משוואות התנועה - מסמך מלא

1 משוואות התנועה תחת הגרוויטציה בלבד

ניוטון אמר שכוחות המשיכה שמפעילים שני גופים אחד על השני הם

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = \frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

כאשר M המסה של גוף אחד (בד"כ הגדול מביניהם), m המסה של הגוף השני.

באותו אופן, $\mathbf{r}_M$ הוא וקטור המיקום של הגוף הראשון, $\mathbf{r}_m$ הוא וקטור המיקום של ההגוף השני.

$\mathbf{r}$ הוא וקטור המרחק בין שני הגופים (נמדד ממרכזי המסה שלהם), כלומר $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$
r הוא הגודל של וקטור המרחק, כלומר $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$.

G הוא קבוע הגרביטציה של ניוטון.

נחלק במסות ונחסר את המשוואות, ונקבל משוואת תנועה יחסית עבור וקטור $\mathbf{r}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\left(M+m\right)}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

אם גוף אחד הוא כדור הארץ וגוף שני הוא לווין אפשר לומר שמסת הגוף השני זניחה ($m \ll M$). ואז מתקבלת המשוואה

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

נהוג להחליף את המכפלה של קבוע הגרביטציה עם מסת כדור הארץ בקבוע שנקרא קבוע הגרביטציה הסטנדרטי $\mu = GM$.

בעבור כדור הארץ $\mu_{earth} = 3.986 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$

משוואות התנועה אם כן הן

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

שים לב שהמשוואה האחרונה היא למעשה שלוש משוואות שמתארות את מיקום הלווין במרחב:

$$\ddot{r}_x = -\frac{\mu}{\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} r_x \tag{6}$$

$$\ddot{r}_y = -\frac{\mu}{\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} r_y \tag{7}$$

$$\ddot{r}_z = -\frac{\mu}{\left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} r_z \tag{8}$$

היות ואלה משוואות מסדר שני, יש צורך בשני תנאי שפה על מנת לפתור את המשוואה. נהוג לתת את מיקום ומהירות הלווין בזמן אפס.

$$\mathbf{r}\left(t = 0\right) = \mathbf{r}_0 \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{r}}\left(t = 0\right) = \mathbf{v}_0 \tag{10}$$

2 מודלים אחרים

המשוואה בפרק הקודם לקחה בחשבון רק את כח הגרוויטציה שפועל על הלוויין. זה מודל די מדוייק של תנועת הלוויין. במודל הזה יוצר תנועה אליפסית של הלוויין מסביב לכדור הארץ. הסתבר שלאורך זמן הלוויין אומנם נע במסלול כזה אליפטי, אבל פועלים עליו מגוון כוחות נוספים. סדר הגודל של הכוח שהם מפעילים על הלוויין קטן בהרבה מכח הכבידה, אבל לאורך זמן ניתן לראות את השפעתם.

נמנה פה כמה מהכוחות האלה, ונתאר שניים מהם לעומק

1. כח החיכוך עם אטמוספירה דלילה
2. כח שמטרתו לתקן את פחיסותו וצורתו של כדור הארץ (המודל הקפלריאני הניח כדור עגול מושלם)
3. לחץ קרינת השמש

4. הכבידה של הירח
5. הכבידה של השמש

על מנת להכניס לתוך המשוואות את הכוחות הנוספים, פשוט מוסיפים את התרומה שלהם לתאוצה, וכך יוצא שמשוואת התנועה הופכת ל

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_p \tag{11}$$

כאשר $\mathbf{a}_p$ הוא איבר שמכיל בתוכו את סך כל התאוצות שמשתתפות במודל.

לדוגמא, עבור מודל שכולל חיכוך ופחיסות כדוה"א $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_C$. אם $\mathbf{a}_d$ היא תאוצה שנובעת מחיכוך ו - $\mathbf{a}_C$ היא תאוצה שנובעת מפחיסות כדו"הא אז המודל שלנו נהיה:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_C \tag{12}$$

3 כוח החיכוך

תרומת החיכוך לתאוצה היא:

$$\mathbf{a}_d = -\frac{1}{2}\frac{C_D A}{m}\rho v_{rel}\mathbf{v}_{rel} \tag{13}$$

3.1 קבועים

הקבועים הם:

- C_D - מקדם חיכוך אמפירי.

