

Доказательство.

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt$$

1. $\forall \varepsilon > 0, f$ — равномерно непрерывна, т.к. $[-\pi, \pi]$ — компакт.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t : |t| < \delta \quad \forall x \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

M взято из аксиомы 2.

$$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_{\delta}} = I_1 + I_2 < \varepsilon?$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_{\infty} \cdot \int_{E_{\delta}} |K_h| \xrightarrow[\text{акс. 3}]{h \rightarrow h_0} 0$$

Тогда $\exists V(h_0) \quad \forall h \in V(h_0) \quad I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

3. $f \in L^1, K_h \in L^{\infty} \Rightarrow f * K_h$ — непрерывна (в том числе и в x).

Для данного x проверим утверждение $\varepsilon > 0; I_1 + I_2 < \varepsilon; \exists V(h_0) \forall h \in V(h_0)$

f непрерывна в x :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t : |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Как в пункте 1:

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)| dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)| dt \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|) \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{\text{акс. 3'}} 0 \end{aligned}$$

Тогда $\exists V(h_0) \quad \forall h \in V(h_0) \quad I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

2.

$$\begin{aligned} \|f * K_h - f\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt \right| dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| dx dt = \\ &= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt \end{aligned}$$

, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$\stackrel{\text{def}}{=} \|K_h\|_1 \underbrace{\left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right) (0)}_{\rightarrow g(0)=0 \text{ по п.1}}$$

□

Примечание (модификация пункта 2). $f \in L^p[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$

Доказательство. Аналогично пункту 2, но хуже. □

Примечание (модификация пункта 3). $f \in L^1, \exists f(x-0), f(x+0)$. K_h — усиленная аппроксимативная единица, $\forall h \quad K_h$ чётная. Тогда $(f * K_h)(x) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$

14 Суммирование рядов Фурье

14.1 Метод средних арифметических (Чезаро)

Определение.

$$\sum a_n \quad S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

$$\sum a_n \xrightarrow{\text{сред. арифм.}} S$$

, если $\sigma_n \rightarrow S$

Теорема 44 (о перманентности метода средних арифметических).

$$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n \xrightarrow{\text{сред. арифм.}} S$$

Определение (суммы Фейера). $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $S_n(f)$ – част. сумма ряда Фурье.

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$$

Примечание.

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t) dt \xrightarrow{\Phi_n \text{ чётно}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt$$

Пример. Для расходящегося факта $1 - 1 + 1 - 1 \dots$ $\sigma_n \rightarrow \frac{1}{2}$

Доказательство теоремы.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k - S) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |S_k - S| = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N_1+1}^n |S_k - S|}{n+1}}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

□

Теорема 45 (Фейера).

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$. Тогда $\sigma_n(f) \xrightarrow{[-\pi, \pi]} f$
2. $f \in L^p[-\pi, \pi], 1 \leq p \leq +\infty$. Тогда $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$
3. $f \in L^1, f$ непрерывно в x . Тогда $\sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

Не дописано