



# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
1 Darstellungen und Charaktere	3
2 Charaktertafeln	10
3 Ganz-algebraische Zahlen	15
4 Cliffordtheorie	17
5 Frobeniusgruppen	23
6 Induktionssätze	25
7 Frobenius-Schur-Indikatoren	32
8 Normale Komplemente	36
9 Nullen in der Charaktertafel	42
10 Endliche lineare Gruppen	43
11 Die Charaktere von $S_n$ und $A_n$	49
12 Aufgaben	58
Anhang	62
Stichwortverzeichnis	66

## Vorwort

Das vorliegende Skript basiert auf Vorlesungen im Wintersemester 2013/14 und im Sommersemester 2018 an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena. Es handelte sich um 3 + 1 Vorlesungen für den Masterstudiengang der Mathematik. Mein Ziel war es möglichst schnell und elementar, die Hauptsätze der Charaktertheorie endlicher Gruppen zu beweisen. Von den Hörern wurden lediglich Vorkenntnisse der Algebra 1 vorausgesetzt (elementare Gruppentheorie und etwas Galoistheorie). Ich habe konsequent auf die Begriffe „Modul“ und „Gruppenalgebra“ verzichtet (üblicherweise Bestandteile einer Algebra 2 Vorlesung). Ich bedanke mich bei René Reichenbach und Sebastian Uschmann für zahlreiche Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge.

Folgende Quellen liegen dem Skript zu Grunde (in absteigender Priorität):

- Külshammer, Skript zur Darstellungstheorie,  
<http://www.minet.uni-jena.de/algebra/skripten/dt/dt-2010/dt.pdf>.
- Isaacs, *Character theory of finite groups*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006
- Huppert, *Character theory of finite groups*, Expositions in Mathematics, Vol. 25, Walter de Gruyter GmbH & Co., Berlin, 1998

- Berkovich und Zhmud, *Characters of finite groups. Part 1*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 172, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- Huppert, *Endliche Gruppen I*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134, Springer-Verlag, Berlin, 1967
- Isaacs, *Finite group theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008
- Berkovich, *Groups of prime power order 1*, Expositions in Mathematics, Vol. 46, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008
- Tao, *Hilbert's fifth problem and related topics*, <http://terrytao.wordpress.com/2011/08/27/254a-notes-0-hilberts-fifth-problem-and-related-topics>
- Grove, *Groups and characters*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1997
- Fulton und Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991

## 1 Darstellungen und Charaktere

Stets sei  $G$  eine endliche Gruppe.

**Definition 1.1.** Sei  $V \neq 0$  ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Eine *Darstellung* von  $G$  ist ein Homomorphismus  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ . Der *Grad* der Darstellung ist  $n := \dim V$ . Durch Wahl einer Basis von  $V$  erhält man eine entsprechende *Matrixdarstellung*  $\Delta' : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ .

**Beispiel 1.2.**

- (i) Die *triviale* (Matrix-)Darstellung  $1_G : G \rightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$  ist gegeben durch  $g \mapsto 1$  für  $g \in G$ .
- (ii) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die Abbildung  $\mathrm{sgn} : S_n \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $g \mapsto \mathrm{sgn}(g)$  eine Darstellung vom Grad 1.
- (iii) Für zwei Darstellungen  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  und  $\Gamma : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  ist auch  $\Delta \oplus \Gamma : G \rightarrow \mathrm{GL}(V \times W)$  eine Darstellung. Dabei ist  $((\Delta \oplus \Gamma)(g))(v, w) := ((\Delta(g))(v), (\Gamma(g))(w))$  für  $g \in G$ ,  $v \in V$  und  $w \in W$ .
- (iv) Ist  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  eine Darstellung und  $H \leq G$ , so erhält man durch Einschränkung eine Darstellung  $\Delta_H : H \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ ,  $h \mapsto \Delta(h)$ .
- (v) Ist  $N \trianglelefteq G$  und  $\Delta : G/N \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  eine Darstellung, so erhält man durch *Inflation* eine Darstellung  $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ ,  $g \mapsto \Delta(gN)$  auf  $G$ . Diese werden wir oft auch mit  $\Delta$  bezeichnen.
- (vi) Ist  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  eine Darstellung und  $N \trianglelefteq G$  mit  $N \subseteq \mathrm{Ker}(\Delta)$ , so erhält man durch *Deflation* eine wohldefinierte Darstellung  $\hat{\Delta} : G/N \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ ,  $gN \mapsto \Delta(g)$ . Insbesondere ist  $\hat{\Delta} : G/\mathrm{Ker}(\Delta) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  eine *treue* Darstellung, d. h.  $\hat{\Delta}$  ist injektiv.
- (vii) Inflation und Deflation sind offenbar zueinander invers.

**Definition 1.3.** Zwei Darstellungen  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  und  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(W)$  heißen *ähnlich*, falls ein Isomorphismus  $f : V \rightarrow W$  mit  $f \circ \Delta(g) = \Gamma(g) \circ f$  für alle  $g \in G$  existiert. Gegebenenfalls ist also das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Delta(g)} & V \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{\Gamma(g)} & W \end{array}$$

Entsprechend sind zwei Matrixdarstellungen  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  und  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$  ähnlich, falls  $n = m$  ist und ein  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  existiert mit  $A\Delta(g) = \Gamma(g)A$  für alle  $g \in G$ .

**Bemerkung 1.4.**

- (i) Ähnliche Darstellungen haben den gleichen Grad.
- (ii) Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation.
- (iii) Man interessiert sich in der Regel nur für Darstellungen bis auf Ähnlichkeit (so wie für Gruppen bis auf Isomorphie).
- (iv) In der linearen Algebra zeigt man, dass zwei quadratische Matrizen  $A, B$  genau dann die gleiche Abbildung beschreiben, wenn es eine invertierbare Matrix  $T$  mit  $AT = TB$  gibt. Somit sind zwei Matrixdarstellungen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , die einer festen Darstellung  $\Delta$  von  $G$  entsprechen, stets ähnlich.
- (v) Die Ähnlichkeitsklassen von Darstellungen und Matrixdarstellungen entsprechen sich offenbar. Wir werden daher im Folgenden Darstellungen oft mit ihren entsprechenden Matrixdarstellungen identifizieren.

**Definition 1.5.** Sei  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung. Ein Untervektorraum  $U \leq V$  heißt  $\Delta$ -invariant, falls  $(\Delta(g))(u) \in U$  für alle  $g \in G$  und  $u \in U$  gilt. Gegebenenfalls ist  $\Delta' : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $g \mapsto \Delta(g)|_U$  auch eine Darstellung. Sind  $0$  und  $V$  die einzigen  $\Delta$ -invarianten Untervektorräume, so ist  $\Delta$  *irreduzibel*. Anderenfalls ist  $\Delta$  *reduzibel*.

**Beispiel 1.6.**

- (i) Darstellungen vom Grad 1 sind offensichtlich irreduzibel.
- (ii) Inflation und Deflation irreduzibler Darstellungen sind wieder irreduzibel (die Bilder ändern sich nicht).

**Satz 1.7 (MASCHKE).** Sei  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung und  $U \leq V$   $\Delta$ -invariant. Dann besitzt  $U$  ein  $\Delta$ -invariantes Komplement  $W \leq V$ , d. h.  $V = U \oplus W$ .

*Beweis.* Wir wählen zunächst einen beliebigen Untervektorraum  $X$  von  $V$  mit  $V = U \oplus X$  (lineare Algebra) und bezeichnen mit  $h : V \rightarrow V$  die entsprechende Projektion auf  $U$ . Dann setzen wir

$$g := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(x)$$

und  $W := \text{Ker}(g)$ . Für  $u \in U$  ist also

$$g(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (\Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(x))(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \underbrace{(\Delta(x^{-1}) \circ \Delta(x))}_{=\Delta(x^{-1}x)=\Delta(1)=\text{id}_V} (u) = u.$$

Insbesondere ist  $U \cap W = 0$ . Für  $v \in V$  ist  $g(v) \in U$ , also

$$g(v - g(v)) = g(v) - g(g(v)) = g(v) - g(v) = 0,$$

d. h.  $v - g(v) \in W$  und  $v = g(v) + (v - g(v)) \in U + W$ . Folglich ist  $V = U \oplus W$ . Für  $w \in W$  und  $y \in G$  ist

$$\begin{aligned} (g \circ \Delta(y))(w) &= \left( \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(xy) \right)(w) \\ &= \left( \Delta(y) \circ \underbrace{\left( \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Delta(y^{-1}x^{-1}) \circ h \circ \Delta(xy) \right)}_{=g} \right)(w) \\ &= (\Delta(y) \circ g)(w) = (\Delta(y))(0) = 0, \end{aligned}$$

also  $(\Delta(y))(w) \in \text{Ker}(g) = W$ . Folglich ist  $W$   $\Delta$ -invariant.  $\square$

**Bemerkung 1.8.** Sei  $\Delta$  eine Darstellung auf  $V$ , und sei  $V = U \oplus W$  eine  $\Delta$ -invariante Zerlegung. Dies liefert Teildarstellungen  $\Gamma_U : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $g \mapsto \Delta(g)|_U$  und  $\Gamma_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ ,  $g \mapsto \Delta(g)|_W$ . Durch Wahl einer geeigneten Basis von  $V$  hat  $\Delta$  dann die Form

$$\Delta(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_U(g) & 0 \\ 0 & \Gamma_W(g) \end{pmatrix}$$

für alle  $g \in G$ . Somit ist  $\Delta = \Gamma_U \oplus \Gamma_W$ . Jede Darstellung lässt sich also als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben.

**Lemma 1.9** (SCHURS Lemma). *Seien  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$  irreduzible Matrixdarstellungen und  $0 \neq A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  mit  $A\Gamma(g) = \Delta(g)A$  für alle  $g \in G$ . Dann ist  $n = m$  und  $A$  ist invertierbar (insbesondere sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  ähnlich). Im Fall  $\Delta = \Gamma$  gilt  $A = \lambda 1_n$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ .*

*Beweis.* Für  $g \in G$  und  $v \in \text{Ker}(A)$  ist

$$(A\Delta(g))v = (\Gamma(g)A)v = 0,$$

also  $(\Delta(g))v \in \text{Ker}(A)$ . Daher ist  $\text{Ker}(A)$  ein  $\Delta$ -invarianter Untervektorraum von  $\mathbb{C}^n$ . Analog ist  $\text{Bild}(A)$  ein  $\Gamma$ -invarianter Untervektorraum von  $\mathbb{C}^m$ . Also ist  $\text{Ker}(A) = 0$  und  $\text{Bild}(A) = \mathbb{C}^n$  wegen der Irreduzibilität von  $\Delta$  und  $\Gamma$ . Folglich ist  $A$  invertierbar und  $n = m$ . Sei nun  $\Delta = \Gamma$ . Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ . Dann gilt auch  $(A - \lambda 1_n)\Gamma(g) = \Delta(g)(A - \lambda 1_n)$  für alle  $g \in G$ . Da  $A - \lambda 1_n$  nicht invertierbar ist, folgt  $A - \lambda 1_n = 0$  aus dem ersten Teil des Beweises.  $\square$

**Satz 1.10.** *Jede irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe hat Grad 1.*

*Beweis.* Sei  $G$  abelsch und  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  eine irreduzible Matrixdarstellung von  $G$ . Sei  $g \in G$  fest. Für alle  $h \in G$  gilt dann  $\Delta(g)\Delta(h) = \Delta(gh) = \Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g)$ . Nach Schurs Lemma ist also  $\Delta(g) = \lambda_g 1_n$  für ein  $\lambda_g \in \mathbb{C}$ . Insbesondere ist  $\mathbb{C}(1, 0, \dots, 0)$  ein  $\Delta$ -invarianter Untervektorraum von  $\mathbb{C}^n$ . Da  $\Delta$  irreduzibel ist, folgt  $n = 1$ .  $\square$

**Definition 1.11.** Sei  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  eine Matrixdarstellung. Die Abbildung  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{Spur } \Delta(g)$  heißt *Charakter* von  $\Delta$  (und von  $G$ ). Dabei ist  $\chi(1) = \text{Spur } \Delta(1) = \text{Spur } 1_n = n$  der *Grad* von  $\chi$  (und von  $\Delta$ ). Ist  $\Delta$  irreduzibel (treu, ...), so bezeichnet man auch  $\chi$  als *irreduzibel* (treu, ...). Die Menge der irreduziblen Charaktere von  $G$  bezeichnen wir mit  $\text{Irr}(G)$ .

**Lemma 1.12.** Ähnliche Matrixdarstellungen haben den gleichen Charakter.

*Beweis.* Seien  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  und  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  ähnliche Matrixdarstellungen. Dann existiert ein  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  mit  $\Delta(g)A = A\Gamma(g)$  für alle  $g \in G$ . Aus der linearen Algebra weiß man, dass für quadratische Matrizen  $M_1, M_2$  der gleichen Dimension gilt:  $\text{Spur}(M_1 M_2) = \text{Spur}(M_2 M_1)$ . Somit ist  $\text{Spur } \Delta(g) = \text{Spur}((A\Gamma(g))A^{-1}) = \text{Spur}(A^{-1}(A\Gamma(g))) = \text{Spur } \Gamma(g)$  für alle  $g \in G$ .  $\square$

**Bemerkung 1.13.**

- (i) Ist  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung, so kann man  $\Delta$  einen Charakter zuordnen, indem man eine entsprechende Matrixdarstellung wählt. Wegen Lemma 1.12 kommt es dabei nicht auf die Wahl der Basis von  $V$  an.
- (ii) Charaktere sind die „Schatten“ von Darstellungen, d. h. man verliert einerseits Information, indem man die  $n^2$  Einträge einer Matrix durch einen einzigen Wert ersetzt, aber andererseits bleibt genug Information, um Eigenschaften der Gruppe abzulesen.
- (iii) Offenbar stimmen Darstellungen vom Grad 1 mit ihrem Charakter überein. Man nennt diese Charaktere *linear*. Insbesondere gibt es den *trivialen* Charakter  $1_G : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $1_G(g) = 1$  für  $g \in G$ .
- (iv) Sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  Darstellungen mit Charakter  $\chi_\Delta$  bzw.  $\chi_\Gamma$ , so hat  $\Delta \oplus \Gamma$  den Charakter  $\chi_\Delta + \chi_\Gamma$ . Summen von Charakteren sind also wieder Charaktere.
- (v) Für jede Darstellung  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  ist  $\det \Delta : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \det \Delta(g)$  ein Charakter vom Grad 1.

**Definition 1.14.**

- (i) Sei  $g \in G$ . Dann nennt man  $C := \{hgh^{-1} : h \in G\}$  die *Konjugationsklasse* von  $g$ . Offenbar ist  $\{1\}$  eine Konjugationsklasse von  $G$ . Die Menge der Konjugationsklassen von  $G$  ist  $\text{Cl}(G)$ . Ist  $h \in C$ , so sind  $g$  und  $h$  *konjugiert*. Sei  $C_G(g) := \{x \in G : xg = gx\} \leq G$  der *Zentralisator* von  $g$  in  $G$ . In der Algebra 1 zeigt man  $|C| = |G : C_G(g)|$ .
- (ii) Eine Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Klassenfunktion*, falls  $f(g) = f(hgh^{-1})$  für alle  $g, h \in G$  gilt. Klassenfunktionen sind also konstant auf Konjugationsklassen.

**Lemma 1.15.**

- (i) Die Charaktere einer Gruppe  $G$  sind Klassenfunktionen.
- (ii) Die Menge  $\text{CF}(G)$  der Klassenfunktionen bildet einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum durch  $(\alpha + \beta)(g) := \alpha(g) + \beta(g)$  und  $(a \cdot \alpha)(g) = a\alpha(g)$  für  $\alpha, \beta \in \text{CF}(G)$ ,  $a \in \mathbb{C}$  und  $g \in G$ . Dabei ist  $\dim \text{CF}(G) = |\text{Cl}(G)|$ .

*Beweis.*

- (i) Sei  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung mit Charakter  $\chi$ . Für  $g, h \in G$  ist

$$\chi(hgh^{-1}) = \text{Spur } \Delta(hgh^{-1}) = \text{Spur}(\Delta(h)\Delta(g)\Delta(h)^{-1}) = \text{Spur } \Delta(g) = \chi(g).$$

(ii) Trivial. □

**Definition 1.16.** Offenbar definiert

$$(\chi, \psi)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} \quad (\chi, \psi \in \text{CF}(G)).$$

ein Skalarprodukt des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $\text{CF}(G)$ . Auf diese Weise wird  $\text{CF}(G)$  zu einem Hilbertraum.

**Bemerkung 1.17.** Für Charaktere  $\chi, \psi$  von  $G$  ist nach Aufgabe 5 auch

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

**Lemma 1.18** (SCHUR-Relationen). *Seien  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$  irreduzible Matrixdarstellungen mit  $\Delta(g) = (\lambda_{ij}(g))$  und  $\Gamma(g) = (\theta_{ij}(g))$  für  $g \in G$ .*

(i) *Sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  nicht ähnlich, so ist*

$$\sum_{g \in G} \lambda_{ii}(g) \theta_{jj}(g^{-1}) = 0$$

*für alle  $i, j$ .*

(ii) *Es ist*

$$\sum_{g \in G} \lambda_{ii}(g) \lambda_{jj}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n} \delta_{ij}.$$

*Beweis.* Sei  $E_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  die Matrix mit einer 1 an Position  $(i, j)$  und sonst nur Nullen. Wir setzen

$$F_{ij} := \sum_{g \in G} \Delta(g) E_{ij} \Gamma(g^{-1}).$$

Für  $h \in G$  ist dann  $\Delta(h) F_{ij} \Gamma(h^{-1}) = F_{ij}$ , d. h.  $\Delta(h) F_{ij} = F_{ij} \Gamma(h)$ . Sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  nicht ähnlich, so folgt  $F_{ij} = 0$  aus Schurs Lemma. Insbesondere ist  $F_{ij}$  an der Position  $(i, j)$  gleich 0, d. h. (i) gilt.

Sei nun  $\Delta = \Gamma$ . Nach Schur ist  $F_{ij} = \rho_{ij} \cdot 1_n$  für ein  $\rho_{ij} \in \mathbb{C}$ . Für den Eintrag von  $F_{ij}$  an Position  $(1, 1)$  gilt dann

$$\rho_{ij} = \sum_{g \in G} \lambda_{1i}(g) \lambda_{j1}(g^{-1}) = \sum_{h \in G} \lambda_{1i}(h^{-1}) \lambda_{j1}(h) = \sum_{h \in G} \lambda_{j1}(h) \lambda_{1i}(h^{-1}) = \rho_{11} \delta_{ij}.$$

Mit  $\rho := \rho_{11} (= \rho_{ii})$  gilt dann

$$n\rho = \sum_{j=1}^n \sum_{g \in G} \lambda_{ij}(g) \lambda_{ji}(g^{-1}) = \sum_{g \in G} 1 = |G|$$

wegen  $\Delta(g) \Delta(g^{-1}) = 1_n$  für  $g \in G$ . Nun ergibt sich (ii) durch den Eintrag von  $F_{ij}$  an Position  $(i, j)$ . □

**Satz 1.19** (Erste Orthogonalitätsrelation). *Für  $\chi, \psi \in \text{Irr}(G)$  gilt*

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi = \psi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Seien  $\Delta$  und  $\Gamma$  irreduzible Darstellungen von  $G$  mit Charakter  $\chi$  bzw.  $\psi$ . Sei zunächst  $\chi \neq \psi$ . Nach Lemma 1.12 sind dann  $\Delta$  und  $\Gamma$  nicht ähnlich. Wir schreiben  $\Delta(g) = (\lambda_{ij}(g))$  und  $\Gamma(g) = (\theta_{ij}(g))$  für  $g \in G$ . Dann ist  $\chi(g) = \sum \lambda_{ii}(g)$  und  $\psi(g) = \sum \theta_{ii}(g)$ . Nach Lemma 1.18 ist also

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \lambda_{ii}(g) \theta_{jj}(g^{-1}) = 0.$$

Analog gilt

$$(\chi, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \lambda_{ii}(g) \lambda_{jj}(g^{-1}) = \frac{\chi(1)}{|G|} \frac{|G|}{\chi(1)} = 1. \quad \square$$

**Bemerkung 1.20.** Aus Satz 1.19 folgt leicht, dass  $\text{Irr}(G)$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $\text{CF}(G)$  ist. Insbesondere ist  $|\text{Irr}(G)| \leq \dim_{\mathbb{C}} \text{CF}(G) = |\text{Cl}(G)| \leq |G| < \infty$ .

**Satz 1.21.** *Zwei Darstellungen sind genau dann ähnlich, wenn sie den gleichen Charakter haben.*

*Beweis.* Eine Richtung ist Lemma 1.12. Seien nun  $\Delta$  und  $\Gamma$  Darstellungen mit dem gleichen Charakter  $\chi$ . Wir schreiben  $\Delta = \bigoplus_{i=1}^n \Delta_i$  und  $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^m \Gamma_i$  als Summen von irreduziblen Darstellungen. Dann zerlegt sich auch  $\chi$  in

$$\chi = \sum_{i=1}^n \chi_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i}.$$

Nach Bemerkung 1.20 ist  $n = m$  und  $\chi_{\Delta_i} = \chi_{\Gamma_i}$  bei geeigneter Nummerierung. Aus Lemma 1.18 folgt nun leicht, dass  $\Delta_i$  und  $\Gamma_i$  ähnlich sind. Sei also  $A_i \in \text{GL}(\chi_{\Delta_i}(1), \mathbb{C})$  mit  $A_i \Delta_i(g) = \Gamma_i(g) A_i$  für alle  $g \in G$ . Für

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \in \text{GL}(\chi(1), \mathbb{C})$$

gilt dann offenbar  $A \Delta(g) = \Gamma(g) A$  für alle  $g \in G$ , d. h.  $\Delta$  und  $\Gamma$  sind ähnlich.  $\square$

**Bemerkung 1.22.**

(i) Sei  $\rho$  der reguläre Charakter von  $G$ . Nach Aufgabe 2 gilt

$$\rho(g) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  ist daher

$$(\rho, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \overline{\chi(g)} = \chi(1).$$

Es folgt  $\rho = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \chi$  und  $|G| = \rho(1) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2$ .