זהו מקדם שתלוי בצורת הלוויין והחומר. בד"כ משתמשים בערך 2.2 או 2.1 שנובע מהנחה שהלוויין בנוי מאלומיניום והוא מקורב לפלטה

- A - שטח הלוויין שניצב לתנועה

אם זה לוויין שלנו בד"כ אנחנו יודעים את ההכוון שלו. משתמשים בידע הזה בשביל לחשב את שטח החתך. אם מדובר על זבל חללי שמסתובב בצורה חופשית אי אפשר לחשב את הגודל הזה וצריך להעריך אותו. בד"כ ההערכה נעשית על בסיס שטח חתך מכ"מי כפי שנתפס במכשור שעוקב אחרי גופים בחלל

- m - מסת הלוויין

אם ללוויין יש מנועים והוא פולט חומר כדי לנוע המסה שלו משתנה בין תמרון לתמרון. כדי לחשב את תנועת הלוויין תו"כ תמרון צריך לקחת בחשבון את השינוי במסה. אנחנו כרגע מדברים על תנועה חופשית בלי הפעלת מנועים אז אפשר להניח ש m קבוע

3.2 משתנים

יש במשוואה שני משתנים עיקריים: הראשון הוא המהירות והשני הצפיפות.

המהירות $\mathbf{v}_{rel}$ היא לא המהירות שנתונה במשוואות המצב כמהירות הלוויין אלא המהירות היחסית בין מהירות הלוויין $\mathbf{v}$ לבין מהירות האטמוספירה $\mathbf{v}_{atm}$
$(\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{atm})$

חישוב המהירות היחסית תלוי במיקום הלוויין יחסית לכדור הארץ, סיבוב כדור הארץ, העונה בשנה ומשתנים נוספים. ניתן להניח שמהירות האטמוספירה זניחה. במודל אטמוספירה סטטית המהירות שבה משתמשים היא כן $\mathbf{v}$

המשתנה השני הוא צפיפות האטמוספירה ρ.

ישנם מודלים רבים לחישוב צפיפות האטמוספירה. מודלים מדוייקים ייקחו בחשבון את העונה ואת מיקום הלוויין, תופעות אקלימיות כמו זרמי חום ודברים דומים.

במקרה שלנו נניח שהאטמוספירה זהה מסביב לכדור הארץ והדבר היחיד שמשפיע עליה הוא גובה הלוויין. במקרה כזה ניתן להשתמש במודל צפיפות אקספוננציאלי כזה:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}} \tag{14}$$

כאשר h הוא גובה הלוויין $h = r - R_e$ (R_e הוא רדיוס כדור הארץ), h_0 הוא גובה ייחוס, ρ_0 היא צפיפות ייחוס, ו- H הוא קבוע סקאלה. שלושת הקבועים אחרונים נבחרים מתוך טבלא 1.

Altitude h_{ellp} (km)	Base Altitude h_o (km)	Nominal Density ρ_o (kg/m^3)	Scale Height H (km)	Altitude h_{ellp} (km)	Base Altitude h_o (km)	Nominal Density ρ_o (kg/m^3)	Scale Height H (km)
0–25	0	1.225	7.249	150–180	150	2.070×10^{-9}	22.523
25–30	25	3.899×10^{-2}	6.349	180–200	180	5.464×10^{-10}	29.740
30–40	30	1.774×10^{-2}	6.682	200–250	200	2.789×10^{-10}	37.105
40–50	40	3.972×10^{-3}	7.554	250–300	250	7.248×10^{-11}	45.546
50–60	50	1.057×10^{-3}	8.382	300–350	300	2.418×10^{-11}	53.628
60–70	60	3.206×10^{-4}	7.714	350–400	350	9.518×10^{-12}	53.298
70–80	70	8.770×10^{-5}	6.549	400–450	400	3.725×10^{-12}	58.515
80–90	80	1.905×10^{-5}	5.799	450–500	450	1.585×10^{-12}	60.828
90–100	90	3.396×10^{-6}	5.382	500–600	500	6.967×10^{-13}	63.822
100–110	100	5.297×10^{-7}	5.877	600–700	600	1.454×10^{-13}	71.835
110–120	110	9.661×10^{-8}	7.263	700–800	700	3.614×10^{-14}	88.667
120–130	120	2.438×10^{-8}	9.473	800–900	800	1.170×10^{-14}	124.64
130–140	130	8.484×10^{-9}	12.636	900–1000	900	5.245×10^{-15}	181.05
140–150	140	3.845×10^{-9}	16.149	1000–	1000	3.019×10^{-15}	268.00

