משוואות התנועה

1 מבוא

כפי שמקובל הרבה מאמרים אקדמאים, במסמך הבא אות שמסומנת ב- **מודגש** מסמלת ווקטור. אות שלא מסומנת במודגש מסמלת סקאלר.

2 משוואות התנועה

ניוטון אמר שכוחות המשיכה שמפעילים שני גופים אחד על השני הם

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = \frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

כאשר M המסה של גוף אחד (בד"כ הגדול מביניהם), m המסה של הגוף השני.
באותו אופן, $\mathbf{r}_M$ הוא וקטור המיקום של הגוף הראשון, $\mathbf{r}_m$ הוא וקטור המיקום של ההגוף השני.
$\mathbf{r}$ הוא וקטור המרחק בין שני הגופים (נמדד ממרכזי המסה שלהם), כלומר $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$
r הוא הגודל של וקטור המרחק, כלומר $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$.
G הוא קבוע הגרביטציה של ניוטון.
נחלק במסות ונחסר את המשוואות, ונקבל משוואת תנועה יחסית עבור וקטור $\mathbf{r}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\left(M+m\right)}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

אם גוף אחד הוא כדור הארץ וגוף שני הוא לווין אפשר לומר שמסת הגוף השני זניחה ($m \ll M$). ואז מתקבלת המשוואה

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

נהוג להחליף את המכפלה של קבוע הגרביטציה עם מסת כדור הארץ בקבוע שנקרא קבוע הגרביטציה הסטנדרטי $\mu = GM$.
בעבור כדור הארץ $\mu_{earth} = 3.986 \cdot 10^{14}\frac{m^3}{s^2}$

משוואות התנועה אם כן הן

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

שים לב שהמשוואה האחרונה היא למעשה שלוש משוואות שמתארות את מיקום הלווין במרחב:

$$\ddot{r}_x = -\frac{\mu}{\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} r_x \tag{6}$$

$$\ddot{r}_y = -\frac{\mu}{\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} r_y \tag{7}$$

$$\ddot{r}_z = -\frac{\mu}{\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} r_z \tag{8}$$

היות ואלה משוואות מסדר שני, יש צורך בשני תנאי שפה על מנת לפתור את המשוואה. נהוג לתת את מיקום ומהירות הלווין בזמן אפס.

$$\mathbf{r}\left(t=0\right) = \mathbf{r}_0 \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{r}}\left(t=0\right) = \mathbf{v}_0 \tag{10}$$

3 משימה

כתוב תכנה שמקבלת את המיקום ואת המהירות של הלווין בזמן אפס, וזמן בשניות. התכנה פולטת את מיקום הלווין לאחר משך הזמן הזה. (ניתן להשתמש בפונקציות שפותרות Ordinary Differential Equations - ODE של Matlab או SciPy)
עבור לווין שתנאי ההתחלה שלו הם:

$$rx\left(0\right) = 6871km$$
$$ry\left(0\right) = rz\left(0\right) = 0$$
$$v_y\left(0\right) = 7.62\frac{km}{s}$$
$$v_x = v_z = 0$$

כתוב לולאה שבודקת את מיקום הלווין כל 60 שניות לאורך של 24 שעות.
זהו למעשה לווין שמקיף את כדור הארץ בגובה 500 ק"מ (כי רדיוס כדוה"א הוא 6371 ק"מ). נסה לצייר את מסלול הלווין בגרף תלת ממדי. כיצד ישתנה המסלול אם נגדיל את המהירות בזמן אפס?