

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, осень 2021 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция»

- Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример: $\lambda z.(\lambda x.a \ b \ c \ \lambda y.d \ e) \ f$ эквивалентно $\lambda z.((\lambda x.(a \ b \ c \ (\lambda y.(d \ e)))) \ f)$. В аппликациях скобки расставляются слева направо: $\lambda z.(\lambda x.(a \ b \ c \ (\lambda y.(d \ e)))) \ f$ можно преобразовать в $(\lambda z.((\lambda x.(((a \ b) \ c) (\lambda y.(d \ e)))))) \ f$.

- Расставьте скобки в выражении: $\lambda z.\lambda x.a \ b \ c \ \lambda y.d \ e \ f$
- Уберите все «лишние» скобки из выражения: $(\lambda f.((\lambda x.(f \ (f \ (x \ (\lambda z.(z \ x)))))) \ z))$
- Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.

- Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
Not	$\lambda x.x \ F \ T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x \ y \ F$	конъюнкция

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- $T \ F$
- $(T \ Not \ (\lambda t.t)) \ F$
- $And \ (And \ F \ F) \ T$

- Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

- Дизъюнкция
- Штрих Шеффера («и-не»)
- Исключающее или

- Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} \ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} \ (f \ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
\bar{n}	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)} \ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n \ f \ (f \ x)$	прибавление 1
$(+)$	$\lambda a.\lambda b.a \ (+1) \ b$	сложение
(\cdot)	$\lambda a.\lambda b.a \ ((+) \ b) \ \bar{0}$	умножение

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- Умножение на 2 ($Mul2$)
- Возведение в степень
- Проверка на чётность
- $IsZero$: возвращает T , если аргумент равен нулю, иначе F

- Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x \ a \ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p.p \ T$	левая проекция
PrR	$\lambda p.p \ F$	правая проекция

- Убедитесь, что $PrL \ (MkPair \ a \ b) \rightarrow_{\beta} a$.

- (b) Постройте операцию вычитания 1 из числа
 - (c) Постройте операцию вычитания чисел
 - (d) Постройте операцию деления на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)
 - (e) Постройте операцию деления чисел
 - (f) Сравнение двух чисел (*IsLess*) — истина, если первый аргумент меньше второго.
6. Существует ли выражение A , что существуют такие выражения B и C , что $A \rightarrow_\beta B$ и $A \rightarrow_\beta C$, но B и C различны?
7. Будем говорить, что лямбда-выражение находится в нормальной форме, если в нём невозможно провести бета-редукции. Нормальной формой выражения называется результат (возможно, многократной) его бета-редукции, находящийся в нормальной форме. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:
- (a) $\bar{2} \bar{2}$
 - (b) $\bar{2} \bar{2} \bar{2}$
 - (c) $\bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2}$
8. Напомним определение Y -комбинатора: $\lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x))$. Напомним, что отношение бета-эквивалентности ($=_\beta$) есть транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции. Будем говорить, что выражение не имеет нормальной формы, если никакая конечная последовательность его бета-редукций не приводит к выражению в нормальной форме.
- (a) Покажите, что $Y f =_\beta f (Y f)$.
 - (b) Покажите, что выражение $Y f$ не имеет нормальной формы;
 - (c) Покажите, что выражение $Y (\lambda f.\bar{0})$ имеет нормальную форму.
 - (d) Покажите, что выражение $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} (f Minus1 x)) \bar{2}$ имеет нормальную форму.
 - (e) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} ((+1) (f (Minus1 x)))) \bar{n}$?
 - (f) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{1} (Mul2 (f (Minus1 x)))) \bar{n}$?
 - (g) Определите с помощью Y -комбинатора функцию для вычисления n -го числа Фибоначчи.
9. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
 - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
 - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
 - (d) можно ли определить функцию вычитания 1 и вычитания двух чисел? Что получается, а что — нет?

$$\begin{aligned} L &:= \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.r(\text{this is a fixed point combinator}) \\ R &:= LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{aligned}$$

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
- (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами (без ё) и осмысленной русской фразой в терме L ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.

11. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$\begin{aligned} S &:= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z) \\ K &:= \lambda x. \lambda y. x \\ I &:= \lambda x. x \end{aligned}$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK .

Выразите в базисе SK :

- (a) $F = \lambda x. \lambda y. y$
- (b) \bar{I}
- (c) Not
- (d) Xor
- (e) InL
- (f) \bar{n}