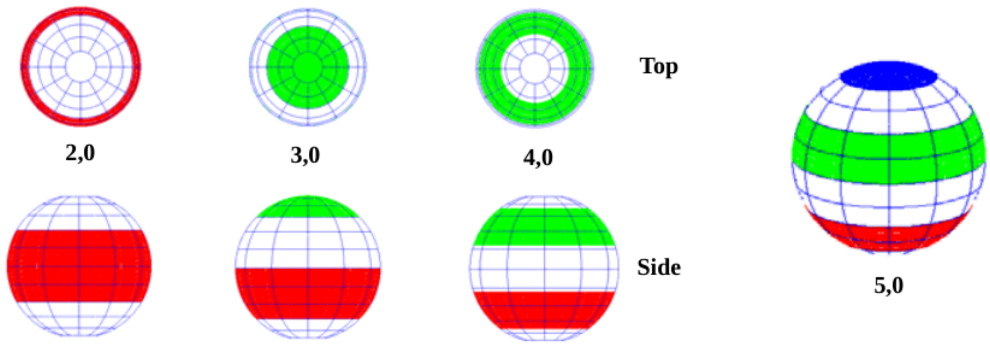
טבלה 1: קבועים לצפיפות

4 עיוות מכדוריות

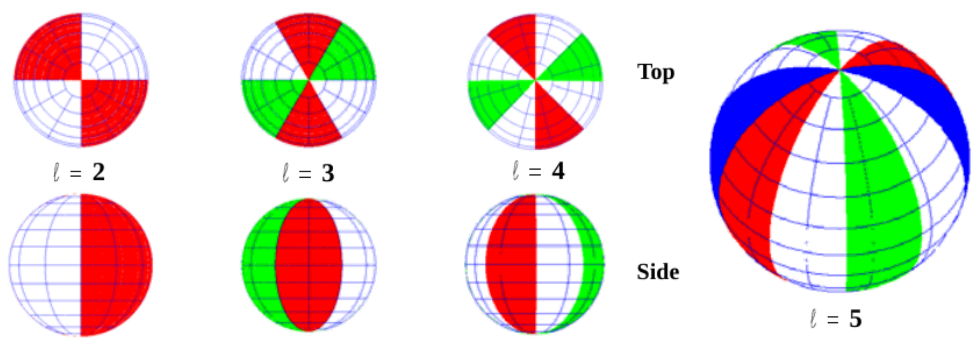
משוואה (1) הניחה שכדור הארץ הוא... כדור. למעשה כדוה"א הוא לא כדור מושלם. הוא פחוס מעט, ויש לו בליטות שנובעות מהרים, ומגאות ושפל.

כדי לחשב את ההשפעות של העיוותים האלה מגדירים פונקציות פוטנציאל הרמוניות שמייצגות את העיוות. מחברים את הפונקציות האלה בשביל לקבל את התרומה הכוללת של יציאה מכדוריות. את ההרמוניות האלה מחלקים לשלושה סוגים עיקריים: הרמוניות רוחביות (zonal harmonics) אותן ניתן לראות באיור 1 - הן מתארות בעיקר את העיוות של הכדור בקווי רוחב, הרמוניות גזרתיות (sectoral harmonics) המתוארות באיור 2 - הן מייצגות את העיוות של הכדור בקווי אורך, הרמוניות טסרליות (tesseral harmonics) הן מייצגות את העיוות של הכדור במקטעים - ראה איור 3.

כל אחת מפונקציות ההרמוניה מוסיפה עוד שינוי קטן לפוטנציאל והפוטנציאל הוא סך כל התרומות. האיבר הראשון בפוטנציאל, ההרמוניה הרוחבית שנקראת $J2$, תורמת יותר מכל האחרות בסדר גודל. ההרמוניות הרוחביות דומיננטיות יותר מהסקטורליות.



איור 1: Zonal Harmonics



איור 2: Sectoral Harmonics

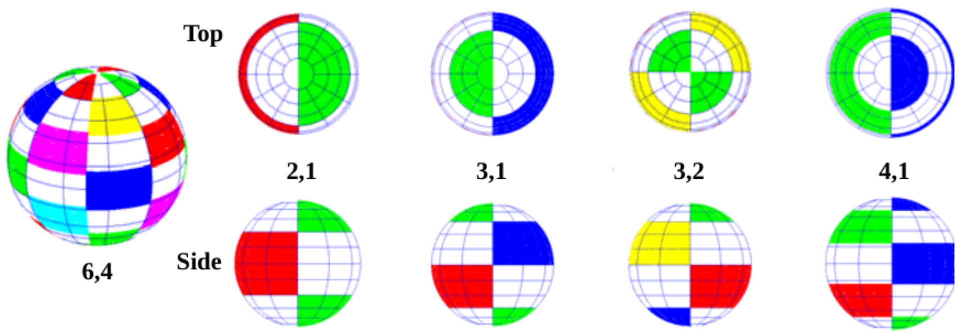
ואלה יותר מהטסרליות.