(ii) Seien  $C, D, E \in \text{Cl}(G)$ ,  $e \in E$  und  $g \in G$ . Dann ist die Abbildung  $(c, d) \mapsto (gcg^{-1}, gdg^{-1})$  eine Bijektion zwischen  $\{(c, d) \in C \times D : cd = e\}$  und  $\{(c, d) \in C \times D : cd = geg^{-1}\}$ . Daher hängt der *Klassenmultiplikationskonstante*

$$c_{CDE} := |\{(c, d) \in C \times D : cd = e\}|$$

nicht von der Wahl von  $e \in E$  ab.



**Lemma 1.23.** Für eine irreduzible Darstellung  $\Delta$  mit Charakter  $\chi$  und  $g \in C \in \text{Cl}(G)$  gilt

$$\sum_{x \in C} \Delta(x) = \omega_\Delta(C) \text{id}$$

mit  $\omega_\Delta(C) := \omega_\chi(C) := \frac{|C|}{\chi(1)} \chi(g)$ .

*Beweis.* Sei  $A := \sum_{x \in C} \Delta(x)$ . Für  $y \in G$  gilt  $\Delta(y)A\Delta(y^{-1}) = \sum_{x \in C} \Delta(yxy^{-1}) = A$ . Aus Schurs Lemma folgt  $A = \omega_\Delta(C) \text{id}$  für ein  $\omega_\Delta(C) \in \mathbb{C}$ . Weiter ist  $\omega_\Delta(C)\chi(1) = \text{Spur } A = \sum_{x \in C} \chi(x) = |C|\chi(g)$ .  $\square$

**Satz 1.24** (Zweite Orthogonalitätsrelation). Für  $g, h \in G$  gilt

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g) \overline{\chi(h)} = \begin{cases} |C_G(g)| & \text{falls } g \text{ und } h \text{ konjugiert sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Seien  $C, D \in \text{Cl}(G)$  mit  $g \in C$  und  $h^{-1} \in D$ . Sei  $\Delta: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  eine irreduzible Matrixdarstellung mit Charakter  $\chi$ . Nach Lemma 1.23 gilt

$$\begin{aligned} \omega_\chi(C) \omega_\chi(D) 1_n &= \sum_{c \in C} \Delta(c) \sum_{d \in D} \Delta(d) = \sum_{c \in C} \sum_{d \in D} \Delta(cd) \stackrel{1.22}{=} \sum_{E \in \text{Cl}(G)} c_{CDE} \sum_{e \in E} \Delta(e) \\ &= \sum_{E \in \text{Cl}(G)} c_{CDE} \omega_\chi(E) 1_n \end{aligned}$$

Aus der Definition von  $\omega_\chi$  erhält man

$$\chi(g) \overline{\chi(h)} = \sum_{E \in \text{Cl}(G)} \frac{c_{CDE} |E|}{|C| |D|} \chi(1) \chi(e),$$

wobei jeweils  $e \in E$  gewählt ist. Sei  $\rho$  der reguläre Charakter von  $G$ . Summieren über  $\chi$  liefert

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g) \overline{\chi(h)} = \sum_{E \in \text{Cl}(G)} \frac{c_{CDE} |E|}{|C| |D|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \chi(e) \stackrel{1.22}{=} \sum_{E \in \text{Cl}(G)} \frac{c_{CDE} |E|}{|C| |D|} \rho(e) = \frac{c_{CD\{1\}} |G|}{|C| |D|}.$$

Die Konjugationsklasse von  $h$  ist offenbar  $D^{-1} = \{d^{-1} : d \in D\}$ . Sind  $g$  und  $h$  nicht konjugiert, so ist also  $C \cap D^{-1} = \emptyset$  und  $c_{CD\{1\}} = 0$ . Anderenfalls ist  $c_{CD\{1\}} = |C| = |D|$  und die Behauptung folgt aus  $\frac{|G|}{|C|} = |C_G(g)|$ .  $\square$

**Satz 1.25.**  $\text{Irr}(G)$  ist eine Orthonormalbasis von  $\text{CF}(G)$ . Insbesondere ist  $k(G) := |\text{Irr}(G)| = |\text{Cl}(G)|$ .

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass  $\text{Irr}(G)$  linear unabhängig ist (Bemerkung 1.20). Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation ist für  $g \in C \in \text{Cl}(G)$  andererseits

$$\varphi_C := \frac{1}{|C_G(g)|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g^{-1}) \chi$$

die charakteristische Funktion auf  $C$  (d. h.  $\varphi_C(x)$  ist 1 falls  $x \in C$  und sonst 0). Da die charakteristischen Funktionen eine Basis von  $\text{CF}(G)$  bilden, ist  $\text{Irr}(G)$  auch ein Erzeugendensystem. Die Orthonormalität folgt aus der ersten Orthogonalitätsrelation.  $\square$

**Bemerkung 1.26.**

(i) Jede Klassenfunktion  $f \in \text{CF}(G)$  lässt sich also eindeutig in der Form

$$f = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi$$

mit  $a_\chi \in \mathbb{C}$  schreiben. Ist  $a_\chi \in \mathbb{Z}$  für alle  $\chi \in \text{Irr}(G)$ , so ist  $f$  ein *virtueller Charakter* von  $G$  (oder *verallgemeinerter Charakter*). Gilt zusätzlich  $a_\chi \geq 0$  für alle  $\chi \in \text{Irr}(G)$  und  $a_\psi > 0$  für mindestens ein  $\psi \in \text{Irr}(G)$ , so ist  $f$  ein Charakter nach Bemerkung 1.13(iv). Umgekehrt hat jeder Charakter von  $G$  die Form  $\psi = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi$  mit  $a_\chi \in \mathbb{N}_0$ . Ist  $a_\chi = (\psi, \chi)_G > 0$ , so nennt man  $\chi$  einen *irreduziblen Bestandteil* von  $\psi$  mit *Vielfachheit*  $a_\chi$ . Außerdem gilt  $(\psi, \psi)_G = \sum a_\chi^2$ . Insbesondere ist  $\psi$  genau dann irreduzibel, falls  $(\psi, \psi)_G = 1$  gilt.

(ii) Im Allgemeinen kennt man keine kanonische Bijektion zwischen  $\text{Cl}(G)$  und  $\text{Irr}(G)$ .

## 2 Charaktertafeln

**Bemerkung 2.1.** Sei  $g_1, \dots, g_k \in G$  ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von  $G$ , und sei  $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ . Die  $k \times k$ -Matrix  $C := (\chi_i(g_j))_{i,j}$  heißt *Charaktertafel* von  $G$ . Natürlich hängt  $C$  von der Reihenfolge der Elemente und Charaktere ab. In der Regel wählt man  $g_1 = 1$ ,  $\chi_1 = 1_G$  und  $\chi_1(1) \leq \chi_2(1) \leq \dots \leq \chi_k(1)$ . In diesem Kapitel wollen wir  $C$  für einige Gruppen berechnen. Die erste Orthogonalitätsrelation lässt sich in der Form

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{|C_G(g_i)|} \chi_r(g_i) \overline{\chi_s(g_i)} = \delta_{rs}$$

schreiben. Dies betrifft also die Zeilen von  $C$ . Die zweite Orthogonalitätsrelation besagt, dass die Spalten von  $C$  paarweise orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts von  $\mathbb{C}^k$  sind. Insbesondere ist  $C$  invertierbar.

**Bemerkung 2.2.** Seien  $G$  und  $H$  endliche Gruppen und  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  und  $\Gamma : H \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$  Matrixdarstellungen. Für  $g \in G$  und  $h \in H$  schreiben wir  $\Delta(g) = (\alpha_{ij}(g))$  und  $\Gamma(h) = (\beta_{ij}(h))$ . Sei  $f : \{1, \dots, nm\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ ,  $i \mapsto (i_1, i_2)$  eine Bijektion. Für  $(g, h) \in G \times H$  definieren wir eine Matrix  $(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$  durch

$$(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) = (\alpha_{i_1 j_1}(g) \beta_{i_2 j_2}(h))_{i,j=1}^{nm} \quad (\text{Kronecker-Produkt}).$$

**Satz 2.3.** Die Abbildung  $\Delta \otimes \Gamma : G \times H \rightarrow \text{GL}(nm, \mathbb{C})$  ist eine Darstellung mit Grad  $nm$ . Für die entsprechenden Charaktere gilt  $\chi_{\Delta \otimes \Gamma} = \chi_\Delta \chi_\Gamma$ , wobei  $(\chi_\Delta \chi_\Gamma)(g, h) = \chi_\Delta(g) \chi_\Gamma(h)$  für  $g \in G$  und  $h \in H$ .

*Beweis.* Für  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$  gilt

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \Gamma)(g_1 g_2, h_1 h_2) &= (\alpha_{i_1 j_1}(g_1 g_2) \beta_{i_2 j_2}(h_1 h_2))_{i,j} \\
&= \left( \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{i_1 k}(g_1) \alpha_{k j_1}(g_2) \beta_{i_2 l}(h_1) \beta_{l j_2}(h_2) \right)_{i,j} \\
&= \left( \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{i_1 k}(g_1) \beta_{i_2 l}(h_1) \alpha_{k j_1}(g_2) \beta_{l j_2}(h_2) \right)_{i,j} \\
&= \left( \sum_{r=1}^{nm} \alpha_{i_1 r_1}(g_1) \beta_{i_2 r_2}(h_1) \alpha_{r_1 j_1}(g_2) \beta_{r_2 j_2}(h_2) \right)_{i,j} \\
&= (\Delta \otimes \Gamma)(g_1, h_1) (\Delta \otimes \Gamma)(g_2, h_2).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist  $(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) (\Delta \otimes \Gamma)(g^{-1}, h^{-1}) = (\Delta \otimes \Gamma)(1, 1) = (\alpha_{i_1 j_1}(1) \beta_{i_2 j_2}(1))_{i,j} = 1_{nm}$  und  $(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) \in \text{GL}(nm, \mathbb{C})$ . Damit ist gezeigt, dass  $\Delta \otimes \Gamma$  eine Darstellung ist. Für den Charakter gilt

$$\chi_{\Delta \otimes \Gamma}(g, h) = \sum_{i=1}^{nm} \alpha_{i_1 i_1}(g) \beta_{i_2 i_2}(h) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kk}(g) \beta_{ll}(h) = \chi_{\Delta}(g) \chi_{\Gamma}(h). \quad \square$$

**Bemerkung 2.4.**

- (i) Nach Satz 1.21 hängt die Ähnlichkeitsklasse von  $\Delta \otimes \Gamma$  nicht von der Wahl der Bijektion  $f$  ab.
- (ii) Im Fall  $H = G$  erhält man eine Darstellung von  $G$  durch  $g \mapsto (\Delta \otimes \Gamma)(g, g)$ . Diese wird ebenfalls mit  $\Delta \otimes \Gamma$  bezeichnet. Für Charaktere  $\chi, \psi$  von  $G$  ist also auch das Produkt  $\chi\psi$  mit  $(\chi\psi)(g) := \chi(g)\psi(g)$  ein Charakter von  $G$ . Für  $\chi, \psi \in \text{Irr}(G)$  ist  $\chi\psi$  nicht unbedingt irreduzibel.

**Satz 2.5.** Für endliche Gruppen  $G, H$  ist  $\text{Irr}(G \times H) = \{\chi\psi : \chi \in \text{Irr}(G), \psi \in \text{Irr}(H)\}$ .

*Beweis.* Sei  $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  und  $\text{Irr}(H) = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
(\chi_i \psi_j, \chi_k \psi_l)_{G \times H} &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \chi_i(g) \psi_j(h) \overline{\chi_k(g) \psi_l(h)} \\
&= \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_k(g)} \right) \left( \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \psi_j(h) \overline{\psi_l(h)} \right) = \delta_{ik} \delta_{jl}.
\end{aligned}$$

Also sind die Charaktere  $\chi_i \psi_j$  irreduzibel und paarweise verschieden. Wegen

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\chi_i \psi_j)(1)^2 = \sum_{i=1}^n \chi_i(1)^2 \sum_{j=1}^m \psi_j(1)^2 = |G| |H| = |G \times H|$$

hat man alle irreduziblen Charaktere von  $G \times H$  gefunden.  $\square$

**Bemerkung 2.6.** Sei  $G$  zyklisch der Ordnung  $n$  (wir schreiben  $G \cong C_n$ ). Nach Aufgabe 1 ist die Charaktertafel von  $G$  durch  $(e^{\frac{2\pi i k l}{n}})_{k,l=0}^{n-1}$  gegeben ( $i = \sqrt{-1}$ ). Aus der Algebra 1/2 weiß man, dass jede abelsche Gruppe  $G$  das direkte Produkt zyklischer Gruppen ist (für einen elementaren Beweis siehe Theorem 2.1.3 in Kurzweil-Stellmacher, „Theorie der endlichen Gruppen“). Mit Satz 2.5 lässt sich also leicht die Charaktertafel von  $G$  berechnen.

**Beispiel 2.7.** Sei  $G := \{1, x, y, z (= xy)\} \cong C_2 \times C_2 = C_2^2$  die Kleinsche Vierergruppe mit  $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_4\}$ . Dann ist

$C_2^2$	1	$x$	$y$	$z$
$\chi_1$	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1
$\chi_3$	1	1	-1	-1
$\chi_4$	1	-1	-1	1

die Charaktertafel von  $G$ .

**Definition 2.8.** Für  $x, y \in G$  ist  $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$  der *Kommutator* von  $x$  und  $y$ . Wir setzen

$$G' := \langle [x, y] : x, y \in G \rangle$$

(die kleinste Untergruppe, die alle Kommutatoren enthält). Dann heißt  $G'$  *Kommutatorgruppe* von  $G$ .

**Bemerkung 2.9.** Für  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  und  $x, y \in G$  ist offenbar  $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)] \in G'$ . Insbesondere ist  $G' \trianglelefteq G$  (wähle  $\alpha \in \text{Inn}(G)$ ). Für  $xG', yG' \in G/G'$  ist

$$xG'yG' = xy \underbrace{[y^{-1}, x^{-1}]}_{\in G'} G' = yG'xG',$$

d. h.  $G/G'$  ist abelsch. Ist umgekehrt  $N \trianglelefteq G$  mit  $G/N$  abelsch, so gilt  $[x, y]N = xNyN(xN)^{-1}(yN)^{-1} = N$  für  $x, y \in G$ , d. h.  $G' \subseteq N$ .

**Satz 2.10.** Die Charaktere von  $G$  vom Grad 1 sind gerade die Inflationen von  $\text{Irr}(G/G')$ .

*Beweis.* Sei  $\chi$  ein Charakter von  $G$  vom Grad 1. Dann ist  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  ein Homomorphismus. Insbesondere ist  $G/\text{Ker } \chi$  als Untergruppe von  $\mathbb{C}^\times$  abelsch, d. h.  $G' \subseteq \text{Ker } \chi$ . Deflation liefert also ein  $\psi \in \text{Irr}(G/G')$  und  $\chi$  ist die Inflation von  $\psi$ .

Umgekehrt hat die Inflation jedes  $\chi \in \text{Irr}(G/G')$  Grad 1 wegen Satz 1.10. □

**Beispiel 2.11.** Sei  $G = A_4$  die alternierende Gruppe vom Grad 4. Bekanntlich ist die Kleinsche Vierergruppe  $V := \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$  normal in  $G$ . Wegen  $|G/V| = 3$  ist  $G/V$  abelsch und  $G' \subseteq V$ . Da  $G$  nicht abelsch ist, muss also  $G' = V$  gelten. Für  $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$  gilt also o. B. d. A.  $\chi_1(1) = \chi_2(1) = \chi_3(1) = 1$  und  $\chi_i(1) > 1$  für  $i \geq 4$ . Außerdem ist  $12 = |G| = \sum_{i=1}^k \chi_i(1)^2 = 3 + \sum_{i=4}^k \chi_i(1)^2$ . Es folgt  $k = 4$  und  $\chi_4(1) = 3$ . Somit hat  $G$  auch 4 Konjugationsklassen. Aus Ordnungsgründen sind die Elemente 1,  $(1, 2)(3, 4)$  und  $(1, 2, 3)$  paarweise nicht konjugiert. In der abelschen Gruppe  $G/G'$  sind auch  $(1, 2, 3)G'$  und  $(1, 3, 2)G' = (1, 2, 3)^{-1}G'$  nicht konjugiert. Somit können auch  $(1, 2, 3)$  und  $(1, 3, 2)$  nicht in  $G$  konjugiert sein. Also ist 1,  $(1, 2)(3, 4)$ ,  $(1, 2, 3)$  und  $(1, 3, 2)$  ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von  $G$ . Ein Teil der Charaktertafel ergibt sich nun wie folgt

$A_4$	1	$(1, 2)(3, 4)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
$\chi_1$	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	$\sigma$	$\sigma^{-1}$
$\chi_3$	1	1	$\sigma^{-1}$	$\sigma$
$\chi_4$	3			

$$\sigma := e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

Die letzte Zeile ergibt sich aus der zweiten Orthogonalitätsrelation:

$A_4$	1	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
$\chi_1$	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	$\sigma$	$\sigma^{-1}$
$\chi_3$	1	1	$\sigma^{-1}$	$\sigma$
$\chi_4$	3	-1	0	0

**Lemma 2.12.** Sei  $g \in G$ . Für eine Darstellung  $\Delta$  von  $G$  mit Charakter  $\chi$  gilt

- (i)  $|\chi(g)| \leq \chi(1)$ .
- (ii)  $|\chi(g)| = \chi(1) \Leftrightarrow \Delta(g) \in \mathbb{C}^\times \text{id}$ .
- (iii)  $\chi(g) = \chi(1) \Leftrightarrow g \in \text{Ker}(\Delta)$ .

*Beweis.* Sei  $n := \chi(1)$ , und seien  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $\Delta(g)$ . Wegen  $(\Delta(g))^{|g|} = \Delta(g^{|g|}) = \Delta(1) = 1_n$  sind die  $\epsilon_i$  Einheitswurzeln. Wir wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Vektoren  $v := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  und  $w := (1, \dots, 1)$  an:

$$|\chi(g)| = |\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n| = |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| = \sqrt{n} \sqrt{n} = n.$$

Dies zeigt (i). Gilt Gleichheit, so sind  $v$  und  $w$  linear abhängig und es folgt  $\epsilon := \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n$ . Da  $\Delta(g)$  diagonalisierbar ist (Aufgabe 4), ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwert  $\epsilon$  gleich  $n$ , d. h.  $\Delta(g) = \epsilon \text{id}$ . Ist umgekehrt  $\Delta(g) \in \mathbb{C}^\times \text{id}$ , so folgt sicher  $|\chi(g)| = \chi(1)$ . Ist sogar  $\chi(g) = \chi(1)$ , so ist offensichtlich  $\epsilon = 1$  und  $g \in \text{Ker}(\Delta)$ . Die Umkehrung ist hier auch klar.  $\square$

**Definition 2.13.** Für eine Darstellung  $\Delta$  mit Charakter  $\chi$  setzen wir  $\text{Ker}(\chi) := \text{Ker}(\Delta)$  und  $Z(\chi) := Z(\Delta) := \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}$ . Man nennt  $Z(\chi)$  das *Zentrum* von  $\chi$  (bzw.  $\Delta$ ).

**Satz 2.14.** Für jeden Charakter  $\chi$  von  $G$  sind  $\text{Ker}(\chi)$  und  $Z(\chi)$  Normalteiler von  $G$ . Dabei ist  $\text{Ker}(\chi) \leq Z(\chi)$  und  $Z(\chi)/\text{Ker}(\chi)$  ist zyklisch. Ist  $\chi \in \text{Irr}(G)$ , so ist  $Z(\chi)/\text{Ker}(\chi) = Z(G/\text{Ker}(\chi))$  und  $Z(G) \subseteq Z(\chi)$ .

*Beweis.* Sicher ist  $\text{Ker}(\chi) \trianglelefteq G$  und  $\text{Ker}(\chi) \subseteq Z(\chi)$ . Sei  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung mit Charakter  $\chi$ . Offenbar ist  $\mathbb{C}^\times \text{id}_V \subseteq Z(\text{GL}(V))$  und damit  $\mathbb{C}^\times \text{id}_V \trianglelefteq \text{GL}(V)$ . Somit ist auch  $Z(\chi) = \Delta^{-1}(\mathbb{C}^\times \text{id}_V) \trianglelefteq G$ . Nach dem Homomorphiesatz ist außerdem  $Z(\chi)/\text{Ker}(\chi)$  zu einer endlichen Untergruppe  $H$  von  $\mathbb{C}^\times \text{id}_V \cong \mathbb{C}^\times$  isomorph. Offenbar besteht  $H$  genau aus den  $|H|$ -ten Einheitswurzeln in  $\mathbb{C}$ . Insbesondere ist  $H$  zyklisch (in der Algebra 1 beweist man dies für beliebige Körper).

Sei nun  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . Nach Deflation können wir  $\text{Ker}(\chi) = 1$  und  $G \leq \text{GL}(V)$  annehmen (dadurch ändert sich  $Z(\chi)$  nicht). Offenbar ist dann

$$Z(\chi) \subseteq \mathbb{C}^\times \text{id}_V \cap G \subseteq Z(\text{GL}(V)) \cap G \subseteq Z(G).$$

Für  $x \in Z(G)$  gilt umgekehrt  $\Delta(g)\Delta(x) = \Delta(gx) = \Delta(xg) = \Delta(x)\Delta(g)$  für alle  $g \in G$ . Schurs Lemma zeigt  $\Delta(x) \in \mathbb{C}^\times \text{id}_V$  und damit  $x \in Z(\chi)$ .

Die letzte Aussage folgt aus  $Z(G)\text{Ker}(\chi)/\text{Ker}(\chi) \leq Z(G/\text{Ker}(\chi))$ .  $\square$

**Bemerkung 2.15.** Auf diese Weise kann man häufig Normalteiler konstruieren, denn jeder Normalteiler ist Kern eines Charakters (Aufgabe 9).

