Траектория в сферических координатах

Вариант 19

Тело движется по траектории в трехмерном пространсве. Положение тела задается сферической СК $(\varphi(t);\ \theta(t);\ r(t))$

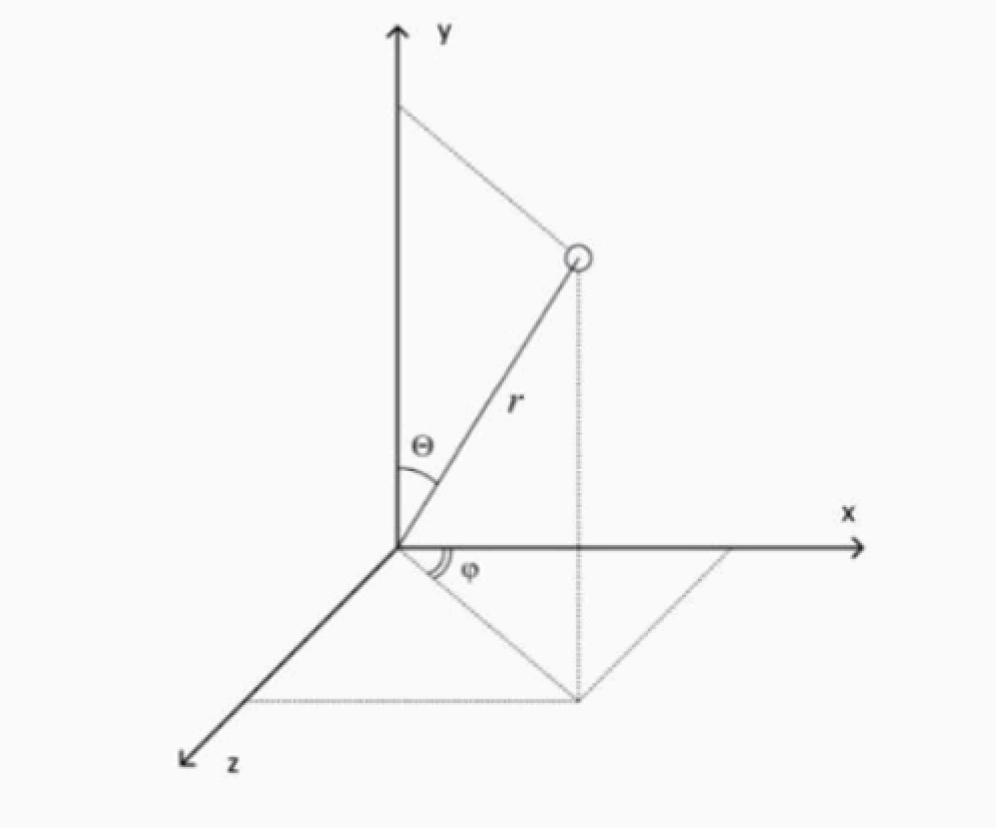


Рис.1.

Построить график траектории движения в пространстве. Найти пройденный путь S_{13} и вектор $\Delta\vec{r}_{13}$ между моментами времени t_1 и t_3. Найти нормальные a_n и тангенциальные a_τ составляющие ускорения в моменты времени t_1, t_2 и t_3. Посчитать значения выражения

$$\left|\frac{a_n(t_1)}{a_\tau(t_1)}\right| + \left|\frac{a_n(t_2)}{a_\tau(t_2)}\right| + \left|\frac{a_n(t_3)}{a_\tau(t_3)}\right| + \frac{|\Delta\vec{r}_{13}|}{S_{13}}$$

и записать его в файл IDZ1.txt

Исходные данные:

$$t_1 = 1\text{ с},\ t_2 = 1.2\text{с},\ t_3 = 1.3\text{с}$$

$$r(t) = 1 + 0.3\sin(20t)$$

$$\varphi(t) = t$$

$$\theta(t) = -e^{-0.001t} + \frac{\pi}{2}$$

Траектория

Чтобы построить траекторию, выполним преобразование сферических координат в декартовые:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$

