ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, осень 2021 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция»

- 1. Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример: $\lambda z.(\lambda x.a\ b\ c\ \lambda y.d\ e)\ f$ эквивалентно $\lambda z.((\lambda x.(a\ b\ c\ (\lambda y.(d\ e))))\ f)$. В аппликациях скобки расставляются слева направо: $\lambda z.(\lambda x.(a\ b\ c\ (\lambda y.(d\ e))))\ f$ можно преобразовать в $(\lambda z.((\lambda x.((((a\ b)\ c)\ (\lambda y.(d\ e)))))\ f))$.
 - (a) Расставьте скобки в выражении: $\lambda z. \lambda x. a \ b \ c \ \lambda y. d \ e \ f$
 - (b) Уберите все «лишние» скобки из выражения: $(\lambda f.((\lambda x.(f(f(x(\lambda z.(zx))))))z))$
 - (с) Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.
- 2. Напомним определения с лекций:

| Обозначение | лямбда-терм | название |
|----------------|-------------------------------|------------|
| \overline{T} | $\lambda a.\lambda b.a$ | истина |
| F | $\lambda a. \lambda b. b$ | ЛОЖЬ |
| Not | $\lambda x.x F T$ | отрицание |
| And | $\lambda x.\lambda y.x\ y\ F$ | конъюнкция |

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- (a) T F
- (b) $(T \ Not \ (\lambda t.t)) \ F$
- (c) And (And F F) T
- 3. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:
 - (а) Дизъюнкция
 - (b) Штрих Шеффера («и-не»)
 - (с) Исключающее или
- 4. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} (f X), & n > 0 \end{cases}$$

| Обозначение | лямбда-терм | название |
|----------------|--|--------------------|
| \overline{n} | $\lambda f.\lambda x.f^{(n)}$ x | чёрчевский нумерал |
| (+1) | $\lambda n.\lambda f.\lambda x.n \ f \ (f \ x)$ | прибавление 1 |
| (+) | $\lambda a.\lambda b.a \ (+1) \ b$ | сложение |
| (\cdot) | $\lambda a.\lambda b.a \ ((+) \ b) \ \overline{0}$ | умножение |

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (a) Умножение на $2 \, (Mul2)$
- (b) Возведение в степень
- (с) Проверка на чётность
- (d) IsZero: возвращает T, если аргумент равен нулю, иначе F
- 5. Напомним определения с лекций:

| Обозначение | лямбда-терм | название |
|-------------|---|-----------------|
| MkPair | $\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x \ a \ b)$ | создание пары |
| PrL | $\lambda p.p T$ | левая проекция |
| PrR | $\lambda p.p F$ | правая проекция |

(a) Убедитесь, что $PrL\ (MkPair\ a\ b) \rightarrow_{\beta} a.$

- (b) Постройте операцию вычитания 1 из числа
- (с) Постройте операцию вычитания чисел
- (d) Постройте операцию деления на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)
- (е) Постройте операцию деления чисел
- (f) Сравнение двух чисел (IsLess) истина, если первый аргумент меньше второго.
- 6. Существует ли выражение A, что существуют такие выражения B и C, что $A \to_{\beta} B$ и $A \to_{\beta} C$, но B и C различны?
- 7. Будем говорить, что лямбда-выражение находится в нормальной форме, если в нём невозможно провести бета-редукции. Нормальной формой выражения называется результат (возможно, многократной) его бета-редукции, находящийся в нормальной форме. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:
 - (a) $\overline{2}$ $\overline{2}$
 - (b) $\overline{2} \overline{2} \overline{2}$
 - (c) $\overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2}$
- 8. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$. Напомним, что отношение бетаэквивалентности (= $_{\beta}$) есть транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бетаредукции. Будем говорить, что выражение не имеет нормальной формы, если никакая конечная последовательность его бета-редукций не приводит к выражению в нормальной форме.
 - (а) Покажите, что $Y f =_{\beta} f (Y f)$.
 - (b) Покажите, что выражение Y f не имеет нормальной формы;
 - (c) Покажите, что выражение $Y(\lambda f.\overline{0})$ имеет нормальную форму.
 - (d) Покажите, что выражение Y ($\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ (f\ Minus1\ x))$ 2 имеет нормальную форму.
 - (e) Какова нормальная форма выражения $Y(\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ ((+1)\ (f\ (Minus1\ x))))\ \overline{n}?$
 - (f) Какова нормальная форма выражения Y ($\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{1}\ (Mul2\ (f\ (Minus1\ x))))$ \overline{n} ?
 - (g) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления n-го числа Фибоначчи.
- 9. Определим на языке Хаскель следующую функцию: show_church n = show (n (+1) 0) Убедитесь, что show_church (\f -> \x -> f (f x)) вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
 - (a) int_to_church возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
 - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
 - (с) умножение двух чёрчевских нумералов.
 - (d) можно ли определить функцию вычитания 1 и вычитания двух чисел? Что получается, а что нет?
- 10. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F, выполнено R $F =_{\beta} F$ (R F).