**Satz 2.16.** Die Charaktertafel von  $G$  lässt sich aus den Klassenmultiplikationskonstanten berechnen.

*Beweis* (BURNSIDE-Algorithmus). Sei  $\text{Cl}(G) = \{K_1, \dots, K_n\}$  und  $c_{ijk} := C_{K_i K_j K_k}$  die Klassenmultiplikationskonstante. Sei  $T_i := (c_{ijk})_{j,k} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ . Seien  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  die irreduziblen Darstellungen von  $G$  und  $\omega_i := \omega_{\Delta_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Nach Lemma 1.23 gilt

$$\omega_l(K_i)\omega_l(K_j) \text{id} = \sum_{x \in K_i} \Delta_l(x) \sum_{y \in K_j} \Delta_l(y) = \sum_{(x,y) \in K_i \times K_j} \Delta_l(xy) = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \omega_l(K_k) \text{id}$$

für  $1 \leq i, j, l \leq n$ . Folglich ist  $e_l := (\omega_l(K_k))_k \in \mathbb{C}^n$  ein Eigenvektor von  $T_i$  zum Eigenwert  $\omega_l(K_i)$ .<sup>1</sup> Offenbar ist  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis von  $\mathbb{C}^n$ . Jeder Eigenraum von  $T_i$  wird daher von einigen der  $e_l$  aufgespannt. Wir schneiden diese Eigenräume mit den Eigenräumen der  $T_j$  für  $j \neq i$ . Die nicht-trivialen Durchschnitte haben die Form

$$V_l := \{v \in \mathbb{C}^n : \forall i : T_i v = \omega_l(K_i) v\} \leq \mathbb{C}^n$$

für ein  $1 \leq l \leq n$ . Da für  $l \neq k$  stets ein  $i$  mit  $\omega_l(K_i) \neq \omega_k(K_i)$  existiert, ist die Summe der  $V_l$  direkt. Aus Dimensionsgründen ist nun  $V_l = \langle e_l \rangle$  für  $l = 1, \dots, n$ . Wegen  $\omega_l(K_1) = 1$  lässt sich  $e_l$  aus  $V_l$  berechnen. Nach der ersten Orthogonalitätsrelation existiert nur ein Vektor  $e_l$ , sagen wir  $e_l$ , der nur aus positiven Zahlen besteht. Er gehört zur trivialen Darstellung  $\Delta_1$ . Daraus ergeben sich die Klassenlängen  $|K_i| = \omega_1(K_i)$  für  $i = 1, \dots, n$ . Wegen

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\omega_l(K_i)|^2}{|K_i|} = \frac{1}{\chi_l(1)^2} \sum_{g \in G} |\chi_l(g)|^2 = \frac{|G|}{\chi_l(1)^2} (\chi_l, \chi_l)_G = \frac{|G|}{\chi_l(1)^2}$$

erhält man  $\chi_l(1)$  und anschließend auch  $\chi_l(g) = \frac{\chi_l(1)\omega_l(K_i)}{|K_i|}$  für  $g \in K_i$ .  $\square$

**Bemerkung 2.17.** In der Regel braucht man nicht alle Matrizen  $T_i$ , um die Charaktertafel zu berechnen. Hat zum Beispiel  $\omega_l(K_i)$  als Eigenwert von  $T_i$  Vielfachheit 1, so kann man  $e_l$  direkt als Erzeuger des Eigenraums bestimmen. Optimierungen dieser Art führen zum *Dixon-Schneider-Algorithmus*, der in der Praxis häufig benutzt wird.

**Satz 2.18.** Sei  $\text{Cl}(G) = \{K_1, \dots, K_n\}$  und  $g_i \in K_i$ . Dann gilt

$$c_{ijk} = \frac{|K_i||K_j|}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}$$

für  $1 \leq i, j, k \leq n$ . Die Klassenmultiplikationskonstanten lassen sich also aus der Charaktertafel bestimmen.

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 2.16 ist  $\omega_\chi(K_i)\omega_\chi(K_j) = \sum_{k=1}^n c_{ijk}\omega_\chi(K_k)$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{|K_i||K_j|}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)} &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \omega_\chi(K_i)\omega_\chi(K_j)\chi(1)\overline{\chi(g_k)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^n c_{ijl} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \omega_\chi(K_l)\chi(1)\overline{\chi(g_k)} = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^n c_{ijl}|K_l| \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g_l)\overline{\chi(g_k)} \stackrel{1.24}{=} c_{ijk}. \end{aligned} \quad \square$$

<sup>1</sup>Die Eigenwerte von  $T_i$  lassen sich zwar berechnen, aber deren Zuordnung zu  $\omega_l$  ist nicht eindeutig.

### 3 Ganz-algebraische Zahlen

**Definition 3.1.** Eine Zahl  $\zeta \in \mathbb{C}$  heißt *ganz-algebraisch*, falls sie Nullstelle eines normierten, ganzzahligen Polynoms ist, d. h. es existieren Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$  mit  $\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + a_1\zeta + a_0 = 0$ .

**Beispiel 3.2.**

- (i) Ganze Zahlen sind offenbar ganz-algebraisch.
- (ii) Einheitswurzeln sind ganz-algebraisch als Nullstellen von Polynomen der Form  $X^n - 1$ .

**Lemma 3.3.** Sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ganz-algebraisch, so auch  $\alpha + \beta$  und  $\alpha\beta$ . (Die ganz-algebraischen Zahlen bilden also einen Ring.)

*Beweis.* Wir schreiben

$$\begin{aligned}\alpha^n &= a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0, \\ \beta^m &= b_{m-1}\beta^{m-1} + \dots + b_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

mit  $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{Z}$ . Sei  $S := \{\alpha^i \beta^j : i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1\}$  und  $\gamma := \alpha + \beta$  (bzw.  $\alpha\beta$ ). Für  $s \in S$  existieren dann Zahlen  $c_{st} \in \mathbb{Z}$  mit  $\gamma s = \sum_{t \in S} c_{st} t$  (benutze (3.1)). Für  $A := (c_{st})_{s,t \in S} \in \mathbb{Z}^{nm \times nm}$  und  $v := (s : s \in S)$  gilt  $Av = \gamma v$ . Also ist  $\gamma$  Nullstelle des normierten, ganzzahligen Polynoms  $\det(X1_{nm} - A)$ .  $\square$

**Bemerkung 3.4.** Ist  $\chi$  ein Charakter von  $G$ , so ist  $\chi(g)$  als Summe von Einheitswurzeln (siehe zum Beispiel Beweis von Lemma 2.12) ganz-algebraisch für  $g \in G$ .

**Lemma 3.5.** Ist  $\zeta \in \mathbb{Q}$  ganz-algebraisch, so ist  $\zeta \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Sei  $\zeta = \frac{r}{s}$  mit  $r, s \in \mathbb{Z}$  und  $\text{ggT}(r, s) = 1$ . Nach Voraussetzung existieren  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$  mit

$$\frac{r^n}{s^n} = \frac{a_{n-1}r^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots + \frac{a_1 r}{s} + a_0.$$

Umstellen ergibt

$$r^n = s(a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}).$$

Also ist  $s \mid r^n$ . Wegen  $\text{ggT}(r, s) = 1$  folgt  $s = \pm 1$  und  $\zeta \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Lemma 3.6.** Für  $C \in \text{Cl}(G)$  und  $\chi \in \text{Irr}(G)$  ist  $\omega_\chi(C)$  ganz-algebraisch.

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 2.16 gezeigt, ist  $\omega_\chi(C)$  ein Eigenwert einer ganzzahligen Matrix  $T$ . Also ist  $\omega_\chi(C)$  als Nullstelle des normierten, ganzzahligen charakteristischen Polynoms von  $T$  ganz-algebraisch.  $\square$

**Satz 3.7.** Für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  ist  $\boxed{\chi(1) \mid |G|}$ .

*Beweis.* Seien  $g_1, \dots, g_k \in G$  Repräsentanten für die Konjugationsklassen  $C_1, \dots, C_k$  von  $G$ . Nach der ersten Orthogonalitätsrelation ist dann

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi(x)} = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{i=1}^k |C_i| \chi(g_i) \chi(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^k \omega_\chi(C_i) \chi(g_i^{-1}).$$

Nach Lemma 3.6 ist  $\frac{|G|}{\chi(1)}$  ganz-algebraisch. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.5.  $\square$

**Satz 3.8.** Sei  $\chi \in \text{Irr}(G)$  und  $g \in C \in \text{Cl}(G)$  mit  $\text{ggT}(\chi(1), |C|) = 1$ . Dann ist  $g \in Z(\chi)$  oder  $\chi(g) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $\alpha := \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$ . Wegen  $\text{ggT}(\chi(1), |C|) = 1$  existieren  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $a\chi(1) + b|C| = 1$ . Mit  $\omega_\chi(C)$  und  $\chi(g)$  ist auch

$$\alpha = \frac{\chi(g)}{\chi(1)} (a\chi(1) + b|C|) = a\chi(g) + b\omega_\chi(C)$$

ganz-algebraisch. Sei  $n := |\langle g \rangle|$  und  $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$ . Als Summe  $n$ -ter Einheitswurzeln ist  $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\zeta)$ . Sei  $\mathcal{G}$  die Galoisgruppe der Galoiserweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ . Für  $\sigma \in \mathcal{G}$  ist auch  $\sigma(\alpha)$  ganz-algebraisch, denn  $\alpha$  und  $\sigma(\alpha)$  sind Nullstellen des gleichen ganzzahligen Polynoms. Daher ist auch  $\beta := \prod_{\sigma \in \mathcal{G}} \sigma(\alpha)$  ganz-algebraisch. Wegen  $\sigma(\beta) = \beta$  für alle  $\sigma \in \mathcal{G}$  liegt  $\beta$  im Fixkörper von  $\mathcal{G}$ , d. h.  $\beta \in \mathbb{Q}$  (Galoistheorie). Nach Lemma 3.5 ist  $\beta \in \mathbb{Z}$ . Im Fall  $g \notin Z(\chi)$  ist  $|\alpha| < 1$  (Lemma 2.12). Mit  $\chi(g)$  ist auch  $\sigma(\chi(g))$  Summe von  $m := \chi(1)$  vielen  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ . Es folgt

$$|\sigma(\chi(g))| = |\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m| \leq |\epsilon_1| + \dots + |\epsilon_m| = m$$

und  $|\sigma(\alpha)| \leq 1$  für  $\sigma \in \mathcal{G}$ . Folglich ist  $|\beta| < 1$ , d. h.  $\beta = 0$ . Also ist  $\alpha = 0$  und  $\chi(g) = 0$ .  $\square$

**Satz 3.9.** Sei  $G$  einfach und nichtabelsch,  $C \in \text{Cl}(G)$  und  $|C|$  Potenz einer Primzahl  $p$ . Dann ist  $C = \{1\}$ .

*Beweis.* Wir nehmen  $C \neq \{1\}$  an und wählen  $g \in C$  und  $\chi \in \text{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$ . Da  $G$  einfach ist, ist  $\text{Ker}(\chi) = 1$ . Da  $G$  nichtabelsch ist, ist auch  $Z(\chi) = 1$  (Satz 2.14). Im Fall  $p \nmid \chi(1)$  ist also  $\chi(g) = 0$  nach Satz 3.8. Daher ist

$$\sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(G), \\ p \mid \chi(1)}} \frac{\chi(1)}{p} \chi(g) = \frac{1}{p} \sum_{1_G \neq \chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \chi(g) = \frac{1}{p} \left( \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \chi(g) - 1_G(1) 1_G(g) \right) = -\frac{1}{p} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$$

ganz-algebraisch. Widerspruch.  $\square$

**Satz 3.10** (BURNSIDE). Sei  $|G| = p^a q^b$  mit Primzahlen  $p, q$  und  $a, b \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $G$  auflösbar.

*Beweis.* (Induktion nach  $|G|$ ) O.B.d.A. sei  $G \neq 1$ . Sei  $N$  ein maximaler Normalteiler von  $G$ . Ist  $N \neq 1$ , so sind  $N$  und  $G/N$  nach Induktion auflösbar, also auch  $G$ . Daher sei  $N = 1$ , d. h.  $G$  ist einfach und o. B. d. A. nichtabelsch. Sei  $P \neq 1$  eine Sylowgruppe von  $G$ ,  $g \in Z(P) \setminus \{1\}$  und  $C$  die Konjugationsklasse von  $g$ . Dann ist  $|C| = |G : C_G(g)| \mid |G : P| = q^b$  eine Primzahlpotenz. Nach Satz 3.9 ist  $C = \{1\}$ . Widerspruch.  $\square$

**Satz 3.11.** Für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  ist  $\boxed{\chi(1) \mid |G : Z(\chi)|}$ .



*Beweis* (NAVARRO). Sei  $\Delta: G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung mit Charakter  $\chi$ . Wegen  $|G : Z(\chi)| = |G/\text{Ker}(\chi) : Z(\chi)/\text{Ker}(\chi)|$  können wir  $\Delta$  durch seine Deflation  $G/\text{Ker}(\chi) \rightarrow \text{GL}(V)$  ersetzen und  $\text{Ker}(\chi) = 1$  annehmen. Nach Satz 2.14 ist  $Z := Z(\chi) = Z(G)$  und  $\Delta(z) = \lambda(z) \text{id}_V$  mit  $\lambda(z) \in \mathbb{C}$  für  $z \in Z$ . Seien  $K_1, \dots, K_s \in \text{Cl}(G)$  die Konjugationsklassen, auf denen  $\chi$  nicht verschwindet. Für  $g_i \in K_i$  und  $z \in Z$  gilt  $\Delta(g_i z) = \Delta(g_i) \lambda(z)$  und

$$\chi(g_i z) = \chi(g_i) \lambda(z) = \frac{\chi(g_i) \chi(z)}{\chi(1)}.$$

Da  $\chi$  treu ist, folgt  $\chi(g_i z) \neq \chi(g_i)$  für  $z \neq 1$ . Ggf. sind  $g_i$  und  $g_i z$  nicht konjugiert. Dies zeigt  $K_i z = K_j$  für ein  $j \neq i$ . Bei geeigneter Anordnung gilt nun

$$\bigcup_{i=1}^s K_i = \bigcup_{i=1}^t \bigcup_{z \in Z} K_i z$$

mit  $t|Z| = s$ . Außerdem gilt

$$\chi(g_i z) \overline{\chi(g_i z)} = \chi(g_i) \overline{\chi(g_i)} \frac{|\chi(z)|^2}{\chi(1)^2} = \chi(g_i) \overline{\chi(g_i)}.$$

Daher ist

$$\frac{|G : Z|}{\chi(1)} = \sum_{g \in G} \frac{\chi(g) \overline{\chi(g)}}{|Z| \chi(1)} = \sum_{i=1}^t \sum_{z \in Z} \frac{|K_i| \chi(g_i z) \overline{\chi(g_i z)}}{|Z| \chi(1)} = \sum_{i=1}^t \frac{|K_i| \chi(g_i) \overline{\chi(g_i)}}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^t \omega_\chi(K_i) \overline{\chi(g_i)}$$

ganz-algebraisch nach Lemma 3.6. Aus Lemma 3.5 folgt die Behauptung.  $\square$

## 4 Cliffordtheorie

**Bemerkung 4.1.** Für  $H \leq G$  und  $\varphi \in \text{CF}(G)$  ist offenbar die Einschränkung (Restriktion)  $\varphi_H \in \text{CF}(H)$ . Wir werden nun umgekehrt aus  $\varphi \in \text{CF}(H)$  eine Klassenfunktion auf  $G$  konstruieren.

**Definition 4.2.** Für  $H \leq G$  und  $\varphi \in \text{CF}(H)$  sei

$$\varphi^G : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} \varphi(gxg^{-1}).$$

Man nennt  $\varphi^G$  die *Induktion* von  $\varphi$ .

**Satz 4.3.** Für  $\varphi \in \text{CF}(H)$  ist  $\varphi^G \in \text{CF}(G)$ .

*Beweis.* Für  $x, y \in G$  ist

$$\varphi^G(yxy^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ gyxy^{-1}g^{-1} \in H}} \varphi(gyxy^{-1}g^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G, \\ h x h^{-1} \in H}} \varphi(h x h^{-1}) = \varphi^G(x). \quad \square$$

**Bemerkung 4.4.**

- (i) Man sieht leicht, dass die Induktion eine lineare Abbildung von  $\text{CF}(H)$  nach  $\text{CF}(G)$  ist.

(ii) Für  $H \leq G$ ,  $\varphi \in \text{CF}(H)$  und  $x \in G$  gilt

$$\begin{aligned}\varphi^G(x) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ g^{-1}xg \in H}} \varphi(g^{-1}xg) = \frac{1}{|H|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{-1}g^{-1}xgh \in H}} \varphi(h^{-1}g^{-1}xgh) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{gH \in G/H, h \in H, \\ g^{-1}xg \in H}} \varphi(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \varphi(g^{-1}xg).\end{aligned}$$

Dies ist nützlich für die praktische Berechnung.

**Satz 4.5.**

- (i) Für  $K \leq H \leq G$  und  $\varphi \in \text{CF}(K)$  ist  $(\varphi^H)^G = \varphi^G$ . Die Induktion von Klassenfunktionen ist also transitiv.
- (ii) Für  $\chi \in \text{CF}(G)$  und  $\varphi \in \text{CF}(H)$  ist  $\boxed{\chi\varphi^G = (\chi_H\varphi)^G}$  und  $\boxed{(\chi, \varphi^G)_G = (\chi_H, \varphi)_H}$  (FROBENIUS-Reziprozität).

*Beweis.*

(i) Nach Bemerkung 4.4(ii) gilt

$$\begin{aligned}(\varphi^H)^G(x) &= \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \varphi^H(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \sum_{\substack{hK \in H/K, \\ g^{-1}xghK = hK}} \varphi(h^{-1}g^{-1}xgh) \\ &= \sum_{\substack{aK \in G/K, \\ xaK = aK}} \varphi(a^{-1}xa) = \varphi^G(x)\end{aligned}$$

für  $x \in G$ .

(ii) Wie in (i) gilt

$$(\chi\varphi^G)(x) = \chi(x) \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \varphi(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} (\chi\varphi)(g^{-1}xg) = (\chi_H\varphi)^G(x)$$

für  $x \in G$  und

$$\begin{aligned}(\chi, \varphi^G)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} \overline{\varphi(g^{-1}xg)} = \frac{1}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{\substack{x \in G, \\ g^{-1}xg \in H}} \chi(g^{-1}xg) \overline{\varphi(g^{-1}xg)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{h \in H} \chi(h) \overline{\varphi(h)} = \frac{|G/H|}{|G|} \sum_{h \in H} \chi(h) \overline{\varphi(h)} = (\chi_H, \varphi)_H. \quad \square\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.6.** Die Frobenius-Reziprozität besagt, dass Restriktion und Induktion zueinander adjungierte Abbildungen zwischen  $\text{CF}(G)$  und  $\text{CF}(H)$  sind.

**Satz 4.7.** Für einen Charakter  $\varphi$  von  $H \leq G$  ist  $\varphi^G$  ein Charakter von  $G$  vom Grad  $|G:H|\varphi(1)$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $\varphi^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi$  mit  $a_\chi \in \mathbb{C}$ . Dann ist

$$a_\chi = (\chi, \varphi^G)_G = (\chi_H, \varphi)_H \in \mathbb{N}_0,$$

denn  $\chi_H$  ist ein Charakter von  $H$ . Also ist  $\varphi^G$  ein Charakter von  $G$ . Offenbar ist auch  $\varphi^G(1) = |G : H| \varphi(1)$ .  $\square$

**Beispiel 4.8.**

- (i)  $1_1^G$  ist der reguläre Charakter von  $G$ . Insbesondere ist  $\varphi^G$  nicht unbedingt irreduzibel, falls  $\varphi$  irreduzibel ist. Ist  $\varphi$  reduzibel, so muss auch  $\varphi^G$  reduzibel sein wegen der Linearität der Induktion.
- (ii) Sei  $H := \langle (1, 2, 3) \rangle$  und  $G := S_3$ . Sei  $\varphi$  ein nichttrivialer Charakter von  $H$  vom Grad 1. Dann ist  $\varphi^G(1) = 2$ ,  $\varphi^G((1, 2)) = 0$ ,  $\varphi^G((1, 2, 3)) = -1$ . Insbesondere ist  $\varphi^G \in \text{Irr}(G)$ .

**Definition 4.9.** Sei  $H \leq G$ ,  $\varphi \in \text{CF}(H)$  und  $g \in G$ . Dann ist  ${}^g\varphi \in \text{CF}(gHg^{-1})$  mit  ${}^g\varphi(x) := \varphi(g^{-1}xg)$  für  $x \in gHg^{-1}$ . Wir nennen  $G_\varphi := \{g \in G : {}^g\varphi = \varphi\} \leq G$  die *Trägheitsgruppe* von  $\varphi$ . Außerdem sei

$$\text{Irr}(G|\varphi) := \{\chi \in \text{Irr}(G) : (\chi_H, \varphi)_H \neq 0\}.$$

**Bemerkung 4.10.**

- (i) Offenbar ist  $H \leq G_\varphi \leq N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$  ( $N_G(H)$  ist der *Normalisator* von  $H$  in  $G$ ).
- (ii) Wie üblich ist

$${}^g\varphi = {}^h\varphi \iff h^{-1}g \in G_\varphi \iff gG_\varphi = hG_\varphi$$

für  $g, h \in G$ .

- (iii) Sei  $\Delta : H \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung mit Charakter  $\chi$ . Für  $g \in G$  ist dann offenbar  ${}^g\Delta : gHg^{-1} \rightarrow \text{GL}(V)$ ,  $x \mapsto \Delta(g^{-1}xg)$  eine Darstellung von  $gHg^{-1}$  mit Charakter  ${}^g\chi$ .

- (iv) Für  $\varphi, \psi \in \text{CF}(H)$  und  $g \in G$  ist  $\boxed{({}^g\varphi, {}^g\psi)_{gHg^{-1}} = (\varphi, \psi)_H}$ , denn

$$\frac{1}{|gHg^{-1}|} \sum_{x \in gHg^{-1}} {}^g\varphi(x) \overline{{}^g\psi(x)} = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \varphi(x) \overline{\psi(x)}.$$

- (v) Für  $K \leq H \leq G$ ,  $\varphi \in \text{CF}(H)$  und  $g \in G$  ist  $\boxed{{}^g(\varphi_K) = ({}^g\varphi)_{gKg^{-1}}}$ .