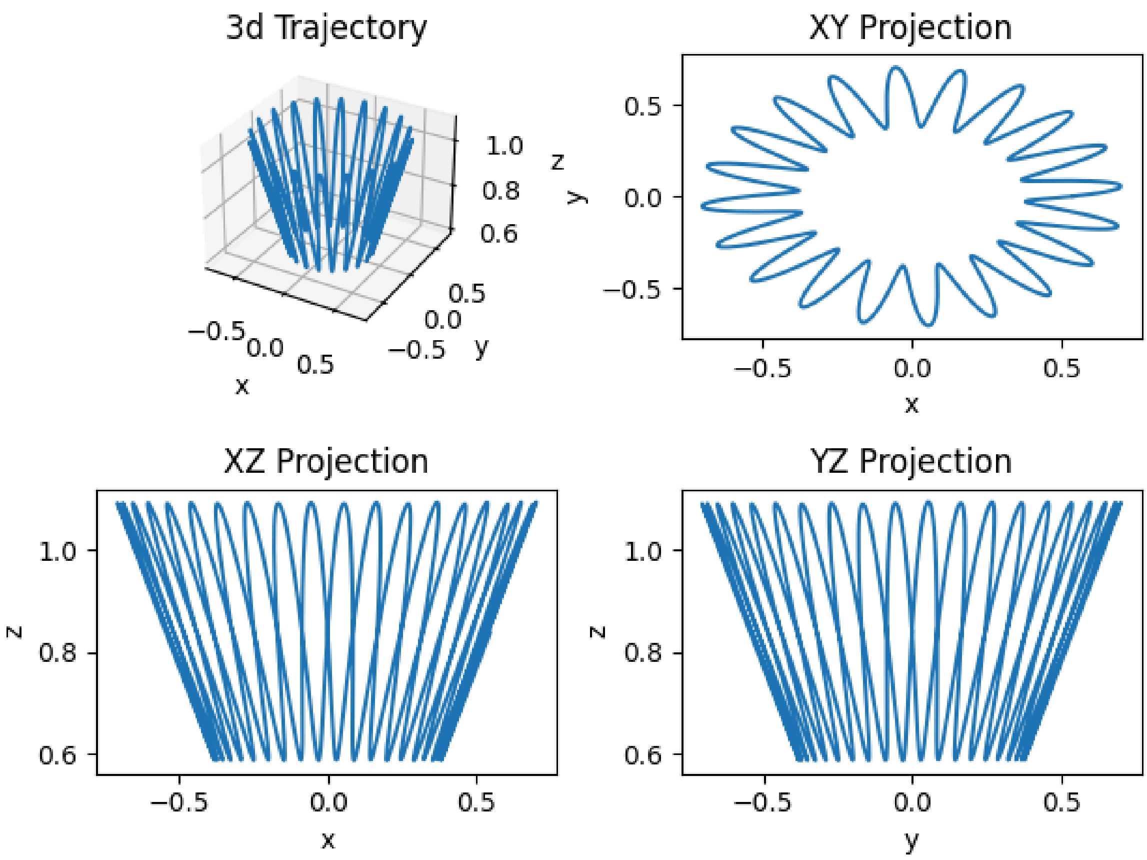
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$z = r\cos(\theta)$$

In [1]:

```
%matplotlib inline

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Временной интервал
t = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)

# Определение функций для сферических координат
r = 1 + 0.3 * np.sin(20 * t)
phi = t
theta = -np.exp(-0.001 * t) + np.pi / 2

# Преобразование сферических координат в декартовы
x = r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
y = r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
z = r * np.cos(theta)

# Построение графика
fig = plt.figure()

# Первый подграфик (3D)
ax1 = fig.add_subplot(221, projection='3d')  # 1 строка, 2 колонки, 1-й подгр
ax1.plot(x, y, z)
ax1.set_xlabel('x')
ax1.set_ylabel('y')
ax1.set_zlabel('z')
ax1.set_title('3d Trajectory')
plt.tight_layout()  # Для улучшения размещения подграфиков

# Второй подграфик (2D)
ax2 = fig.add_subplot(222)  # 1 строка, 2 колонки, 2-й подграфик
ax2.plot(x, y)
ax2.set_xlabel('x')
ax2.set_ylabel('y')
ax2.set_title('XY Projection')
plt.tight_layout()

# Третий подграфик (2D)
ax3 = fig.add_subplot(223)  # 1 строка, 2 колонки, 2-й подграфик
ax3.plot(x, z)
```