בגלל שההשפעה הגדולה ביותר היא של ההרמוניה הראשונה, מקובל, כשמקדמים מיקום של לוויין לאורך זמן של כשנה, להשתמש רק בה.

התרומה של $J2$ נתונה כך:

$$\mathbf{a}_{J2} = -\frac{3}{2} J2 \left(\frac{\mu}{r^2}\right) \left(\frac{Re}{r}\right)^2 \begin{bmatrix} \left(1 - 5\left(\frac{z}{r}\right)^2\right) \frac{x}{r} \\ \left(1 - 5\left(\frac{z}{r}\right)^2\right) \frac{y}{r} \\ \left(3 - 5\left(\frac{z}{r}\right)^2\right) \frac{z}{r} \end{bmatrix} \tag{15}$$

כאשר $J2 = 1082.63 \cdot 10^{-6}$ הוא קבוע ו - R_e הוא רדיוס כדור הארץ.

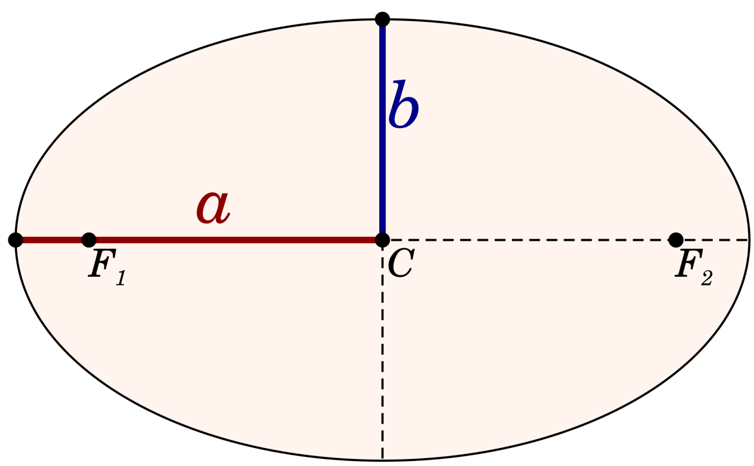


איור 3: Tesseral Harmonics

5 חישוב זמן הקפה

ניתן לחשב זמן הקפה של לוויין לפי הנוסחא הבאה:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \tag{16}$$



איור 4: חצי הציר

כאשר μ הוא קבוע הגרביטציה הסטנדרטי $\mu_{earth} = 3.986 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$. ו- a הוא חצי הציר הגדול של המסלול האליפטי.

באיור 1 ניתן לראות את ההגדרה של חצי הציר הגדול. לווין שיסתובב סביב כוכב ינוע במסלול אליפטי שהמרכז שלו F1. לפעמים חצי הציר הגדול נתון (נגיד כשמקבלים את נתוני הלוויין בפורמט מודרני XML). ניתן לחשב את הגודל של a ע"י שימוש בנוסחא הבאה:

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v}{\mu}\right)^{-1} \tag{17}$$

כאשר $r = |\mathbf{r}|$, $v = |\mathbf{v}|$ הם הגדלים של המיקום והמהירות. באלמנטי מסלול מודרניים בפורמט XML יש גם את חצי הציר הגדול.

המשוואות האלה נובעות ממשוואת שימור האנרגיה ואפשר למצוא את הפיתוח שלהן בפרק הראשון של הספר של בייטס או בפרק הראשון והשלישי בספר של ואלאדו

דרך אחרת לחשב זמן הקפה היא ע"י שימוש בתנועה ממוצעת (n, mean motion). - התנועה הממוצעת נתונה ב TLE ביחידות של הקפות ליום. לכן הקשר בינה לבין זמן ההקפה הוא

$$T = \frac{2\pi}{n} \tag{18}$$

6 נקדות הזמן הרצויות

האלגוריתם לחישוב המרחק בין הלווינים CATCH עושה שימוש בנקודות גאוס לובאטו. הנקודות האלה מוגדרות על הקטע $[-1, 1]$ כך:

$$\tau_j = -\cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, \cdots, N \tag{19}$$

ניתן להעביר את הנקודות האלה לקטע (a, b) כך:

$$t_j = \frac{b-a}{2}\cos\left(\pi\frac{j}{N}\right) + \frac{b+a}{2} \tag{20}$$

כש $j = 0 \ldots N$ הוא אינדקס ו N הוא מספר הנקודות שדוגמים בקטע.