- (vi) Für  $N \trianglelefteq G$  und  $\chi \in \text{Irr}(N)$  ist  $({}^g\chi, {}^g\chi)_N = (\chi, \chi)_N = 1$  und  ${}^g\chi \in \text{Irr}(N)$ . Man sagt,  $\chi$  und  ${}^g\chi$  sind *konjugiert*.

**Satz 4.11.** Sei  $N \trianglelefteq G$ ,  $\chi \in \text{Irr}(G)$  und  $\psi \in \text{Irr}(N)$  mit  $e := (\chi_N, \psi)_N \neq 0$ . Dann ist

$$\chi_N = e \sum_{gG_\psi \in G/G_\psi} {}^g\psi.$$

*Beweis.* Nach Frobenius-Reziprozität ist  $\chi$  ein Bestandteil von  $\psi^G$ . Daher ist  $\chi_N$  ein Bestandteil von  $(\psi^G)_N$ . Für  $x \in N$  gilt

$$\psi^G(x) = \sum_{\substack{gN \in G/N, \\ xgN = gN}} \psi(gxg^{-1}) = \sum_{gN \in G/N} {}^g\psi(x)$$

nach Bemerkung 4.4. Also ist jeder irreduzible Bestandteil von  $\chi_N$  zu  $\psi$  konjugiert. Für  $g \in G$  gilt

$$(\chi_N, {}^g\psi)_N = (g^{-1}(\chi_N), \psi)_N = ((g^{-1}\chi)_N, \psi)_N = (\chi_N, \psi)_N = e$$

nach Bemerkung 4.10. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

**Definition 4.12.** In der Situation von Satz 4.11 nennt man  $e$  den *Verzweigungsindex* von  $\chi$  bzgl.  $N$ . Man kann zeigen, dass  $e \mid |G : N|$  gilt (ohne Beweis).

**Satz 4.13** (CLIFFORD-Korrespondenz). *Für  $N \trianglelefteq G$  und  $\psi \in \text{Irr}(N)$  ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Irr}(G_\psi | \psi) &\rightarrow \text{Irr}(G | \psi), \\ \chi &\mapsto \chi^G \end{aligned}$$

*eine Bijektion mit  $(\chi_N, \psi)_N = ((\chi^G)_N, \psi)_N$ .*

*Beweis.* Sei  $\chi \in \text{Irr}(G_\psi | \psi)$  und sei  $\varphi$  ein irreduzibler Bestandteil von  $\chi^G$ . Wir zeigen zunächst  $\varphi \in \text{Irr}(G | \psi)$ . Wir schreiben  $\varphi_{G_\psi} := \sum_{\tau \in \text{Irr}(G_\psi)} a_\tau \tau$  mit  $a_\tau \geq 0$  und  $a_\chi = (\varphi_{G_\psi}, \chi)_{G_\psi} = (\varphi, \chi^G)_G \geq 1$ . Nach Satz 4.11 ist  $\chi_N = e\psi$  mit  $e := (\chi_N, \psi)_N$ . Es folgt

$$f := (\varphi_N, \psi)_N = \sum_{\tau \in \text{Irr}(G_\psi)} a_\tau (\tau_N, \psi)_N \geq a_\chi (\chi_N, \psi)_N \geq e > 0,$$

d. h.  $\varphi \in \text{Irr}(G | \psi)$ . Satz 4.11 impliziert

$$\varphi(1) = \varphi_N(1) = f \sum_{gG_\psi \in G/G_\psi} {}^g\psi(1) \geq e |G : G_\psi| \psi(1) = |G : G_\psi| \chi(1) = \chi^G(1) \geq \varphi(1).$$

Dies zeigt  $\chi^G = \varphi \in \text{Irr}(G | \psi)$  und  $e = f$ . Also ist  $\Phi$  wohldefiniert.

Sei nun  $\theta \in \text{Irr}(G | \psi)$  gegeben. Wegen  $\theta_N = (\theta_{G_\psi})_N$  existiert ein  $\chi \in \text{Irr}(G_\psi | \psi)$  mit  $(\theta, \chi^G)_G = (\theta_N, \chi)_N \neq 0$ . Nach dem ersten Teil des Beweises ist  $\chi^G = \theta$ , d. h.  $\Phi$  ist surjektiv. Außerdem ist  $(\theta_N, \psi)_N = (\chi_N, \psi)_N$ , d. h.  $\chi$  ist der einzige irreduzible Bestandteil von  $\theta_{G_\psi}$ , der in  $\text{Irr}(G_\psi | \psi)$  liegt. Dies zeigt die Injektivität von  $\Phi$ .  $\square$

**Satz 4.14** (ITÔ). *Sei  $A$  eine abelsche Untergruppe von  $G$  und  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . Dann gilt:*

- (i)  $\chi(1) \leq |G : A|$ .
- (ii) Ist  $A \trianglelefteq G$ , so ist  $\chi(1) \mid |G : A|$ .

*Beweis.*

- (i) Aufgabe 12.

- (ii) Sei  $\psi$  ein irreduzibler Bestandteil von  $\chi_A$ . Nach Satz 4.13 existiert ein  $\tilde{\chi} \in \text{Irr}(G_\psi)$  mit  $\tilde{\chi}^G = \chi$  und  $\tilde{\chi}_A = e\psi$  für ein  $e \in \mathbb{N}$ . Da  $A$  abelsch ist, gilt  $|\tilde{\chi}(x)| = |e\psi(x)| = e\psi(1) = e = \tilde{\chi}(1)$  für  $x \in A$ , d. h.  $A \subseteq Z(\tilde{\chi})$ . Nach Satz 3.11 ist  $\tilde{\chi}(1) \mid |G_\psi : Z(\tilde{\chi})| \mid |G_\psi : A|$  und daher  $\chi(1) = |G : G_\psi| \tilde{\chi}(1) \mid |G : G_\psi| |G_\psi : A| = |G : A|$ .  $\square$

**Satz 4.15.** Sei  $N \trianglelefteq G$  und  $\psi \in \text{Irr}(N)$  mit  $G_\psi = G$ . Dann ist  $\psi^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} e_\chi \chi$ , wobei  $e_\chi$  der Verzweigungsindex von  $\chi$  ist (falls  $e_\chi > 0$ ). Insbesondere ist  $\sum e_\chi^2 = |G : N|$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $\psi^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} f_\chi \chi$ . Im Fall  $f_\chi \neq 0$ , ist  $\chi_N = e_\chi \psi$  nach Satz 4.11. Dabei gilt  $f_\chi = (\chi, \psi^G)_G = (\chi_N, \psi)_N = (e_\chi \psi, \psi)_N = e_\chi$ . Es folgt

$$|G : N| \psi(1) = \psi^G(1) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} e_\chi \chi(1) = \psi(1) \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} e_\chi^2$$

und  $\sum e_\chi^2 = |G : N|$ .  $\square$

**Bemerkung 4.16.** Die Zahlen  $e_\chi$  verhalten sich also wie Charaktergrade. In folgendem Satz werden wir sehen, dass es tatsächlich Charaktergrade sind, falls  $e_\chi = 1$  für ein  $\chi \in \text{Irr}(G)$  gilt.

**Satz 4.17** (GALLAGHER). Sei  $N \trianglelefteq G$  und  $\chi \in \text{Irr}(G)$  mit  $\psi := \chi_N \in \text{Irr}(N)$ . Dann ist  $\{\lambda\chi : \lambda \in \text{Irr}(G/N)\}$  die Menge der irreduziblen Bestandteile von  $\psi^G$ .

*Beweis.* Wie üblich fassen wir die Charaktere von  $G/N$  durch Inflation als Charaktere von  $G$  auf. Nach Aufgabe 11 ist  $(\chi_N)^G = \chi\rho$ , wobei  $\rho$  der reguläre Charakter von  $G/N$  ist. Also ist

$$\psi^G = \sum_{\lambda \in \text{Irr}(G/N)} \lambda(1) \chi \lambda.$$

Nach Satz 4.15 ist

$$|G : N| = (\psi^G, \psi^G)_G = \sum_{\lambda, \lambda' \in \text{Irr}(G/N)} \lambda(1) \lambda'(1) (\chi \lambda, \chi \lambda')_G \geq \sum_{\lambda \in \text{Irr}(G/N)} \lambda(1)^2 = |G : N|.$$

Dies zeigt, dass die  $\chi\lambda$  mit  $\lambda \in \text{Irr}(G/N)$  irreduzibel und paarweise verschieden sind.  $\square$

**Satz 4.18.** Sei  $N \trianglelefteq G$  und  $G/N$  zyklisch. Für jedes  $\psi \in \text{Irr}(N)$  mit  $G_\psi = G$  existiert dann ein Fortsetzung  $\chi \in \text{Irr}(G)$  mit  $\chi_N = \psi$ .

*Beweis.* Sei  $\Delta : N \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  eine Darstellung mit Charakter  $\psi$ . Sei  $G/N = \langle gN \rangle$  und  $k := |G/N|$ . Wegen  $G_\psi = G$  sind  $\Delta$  und  ${}^g\Delta$  ähnlich. Sei also  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  mit  $A\Delta(x)A^{-1} = \Delta(gxg^{-1})$  für alle  $x \in N$ . Induktiv folgt

$$A^k \Delta(x) A^{-k} = \Delta(g^k x g^{-k}) = \Delta(g^k) \Delta(x) \Delta(g^k)^{-1}$$

für alle  $x \in N$ . Nach Schurs Lemma ist  $A^{-k} \Delta(g^k) = \lambda 1_n$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ . Sei  $\mu \in \mathbb{C}^\times$  mit  $\mu^k = \lambda$ . Wegen  $(\mu A)^k = \lambda A^k = \Delta(g^k)$  ist die Abbildung

$$\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}), \quad g^i x \mapsto (\mu A)^i \Delta(x)$$

mit  $i \in \mathbb{Z}$  und  $x \in N$  wohldefiniert. Für  $i, j \in \mathbb{Z}$  und  $x, y \in N$  gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(g^i x \cdot g^j y) &= \Gamma(g^{i+j} \cdot (g^{-j} x g^j) y) = (\mu A)^{i+j} \Delta(g^{-j} x g^j) \Delta(y) = (\mu A)^{i+j} A^{-j} \Delta(x) A^j \Delta(y) \\ &= (\mu A)^i \Delta(x) (\mu A)^j \Delta(y) = \Gamma(g^i x) \Gamma(g^j y).\end{aligned}$$

Also ist  $\Gamma$  eine Darstellung, die  $\Delta$  fortsetzt. Mit  $\Delta$  muss auch  $\Gamma$  irreduzibel sein. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 4.19.** Wir berechnen die Charaktertafel von  $G := S_4$  aus der Charaktertafel von  $N := A_4$ . Die in Beispiel 2.11 konstruierten Charaktere  $\chi_2$  und  $\chi_3$  von  $N$  sind unter  $G$  konjugiert. Daher ist  $\chi_2^G = \chi_3^G \in \text{Irr}(G)$ . Da  $G/N$  zyklisch ist, besitzen die verbleibenden Charaktere je zwei Fortsetzungen nach  $G$ . Dies ergibt bereits folgenden Teil der Charaktertafel:

$S_4$	1	(1, 2)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4)
$1_G$	1	1	1	1	1
$\text{sgn}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_2^G$	2	0	2	-1	0
$\psi$	3	$a$	-1	0	$b$
$\psi \text{sgn}$	3	$-a$	-1	0	$-b$

Aus der zweiten Orthogonalitätsrelation folgt  $ab = -1$ . Nach Lemma 2.12 ist  $a$  eine Summe von zweiten Einheitswurzeln und somit eine ganze Zahl. Da  $b$  ganz-algebraisch ist, folgt  $a = -b = \pm 1$ .

$S_4$	1	(1, 2)	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3, 4)
$1_G$	1	1	1	1	1
$\text{sgn}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_2^G$	2	0	2	-1	0
$\psi$	3	1	-1	0	-1
$\psi \text{sgn}$	3	-1	-1	0	1

**Satz 4.20** (TAUNT). *Hat  $G$  abelsche  $p$ -Sylowgruppen, so ist  $p \nmid |G' \cap Z(G)|$ .*

*Beweis.* Nehmen wir indirekt an, dass  $U \leq G' \cap Z(G)$  mit  $|U| = p$  existiert. Sei  $U \leq P \in \text{Syl}_p(G)$  und  $1_U \neq \lambda \in \text{Irr}(U)$ . Sei  $\mu \in \text{Irr}(P)$  mit  $(\mu, \lambda^P)_P \neq 0$ . Dann ist  $(\mu_U, \lambda)_U \neq 0$  und  $\mu_U = \lambda$  wegen  $\mu(1) = 1$  ( $P$  abelsch). Wir schreiben

$$\mu^G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_\chi \chi.$$

Wegen  $p \nmid |G : P| = \mu^G(1)$  existiert ein  $\chi \in \text{Irr}(G)$  mit  $a_\chi > 0$  und  $p \nmid \chi(1) =: n$ . Insbesondere ist  $(\mu, \chi_P)_P \neq 0$  (Frobenius-Reziprozität). Damit ist auch  $\mu_U = \lambda$  ein irreduzibler Bestandteil von  $\chi_U$ . Sei  $\Delta$  eine Darstellung mit Charakter  $\chi$ . Für  $x \in U \subseteq Z(G) \subseteq Z(\chi)$  ist dann  $\Delta(x) = \lambda(x)1_n$  (Satz 2.14). Es folgt  $\chi_U = n\lambda$ . Da  $G/\text{Ker}(\det \Delta) \leq \mathbb{C}^\times$  abelsch ist, gilt  $G' \subseteq \text{Ker}(\det \Delta)$ . Wegen  $U \subseteq G'$  gilt also insbesondere

$$1 = \det \Delta(x) = \lambda(x)^n$$

für alle  $x \in U$ . Andererseits ist auch  $\lambda(x)^p = \lambda(x^p) = 1$ . Wegen  $\text{ggT}(p, n) = 1$  existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha p + \beta n = 1$ . Man erhält:  $\lambda(x) = (\lambda(x)^p)^\alpha (\lambda(x)^n)^\beta = 1$  für alle  $x \in U$ . Dies widerspricht  $\lambda \neq 1_U$ .  $\square$

## 5 Frobeniusgruppen

**Definition 5.1.** Eine *Gruppenoperation* von  $G$  auf einer nichtleeren Menge  $\Omega$  ist ein Homomorphismus  $f : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ . Wir schreiben  ${}^g\omega := (f(g))(\omega)$  für  $g \in G$  und  $\omega \in \Omega$ . Man sagt auch:  $G$  *operiert* auf  $\Omega$ .

**Satz 5.2** (BRAUERS Permutationslemma). *Sei  $H$  eine endliche Gruppe, sodass  $G$  auf  $\text{Cl}(H)$  und  $\text{Irr}(H)$  operiert. Für alle  $g \in G$ ,  $C \in \text{Cl}(H)$  und  $\chi \in \text{Irr}(H)$  gelte dabei  ${}^g\chi({}^gC) = \chi(C)$ . Dann stimmt der Zyklentyp von  $g \in G$  in  $\text{Sym}(\text{Cl}(H))$  mit dem Zyklentyp von  $g$  in  $\text{Sym}(\text{Irr}(H))$  überein. Insbesondere gilt*

$$|\{C \in \text{Cl}(H) : {}^gC = C\}| = |\{\chi \in \text{Irr}(H) : {}^g\chi = \chi\}|$$

für alle  $g \in G$ .

*Beweis.* Sei  $\text{Cl}(H) = \{C_1, \dots, C_k\}$  und  $\text{Irr}(H) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ . Sei  $X := (\chi_i(C_j))_{i,j}$  die Charaktertafel von  $H$ . Sei  $g \in G$  fest. Die Operation von  $g$  auf  $\text{Cl}(H)$  (bzw.  $\text{Irr}(H)$ ) wird dann durch eine Permutationsmatrix  $P$  (bzw.  $Q$ ) beschrieben. Dabei gilt  $QX = ({}^g\chi_i(C_j)) = (\chi_i({}^{g^{-1}}C_j)) = XP$ . Da  $X$  invertierbar ist (Bemerkung 2.1), gilt  $Q = XPX^{-1}$ , d. h.  $Q$  und  $P$  sind ähnlich. Sei  $(l_1, \dots, l_n)$  der Zyklentyp von  $P$ . Nach Aufgabe 13 sind die Eigenwerte von  $P$  gegeben durch:  $\{e^{2\pi i j / l_1} : j = 0, \dots, l_1 - 1\} \cup \dots \cup \{e^{2\pi i j / l_n} : j = 0, \dots, l_n - 1\}$  (mit Vielfachheiten). Da  $P$  und  $Q$  die gleichen Eigenwerte haben, ist  $(l_1, \dots, l_n)$  auch der Zyklentyp von  $Q$ . Die letzte Behauptung erhält man durch Zählen von Einerzyklen.  $\square$

**Definition 5.3.** Eine endliche Gruppe  $G$  heißt *Frobeniusgruppe*, falls eine Untergruppe  $1 < H < G$  mit  $H \cap gHg^{-1} = 1$  für alle  $g \in G \setminus H$  existiert. Man nennt  $H$  *Frobeniuskomplement*.

**Beispiel 5.4.**

- (i) Sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$  mit  $|P| = p$  und  $N_G(P) = P < G$ . Dann ist  $G$  offenbar eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement  $P$ . Insbesondere ist  $S_3$  eine Frobeniusgruppe.
- (ii) Sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $|K| > 2$ . Für  $a \in K^\times$  und  $b \in K$  definieren wir  $f_{a,b} : K \rightarrow K$ ,  $x \mapsto ax + b$ . Dann ist

$$\text{Aff}(1, K) := \{f_{a,b} : a \in K^\times, b \in K\} \leq \text{Sym}(K)$$

eine Frobeniusgruppe (Aufgabe 15).

**Bemerkung 5.5.** Im Folgenden wollen wir zeigen, dass ein Frobeniuskomplement  $H$  von  $G$  stets ein normales Komplement  $N$  besitzt, d. h.  $G = HN$  und  $H \cap N = 1$ .

**Lemma 5.6.** *Sei  $H$  ein Frobeniuskomplement in  $G$ . Wir setzen*

$$N := G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \cup \{1\}.$$

*Dann ist  $|N| = |G : H|$  (als Menge). Ist  $M \trianglelefteq G$  mit  $H \cap M = 1$ , dann folgt  $M \subseteq N$ .*

*Beweis.* Für  $x, y \in G$  ist

$$xHx^{-1} = yHy^{-1} \iff y^{-1}x \in N_G(H) = H \iff xH = yH.$$

Im Fall  $xHx^{-1} \neq yHy^{-1}$  ist  $|xHx^{-1} \cap yHy^{-1}| = |x(H \cap x^{-1}yHy^{-1}x)x^{-1}| = |H \cap x^{-1}yHy^{-1}x| = 1$ . Dies zeigt

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| = |G : H|(|H| - 1) + 1.$$

Es folgt  $|N| = |G| - |G : H|(|H| - 1) = |G : H|$ . Für  $M \trianglelefteq G$  mit  $H \cap M = 1$  ist auch  $gHg^{-1} \cap M = g(H \cap M)g^{-1} = 1$  für alle  $g \in G$ . Also ist  $M \subseteq N$ .  $\square$

**Lemma 5.7.** *Sei  $H$  ein Frobeniuskomplement in  $G$ , und sei  $\psi \in \text{CF}(H)$  mit  $\psi(1) = 0$ . Dann ist  $(\psi^G)_H = \psi$ .*

*Beweis.* Sei  $1 \neq h \in H$  und  $g \in G$  mit  $ghg^{-1} \in H$ . Dann ist  $1 \neq ghg^{-1} \in H \cap gHg^{-1}$  und  $g \in H$ . Nach Definition ist also

$$\psi^G(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \psi(ghg^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \psi(h) = \psi(h).$$

Außerdem ist  $\psi^G(1) = |G : H|\psi(1) = 0 = \psi(1)$ .  $\square$

**Satz 5.8 (FROBENIUS).** *Sei  $G$  eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement  $H$ . Dann existiert ein  $N \trianglelefteq G$  mit  $G = HN$  und  $H \cap N = 1$ .*

*Beweis.* Sei  $1_H \neq \psi \in \text{Irr}(H)$  und  $\theta := \psi - \psi(1)1_H$ . Dann ist sicher  $\theta \in \text{CF}(H)$  und  $\theta(1) = 0$ . Nach Lemma 5.7 ist

$$1 + \psi(1)^2 = (\theta, \theta)_H = (\theta, (\theta^G)_H)_H = (\theta^G, \theta^G)_G.$$

Außerdem ist  $(\theta^G, 1_G)_G = (\theta, 1_H)_H = -\psi(1)$ . Folglich ist  $\tilde{\psi} := \theta^G + \psi(1)1_G \in \text{CF}(G)$  mit

$$(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})_G = (\theta^G, \theta^G)_G + 2\psi(1)(\theta^G, 1_G)_G + \psi(1)^2 = 1.$$

Mit  $\theta$  sind auch  $\theta^G$  und  $\tilde{\psi}$  virtuelle Charaktere (Bemerkung 1.26). Also ist  $\pm\tilde{\psi} \in \text{Irr}(G)$ . Für  $h \in H$  gilt

$$\tilde{\psi}(h) = \theta^G(h) + \psi(1) = \theta(h) + \psi(1) = \psi(h).$$

Insbesondere ist  $\tilde{\psi}(1) = \psi(1) > 0$ . Dies zeigt  $\tilde{\psi} \in \text{Irr}(G)$  mit  $\tilde{\psi}_H = \psi$ . Wir setzen zusätzlich  $\widetilde{1}_H := 1_G$ . Sei

$$M := \bigcap_{\psi \in \text{Irr}(H)} \text{Ker}(\tilde{\psi}) \trianglelefteq G.$$

Dann ist

$$M \cap H \subseteq \bigcap_{\psi \in \text{Irr}(H)} \text{Ker}(\psi) = 1$$

nach Aufgabe 9. Nach Lemma 5.6 ist also  $M \subseteq N$ . Für  $g \in N$  gilt umgekehrt

$$\tilde{\psi}(g) - \tilde{\psi}(1) = \tilde{\psi}(g) - \psi(1) = \theta^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G, \\ g \in x^{-1}Hx}} \theta(xgx^{-1}) = 0$$

für alle  $\psi \in \text{Irr}(H)$ . Dies zeigt  $N \subseteq M$  und  $N = M \trianglelefteq G$ . Wegen  $|N| = |G : H|$  gilt auch  $|HN| = |H||N| = |G|$  und  $G = HN$ .  $\square$



**Definition 5.9.** In der Situation von Satz 5.8 nennt man  $N$  den *Frobeniuskern* von  $G$ .

**Bemerkung 5.10.**

- (i) Man kennt keinen Beweis von Satz 5.8, der ohne Charaktertheorie auskommt.
- (ii) Thompson hat gezeigt, dass der Frobeniuskern  $N$  stets nilpotent ist, d.h.  $N$  ist das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.