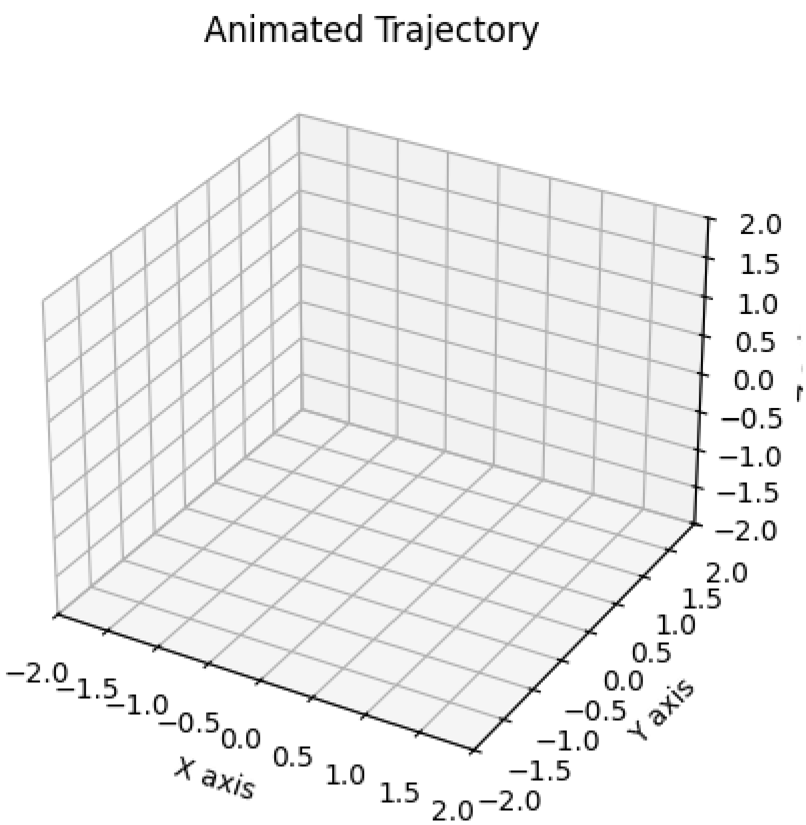
```
ax3.set_xlabel('x')
ax3.set_ylabel('z')
ax3.set_title('XZ Projection')
plt.tight_layout()

# Четвертый подграфик (2D)
ax4 = fig.add_subplot(224)   # 1 строка, 2 колонки, 2-й подграфик
ax4.plot(y, z)
ax4.set_xlabel('y')
ax4.set_ylabel('z')
ax4.set_title('YZ Projection')
plt.tight_layout()

plt.show()
```

