

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, осень 2021 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция»

- Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример: $\lambda z.(\lambda x.a \ b \ c \ \lambda y.d \ e) \ f$ эквивалентно $\lambda z.((\lambda x.(a \ b \ c \ (\lambda y.(d \ e)))) \ f)$. В аппликациях скобки расставляются слева направо: $\lambda z.(\lambda x.(a \ b \ c \ (\lambda y.(d \ e)))) \ f$ можно преобразовать в $(\lambda z.((\lambda x.(((a \ b) \ c) \ (\lambda y.(d \ e)))))) \ f$.

- Расставьте скобки в выражении: $\lambda z.\lambda x.a \ b \ c \ \lambda y.d \ e \ f$
- Уберите все «лишние» скобки из выражения: $(\lambda f.((\lambda x.(f \ (f \ (x \ (\lambda z.(z \ x)))))) \ z))$
- Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.

- Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
Not	$\lambda x.x \ F \ T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x \ y \ F$	конъюнкция

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- $T \ F$
- $(T \ Not \ (\lambda t.t)) \ F$
- $And \ (And \ F \ F) \ T$

- Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

- Дизъюнкция
- Штрих Шеффера («и-не»)
- Исключающее или

- Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} \ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} \ (f \ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
\bar{n}	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)} \ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n \ f \ (f \ x)$	прибавление 1
$(+)$	$\lambda a.\lambda b.a \ (+1) \ b$	сложение
(\cdot)	$\lambda a.\lambda b.a \ ((+) \ b) \ \bar{0}$	умножение

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- Умножение на 2 ($Mul2$)
- Возведение в степень
- Проверка на чётность
- $IsZero$: возвращает T , если аргумент равен нулю, иначе F

- Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x \ a \ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p.p \ T$	левая проекция
PrR	$\lambda p.p \ F$	правая проекция

- Убедитесь, что $PrL \ (MkPair \ a \ b) \rightarrow_{\beta} a$.

11. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$\begin{aligned} S &:= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z) \\ K &:= \lambda x. \lambda y. x \\ I &:= \lambda x. x \end{aligned}$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK .

Выразите в базисе SK :

- (a) $F = \lambda x. \lambda y. y$
- (b) \bar{I}
- (c) Not
- (d) Xor
- (e) InL
- (f) \bar{n}

Домашнее задание №2: «формализация лямбда-исчисления»

- Придумайте грамматику для лямбда-выражений, однозначно разбирающую любое выражение (в частности, учитывающую все сокращения скобок в записи).
- Приведите пример лямбда-выражения, корректная бета-редукция которого невозможна без переименования связанных переменных. Возможно ли построить такое выражение, чтобы все переменные в лямбда-абстракциях были различными?
- Два выражения A и B назовём родственными, если существует C , что $A \twoheadrightarrow_{\beta} C$ и $B \twoheadrightarrow_{\beta} C$. Как соотносится родственность и бета-эквивалентность?
- Рассмотрим представление лямбда-выражений де Брауна (de Bruijn): вместо имени связанной переменной будем указывать число промежуточных лямбда-абстракций между связывающей абстракцией и переменной. Например, $\lambda x. \lambda y. y \ x$ превратится в $\lambda. \lambda. 0 \ 1$.

Докажите, что $A =_{\alpha} B$ тогда и только тогда, когда представления де Брауна для A и B совпадают. Сформулируйте правила (алгоритмы) для подстановки термов и бета-редукции для этого представления.

- Как мы знаем, $\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega$. А существуют ли такие лямбда-выражения A и B ($A \neq_{\alpha} B$), что $A \rightarrow_{\beta} B$ и $B \rightarrow_{\beta} A$?
- Рассмотрим следующие лямбда-выражения для задания алгебраических типов:

Обозначение	лямбда-терм	название
$Case$	$\lambda l. \lambda r. \lambda c. c \ l \ r$	сопоставление с образцом
InL	$\lambda l. (\lambda x. \lambda y. x \ l)$	левая инъекция
InR	$\lambda r. (\lambda x. \lambda y. y \ r)$	правая инъекция

Сопоставление с образцом — это функция от значения алгебраического типа и двух действий l и r , которая выполняет действие l , если значение создано «левым» конструктором, и r в случае «правого» конструктора. Иными словами, $Case \ l \ r \ c$ — это аналог `case c { InL x -> l x; InR x -> r x }`.

Заметим, что список (например, целых чисел) — это алгебраический тип:

`List = Nil | Cons Integer List.`

Можно сконструировать значение данного типа: `Cons 3 (Cons 5 Nil)`. Можно, например, вычислить его длину:

```
length Nil = 0
length (Cons _ tail) = length tail + 1
```

Определим $Nil = InL \ 0$, а $Cons \ a \ b = InR \ (MkPair \ a \ b)$. Заметим, что теперь списки могут быть напрямую перенесены в лямбда выражения.

Определите следующие функции в лямбда-исчислении для списков:

- (a) вычисление длины списка;
- (b) построение списка длины n из элементов $0, 1, 2, \dots, n - 1$;
- (c) разворот списка: из списка a_1, a_2, \dots, a_n сделать список a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 ;
- (d) функцию высшего порядка *map*, которая по функции f и списку a_1, a_2, \dots, a_n строит список $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$.

Решением задачи является полный текст соответствующего лямбда-выражения с объяснениями механизма его работы. Используйте интерпретатор лямбда-выражений *lci* или аналогичный для демонстрации результата.

7. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.

- (a) Предложите «двоичные нумералы» — способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).
- (b) Предложите реализацию функции $(+1)$ в данном представлении.
- (c) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.

Аналогично прошлому заданию, решение должно содержать полный код лямбда-выражения вместе с объяснением механизма его работы.