**Satz 5.11.** Sei  $G$  eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern  $N$ . Dann ist

$$\text{Irr}(G) = \text{Irr}(G/N) \cup \{\psi^G : 1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)\}.$$

*Beweis.* Sei  $H$  ein Frobeniuskomplement von  $G$ . Dann operiert  $H$  auf  $\text{Cl}(N)$  durch  ${}^hC := \{h x h^{-1} : x \in C\}$ . Man zeigt auch leicht, dass  $H$  auf  $\text{Irr}(N)$  durch Konjugation operiert. Dabei gilt  ${}^h\psi({}^hC) = \psi(C)$  für  $h \in H$ ,  $\psi \in \text{Irr}(N)$  und  $C \in \text{Cl}(N)$ . Wir zählen die Fixpunkte von  $h \in H \setminus \{1\}$  auf  $\text{Cl}(N)$ . Sei zunächst  $h x h^{-1} = x \in N$ . Dann ist  $x^{-1} h x = h \in H \cap x^{-1} H x$  und  $x = 1$ . Die Bahnen von  $\langle h \rangle$  auf  $N \setminus \{1\}$  haben daher die Länge  $|\langle h \rangle|$ . Ist  $C \in \text{Cl}(N) \setminus \{\{1\}\}$  ein Fixpunkt von  $\langle h \rangle$ , so folgt  $|\langle h \rangle| \mid |C|$ . Andererseits ist  $|C| \mid |N|$ . Dies widerspricht Aufgabe 16. Also ist  $\{1\}$  der einzige Fixpunkt von  $\langle h \rangle$  auf  $\text{Cl}(N)$ . Nach Brauers Permutationslemma ist daher auch

$$\{\psi \in \text{Irr}(N) : {}^h\psi = \psi\} = \{1_N\}$$

für alle  $h \neq 1$ . Sei  $1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)$ . Dann ist  $G_\psi = N$  und  $\psi^G \in \text{Irr}(G)$  nach Satz 4.13. Nach Satz 4.11 existiert ein  $e \in \mathbb{N}$  mit  $(\psi^G)_N = e \sum_{gN \in G/N} {}^g\psi$ . Sind  $\psi, \psi_1 \in \text{Irr}(N)$  nicht konjugiert, so ist also  $\psi^G \neq \psi_1^G$ . Für ein  $\chi \in \text{Irr}(G/N)$  ist offenbar  $\chi_N = \chi(1)1_N$  und somit  $\chi \notin \{\psi^G : 1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)\}$ . Sei  $\mathcal{R}$  ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von  $\text{Irr}(N) \setminus \{1_N\}$  unter  $H$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G/N)} \chi(1)^2 + \sum_{\psi \in \mathcal{R}} \psi^G(1)^2 &= |G/N| + |G/N|^2 \sum_{\psi \in \mathcal{R}} \psi(1)^2 = |G/N| + |G/N| \sum_{h \in H} \sum_{\psi \in \mathcal{R}} ({}^h\psi)(1)^2 \\ &= |G/N| + |G/N| \sum_{1_N \neq \psi \in \text{Irr}(N)} \psi(1)^2 = |G/N| + |G/N|(|N| - 1) = |G|. \end{aligned}$$

Also haben wir alle irreduziblen Charaktere von  $G$  gefunden. □

## 6 Induktionssätze

**Bemerkung 6.1.**

- (i) Oft konstruiert man die Charaktertafel von  $G$ , indem man Charaktere von  $H \leq G$  induziert. Wir werden in diesem Kapitel sehen, welche Untergruppen  $H$  man hierzu betrachten muss.
- (ii) Für Untergruppen  $H, K \leq G$  operiert  $H \times K$  auf  $G$  durch  $({}^{h,k})g = h g k^{-1}$  für  $h \in H$ ,  $k \in K$  und  $g \in G$ . Die Bahnen  $H g K$  heißen *Doppelnebenklassen*. Die Menge der Doppelnebenklassen bezeichnen wir mit  $H \backslash G / K$ .

**Satz 6.2** (MACKEY-Formel). Sei  $H, K \leq G$  und  $\varphi \in \text{CF}(H)$ . Dann ist

$$(\varphi^G)_K = \sum_{KgH \in K \backslash G / H} (({}^g\varphi)_{K \cap gHg^{-1}})^K.$$

*Beweis.* Sei  $R$  ein Repräsentantensystem für  $K \backslash G/H$  und für  $r \in R$  sei  $S_r$  ein Repräsentantensystem für  $K/K \cap rHr^{-1}$ . Für jedes  $k \in K$  existieren  $s \in S_r$  und  $x \in K \cap rHr^{-1}$  mit  $k = sx$  und  $krH = sxrH = sr(r^{-1}xr)H = srH$ . Für  $s, t \in S_r$  gilt

$$srK = trK \iff s(K \cap rHr^{-1}) = K \cap srHr^{-1} = K \cap trHr^{-1} = t(K \cap rHr^{-1}) \iff s = t.$$

Dies zeigt

$$G = \dot{\bigcup}_{r \in R} KrH = \dot{\bigcup}_{r \in R} \dot{\bigcup}_{s \in S_r} srH \quad (\text{disjunkt}).$$

Nach Bemerkung 4.4 gilt für  $x \in K$ :

$$\begin{aligned} (\varphi^G)(x) &= \sum_{\substack{gH \in G/H, \\ xgH = gH}} {}^g\varphi(x) = \sum_{r \in R} \sum_{\substack{s \in S_r, \\ xsrH = srH}} {}^{sr}\varphi(x) \\ &= \sum_{r \in R} \sum_{\substack{s \in S_r, \\ xs(rHr^{-1}) = s(rHr^{-1})}} {}^s({}^r\varphi)(x) = \sum_{r \in R} (({}^r\varphi)_{K \cap gHg^{-1}})^K(x). \end{aligned} \quad \square$$

### Definition 6.3.

- (i) Eine Gruppe  $H$  heißt *(p-)quasielementar* für eine Primzahl  $p$ , falls  $H$  einen zyklischen Normalteiler  $N$  mit  $p \nmid |N|$  besitzt, sodass  $H/N$  eine  $p$ -Gruppe ist (d. h.  $N$  ist ein  $p'$ -Hallnormalteiler).
- (ii) Eine Gruppe  $H$  heißt *(p-)elementar* für eine Primzahl  $p$ , falls  $H$  ein direktes Produkt einer  $p$ -Sylowgruppe und einer zyklischen Gruppe ist. Offenbar sind elementare Gruppen auch quasielementar.

**Lemma 6.4.** Zu jeder Primzahl  $p$  und jedem  $x \in G$  existiert eine  $p$ -quasielementare Untergruppe  $H \leq G$  mit  $p \nmid 1_H^G(x) \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $\langle x \rangle = P \times Q$  mit  $P \in \text{Syl}_p(\langle x \rangle)$  und wählen  $H/Q \in \text{Syl}_p(N_G(Q)/Q)$ . Da  $Q$  zyklisch ist, ist  $H$   $p$ -quasielementar. Für  $g \in G$  mit  $gxg^{-1} \in H$  ist auch  $gQg^{-1} \subseteq H$ . Somit ist  $gQg^{-1} \subseteq \{y \in H : p \nmid |\langle y \rangle|\} = Q$  und  $g \in N_G(Q)$ . Dies zeigt

$$\begin{aligned} 1_H^G(x) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} 1 = \frac{1}{|H|} |\{g \in N_G(Q) : gxg^{-1} \in H\}| = \frac{1}{|H|} |\{g \in N_G(Q) : g^{-1}xg \in H\}| \\ &= |\{gH \in N_G(Q)/H : xgH = gH\}|. \end{aligned}$$

Wir müssen also die Fixpunkte der Operation  $\alpha : \langle x \rangle \rightarrow \text{Sym}(N_G(Q)/H)$  durch Linksmultiplikation zählen. Wegen  $QgH = gQH = gH$  für  $g \in N_G(Q)$  ist  $Q \leq \text{Ker}(\alpha)$ . Da  $xQ \in \langle x \rangle/Q \cong P$  ein  $p$ -Element ist, ist auch  $\alpha(x)$  ein  $p$ -Element. Insbesondere zerfällt  $\alpha(x)$  in Zyklen, deren Längen  $p$ -Potenzen sind. Dies liefert

$$1_H^G(x) = |\{gH \in N_G(Q)/H : xgH = gH\}| \equiv |N_G(Q)/H| \not\equiv 0 \pmod{p}. \quad \square$$

**Satz 6.5 (SOLOMON).** Es existieren  $a_H \in \mathbb{Z}$  mit

$$1_G = \sum_{\substack{H \leq G, \\ H \text{ quasielementar}}} a_H 1_H^G.$$

*Beweis.* Sei

$$\mathcal{Q}(G) := \left\{ \sum_{H \leq G \text{ quasil.}} a_H 1_H^G : a_H \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Für  $x \in G$  sei  $U_x := \{\lambda(x) : \lambda \in \mathcal{Q}(G)\}$ . Wegen  $-\lambda \in \mathcal{Q}(G)$  für  $\lambda \in \mathcal{Q}(G)$  ist  $U_x$  eine Untergruppe von  $(\mathbb{Z}, +)$ , d. h.  $U_x = n\mathbb{Z}$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Nach Lemma 6.4 ist  $U_x \not\subseteq p\mathbb{Z}$  für jede Primzahl  $p$ . Dies zeigt  $U_x = \mathbb{Z}$ . Wir wählen  $\lambda_x \in \mathcal{Q}(G)$  mit  $\lambda_x(x) = 1$  für  $x \in G$ . Für quasialementare Untergruppen  $H, K \leq G$  und  $g \in G$  ist auch  $H \cap gKg^{-1} \leq H$  quasialementar (Aufgabe 17). Die Mackey-Formel zeigt also

$$\begin{aligned} 1_H^G 1_K^G &\stackrel{4.5(ii)}{=} (1_H (1_K^G)_H)^G = ((1_K^G)_H)^G = \left( \sum_{HgK \in H \backslash G / K} ((1_{gKg^{-1}})_H)_{H \cap gKg^{-1}} \right)^G \\ &\stackrel{4.5(i)}{=} \sum_{HgK \in H \backslash G / K} (1_{H \cap gKg^{-1}})^G \in \mathcal{Q}(G). \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\mathcal{Q}(G)$  abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Durch Ausmultiplizieren der Gleichung  $\prod_{x \in G} (1_G - \lambda_x) = 0$  erhält man eine Darstellung für  $1_G$  in der gewünschten Form.  $\square$

**Lemma 6.6.** *Sei  $H$  elementar und  $\chi \in \text{Irr}(H)$ . Dann existieren  $K \leq H$  und  $\lambda \in \text{Irr}(K)$  mit  $\lambda(1) = 1$  und  $\lambda^H = \chi$ .*

*Beweis* (MANN). Sei  $H$  ein minimales Gegenbeispiel. Wir schreiben  $H = P \times Q$  mit  $P \in \text{Syl}_p(H)$ . Nach Satz 2.5 ist  $\chi = \psi\lambda$  mit  $\psi \in \text{Irr}(P)$  und  $\lambda \in \text{Irr}(Q)$ . Im Fall  $Q \neq 1$  existieren  $P_1 \leq P$ ,  $\psi_1 \in \text{Irr}(P_1)$  mit  $\psi_1(1) = 1$  und  $\psi = \psi_1^P$ . Dann ist  $\chi = \psi_1^P (1_P \lambda) = (\psi_1 \lambda)^H$  mit  $\psi_1 \lambda \in \text{Irr}(P_1 \times Q)$  nach Satz 4.5(ii). Da  $Q$  abelsch ist, gilt auch  $(\psi_1 \lambda)(1) = \psi_1(1)\lambda(1) = 1$ . Dieser Widerspruch zeigt  $Q = 1$ , d. h.  $H$  ist eine  $p$ -Gruppe.

Für  $\lambda \in \text{Irr}(H)$  mit  $\lambda(1) = 1$  ist  $\chi\lambda \in \text{Irr}(H)$  (Aufgabe 6). Im Fall  $\chi\lambda = \chi$  ist  $1 = (\chi, \chi\lambda)_H = (\chi\bar{\chi}, \lambda)_H$ , d. h.  $\lambda$  ist ein irreduzibler Bestandteil von  $\chi\bar{\chi}$  mit Vielfachheit 1. Schreibe  $\chi\bar{\chi} = 1_H + \lambda_1 + \dots + \lambda_r + \sum_{i=1}^s a_i \psi_i$  mit  $\lambda_1(1) = \dots = \lambda_r(1) = 1 < \psi_1(1) \leq \dots \leq \psi_s(1)$ . Dann ist

$$r + 1 \equiv r + 1 + \sum_{i=1}^s a_i \psi_i(1) = (\chi\bar{\chi})(1) = \chi(1)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

und  $r \neq 0$ . Sei also  $1_H \neq \lambda \in \text{Irr}(H)$  mit  $\chi\lambda = \chi$ . Für  $x \in H \setminus \text{Ker}(\lambda)$  ist dann  $(1_H - \lambda)(x)\chi(x) = (\chi - \lambda\chi)(x) = 0$  und somit  $\chi(x) = 0$ . Wähle eine maximale Untergruppe  $M < H$  mit  $\text{Ker}(\lambda) \subseteq M$ . Wegen  $H' \subseteq \text{Ker}(\lambda)$  ist dann  $M \trianglelefteq H$ . Da  $H/M$  ein Element der Ordnung  $p$  enthält, folgt  $|H : M| = p$  aus der Maximalität von  $M$ . Sei  $\psi \in \text{Irr}(M)$  mit  $(\chi_M, \psi)_M \neq 0$ . Im Fall  $H_\psi = M$  ist  $\psi^H = \chi$  nach Clifford. Wegen  $M < H$  existieren  $M_1 \leq M$  und  $\psi_1 \in \text{Irr}(M_1)$  mit  $\psi_1(1) = 1$  und  $\psi_1^M = \psi$ . Nach Satz 4.5(i) ist dann  $\psi_1^H = (\psi_1^M)^H = \psi^H = \chi$ . Dieser Widerspruch zeigt  $H_\psi = H$ . Also ist  $\chi_M = e\psi$  für ein  $e \in \mathbb{N}$  nach Satz 4.11. Wegen  $\chi(1) = e\psi(1)$  ist  $e$  eine  $p$ -Potenz. Aus Satz 4.15 folgt nun  $e = 1$ , d. h.  $\chi_M = \psi$ . Nach Gallagher ist  $\psi^H = \chi_1 + \dots + \chi_p$  mit paarweise verschiedenen  $\chi_i \in \text{Irr}(H)$  und  $\chi_1 = \chi$ . Außerdem haben alle  $\chi_i$  den gleichen Grad. Insbesondere ist  $(\chi_i)_M = \psi$  für  $i = 1, \dots, p$ . Da  $\psi^H$  und  $\chi$  auf  $H \setminus M (\subseteq H \setminus \text{Ker}(\lambda))$  verschwinden, verschwindet auch  $\chi_2 + \dots + \chi_p$  auf  $H \setminus M$ . Dies liefert den Widerspruch

$$0 = |H|(\chi_1, \chi_2 + \dots + \chi_p)_H = \sum_{x \in M} \chi_1(x) \overline{(\chi_2 + \dots + \chi_p)(x)} = |M|(p-1)(\psi, \psi)_M = |M|(p-1). \quad \square$$

**Satz 6.7** (BRAUERS Induktionssatz). *Für jeden (virtuellen) Charakter  $\chi$  von  $G$  existieren  $a_{H,\psi} \in \mathbb{Z}$  mit*

$$\chi = \sum_{\substack{H \leq G, \\ H \text{ elementar}}} \sum_{\substack{\psi \in \text{Irr}(H), \\ \psi(1)=1}} a_{H,\psi} \psi^G.$$

*Beweis.* Offenbar können wir annehmen, dass  $\chi$  irreduzibel ist. Nach Lemma 6.6 können wir die Bedingung  $\psi(1) = 1$  vernachlässigen. Hat man die gewünschte Darstellung für den Charakter  $1_G$  gefunden, so erhält man durch Multiplikation mit  $\chi$  eine entsprechende Darstellung für  $\chi$  (beachte:  $\chi\psi^G = (\chi_H\psi)^G$ ). Wir können daher  $\chi = 1_G$  annehmen. Nach Solomon können wir auch annehmen, dass  $G$   $p$ -quasielementar für eine Primzahl  $p$  ist. Sei  $G$  ein minimales Gegenbeispiel, und sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Dann besitzt  $P$  ein zyklisches, normales Komplement  $N$  in  $G$ .

Wir betrachten die elementare Untergruppe  $H := PC_N(P) \cong P \times C_N(P)$ . Da  $G$  nicht elementar ist, gilt  $H < G$ . Wegen  $(1_H^G, 1_G)_G = (1_H, 1_H)_H = 1$  ist  $\zeta := 1_H^G - 1_G$  ein Charakter von  $G$ . Ist jeder irreduzible Bestandteil von  $\zeta$  aus einer echten Untergruppe induziert, so erhält man leicht eine gewünschte Darstellung für  $1_G = 1_H^G - \zeta$  aus der Minimalität von  $G$ . Folglich existiert also ein  $\psi \in \text{Irr}(G)$  mit  $(\zeta, \psi)_G \neq 0$ , sodass  $\psi$  nicht aus einer echten Untergruppe induziert ist. Für  $g \in G$  ist  $NgH = gNH = G$ . Nach Mackey ist daher  $1_N + \zeta_N = (1_H^G)_N = 1_{N \cap H}^N$ . Dies zeigt  $(1_N + \zeta_N, 1_N)_N = (1_{N \cap H}^N, 1_N)_N = (1_{N \cap H}, 1_{N \cap H})_{N \cap H} = 1$  und  $(\psi_N, 1_N)_N \leq (\zeta_N, 1_N)_N = 0$ . Wir können daher  $1_N \neq \lambda \in \text{Irr}(N)$  mit  $(\psi_N, \lambda)_N \neq 0$  wählen. Schreibe  $N = \langle x \rangle$ . Für  $g \in G$  ist dann  $gxg^{-1} = x^r$  für ein  $r \in \mathbb{Z}$  wegen  $N \trianglelefteq G$ . Außerdem existiert ein  $s \in \mathbb{Z}$  mit  $N \cap H = C_N(P) = \langle x^s \rangle$ . Dann ist  $gx^s g^{-1} = x^{sr} = (x^s)^r$ . Dies zeigt  $C_N(P) \trianglelefteq G$ . Für  $a \in C_N(P) \subseteq H$  ist daher

$$1_H^G(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G, \\ gag^{-1} \in H}} 1 = |G : H| = 1_H^G(1).$$

Also ist  $C_N(P) \subseteq \text{Ker}(1_H^G) = \text{Ker}(\zeta) \subseteq \text{Ker}(\psi)$  nach Aufgabe 9. Analog ist  $C_N(P) \subseteq \text{Ker}(\psi) \cap N = \text{Ker}(\psi_N) \subseteq \text{Ker}(\lambda)$ . Da  $\psi$  aus keiner echten Untergruppe induziert ist, folgt  $G_\lambda = G$  nach Clifford. Insbesondere ist  $\lambda(y^{-1}xy) = {}^y\lambda(x) = \lambda(x)$  für  $y \in P$ . Also ist  $xyx^{-1} \in x \text{Ker}(\lambda)$  (beachte:  $\lambda(1) = 1$ ). Wie oben zeigt man  $\text{Ker}(\lambda) \trianglelefteq G$  (als Untergruppe des zyklischen Normalteilers  $N$ ). Folglich operiert  $P$  auf der Nebenklasse  $x \text{Ker}(\lambda)$  durch Konjugation. Zählen der Bahnen liefert

$$|x \text{Ker}(\lambda) \cap C_N(P)| \equiv |x \text{Ker}(\lambda)| = |\text{Ker}(\lambda)| \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Dies zeigt  $\emptyset \neq x \text{Ker}(\lambda) \cap C_N(P) \subseteq x \text{Ker}(\lambda) \cap \text{Ker}(\lambda)$  und  $x \in \text{Ker}(\lambda)$ . Also ist  $N = \langle x \rangle \subseteq \text{Ker}(\lambda)$  und  $\lambda = 1_N$ . Widerspruch.  $\square$

**Satz 6.8.** *Eine Klassenfunktion  $\chi$  von  $G$  ist genau dann ein irreduzibler Charakter, falls folgende Bedingungen gelten:*

- (i) *Für jede elementare Untergruppe  $H \leq G$  ist  $\chi_H$  ein virtueller Charakter.*
- (ii)  $(\chi, \chi)_G = 1$ .
- (iii)  $\chi(1) > 0$ .