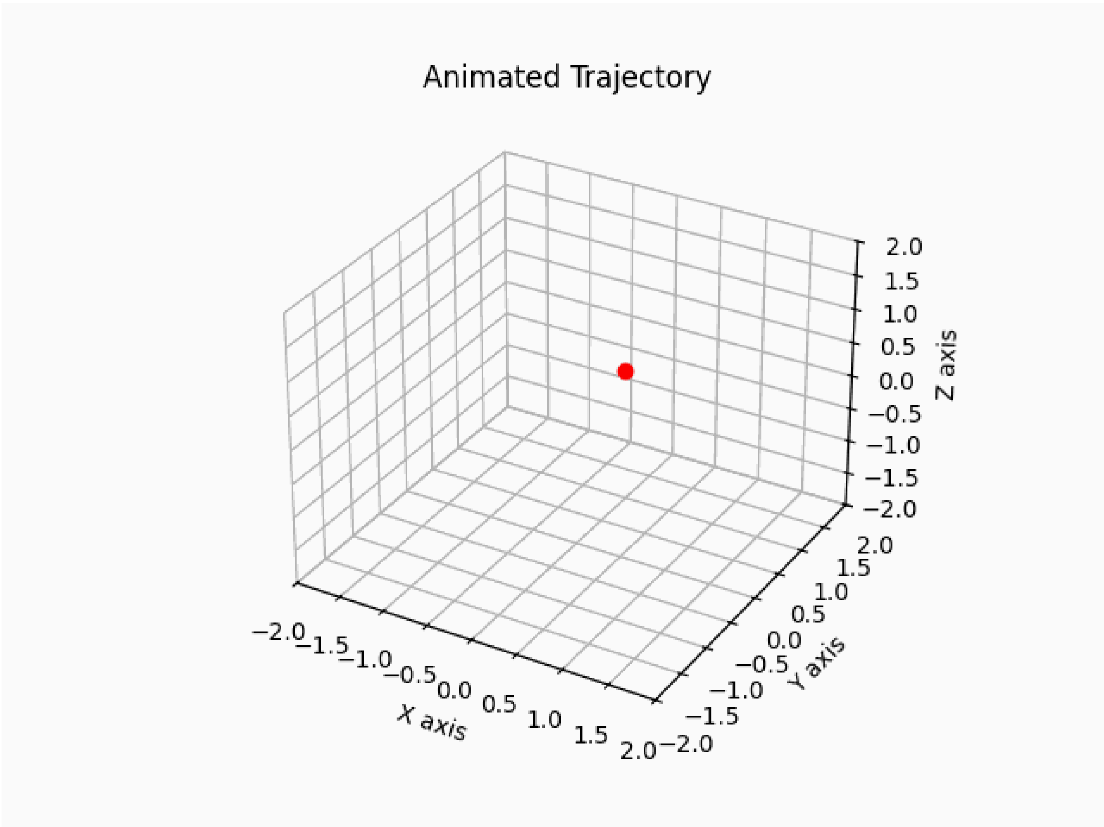


Анимация Траектоии

In [2]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib.animation import FuncAnimation

# Временной интервал
t = np.linspace(0, 10, 500)

# Определение функций для сферических координат
r = 1 + 0.3 * np.sin(20 * t)
phi = t
theta = -np.exp(-0.001 * t) + np.pi / 2

# Преобразование сферических координат в декартовы
```

```
x = r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
y = r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
z = r * np.cos(theta)

# Настройка графика
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.set_xlim([-2, 2])
ax.set_ylim([-2, 2])
ax.set_zlim([-2, 2])
ax.set_xlabel('X axis')
ax.set_ylabel('Y axis')
ax.set_zlabel('Z axis')
ax.set_title('Animated Trajectory')

# Создание точки для анимации
point, = ax.plot([], [], [], 'ro')  # 'ro' означает красная точка
trajectory_line, = ax.plot([], [], [], 'b-')  # 'b-' означает синяя линия


# Инициализация функции
def init():
    point.set_data([], [])
    point.set_3d_properties([])
    trajectory_line.set_data([], [])
    trajectory_line.set_3d_properties([])
    return point, trajectory_line


# Функция обновления для анимации
def update(frame):
    # Обновляем позицию точки
    point.set_data(x[frame:frame + 1], y[frame:frame + 1])  # Передаем масс
    point.set_3d_properties(z[frame:frame + 1])  # Передаем массив длиной 1

    # Обновляем данные для линии
    trajectory_line.set_data(x[:frame + 1], y[:frame + 1])  # Все данные до
    trajectory_line.set_3d_properties(z[:frame + 1])  # Все данные до текущ

    return point, trajectory_line


# Создание анимации
ani = FuncAnimation(fig, update, frames=len(t), init_func=init, blit=True

# Сохранение анимации в формате GIF
# ani.save('trajectory_animation.gif', writer='pillow', fps=30)

# plt.show()
```





Вектор $\vec{r}(t)$

Радиус вектор легко выражается через декартовые координаты, которые ранее уже были найдены, по следующей формуле

$$\vec{r} = \{x,\ y,\ z\} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z},$$

где $\vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z}$ - орты декартовой системы координат (единичные векторы)

Сделаем это с помощью символьной библиотеки sympy

In [3]:

```
import sympy as sp

# Определяем переменные
t = sp.symbols('t')

# Определяем функции в сферических координатах
r_t = 1 + 0.3 * sp.sin(20 * t)
phi_t = t
theta_t = -sp.exp(-0.001 * t) + sp.pi / 2