- (a) Докажите, что данный комбинатор действительно комбинатор неподвижной точки.
- (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами (без $\ddot{\rm e}$) и осмысленной русской фразой в терме L; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.

11. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$\begin{split} S &:= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z) \\ K &:= \lambda x. \lambda y. x \\ I &:= \lambda x. x \end{split}$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P выражает комбинатор X в базисе SK.

Выразите в базисе SK:

- (a) $F = \lambda x.\lambda y.y$
- (b) $\overline{1}$
- (c) Not
- (d) Xor
- (e) InL
- (f) \overline{n}

Домашнее задание №2: «формализация лямбда-исчисления»

- 1. Придумайте грамматику для лямбда-выражений, однозначно разбирающую любое выражение (в частности, учитывающую все сокращения скобок в записи).
- 2. Приведите пример лямбда-выражения, корректная бета-редукция которого невозможна без переименования связанных переменных. Возможно ли построить такое выражение, чтобы все переменные в лямбда-абстракциях были различными?
- 3. Два выражения A и B назовём родственными, если существует C, что $A \twoheadrightarrow_{\beta} C$ и $B \twoheadrightarrow_{\beta} C$. Как соотносится родственность и бета-эквивалентность?
- 4. Рассмотрим представление лямбда-выражений де Брауна (de Brujin): вместо имени связанной переменной будем указывать число промежуточных лямбда-абстракций между связывающей абстрацией и переменной. Например, $\lambda x.\lambda y.y.x.$ превратится в $\lambda.\lambda.0.1$.

Докажите, что $A =_{\alpha} B$ тогда и только тогда, когда представления де Брауна для A и B совпадают. Сформулируйте правила (алгоритмы) для подстановки термов и бета-редукции для этого представления.

- 5. Как мы знаем, $\Omega \to_{\beta} \Omega$. А существуют ли такие лямбда-выражения A и B $(A \neq_{\alpha} B)$, что $A \to_{\beta} B$ и $B \to_{\beta} A$?
- 6. Рассмотрим следующие лямбда-выражения для задания алгебраических типов:

| Обозначение | лямбда-терм | название |
|-------------|---|--------------------------|
| Case | $\lambda l.\lambda r.\lambda c.c\ l\ r$ | сопоставление с образцом |
| InL | $\lambda l.(\lambda x.\lambda y.x\ l)$ | левая инъекция |
| InR | $\lambda r.(\lambda x.\lambda y.y \ r)$ | правая инъекция |

Сопоставление с образцом — это функция от значения алгебраического типа и двух действий l и r, которая выполняет действие l, если значение создано «левым» конструктором, и r в случае «правого» конструктора. Иными словами, $Case\ l\ r\ c$ — это аналог case c { InL x -> 1 x; InR x -> r x }.

Заметим, что список (например, целых чисел) — это алгебраический тип:

List = Nil | Cons Integer List.

Можно сконструировать значение данного типа: Cons 3 (Cons 5 Nil). Можно, например, вычислить его длину:

```
length Nil = 0
length (Cons _ tail) = length tail + 1
```

Определим $Nil = InL \ 0$, а $Cons \ a \ b = InR \ (MkPair \ a \ b)$. Заметим, что теперь списки могут быть впрямую перенесены в лямбда выражения.

Определите следующие функции в лямбда-исчислении для списков:

- (а) вычисление длины списка;
- (b) построение списка длины n из элементов $0, 1, 2, \ldots, n-1$;
- (c) разворот списка: из списка a_1, a_2, \ldots, a_n сделать список $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$;
- (d) функцию высшего порядка map, которая по функции f и списку a_1, a_2, \ldots, a_n строит список $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$.

Решением задачи является полный текст соответствующего лямбда-выражения с объяснениями механизма его работы. Используйте интерпретатор лямбда-выражений lci или аналогичный для демонстрации результата.

- 7. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.
 - (a) Предложите «двоичные нумералы» способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).
 - (b) Предложите реализацию функции (+1) в данном представлении.
 - (c) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.

Аналогично прошлому заданию, решение должно содержать полный код лямбда-выражения вместе с объяснением механизма его работы.