*Beweis.* Für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  gelten offenbar (i)–(iii). Sei nun umgekehrt  $\chi \in \text{CF}(G)$ , sodass (i)–(iii) gilt. Nach Satz 6.7 existieren  $a_{H,\psi} \in \mathbb{Z}$  mit

$$1_G = \sum_{\substack{H \leq G, \\ H \text{ elementar}}} \sum_{\psi \in \text{Irr}(H)} a_{H,\psi} \psi^G. \quad (*)$$

Nach Voraussetzung sind  $\psi\chi_H$  und  $\psi^G\chi = (\psi\chi_H)^G$  für  $\psi \in \text{Irr}(H)$  virtuelle Charaktere. Multipliziert man nun (\*) mit  $\chi$ , so sieht man, dass  $\chi$  ein virtueller Charakter von  $G$  ist. Also existieren  $a_\varphi \in \mathbb{Z}$  mit  $\chi = \sum_{\varphi \in \text{Irr}(G)} a_\varphi \varphi$ . Wegen  $1 = (\chi, \chi)_G = \sum_{\varphi \in \text{Irr}(G)} a_\varphi^2$  ist  $\pm\chi \in \text{Irr}(G)$ . Aus  $\chi(1) > 0$  folgt schließlich  $\chi \in \text{Irr}(G)$ .  $\square$

**Satz 6.9 (ARTIN).** Für jeden Charakter  $\chi$  von  $G$  existieren  $a_{C,\psi} \in \mathbb{Q}$  mit

$$\chi = \sum_{\substack{C \leq G, \\ C \text{ zyklisch}}} \sum_{\psi \in \text{Irr}(C)} a_{C,\psi} \psi^G.$$

*Beweis.* Wie in Satz 6.7 können wir  $\chi = 1_G$  annehmen. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf  $G$  durch

$$x \approx y : \Longleftrightarrow \exists g \in G : \langle x \rangle = g \langle y \rangle g^{-1}.$$

Für eine Äquivalenzklasse  $K$  von  $\approx$  genügt es zu zeigen, dass die charakteristische Funktion

$$\chi_K(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in K, \\ 0 & \text{falls } x \notin K \end{cases}$$

die gewünschte Form hat, denn  $\chi$  ist die Summe aller  $\chi_K$ .

Sei  $x \in K$  fest. Wir argumentieren durch Induktion nach  $n := |\langle x \rangle|$ . Für  $n = 1$  ist  $K = \{1\}$  und  $\chi_K = |G|^{-1} 1_G^G$  (siehe Beispiel 4.8). Sei also  $n > 1$ . Für  $C := \langle x \rangle$  und  $y \in G$  ist

$$1_C^G(y) = |\{gC \in G/C : g^{-1}yg \in C\}|$$

nach Bemerkung 4.4. Sei  $z \in G$  mit  $\langle z \rangle = \langle y \rangle$ . Dann ist

$$g^{-1}yg \in C \Longleftrightarrow g^{-1}\langle y \rangle g \leq C \Longleftrightarrow g^{-1}\langle z \rangle g \leq C \Longleftrightarrow g^{-1}zg \in C$$

für  $g \in G$  und daher  $1_C^G(z) = 1_C^G(y)$ . Da  $1_C^G$  auch eine Klassenfunktion ist, ist  $1_C^G$  sogar konstant auf den  $\approx$ -Klassen. Wir wählen  $a \in \mathbb{Q}$  mit  $a 1_C^G(x) = 1$ . Liegt kein Konjugiertes von  $y$  in  $C$ , so ist offenbar  $1_C^G(y) = 0$ . Sei nun  $\langle y \rangle < C$  und sei  $K_y$  die  $\approx$ -Klasse von  $y$ . Nach Induktion lässt sich  $\chi_{K_y}$  in der gewünschten Form schreiben. Somit lässt sich auch  $-a 1_C^G \chi_{K_y}$  in der gewünschten Form schreiben. Summiert man über diese Funktionen, so ergibt sich, dass auch

$$\beta(y) := \begin{cases} -a 1_C^G(y) & \text{falls } \langle y \rangle < gCg^{-1} \text{ für ein } g \in G, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gewünschte Form hat. Schließlich hat auch  $\chi_K = a 1_C^G + \beta$  die gewünschte Form.  $\square$

**Bemerkung 6.10.**

- (i) Im Folgenden beschäftigen wir uns mit *K-Darstellungen*, d.h. Homomorphismen  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, K)$ , wobei  $K$  ein beliebiger Teilkörper von  $\mathbb{C}$  ist.
- (ii) Man sieht leicht, dass der Satz von Maschke auch für  $K$ -Darstellungen gilt (im Beweis benötigt man nur  $\text{char}(K) \nmid |G|$ ). Jede  $K$ -Darstellung lässt sich also als direkte Summe irreduzibler  $K$ -Darstellungen schreiben. Entsprechendes gilt für die  $K$ -Charaktere.
- (iii) Genauso gilt folgende Form von Schurs Lemma: Sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  nicht-ähnliche irreduzible  $K$ -Darstellungen und  $A\Delta(g) = \Gamma(g)A$  für alle  $g \in G$ , so ist  $A = 0$  (die vollständige Version von Schurs Lemma benötigt, dass  $K$  algebraisch abgeschlossen ist).

- (iv) Damit bleibt auch Teil (i) von Lemma 1.18 richtig für  $K$ -Darstellungen. Für verschiedene irreduzible  $K$ -Charaktere  $\chi$  und  $\psi$  gilt also  $(\chi, \psi)_G = 0$  (siehe Beweis von Satz 1.19). Außerdem ist  $(\chi, \chi)_G > 0$ , aber nicht unbedingt  $(\chi, \chi)_G = 1$  (Aufgabe 19).

**Definition 6.11.** Man nennt  $\exp(G) := \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = 1 \ \forall g \in G\}$  den *Exponenten* von  $G$ .

**Bemerkung 6.12.** Division mit Rest liefert Zahlen  $a, r \in \mathbb{Z}$  mit  $|G| = a \exp(G) + r$  und  $0 \leq r < \exp(G)$ . Dann ist  $g^r = g^{a \exp(G) + r} = g^{|G|} = 1$  für alle  $g \in G$  nach Lagrange. Dies zeigt  $r = 0$  und  $\exp(G) \mid |G|$ .

**Satz 6.13** (BRAUER). Sei  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  eine Matrixdarstellung und sei  $\zeta := e^{2\pi i / \exp(G)}$ . Dann lässt sich  $\Delta$  über  $\mathbb{Q}(\zeta)$  realisieren, d. h. durch geeignete Basiswahl kann man  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$  annehmen.

*Beweis.* Sei  $\chi$  der Charakter von  $\Delta$ . Sei  $K := \mathbb{Q}(\zeta)$ . Nach Brauers Induktionssatz existieren elementare Untergruppen  $H_1, \dots, H_m$  und  $\lambda_i \in \mathrm{Irr}(H_i)$  mit  $\lambda_i(1) = 1$  und

$$\chi = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i^G$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Wegen  $\lambda_i(1) = 1$  ist  $\lambda_i(h)^{\exp(G)} = \lambda_i(h^{\exp(G)}) = \lambda_i(1) = 1$  für  $h \in H_i$ . Daher lässt sich  $\lambda_i$  über  $K$  realisieren. Nach Aufgabe 14 lässt sich daher auch  $\lambda_i^G$  über  $K$  realisieren. Wir schreiben

$$\lambda_i^G = \sum_{j=1}^k b_{ij} \tau_j,$$

wobei  $\tau_1, \dots, \tau_k$  die irreduziblen  $K$ -Charaktere von  $G$  sind. Dann ist

$$\chi = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m a_i b_{ij} \tau_j.$$

Nach Bemerkung 6.10 gilt  $(\tau_j, \tau_j)_G \sum_{i=1}^m a_i b_{ij} = (\chi, \tau_j)_G \geq 0$  für  $j = 1, \dots, k$ , denn  $\tau_j$  ist offenbar auch ein Charakter (über  $\mathbb{C}$ ). Also ist  $\sum_{i=1}^m a_i b_{ij} \geq 0$ , und  $\chi$  ist ein  $K$ -Charakter. Es existiert also eine  $K$ -Darstellung  $\Gamma$  mit Charakter  $\chi$ . Nach Satz 1.21 sind  $\Delta$  und  $\Gamma$  ähnlich. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 6.14.**

- (i) Die Charaktere zyklischer Gruppen kann man über keinen kleineren Körper als in Satz 6.13 realisieren.
- (ii) Satz 6.13 ermöglicht es, Darstellungen auf dem Computer zu realisieren, denn jedes Element in  $\mathbb{Q}(\zeta)$  lässt sich eindeutig in der Form  $a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_k \zeta^k$  mit  $k := \varphi(\exp(G)) - 1$  und  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$  schreiben.

**Beispiel 6.15.** Sei  $\Delta$  eine Matrixdarstellung mit Charakter  $\chi$ . Nach Satz 6.13 können wir  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$  mit  $\zeta := e^{2\pi i / |G|}$  annehmen. Sei  $\alpha \in \mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta) | \mathbb{Q})$ . Offenbar induziert  $\alpha$  dann einen Automorphismus auf  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$  durch  $\alpha((x_{ij})_{i,j=1}^n) = (\alpha(x_{ij}))_{i,j=1}^n$ . Folglich ist auch  ${}^\alpha \Delta := \alpha \circ \Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}(\zeta))$ ,  $g \mapsto \alpha(\Delta(g))$  eine Matrixdarstellung von  $G$ . Sei  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha(\zeta) = \zeta^m$ . Für den Charakter  ${}^\alpha \chi$  von  ${}^\alpha \Delta$  gilt dann  ${}^\alpha \chi(g) = \mathrm{Spur} \alpha(\Delta(g)) = \alpha(\chi(g)) = \chi(g^m)$  für  $g \in G$  (siehe Beweis

von Lemma 2.12 und Aufgabe 5). Umgekehrt weiß man aus Algebra 1, dass für jedes  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(m, |G|) = 1$  ein  $\alpha \in \mathcal{G}$  mit  $\alpha(\zeta) = \zeta^m$  existiert ( $\mathcal{G} \cong (\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z})^\times$ ). In diesem Fall ist also stets  $g \mapsto \chi(g^m)$  ein Charakter von  $G$ . Für  $m = -1$  erhält man  ${}^\alpha\chi = \bar{\chi}$ . Für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  ist auch  ${}^\alpha\chi \in \text{Irr}(G)$ , denn

$$({}^\alpha\chi, {}^\alpha\chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(\chi(g)) \alpha(\chi(g^{-1})) = \alpha((\chi, \chi)_G) = \alpha(1) = 1.$$

Gilt  $\chi(g) \notin \mathbb{Z}$  für ein  $g \in G$ , so existiert stets ein  $\alpha \in \mathcal{G}$  mit  ${}^\alpha\chi \neq \chi$ , denn  $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$  ist eine Galois-Erweiterung. Man nennt  $\chi$  und  ${}^\alpha\chi$  *algebraisch konjugiert*. Auf diese Weise kann man häufig Charaktere konstruieren.

**Bemerkung 6.16.** Eine Gruppe  $H$  heißt *M-Gruppe*, falls jeder irreduzible Charakter von  $H$  die Induktion eines Charakters vom Grad 1 ist (d.h. jeder irreduzible Charakter ist *monomial*). Nach Lemma 6.6 sind elementare Gruppen M-Gruppen. Wir werden umgekehrt zeigen, dass jede M-Gruppe auflösbar ist.

**Lemma 6.17.** Sei  $\psi$  ein Charakter von  $H \leq G$ . Dann ist

$$\text{Ker}(\psi^G) = \bigcap_{g \in G} g \text{Ker}(\psi) g^{-1}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$x \in \text{Ker}(\psi^G) \iff \psi^G(x) = \psi^G(1) = |G : H| \psi(1) \iff \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} \psi(gxg^{-1}) = |G| \psi(1).$$

Für  $x \in \text{Ker}(\psi^G)$  ist also

$$|G| \psi(1) = \left| \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} \psi(gxg^{-1}) \right| \leq \sum_{\substack{g \in G, \\ gxg^{-1} \in H}} |\psi(gxg^{-1})| \leq |G| \psi(1)$$

nach Lemma 2.12. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (vgl. Beweis von Lemma 2.12) impliziert  $gxg^{-1} \in H$  und  $\psi(gxg^{-1}) = \psi(x)$  für alle  $g \in G$ . Also ist

$$|G| \psi(1) = \sum_{g \in G} \psi(gxg^{-1}) = |G| \psi(x)$$

und  $\psi(gxg^{-1}) = \psi(1)$  für alle  $g \in G$ . Dies zeigt

$$x \in \text{Ker}(\psi^G) \iff \forall g \in G : gxg^{-1} \in \text{Ker}(\psi) \iff x \in \bigcap_{g \in G} g \text{Ker}(\psi) g^{-1}. \quad \square$$

**Definition 6.18.** Wir definieren  $G^{(1)} := G'$  und  $G^{(i)} := (G^{(i-1)})'$  für  $i \geq 2$ .

**Bemerkung 6.19.**

- (i) Bekanntlich ist  $G^{(1)} = G' \trianglelefteq G$ . Nehmen wir induktiv an, dass  $G^{(i-1)} \trianglelefteq G$  gilt. Sei  $g \in G$ . Dann ist die Abbildung  $G^{(i-1)} \rightarrow G^{(i-1)}$ ,  $x \mapsto gxg^{-1}$  ein Automorphismus  $\alpha \in \text{Aut}(G^{(i-1)})$ . Nach Bemerkung 2.9 ist also  $gG^{(i)}g^{-1} = \alpha((G^{(i-1)})') = (G^{(i-1)})' = G^{(i)}$ . Also sind alle  $G^{(i)}$  normal in  $G$ .

(ii) Bekanntlich ist  $G$  genau dann auflösbar, wenn es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $G^{(k)} = 1$  gibt.

**Satz 6.20** (TAKETA). *Jede endliche M-Gruppe ist auflösbar.*

*Beweis.* Sei  $G$  eine M-Gruppe. Seien  $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$  die Grade der irreduziblen Charaktere von  $G$  (ohne Vielfachheiten). Wir zeigen zunächst  $G^{(i)} \subseteq \text{Ker}(\chi)$  für alle  $\chi \in \text{Irr}(G)$  mit  $\chi(1) = \alpha_i$ . Für  $i = 1$  hat  $\chi$  Grad 1 und es gilt  $G^{(1)} = G' \subseteq \text{Ker}(\chi)$ . Sei nun  $i > 1$ . Wir argumentieren durch Induktion nach  $i$ . Nach Voraussetzung existieren  $H < G$  und  $\lambda \in \text{Irr}(H)$  mit  $\lambda(1) = 1$  und  $\chi = \lambda^G$ . Wegen  $H < G$  und  $(1_H^G, 1_G)_G = (1_H, 1_H)_H = 1$  ist  $1_H^G$  reduzibel. Für jeden irreduziblen Bestandteil  $\psi$  von  $1_H^G$  gilt also  $\psi(1) < 1_H^G(1) = |G : H| = \lambda^G(1) = \chi(1)$ . Nach Induktion ist also  $G^{(i-1)} \subseteq \text{Ker}(\psi)$ . Nach Aufgabe 9 und Lemma 6.17 ist damit auch  $G^{(i-1)} \subseteq \text{Ker}(1_H^G) \subseteq H$ . Es folgt  $G^{(i)} = (G^{(i-1)})' \subseteq H' \subseteq \text{Ker}(\lambda)$ . Wegen  $G^{(i)} \trianglelefteq G$  zeigt Lemma 6.17 auch

$$G^{(i)} \subseteq \bigcap_{g \in G} g \text{Ker}(\lambda) g^{-1} = \text{Ker}(\chi).$$

Insbesondere gilt

$$G^{(k)} \subseteq \bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G)} \text{Ker}(\chi) = 1$$

nach Aufgabe 9, d. h.  $G$  ist auflösbar. □

**Bemerkung 6.21.** Nicht jede auflösbare Gruppe ist auch eine M-Gruppe (siehe Aufgabe 20).

## 7 Frobenius-Schur-Indikatoren

**Bemerkung 7.1.** Wir beschäftigen uns mit der Frage, wie viele „Wurzeln“ ein Element  $g \in G$  hat.

**Definition 7.2.** Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $g \in G$  sei

$$\theta_n(g) := |\{h \in G : h^n = g\}|.$$

**Bemerkung 7.3.**

- (i) Im Fall  $\text{ggT}(n, |G|) = 1$  gilt  $\theta_n(g) = 1$  für alle  $g \in G$ , denn die Abbildung  $G \rightarrow G, g \mapsto g^n$  ist eine Bijektion.
- (ii) Offenbar ist  $\theta_n$  eine Klassenfunktion, d. h. wir können

$$\theta_n = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \nu_n(\chi) \chi$$

mit  $\nu_n(\chi) \in \mathbb{C}$  schreiben.

**Lemma 7.4.** *Für alle  $\chi \in \text{Irr}(G)$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist*

$$\nu_n(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n).$$



*Beweis.* Es gilt

$$\nu_n(\chi) = (\chi, \theta_n)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \theta_n(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{h \in G, \\ h^n = g}} \chi(h^n) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{\substack{g \in G, \\ h^n = g}} \chi(h^n) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h^n). \square$$

**Definition 7.5.** Man nennt  $\nu_2(\chi)$  den *Frobenius-Schur-Indikator* von  $\chi \in \text{Irr}(G)$ .

**Satz 7.6.** Für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  gilt:

$$\nu_2(\chi) = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \bar{\chi} = \chi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Sei  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $g \mapsto (\gamma_{ij}(g))_{i,j=1}^n$  eine Matrixdarstellung mit Charakter  $\chi$ . Wir betrachten die Darstellung  $\Delta^2 := \Delta \otimes \Delta : G \rightarrow \text{GL}(n^2, \mathbb{C})$  (siehe Bemerkung 2.2 und Bemerkung 2.4). Wie dort sei  $i \mapsto (i_1, i_2)$  eine Bijektion zwischen  $\{1, \dots, n^2\}$  und  $\{1, \dots, n\}^2$ . Man sieht leicht, dass

$$U := \{(a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2} : a_i = -a_j \text{ falls } (i_1, i_2) = (j_2, j_1)\}$$

ein Untervektorraum von  $\mathbb{C}^{n^2}$  ist. Für  $(a_1, \dots, a_{n^2}) \in U$  und  $g \in G$  ist

$$(\Delta^2(g))(a_1, \dots, a_{n^2}) = \left( \sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_1}(g) \gamma_{i_2 j_2}(g) \right)_{i=1}^{n^2}.$$

Sei  $k \in \{1, \dots, n^2\}$  mit  $(k_1, k_2) = (i_2, i_1)$ . Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_1}(g) \gamma_{i_2 j_2}(g) = - \sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_2}(g) \gamma_{i_2 j_1}(g) = - \sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{k_1 j_1}(g) \gamma_{k_2 j_2}(g).$$

Also ist  $(\Delta^2(g))(a_1, \dots, a_{n^2}) \in U$  und  $U$  ist  $\Delta^2$ -invariant. Nach Maschke existiert ein  $\Delta^2$ -invariantes Komplement  $V \leq \mathbb{C}^{n^2}$  von  $U$ . Seien  $\Lambda^2 : G \rightarrow \text{GL}(U)$  und  $S^2 : G \rightarrow \text{GL}(V)$  die entsprechenden Teildarstellungen (also  $\Delta^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$ ). O.B.d.A. sei  $i_1 < i_2$  für  $i = 1, \dots, n(n-1)/2$ . Wir wählen  $i' \in \{1, \dots, n^2\}$  mit  $(i'_1, i'_2) = (i_2, i_1)$ . Dann ist  $\{b_i := e_i - e_{i'} : i = 1, \dots, n(n-1)/2\}$  eine Basis von  $U$ , wobei  $e_i$  die Standardbasis von  $\mathbb{C}^{n^2}$  ist. Dann ist

$$\begin{aligned} (\Lambda^2(g))(b_i) &= (\Delta^2(g))(b_i) = (\gamma_{j_1 i_1}(g) \gamma_{j_2 i_2}(g) - \gamma_{j_1 i_2}(g) \gamma_{j_2 i_1}(g))_{j=1}^{n^2} \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (\gamma_{j_1 i_1}(g) \gamma_{j_2 i_2}(g) - \gamma_{j_1 i_2}(g) \gamma_{j_2 i_1}(g)) b_j \end{aligned}$$

für  $g \in G$  und  $i = 1, \dots, n(n-1)/2$ . Für den Charakter  $\lambda$  von  $\Lambda^2$  gilt also

$$\begin{aligned} \lambda(g) &= \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \gamma_{i_1 i_1}(g) \gamma_{i_2 i_2}(g) - \gamma_{i_1 i_2}(g) \gamma_{i_2 i_1}(g) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \gamma_{ii}(g) \right)^2 - \underbrace{\frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}(g) \gamma_{ji}(g) \right)}_{\substack{=\text{Spur } \Delta(g)^2 \\ =\text{Spur } \Delta(g^2)}} \\ &= \frac{1}{2} (\chi(g)^2 - \chi(g^2)) \end{aligned}$$

für  $g \in G$ . Da  $\lambda$  ein Summand von  $\chi^2$  ist ( $\Delta^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$ ), gilt  $0 \leq (\lambda, 1_G)_G \leq (\chi^2, 1_G)_G = (\chi, \bar{\chi})_G \leq 1$ . Nach Lemma 7.4 ist also

$$\nu_2(\chi) = (\chi^2 - 2\lambda, 1_G)_G = (\chi^2, 1_G)_G - 2(\lambda, 1_G)_G = (\chi, \bar{\chi})_G - 2(\lambda, 1_G)_G = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \bar{\chi} = \chi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

**Bemerkung 7.7.**

- (i) Die im Beweis konstruierte Darstellung  $\Lambda^2$  (bzw.  $S^2$ ) nennt man das *alternierende* (bzw. *symmetrische*) *Quadrat* von  $\Delta$ .
- (ii) Es gilt  $\nu_2(\chi) = 1$  genau dann, wenn eine  $\mathbb{R}$ -Darstellung mit Charakter  $\chi$  existiert (ohne Beweis).