# Преобразуем в декартовы координаты
x_t = r_t * sp.sin(theta_t) * sp.cos(phi_t)
y_t = r_t * sp.sin(theta_t) * sp.sin(phi_t)
z_t = r_t * sp.cos(theta_t)

# Находим вектор r
r_vec = (x_t, y_t, z_t)

# Определяем t1 и t3
t1 = 1
t3 = 1.3

# Вычисляем векторы r(t1) и r(t3)
r_t1 = (x_t.subs(t, t1), y_t.subs(t, t1), z_t.subs(t, t1))
r_t3 = (x_t.subs(t, t3), y_t.subs(t, t3), z_t.subs(t, t3))

# Находим разность r(t3) - r(t1)
delta_r = (r_t3[0] - r_t1[0], r_t3[1] - r_t1[1], r_t3[2] - r_t1[2])

# Вычисляем модуль delta_r
delta_r_magnitude = sp.sqrt(delta_r[0]**2 + delta_r[1]**2 + delta_r[2]**2


# Печатаем результаты
print("r(t):", r_vec)
print("r(t1):", r_t1)
print("r(t3):", r_t3)
print("r(t3) - r(t1):", delta_r)
print(f"|r(t3) - r(t1)|: {delta_r_magnitude} ≈ {float(delta_r_magnitude)}
```

```
r(t): ((0.3*sin(20*t) + 1)*cos(t)*cos(exp(-0.001*t)), (0.3*sin(20*t) + 1)*
sin(t)*cos(exp(-0.001*t)), (0.3*sin(20*t) + 1)*sin(exp(-0.001*t)))
r(t1): (0.541143086236494*(0.3*sin(20) + 1)*cos(1), 0.541143086236494*(0.3
*sin(20) + 1)*sin(1), 0.25227915970143*sin(20) + 0.840930532338102)
r(t3): (0.177953237971601, 0.641005794121331, 1.03310883861376)
r(t3) - r(t1): (-0.541143086236494*(0.3*sin(20) + 1)*cos(1) + 0.1779532379
71601, -0.541143086236494*(0.3*sin(20) + 1)*sin(1) + 0.641005794121331, 0.
192178306275659 - 0.25227915970143*sin(20))
|r(t3) - r(t1)|: sqrt((0.192178306275659 - 0.25227915970143*sin(20))**2 +
(-0.541143086236494*(0.3*sin(20) + 1)*sin(1) + 0.641005794121331)**2 + (-
0.541143086236494*(0.3*sin(20) + 1)*cos(1) + 0.177953237971601)**2) ≈ 0.20
736488964957212
```

$$|\Delta\vec{r}_{13}| = 0.20736488964957212$$

Пройденный путь $S(t)$

Пройденный путь определяется по формуле

$$S(t) = \int_0^t v(t)dt,$$

где $v(t)$ - модуль скорости, который можно найти по формулам

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

К сожалению, не получится вычислить пройденный путь с помощью символьной библиотеки sympy, так как искомый интеграл слишком сложный и, вероятно, не берется аналитически, поэтому вычислим его численно с помощью библиотеки scipy

In [4]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

# Определяем переменную времени
t = sp.symbols('t')

# Определяем функции в сферических координатах
r_t = 1 + 0.3 * sp.sin(20 * t)
phi_t = t
theta_t = -sp.exp(-0.001 * t) + sp.pi / 2

# Преобразуем в декартовы координаты
x_t = r_t * sp.sin(theta_t) * sp.cos(phi_t)
y_t = r_t * sp.sin(theta_t) * sp.sin(phi_t)
z_t = r_t * sp.cos(theta_t)

# Находим скорость (производная положения по времени)
v_x = sp.diff(x_t, t)
v_y = sp.diff(y_t, t)
v_z = sp.diff(z_t, t)

# Вычисляем модуль скорости
v = sp.sqrt(v_x**2 + v_y**2 + v_z**2)

def speed(t_val):
    return v.subs(t, t_val)

# Определяем t1 и t3
t1 = 1
t3 = 1.3

# Численно вычисляем пройденный путь между t1 и t3
path_t1_t3, _ = quad(speed, t1, t3)
```

```python
# Печатаем результаты
print("Пройденный путь между t1 и t3:", path_t1_t3)
```