CATCH אמור לעבוד במשך תקופה מקסימאלית של t_{max} (נניח $t_{max} = 2\,\text{weeks} = 1,209,600\,\text{sec}$) האלגוריתם מחלק את התקופת הזמן הזו למקטעים באורך $\Gamma = \frac{T}{\delta}$ כש T זה זמן ההקפה של הלוויין, δ זה מספר הקטעים אליהם מחלקים את זמן ההקפה, אנחנו בדקנו $\delta = 4, 8, 16, 32$. יצא לנו שאין הרבה הבדל בדיוק בין 16 ל 32. ולכן כדאי להשתמש ב $\delta = 16$.

בכל קטע Γ נדגום $N = 32$ נקודות של גאוס לובאטו.

כלומר בין $t_0 = 0$ ל $t_31 = \frac{T}{\delta}$ יהיו נקודות בפיזור גאוס לובאטו. בין t_31 ל $t_63 = 2\frac{T}{\delta}$ יהיו נקודות בפיזור גאוס לובאטו לפי משוואה 20.

7 חישוב הדיוק של אלגוריתם

עכשיו נניח שיש לנו וקטור של נקודות זמן $\mathbf{t}$. אנחנו מזינים את הוקטור הזה לאינטגרטורים שלנו ומקבלים רשימת ערכים של המצב של הלווין בכל נקודות זמן.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{ODE}(\mathbf{t}) &= [\mathbf{r}_{ODE}(\mathbf{t}), \mathbf{v}_{ODE}(\mathbf{t})] = \\ &= \begin{bmatrix} x(t_0) & y(t_0) & z(t_0) & v_x(t_0) & v_y(t_0) & v_z(t_0) \\ x(t_1) & y(t_1) & z(t_1) & v_x(t_1) & v_y(t_1) & v_z(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(t_M) & y(t_M) & z(t_M) & v_x(t_M) & v_y(t_M) & v_z(t_M) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{21}$$

יש לנו גם וקטור דומה של מצב שבו היינו מצפים שהלוויין יהיה. אם אנחנו פותרים את המשוואה הראשונה, אנחנו יכולים להשתמש בפתרון של קפלר. אם את המשוואה המרכבת יותר אז ב SGP4. בכל מקרה יש לנו

$$\mathbf{x}_{expected}(\mathbf{t}) = [\mathbf{r}_{expected}(\mathbf{t}), \mathbf{v}_{expected}(\mathbf{t})] \tag{22}$$

כדי להעריך את הדיוק של האלגוריתם אני רוצה לראות גרף של ההערכה של השגיאה במיקום כפונקציה של הזמן:

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = |\mathbf{r}_{expected} - \mathbf{r}_{ODE}| = \begin{bmatrix} |\mathbf{r}_{expected}(t_0)) - \mathbf{r}_{ODE}(t_0))| \\ |\mathbf{r}_{expected}(t_1)) - \mathbf{r}_{ODE}(t_1))| \\ \vdots \\ |\mathbf{r}_{expected}(t_M)) - \mathbf{r}_{ODE}(t_M))| \end{bmatrix} \tag{23}$$

אני רוצה לראות את הגרף של הערכים של $\mathbf{e}$ כפונקציה של הזמן. ניתן לשים את כל האלגוריתמים על אותו גרף וככה לראות איך השגיאה גדלה אצל כל אחד מהם.

Sat	A [km^2]	m [kg]
STARLINK1341	$3.9e-6$	260
IRIDIUM33deb	$0.7e-6$	77
QIANFAN4	$4e-6$	260
SKYNET4C	$1e-5$	1250
ASBM2	$1.2e-5$	2000

Table 2: Satellite size data

8 נתוני לווינים

נתוני משקל וגודל הלוונים נתון בטבלא 2

9 מקורות

כל התמונות והטבלאות שבמסמך הזה מקורן בספר של ולדו (Vallado, Fundamentals of Astrodynamics).