**Definition 7.8.** Ein Element der Ordnung 2 in  $G$  heißt *Involution*.

**Satz 7.9.** Die Anzahl der Involutionen in  $G$  ist

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \nu_2(\chi) \chi(1) - 1 = \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(G), \\ \bar{\chi} = \chi \neq 1_G}} \nu_2(\chi) \chi(1).$$

*Beweis.* Dies folgt aus  $|\{x \in G : x^2 = 1\}| = \theta_2(1)$ .  $\square$

**Lemma 7.10.** Sei  $t > 0$  die Anzahl der Involutionen in  $G$ . Dann existiert ein  $x \in G \setminus \{1\}$  mit  $|G : C_G(x)| \leq (|G|/t)^2$ .

*Beweis.* Sei  $S := \{\chi \in \text{Irr}(G) : 1_G \neq \chi = \bar{\chi}\}$ . Nach Satz 7.9 ist  $0 < t \leq \sum_{\chi \in S} \chi(1)$ . Insbesondere ist  $S \neq \emptyset$ . Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$t^2 \leq \left( \sum_{\chi \in S} \chi(1) \right)^2 \leq \sum_{\chi \in S} 1^2 \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 = |S| \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 \leq |S| |G| \leq (k(G) - 1) |G|.$$

Hätte jede nichttriviale Konjugationsklasse von  $G$  mehr als  $(|G|/t)^2$  Elemente, so wäre

$$|G| - 1 > (k(G) - 1) \frac{|G|^2}{t^2} \geq |G|. \quad \square$$

**Satz 7.11 (BRAUER-FOWLER).** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existieren nur endlich viele einfache Gruppen  $G$  mit einer Involution  $x$ , sodass  $|C_G(x)| \leq n$  gilt.

*Beweis.* Ist  $G$  abelsch, so ist  $|G| = |C_G(x)| \leq n$  und die Behauptung ist klar. Sei also  $G$  nichtabelsch. Die Konjugationsklasse von  $x$  in  $G$  enthält  $|G : C_G(x)| \geq |G|/n$  Elemente. Dies ist also eine untere Schranke für die Anzahl der Involutionen in  $G$ . Nach Lemma 7.10 existiert ein  $y \in G \setminus \{1\}$  mit  $|G : C_G(y)| \leq (|G|/(|G|/n))^2 = n^2$ . Da  $G$  einfach und nichtabelsch ist, gilt auch  $C_G(y) < G$ . Wie üblich operiert  $G$  transitiv (und damit nicht-trivial) auf  $G/C_G(y)$  durch Linksmultiplikation (d. h.  ${}^g(hC_G(y)) := ghC_G(y)$ ). Der entsprechende Homomorphismus  $\alpha : G \rightarrow \text{Sym}(G/C_G(y))$  ist dann ebenfalls nicht-trivial. Da  $G$  einfach ist, folgt  $\text{Ker}(\alpha) = 1$ . Insbesondere ist  $|G| \leq |\text{Sym}(G/C_G(y))| \leq n^2!$ . Die Behauptung folgt.  $\square$

**Bemerkung 7.12.** Nach Feit-Thompson („Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar“) besitzt jede einfache, nichtabelsche Gruppe eine Involution. Der Satz von Brauer-Fowler war die Grundidee der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

**Lemma 7.13.** Sei  $p^n$  eine Primzahlpotenz. Die Summe der primitiven  $p^n$ -ten Einheitswurzeln in  $\mathbb{C}$  ist 1 falls  $n = 0$ ,  $-1$  falls  $n = 1$  oder 0 falls  $n \geq 2$ .

*Beweis.* Wir können  $n \geq 1$  annehmen. Für  $\zeta := e^{2\pi i/p^n} \in \mathbb{C}$  ist dann  $\sum_{i=0}^{p^n-1} \zeta^i = \frac{\zeta^{p^n}-1}{\zeta-1} = 0$ . Für  $n = 1$  ist die Summe der primitiven Einheitswurzeln  $\sum_{i=1}^{p-1} \zeta^i = -1$ . Für  $n \geq 2$  ergibt sich

$$\sum_{\substack{0 < i < p^n \\ \text{ggT}(i,p)=1}} \zeta^i = \sum_{i=0}^{p^n-1} \zeta^i - \sum_{i=0}^{p^{n-1}-1} \zeta^{pi} = 0. \quad \square$$

**Satz 7.14 (FROBENIUS).** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\chi \in \text{Irr}(G)$  gilt

$$\frac{1}{\text{ggT}(n, |G|)} \sum_{\substack{g \in G, \\ g^n=1}} \chi(g) \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist  $\text{ggT}(n, |G|) \mid \theta_n(1)$ .

*Beweis.* Sei  $\rho$  der reguläre Charakter von  $G$ . Wir zeigen zunächst, dass  $\tau(g) := \rho(g^n)/\text{ggT}(n, |G|)$  für  $g \in G$  ein virtueller Charakter von  $G$  ist. Nach Brauer (siehe Beweis von Satz 6.8) genügt es zu zeigen, dass  $\tau_E$  für jede elementare Untergruppe  $E \leq G$  virtuell ist. Sei  $\rho_1$  der reguläre Charakter von  $E$ . Für  $g \in E$  ist dann

$$\tau_E(g) = \frac{\rho(g^n)}{\text{ggT}(n, |G|)} = \underbrace{\frac{|G : E| \text{ggT}(n, |E|)}{\text{ggT}(n, |G|)}}_{\in \mathbb{N}} \frac{\rho_1(g^n)}{\text{ggT}(n, |E|)}.$$

Wir können also  $G = E$  annehmen. Dann ist  $G$  das direkte Produkt seiner Sylowgruppen  $G = P_1 \times \dots \times P_s$ . Sei  $\rho_i$  der reguläre Charakter von  $P_i$ . Für  $g = x_1 \dots x_s \in G$  ( $x_i \in P_i$ ) gilt dann

$$\tau(G) = \frac{\rho_1(x_1^n)}{\text{ggT}(n, |P_1|)} \cdots \frac{\rho_s(x_s^n)}{\text{ggT}(n, |P_s|)}.$$

Durch Induktion nach  $s$  können wir annehmen, dass  $G$  eine  $p$ -Gruppe ist. Sei  $\text{ggT}(n, |G|) = p^a$ . Im Fall  $p^{a+1} \mid n$  ist  $|G| = p^a$  und  $\tau(g) = \rho(1)/|G| = 1_G(g)$ . Wir können also  $n = p^a m$  mit  $p \nmid m$  annehmen. Sei  $\tau'(g) := \rho(g^{p^a})/p^a$  für  $g \in G$ . Wenn wir zeigen können, dass  $\tau'$  ein virtueller Charakter von  $G$  ist, so gilt dies auch für  $\tau$ , denn  $\tau(g) = \tau'(g^m)$  für  $g \in G$  (siehe Beispiel 6.15). Wir können also  $n = p^a$  annehmen. Für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  müssen wir zeigen:  $(\chi, \tau)_G \in \mathbb{Z}$ . Nach Lemma 6.6 existieren  $H \leq G$  und  $\varphi \in \text{Irr}(H)$  mit  $\varphi(1) = 1$  und  $\chi = \varphi^G$ . Somit genügt zu zeigen:

$$(\chi, \tau)_G = (\varphi, \tau_H)_H = \frac{|G : H|}{p^a} \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a}=1}} \varphi(h) \in \mathbb{Z}.$$

Sei  $x \in H$  mit  $|\langle x \rangle| = p^b > p^a$ , und sei  $\varphi(x)$  eine primitive  $p^c$ -te Einheitswurzel. Nach Lemma 7.13 ist

$$\sum_{\substack{h \in H, \\ \langle h \rangle = \langle x \rangle}} \varphi(h) = \begin{cases} p^{b-1}(p-1) & \text{falls } c = 0, \\ -p^{b-1} & \text{falls } c = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \equiv 0 \pmod{p^a}.$$

Da  $x \sim y : \Leftrightarrow \langle x \rangle = \langle y \rangle$  eine Äquivalenzrelation auf  $H$  ist, gilt folgende Kongruenz:

$$|G : H| \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a} = 1}} \varphi(h) \equiv |G : H| \left( \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a} = 1}} \varphi(h) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a} \neq 1}} \varphi(h) \right) = |G|(\varphi, 1_H)_H \equiv 0 \pmod{p^a}.$$

Damit ist schließlich gezeigt, dass  $\tau$  für jede endliche Gruppe  $G$  ein virtueller Charakter ist. Wegen  $(\chi, \tau)_G \in \mathbb{Z}$  für  $\chi \in \text{Irr}(G)$  folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung erhält man durch  $\chi = 1_G$ .  $\square$

**Bemerkung 7.15.**

- (i) Ein ähnlicher Beweis zeigt  $\text{ggT}(n, |C_G(g)|) \mid \theta_n(g)$  für  $g \in G$ .
- (ii) Mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen konnte man folgende Vermutung von Frobenius beweisen:

$$\theta_n(1) = n \mid |G| \implies \{g \in G : g^n = 1\} \leq G.$$

## 8 Normale Komplemente

**Definition 8.1.** Sei  $\mathbb{P}$  die Menge aller Primzahlen und  $\pi \subseteq \mathbb{P}$ . Wir setzen  $\pi' := \mathbb{P} \setminus \pi$ . Ein Element  $x \in G$  heißt  $\pi$ -Element, falls jeder Primteiler von  $|\langle x \rangle|$  in  $\pi$  liegt. Analog ist  $G$  eine  $\pi$ -Gruppe, falls jeder Primteiler von  $|G|$  in  $\pi$  liegt.

**Bemerkung 8.2.**

- (i) Nach Lagrange und Cauchy ist  $G$  genau dann eine  $\pi$ -Gruppe, wenn jedes Element in  $G$  ein  $\pi$ -Element ist.
- (ii) Sei  $x \in G$ . Bekanntlich besitzt  $\langle x \rangle$  für jede Primzahl  $p$  genau eine (normale)  $p$ -Sylowgruppe  $S_p$ . Insbesondere ist  $\langle x \rangle = \prod_{p \in \mathbb{P}} S_p$ . Folglich existieren eindeutig bestimmte  $x_p \in S_p$  mit  $x = \prod_{p \in \mathbb{P}} x_p$ . Man nennt  $x_p$  den  $p$ -Faktor von  $x$ . Für  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  sei  $x_\pi := \prod_{p \in \pi} x_p$ . Dann ist  $x_\pi$  der  $\pi$ -Faktor von  $x$ . Offenbar ist  $x = x_\pi x_{\pi'}$ .

**Satz 8.3** (BRAUER-DADE). Sei  $N \trianglelefteq H \leq G$  und  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $H/N$  ist eine  $\pi$ -Gruppe.
- (ii)  $|G : H|$  ist durch keine Primzahl in  $\pi$  teilbar.
- (iii) Sind  $x, y \in H$  konjugiert in  $G$ , so sind  $xN, yN$  konjugiert in  $H/N$ .
- (iv) Ist  $h$  ein  $\pi$ -Element in  $H \setminus N$  und  $P \in \text{Syl}_p(C_G(h))$  für eine Primzahl  $p \in \pi$  mit  $p \nmid |\langle h \rangle|$ , so ist  $\langle h \rangle P$  zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler  $M \trianglelefteq G$  mit  $G = HM$  und  $H \cap M = N$ .

**Bemerkung 8.4.** Hat man die Existenz von  $M$  bereits bewiesen, so kann man  $\text{Irr}(G/M)$  aus  $\text{Irr}(H/N)$  und dem Isomorphismus  $G/M = HM/M \cong H/H \cap M = H/N$  konstruieren. Im Beweis von Satz 8.3 geht man umgekehrt vor und konstruiert zunächst die Inflation der Charaktere in  $\text{Irr}(G/M)$  und erhält  $M$  als Durchschnitt der Kerne dieser Charaktere (vgl. Beweis von Satz 5.8).

*Beweis.* Sei  $\text{Cl}(H/N) = \{C_1, \dots, C_k\}$  und  $C_1 = \{1\}$ . Für  $i = 1, \dots, k$  sei

$$B_i := \{h \in H : hN \in C_i\},$$

also  $B_1 = N$  und  $H = \bigcup_{i=1}^k B_i$ . Für  $i = 2, \dots, k$  sei

$$A_i := \{g \in G : g_\pi \text{ ist konjugiert zu einem Element in } B_i\}.$$

Mit  $A_1 := G \setminus \bigcup_{i=2}^k A_i$  ist also  $G = \bigcup_{i=1}^k A_i$ .

Für  $i = 1, \dots, k$  ist  $A_i$  eine Vereinigung von Konjugationsklassen in  $G$ .

**Behauptung 1:**  $G = \bigcup_{i=1}^k A_i$ .

**Beweis:** Sei  $g \in A_i \cap A_j$  und o. B. d. A.  $i \neq 1 \neq j$ , dann ist  $g_\pi$  zu einem Element  $h_i \in B_i$  und einem Element  $h_j \in B_j$  konjugiert. Folglich existiert ein  $x \in G$  mit  $xh_i x^{-1} = h_j$ . Wegen (iii) sind dann  $h_i N$  und  $h_j N$  in  $H/N$  konjugiert, d. h.  $i = j$ .

**Behauptung 2:**  $A_i \cap H = B_i$ .

**Beweis:** Sei zunächst  $i \geq 2$  und  $h = h_\pi h_{\pi'} \in B_i$ . Dann ist  $h_{\pi'} \in N$  nach (i), also  $hN = h_\pi N$  und damit  $h_\pi \in B_i$  und  $h \in A_i \cap H$ . Ist umgekehrt  $h \in A_i \cap H$ , so ist  $h_\pi$  konjugiert zu einem Element in  $B_i$ . Folglich ist  $hN = h_\pi N \in C_i$  wegen (iii) und damit  $h \in B_i$ . Nach Definition ist  $A_1 \cap H = H \setminus \bigcup_{i=2}^k (A_i \cap H) = H \setminus \bigcup_{i=2}^k B_i = B_1$ .

Für  $p \in \pi$  enthält  $H$  wegen (ii) eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ . Daher ist jedes  $p$ -Element  $x \in G$  zu einem Element  $y \in H$  konjugiert. Wir sagen, dass  $x$  im Fall  $y \in H \setminus N$  vom Typ I und im Fall  $y \in N$  vom Typ II ist. Nach (iii) ist  $x$  entweder vom Typ I oder vom Typ II, aber nicht beides. Für jedes  $g \in G$  setzen wir

$$\alpha(g) := \prod_{\substack{p \in \pi, \\ g_p \text{ vom Typ I}}} g_p \quad \text{und} \quad \beta(g) := \prod_{\substack{p \in \pi, \\ g_p \text{ vom Typ II}}} g_p.$$

Dann ist  $g = \alpha(g)\beta(g)g_{\pi'}$ .

**Behauptung 3:** Für jedes  $g \in G$  mit  $\alpha(g) \neq 1$  ist  $g_\pi$  zu einem Element in  $H \setminus N$  konjugiert.

**Beweis:** Ist  $g_\pi$  ein  $p$ -Element für eine Primzahl  $p$ , so ist  $g_\pi$  vom Typ I wegen  $\alpha(g) \neq 1$ , und wir sind fertig. Ist  $g_\pi$  kein  $p$ -Element, so existiert ein Primteiler  $p$  von  $|\langle g_\pi \rangle|$  mit  $g_\pi = xg_p$  und  $\alpha(x) \neq 1$  für  $x := g_{\pi \setminus \{p\}}$ . Folglich existiert ein  $q \in \pi \setminus \{p\}$ , sodass  $g_q$  vom Typ I ist. Argumentieren wir durch Induktion nach der Anzahl der Primfaktoren von  $|\langle g_\pi \rangle|$ , so können wir annehmen, dass  $x$  zu einem Element in  $H \setminus N$  konjugiert ist. Indem wir  $g$  durch ein Konjugiertes ersetzen, können wir sogar  $x \in H \setminus N$  annehmen. Sei  $P \in \text{Syl}_p(C_G(x))$  mit  $g_p \in P$ . Nach (iv) ist  $\langle x \rangle P$  zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert. Insbesondere ist  $g_\pi = xg_p$  zu einem Element  $h \in H$  konjugiert. Im Fall  $h \in N$  wäre  $h_q \in N$ . Dann wäre aber  $g_q$  vom Typ II. Also ist  $h \notin N$ , und die Behauptung ist bewiesen.

**Behauptung 4:**  $A_1 = \{g \in G : \alpha(g) = 1\}$ .

**Beweis:** Ist nämlich  $g \in G$  mit  $\alpha(g) \neq 1$ , so ist  $g \in A_i$  für ein  $i \in \{2, \dots, k\}$  nach Behauptung 3. Ist umgekehrt  $g \in A_i$  für ein  $i \in \{2, \dots, k\}$ , so ist  $g_\pi$  zu einem Element  $h \in B_i$  konjugiert. Folglich ist  $\alpha(g)$  zu  $\alpha(h)$  und  $\beta(g)$  zu  $\beta(h)$  konjugiert. Jeder  $p$ -Faktor  $y$  von  $\beta(h)$  liegt also in  $H$  und ist zu einem Element in  $N$  konjugiert. Nach (iii) ist also  $y \in N$ . Dies zeigt:  $\beta(h) \in N$ . Folglich ist  $\alpha(h)N = \alpha(h)\beta(h)N = hN \in C_i$  und damit  $\alpha(h) \in B_i$ . Insbesondere ist  $\alpha(h) \neq 1$  und  $\alpha(g) \neq 1$ .

**Behauptung 5:**  $g \in A_i \implies \alpha(g), g_\pi \in A_i$ .

**Beweis:** Für  $g \in A_i$  ist  $g_\pi \in A_i$  nach Definition von  $A_i$ . Für  $i = 1$  ist  $\alpha(g) = 1 \in B_1 \subseteq A_1$  nach Behauptung 4. Sei also  $i \geq 2$ . Dann ist wie oben  $\alpha(g)$  konjugiert zu einem Element  $\alpha(h) \in B_i \subseteq A_i$ , also auch  $\alpha(g) \in A_i$ .

**Behauptung 6:**  $\alpha(g) = 1 \implies \alpha(g^n) = 1$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Für  $\alpha(g) = 1$  ist jeder  $p$ -Faktor (für  $p \in \pi$ ) von  $g$  zu einem Element in  $N$  konjugiert. Daher ist auch jeder  $p$ -Faktor von  $g^n$  zu einem Element von  $N$  konjugiert. Dies zeigt  $\alpha(g^n) = 1$ .

**Behauptung 7:** Ist  $E = U \times Q \leq G$  eine  $\pi$ -Untergruppe mit  $U = \langle u \rangle$ ,  $\alpha(u) \neq 1$  und  $Q \in \text{Syl}_p(E)$ , so ist  $E$  zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert.

**Beweis:** Wegen  $\alpha(u) \neq 1$  ist  $u = u_\pi$  zu einem Element in  $H \setminus N$  konjugiert (Behauptung 3). Indem wir  $E$  durch ein Konjugiertes ersetzen, können wir also  $u \in H \setminus N$  annehmen. Dann folgt die Behauptung aus (iv).

Sei  $\text{Irr}(H/N) = \{\psi_1, \dots, \psi_k\} \subseteq \text{Irr}(H)$ . Für  $i = 1, \dots, k$  ist dann  $\psi_i$  konstant auf jedem  $B_j$  und besitzt genau eine Fortsetzung  $\chi_i \in \text{CF}(G)$ , die konstant auf jedem  $A_j$  ist. Wir zeigen  $\chi_i \in \text{Irr}(G)$  mit Satz 6.8. Dazu sei  $E = E_\pi \times E_{\pi'} \leq G$  elementar, wobei  $E_\pi$  eine  $\pi$ -Gruppe und  $E_{\pi'}$  eine  $\pi'$ -Gruppe ist. Für  $x \in E$  ist  $x_\pi \in E_\pi$  und  $\chi_i(x) = \chi_i(x_\pi)$ , denn  $x$  und  $x_\pi$  liegen im gleichen  $A_j$  (Behauptung 5). Daher ist  $(\chi_i)_E = (\chi_i)_{E_\pi} 1_{E_{\pi'}}$  und wir können  $E = E_\pi$  annehmen (Aufgabe 17). Sei  $E = U \times Q$  mit  $U = \langle u \rangle$  und  $Q \in \text{Syl}_p(E)$  ist. Im Fall  $\alpha(u) \neq 1$  können wir  $E$  durch ein Konjugiertes ersetzen und  $E \leq H$  annehmen (Behauptung 7). Dann ist  $(\chi_i)_E = (\psi_i)_E$  ein Charakter von  $E$ . Sei also  $\alpha(u) = 1$ . Sei  $x = u^n v \in E$  mit  $v \in Q$ . Nach Behauptung 6 ist  $\alpha(x) = \alpha(u^n v) = \alpha(u^n) \alpha(v) = \alpha(v)$  und

$$\chi_i(x) = \chi_i(\alpha(x) \underbrace{\beta(x)}_{\in \text{Ker}(\chi_i)}) = \chi_i(\alpha(x)) = \chi_i(\alpha(v)) = \chi_i(v).$$

Dies zeigt  $(\chi_i)_E = 1_U (\chi_i)_Q$  und wir können  $E = Q$  annehmen. Nach Sylow können wir  $E \leq H$  annehmen. Dann ist aber  $(\chi_i)_E = (\psi_i)_E$  ein Charakter von  $E$ . Also ist  $\chi_i$  ein virtueller Charakter von  $G$ .

Für  $i = 1, \dots, k$  sei  $b_i \in B_i$  und  $\theta_i := \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1}) \chi_j$ . Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation für  $H/N$  ist dann

$$\begin{aligned} (\theta_i, 1_G)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta_i(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1}) \chi_j(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{r=1}^k |A_r| \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1}) \psi_j(b_r) \\ &= \frac{|A_i|}{|G|} |C_{H/N}(b_i N)| = \frac{|A_i|}{|G|} \frac{|H : N|}{|C_i|} = \frac{|A_i|}{|G : H| \cdot |C_i| |N|} = \frac{|A_i|}{|G : H| |B_i|} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Andererseits sind die Vielfachheiten der irreduziblen Bestandteile von  $\theta_i$  offenbar ganz-algebraisch. Nach Lemma 3.5 ist also  $(\theta_i, 1_G)_G = \frac{|A_i|}{|G : H| |B_i|} \in \mathbb{N}$  und  $|A_i| \geq |G : H| |B_i|$ . Daher ist

$$|G| = \sum_{i=1}^k |A_i| \geq |G : H| \sum_{i=1}^k |B_i| = |G : H| |H| = |G|.$$

Für  $i = 1, \dots, k$  ist also  $|A_i| = |G : H| |B_i|$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} (\chi_i, \chi_i)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_i(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^k |A_j| \psi_i(b_j) \psi_i(b_j^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{j=1}^k |B_j| \psi_i(b_j) \psi_i(b_j^{-1}) = (\psi_i, \psi_i)_H = 1. \end{aligned}$$

Wegen  $\chi_i(1) = \psi_i(1) > 0$  ist somit  $\chi_i \in \text{Irr}(G)$  nach Satz 6.8. Wegen  $B_1 = N = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(\psi_i)$  ist  $A_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(\chi_i)$ . Für  $x \in B_i \subseteq A_i$  mit  $i \geq 2$  existiert ein  $\psi_j$  mit  $\chi_j(x) = \psi_j(x) \neq \psi_j(1) = \chi_j(1)$ .