Пройденный путь между t1 и t3: 1.1755928616566096

$$S_{13} = 1.1755928616566096$$

Нормальное a_n и тангенсальное a_τ ускорения

Нормальное ускорение вычислим по формуле:

$$a_n(t) = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

где a - полное ускорение, a_τ - тангенсальное ускорение:

$$a_\tau(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

выполним вычисления в sympy

In [5]:

```python
import sympy as sp

# Определяем переменную времени
t = sp.symbols('t')

# Определяем функции в сферических координатах
r_t = 1 + 0.3 * sp.sin(20 * t)
phi_t = t
theta_t = -sp.exp(-0.001 * t) + sp.pi / 2

# Преобразуем в декартовы координаты
x_t = r_t * sp.sin(theta_t) * sp.cos(phi_t)
y_t = r_t * sp.sin(theta_t) * sp.sin(phi_t)
z_t = r_t * sp.cos(theta_t)

# Находим скорость (производная положения по времени)
v_x = sp.diff(x_t, t)
v_y = sp.diff(y_t, t)
v_z = sp.diff(z_t, t)

# Вычисляем модуль скорости
speed = sp.sqrt(v_x**2 + v_y**2 + v_z**2)

# Полное ускорение
a_x = sp.diff(v_x, t)
a_y = sp.diff(v_y, t)
a_z = sp.diff(v_z, t)
```

```python
a = sp.sqrt(a_x**2 + a_y**2 + a_z**2)

# Тангенциальное ускорение
tangential_acceleration = abs(sp.diff(speed, t))

# нормальное ускорение
normal_acceleration = sp.sqrt(a**2 - tangential_acceleration**2)

# Подставляем значения времени для t1, t2 и t3
time_points = [1, 1.2, 1.3]
results = []

for t_value in time_points:
    normal_a_val = normal_acceleration.subs(t, t_value).evalf()
    tangential_a_val = tangential_acceleration.subs(t, t_value).evalf()
    results.append((t_value, normal_a_val, tangential_a_val))

# Вывод результатов
for t_value, normal_a_val, tangential_a_val in results:
    print(f"t = {t_value}: Нормальное ускорение = {normal_a_val}, Тангенциальн
```

```
t = 1: Нормальное ускорение = 32.3478083377048, Тангенциальное ускорение = 105.09
4301557361
t = 1.2: Нормальное ускорение = 13.8831311118877, Тангенциальное ускорение = 107.
599561968996
t = 1.3: Нормальное ускорение = 19.6702072485348, Тангенциальное ускорение = 89.8
367794321750
```

$$a_n(t_1) = 32.3478083377048,\ a_\tau(t_1) = 105.094301557361$$

$$a_n(t_2) = 13.8831311118877,\ a_\tau(t_2) = 107.599561968996$$

$$a_n(t_3) = 19.6702072485348,\ a_\tau(t_3) = 89.8367794321750$$

Найдем значения выражения

$$\left|\frac{a_n(t_1)}{a_\tau(t_1)}\right| + \left|\frac{a_n(t_2)}{a_\tau(t_2)}\right| + \left|\frac{a_n(t_3)}{a_\tau(t_3)}\right| + \frac{|\Delta\vec{r}_{13}|}{S_{13}}$$

In [6]:
```python
s = 0

for _, normal_a_val, tangential_a_val in results:
    s += abs(normal_a_val / tangential_a_val)

s += (float(delta_r_magnitude) / path_t1_t3)

print(s)

with open('IDZ1.txt', 'w', encoding='utf-8') as file:
    file.write(str(s))
```

```
0.832170539070023
```

$$\left|\frac{a_n(t_1)}{a_\tau(t_1)}\right| + \left|\frac{a_n(t_2)}{a_\tau(t_2)}\right| + \left|\frac{a_n(t_3)}{a_\tau(t_3)}\right| + \frac{|\Delta\vec{r}_{13}|}{S_{13}} = 0.832170539070023$$