Also ist  $A_1 = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(\chi_i) \trianglelefteq G$  mit  $A_1 \cap H = B_1 = N$ . Wegen  $|A_1| = |G : H||B_1| = |G : H||N|$  ist

$$|A_1 H| = \frac{|A_1||H|}{|A_1 \cap H|} = \frac{|G||N|}{|N|} = |G|.$$

Dies zeigt  $A_1 H = G$ , und wir sind fertig.  $\square$

**Satz 8.5** (DADE). *Sei  $N \trianglelefteq H \leq G$  und  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $H/N$  ist eine  $\pi$ -Gruppe.
  - (ii) Sind  $x, y \in H$  konjugiert in  $G$ , so sind  $xN, yN$  konjugiert in  $H/N$ .
  - (iii) Jede elementare  $\pi$ -Untergruppe von  $G$  ist zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert.
- Dann existiert ein Normalteiler  $M$  von  $G$  mit  $G = HM$  und  $H \cap M = N$ .

*Beweis.* Sei  $p \in \pi$  und  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Da  $P$  elementar ist, ist  $P$  zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert, also  $p \nmid |G : H|$ . Damit erfüllt  $G$  die Voraussetzungen von Satz 8.3, und wir sind fertig.  $\square$

**Satz 8.6** (BRAUER-SUZUKI). *Sei  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  und  $H$  eine  $\pi$ -Untergruppe von  $G$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) Sind  $x, y \in H$  konjugiert in  $G$ , so auch in  $H$ .
- (ii) Jede elementare  $\pi$ -Untergruppe von  $G$  ist zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler  $M$  von  $G$  mit  $G = HM$  und  $H \cap M = 1$ .

*Beweis.* Satz 8.5 mit  $N := 1$ .  $\square$

**Lemma 8.7.** *Sei  $P$  eine  $p$ -Gruppe und  $U < P$ . Dann ist  $U < N_P(U)$ .*

*Beweis.* Wir argumentieren durch Induktion nach  $|P|$ . Im Fall  $|P| = p$  ist  $1 = U < N_P(U) = P$ . Sei also  $|P| > p$ . Wegen  $Z(P) \subseteq N_P(U)$  können wir  $Z(P) \subseteq U$  annehmen. Nach Algebra 1 ist  $Z(P) \neq 1$ . Sei  $\bar{P} := P/Z(P)$  und  $\bar{U} := U/Z(P)$ . Nach Induktion ist dann  $\bar{U} < N_{\bar{P}}(\bar{U})$ . Also existiert ein  $x \in P \setminus U$  mit  $xUx^{-1}/Z(P) = \bar{x}\bar{U}\bar{x}^{-1} = \bar{U} = U/Z(P)$ . Es folgt  $x \in N_P(U)$ .  $\square$

**Bemerkung 8.8.** Der folgende Satz verallgemeinert Satz 5.8.

**Satz 8.9** (WIELANDT). *Sei  $N \trianglelefteq H \leq G$ . Ferner sei  $H \cap xHx^{-1} \subseteq N$  für alle  $x \in G \setminus H$ . Dann existiert ein Normalteiler  $M$  von  $G$  mit  $G = HM$  und  $H \cap M = N$ .*

*Beweis.* Bezeichnet man mit  $\pi$  die Menge der Primteiler von  $|H/N|$ , so ist Satz 8.3(i) erfüllt. Sei  $p \in \pi$ ,  $Q \in \text{Syl}_p(H)$  und  $P \in \text{Syl}_p(G)$  mit  $Q \subseteq P$ . Bekanntlich ist  $QN/N \in \text{Syl}_p(H/N)$ , also  $QN/N \neq 1$  wegen  $p \mid |H/N|$ . Folglich ist  $Q \not\subseteq N$ . Für  $g \in N_P(Q)$  ist  $Q = gQg^{-1} \subseteq H \cap gHg^{-1}$ . Wegen  $Q \not\subseteq N$  folgt  $g \in H$ . Daher ist  $N_P(Q) \subseteq H \cap P = Q$  und damit  $P = Q$  nach Lemma 8.7. Folglich ist  $p \nmid |G : H|$ , und Satz 8.3(ii) ist erfüllt. Seien  $x, y \in H$  und  $g \in G$  mit  $y = gxg^{-1}$ . Im Fall  $g \in H$  ist  $yN = (gN)(xN)(gN)^{-1}$ . Sei also  $g \notin H$ . Dann ist  $y = gxg^{-1} \in H \cap gHg^{-1} \subseteq N$  und analog  $x \in N$ , also  $yN = 1 = xN$  in  $H/N$ . Damit ist Satz 8.3(iii) erfüllt. Sei schließlich  $x \in H \setminus N$  und  $g \in C_G(x)$ . Dann ist  $x = gxg^{-1} \in H \cap gHg^{-1}$ , also  $g \in H$ . Folglich ist  $C_G(x) \subseteq H$ . Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 8.3 erfüllt, und die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 8.10.** Sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Sind je zwei Elemente in  $P$ , die in  $G$  konjugiert sind, auch schon in  $P$  konjugiert, so besitzt  $P$  ein normales Komplement in  $G$ .

*Beweis.* Folgt nach Sylow und Satz 8.6 mit  $\pi = \{p\}$  und  $H = P$ . □

**Satz 8.11** (BURNSIDES Verlagerungssatz). Sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$  mit  $N_G(P) = C_G(P)$ . Dann besitzt  $P$  ein normales Komplement in  $G$ .

*Beweis.* Wegen  $P \subseteq N_G(P) = C_G(P)$  ist  $P$  abelsch. Seien  $x, y \in P$  und  $g \in G$  mit  $gxg^{-1} = y$ . Dann ist  $P \leq C_G(x)$  und  $g^{-1}Pg \leq g^{-1}C_G(y)g = C_G(g^{-1}yg) = C_G(x)$ . Nach Sylow existiert ein  $c \in C_G(x)$  mit  $cPc^{-1} = g^{-1}Pg$ . Also ist  $gc \in N_G(P) = C_G(P) \leq C_G(x)$ . Somit ist  $g \in C_G(x)$  und  $y = gxg^{-1} = x$ . Nun folgt die Behauptung aus Satz 8.10. □

**Bemerkung 8.12.** Üblicherweise beweist man Satz 8.11 in der Gruppentheorie mittels Verlagerung.

**Satz 8.13.** Sei  $p$  der kleinste Primteiler von  $|G|$ , und sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$  zyklisch. Dann besitzt  $P$  ein normales Komplement in  $G$ .

*Beweis.* Wie üblich operiert  $N_G(P)$  durch Konjugation auf  $P$ . Dies liefert einen Homomorphismus  $N_G(P) \rightarrow \text{Aut}(P)$  mit Kern  $C_G(P)$ . Also ist  $N_G(P)/C_G(P)$  zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(P)$  isomorph. Da  $P$  zyklisch ist, gilt  $P \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . In der Algebra 1 zeigt man  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ . Dies zeigt  $|N_G(P)/C_G(P)| \mid |\text{Aut}(P)| = \varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$ . Da  $P$  zyklisch ist, gilt  $P \subseteq C_G(P)$  und  $|N_G(P)/C_G(P)| \mid p-1$ . Da  $p$  der kleinste Primteiler von  $|G|$  ist, ist sogar  $N_G(P) = C_G(P)$ , und die Behauptung folgt aus Burnside's Verlagerungssatz. □

**Beispiel 8.14.** Sei  $P \in \text{Syl}_2(G)$  zyklisch. Nach Satz 8.13 besitzt  $P$  ein normales Komplement  $N$  in  $G$ . Nach Feit-Thompson ist  $N$  auflösbar. Wegen  $G/N = PN/N \cong P/P \cap N \cong P$  ist damit auch  $G$  auflösbar. Wir beweisen eine schwächere Aussage ohne den Satz von Feit und Thompson.

**Satz 8.15.** Sind alle Sylowgruppen von  $G$  zyklisch, so ist  $G$  auflösbar.

*Beweis.* Wir argumentieren durch Induktion nach  $|G|$ . O. B. d. A. sei  $G \neq 1$ . Sei  $p$  der kleinste Primteiler von  $G$  und  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Nach Satz 8.13 existiert ein  $N \trianglelefteq G$  mit  $G = PN$  und  $P \cap N = 1$ . Jede Sylowgruppe von  $N$  liegt in einer Sylowgruppe von  $G$  und ist damit zyklisch. Nach Induktion ist also  $N$  auflösbar. Bekanntlich ist auch jede  $p$ -Gruppe auflösbar. Mit  $N$  und  $G/N = PN/N \cong P/P \cap N \cong P$  ist also auch  $G$  auflösbar. □

**Bemerkung 8.16.** In der Situation von Satz 8.15 kann man weiter zeigen, dass  $G'$  und  $G/G'$  zyklisch sind (ohne Beweis). Insbesondere ist  $G'' = 1$ .

**Beispiel 8.17.** Gruppen quadratfreier Ordnung sind auflösbar.

**Satz 8.18** (FROBENIUS). Sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$  und für jede Untergruppe  $1 \neq Q \leq P$  sei  $N_G(Q)/C_G(Q)$  eine  $p$ -Gruppe. Dann besitzt  $P$  ein normales Komplement in  $G$ .



*Beweis.* Nach Sylow gilt die Voraussetzung für alle  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Sei  $\Gamma$  die Menge der Paare  $(P, Q)$  mit  $P, Q \in \text{Syl}_p(G)$ , sodass ein  $c \in C_G(P \cap Q)$  mit  $P = cQc^{-1}$  existiert. Wir zeigen, dass  $\Gamma$  alle Paare von Sylowgruppen enthält. Sei  $P, P_1 \in \text{Syl}_p(G)$  mit  $(P, P_1) \notin \Gamma$ , sodass  $|P \cap P_1|$  maximal ist. Offenbar ist dann  $D := P \cap P_1 < P$  (anderenfalls könnte man  $c = 1$  wählen). Sei  $N := N_G(D)$  und  $P \cap N \subseteq S \in \text{Syl}_p(N)$  sowie  $P_1 \cap N \subseteq T \in \text{Syl}_p(N)$ . Schließlich sei  $S \subseteq R \in \text{Syl}_p(G)$ . Da  $SC_G(D)/C_G(D)$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $N/C_G(D)$  ist, impliziert die Voraussetzung  $N = SC_G(D)$ . Nach Sylow existiert ein  $n \in N$  mit  $T = nSn^{-1}$ . Wegen  $N = SC_G(D) = C_G(D)S$  können wir  $n \in C_G(D)$  annehmen. Nach Lemma 8.7 ist

$$D < N_P(D) = N \cap P \subseteq S \cap P \subseteq R \cap P.$$

Nach Wahl von  $(P, P_1)$  existiert ein  $x \in C_G(P \cap R) \subseteq C_G(D)$  mit  $P = xRx^{-1}$ . Analog ist auch

$$D < N_{P_1}(D) = N \cap P_1 \subseteq T \cap P_1 = nSn^{-1} \cap P_1 \subseteq nRn^{-1} \cap P_1$$

und es existiert ein  $y \in C_G(nRn^{-1} \cap P_1) \subseteq C_G(D)$  mit  $nRn^{-1} = yP_1y^{-1}$ . Insgesamt ist also  $P = xRx^{-1} = xn^{-1}yP_1y^{-1}nx^{-1}$  mit  $xn^{-1}y \in C_G(D) = C_G(P \cap P_1)$ . Dieser Widerspruch zeigt, dass  $\Gamma$  alle Paare  $(P, Q)$  mit  $P, Q \in \text{Syl}_p(G)$  enthält.

Seien nun  $x, y \in P$  und  $g \in G$  mit  $y = gxg^{-1}$ . Dann ist  $y \in P \cap gPg^{-1}$ . Nach dem eben gezeigten existiert ein  $c \in C_G(P \cap gPg^{-1}) \subseteq C_G(y)$  mit  $cPc^{-1} = gPg^{-1}$ . Da  $PC_G(P)/C_G(P)$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $N_G(P)/C_G(P)$  ist, folgt  $N_G(P) = PC_G(P)$  nach Voraussetzung. Also ist  $c^{-1}g = ab$  mit  $a \in P$  und  $b \in C_G(P) \subseteq C_G(x)$ . Dann ist  $y = c^{-1}yc = c^{-1}gxg^{-1}c = abxb^{-1}a^{-1} = axa^{-1}$ . Die Behauptung folgt nun aus Satz 8.10.  $\square$

**Satz 8.19** (Satz von der Fokalgruppe). *Für  $P \in \text{Syl}_p(G)$  ist*

$$P \cap G' = \langle xy^{-1} : x, y \in P \text{ sind in } G \text{ konjugiert} \rangle.$$

*Beweis.* Sind  $x, y \in P$  in  $G$  konjugiert, so existiert ein  $g \in G$  mit  $xy^{-1} = xgx^{-1}g^{-1} = [x, g]$ . Dies zeigt  $P_1 := \langle xy^{-1} : x, y \in P \text{ sind in } G \text{ konjugiert} \rangle \subseteq P \cap G'$ . Für  $x, y \in P$  ist umgekehrt  $[x, y] = x(yx^{-1}y^{-1}) = x(yxy^{-1})^{-1} \in P_1$ . Also ist  $P' \subseteq P_1 \trianglelefteq P$  und  $P/P_1$  ist abelsch. Sei  $\lambda \in \text{Irr}(P/P_1) \subseteq \text{Irr}(P)$ . Sei  $g \in G$ . Dann existiert ein  $x \in G$  mit  $xg_px^{-1} \in P$ . Wir definieren  $\psi(g) := \lambda(xg_px^{-1})$ . Ist auch  $yg_py^{-1} \in P$  für ein  $y \in G$ , so gilt

$$(xg_px^{-1})(yg_p^{-1}y^{-1}) = (xg_px^{-1})yx^{-1}(xg_px^{-1})^{-1}xy^{-1} \in P_1 \leq \text{Ker}(\lambda).$$

Daher ist  $\lambda(xg_px^{-1}) = \lambda(yg_py^{-1})$  und  $\psi$  ist wohldefiniert. Das gleiche Argument zeigt auch  $\psi \in \text{CF}(G)$ . Wir zeigen  $\psi \in \text{Irr}(G)$  mit Satz 6.8. Sei dafür  $E \leq G$  elementar und  $g, h \in E$ . Da  $E$  das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist, gilt  $(gh)_p = g_ph_p$  und  $\langle g_p, h_p \rangle$  ist eine  $p$ -Gruppe. Also existiert ein  $x \in G$  mit  $x\langle g_p, h_p \rangle x^{-1} \leq P$ . Dann ist

$$\psi(gh) = \lambda(x(gh)_p x^{-1}) = \lambda(xg_px^{-1}xh_px^{-1}) = \lambda(xg_px^{-1})\lambda(xh_px^{-1}) = \psi(g)\psi(h).$$

Wegen  $\psi(1) = \lambda(1) = 1$  ist  $\psi_E \in \text{Irr}(E)$ . Wegen  $|\psi(g)| = 1$  für alle  $g \in G$  gilt auch  $(\psi, \psi)_G = 1$ . Nach Satz 6.8 ist also  $\psi \in \text{Irr}(G)$ . Sei nun  $g \in P \setminus P_1$ . Durch geeignete Wahl von  $\lambda$  können wir  $\psi(g) = \lambda(g) \neq 1$  annehmen. Wegen  $\psi(1) = 1$  ist also  $g \notin P \cap G' \leq G' \leq \text{Ker}(\psi)$ .  $\square$

## 9 Nullen in der Charaktertafel

**Satz 9.1** (BURNSIDE). *Sei  $\chi \in \text{Irr}(G)$  mit  $\chi(1) > 1$ . Dann existiert ein  $g \in G$  mit  $\chi(g) = 0$ .*

*Beweis.* Nehmen wir  $\chi(g) \neq 0$  für alle  $g \in G$  an. Sei  $\zeta := e^{2\pi i/|G|} \in \mathbb{C}$  und  $\mathcal{G} := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$ . Für  $\gamma \in \mathcal{G}$  mit  $\gamma(\zeta) = \zeta^m$  gilt  $\gamma(\chi(g)) = \chi(g^m)$  nach Beispiel 6.15. Wegen  $\text{ggT}(|G|, m) = 1$  ist die Abbildung  $g \mapsto g^m$  eine Bijektion auf  $G \setminus \{1\}$ . Da  $\mathcal{G}$  abelsch ist, gilt  $\gamma(\chi(g)\overline{\chi(g)}) = \chi(g^m)\overline{\chi(g^m)}$ . Also ist  $\omega := \prod_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 > 0$  im Fixkörper von  $\mathcal{G}$ , d. h. in  $\mathbb{Q}$ . Andererseits ist  $\omega$  ganz-algebraisch und es folgt  $\omega \in \mathbb{Z}$  aus Lemma 3.5. Insbesondere ist  $\omega \geq 1$  und die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel zeigt

$$\frac{1}{|G| - 1} \sum_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 \geq \omega^{\frac{1}{|G|-1}} \geq 1.$$

Also ist

$$|G| = |G|(\chi, \chi)_G = \chi(1)^2 + \sum_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 \geq \chi(1)^2 + |G| - 1$$

und wir erhalten die Widerspruch  $\chi(1) = 1$ . □

**Bemerkung 9.2.** Für  $\chi(1) = 1$  gilt offenbar  $\chi(g) \neq 0$  für alle  $g \in G$ . Der nächste Satz zeigt, wo man Nullen in der Charaktertafel finden kann.

**Satz 9.3** (BRAUER). *Sei  $\chi \in \text{Irr}(G)$  und  $p \in \mathbb{P}$  mit  $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$ . Dann ist  $\chi(g) = 0$  für alle  $g \in G$  mit  $p \mid |\langle g \rangle|$ .*

*Beweis.* Wir definieren eine Klassenfunktion  $\theta$  auf  $G$  durch

$$\theta(g) := \begin{cases} \chi(g) & \text{falls } p \nmid |\langle g \rangle|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, dass  $\theta$  ein virtueller Charakter ist. Dazu sei  $E = P \times Q \leq G$  elementar mit  $P \in \text{Syl}_p(E)$  (man beachte, dass  $E$  nicht unbedingt  $p$ -elementar ist). Dann ist  $\theta(x) = 0$  für alle  $x \in E \setminus Q$  und  $\theta(x) = \chi(x)$  für  $x \in Q$ . Für  $\psi \in \text{Irr}(E)$  ist also

$$|P|(\theta_E, \psi)_E = \frac{1}{|Q|} \sum_{x \in Q} \chi(x)\psi(x^{-1}) = (\chi_Q, \psi_Q)_Q \in \mathbb{Z}.$$

Sei  $g \in K \in \text{Cl}(G)$  und  $\omega(g) := \omega_\chi(K) = \frac{|K|\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{|G|\chi(g)}{|C_G(g)|\chi(1)}$  (siehe Lemma 1.23). Dann ist

$$|E|(\theta_E, \psi)_E = \sum_{x \in Q} \chi(x)\psi(x^{-1}) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in Q} \omega(x)\psi(x^{-1})|C_G(x)|.$$

Für  $x \in Q$  ist  $P \subseteq C_G(x)$ . Daher ist

$$\frac{|G||Q|}{\chi(1)}(\theta_E, \psi)_E = \sum_{x \in Q} \omega(x)\psi(x^{-1})|C_G(x) : P|$$

eine ganz-algebraische Zahl in  $\mathbb{Q}$  nach Lemma 3.6. Folglich ist

$$\frac{|G||Q|}{\chi(1)}(\theta_E, \psi)_E \in \mathbb{Z}.$$

Wegen  $\frac{|G||Q|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$  und  $\text{ggT}(\frac{|G||Q|}{\chi(1)}, |P|) = 1$  ist auch  $(\theta_E, \psi)_E \in \mathbb{Z}$ . Dies zeigt, dass  $\theta_E$  ein virtueller Charakter von  $E$  ist. Nach Brauer ist  $\theta$  ein virtueller Charakter von  $G$  (siehe Beweis von Satz 6.8). Insbesondere ist  $(\theta, \chi)_G \in \mathbb{Z}$ . Andererseits ist

$$0 < \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G, \\ p \nmid |\langle g \rangle|}} \chi(g) \overline{\chi(g)} = (\theta, \chi)_G \leq (\chi, \chi)_G = 1.$$

Daher ist  $(\theta, \chi)_G = (\chi, \chi)_G = 1$  und

$$0 = (\chi - \theta, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G, \\ p \mid |\langle g \rangle|}} |\chi(g)|^2,$$

d. h.  $\chi(g) = 0$  für alle  $g \in G$  mit  $p \mid |\langle g \rangle|$ . □

**Bemerkung 9.4.** In der Situation von Satz 9.3 sagt man:  $\chi$  hat  $p$ -Defekt 0.

## 10 Endliche lineare Gruppen

**Bemerkung 10.1.** Besitzt  $G$  eine treue Darstellung vom Grad  $G$ , so ist  $G$  zu einer Untergruppe von  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  isomorph. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass  $G$  „große“ abelsche Normalteiler besitzt (in Bezug auf  $n$ ). Im Fall  $n = 1$  ist  $G$  als Untergruppe von  $\mathbb{C}^\times$  sogar zyklisch.

**Definition 10.2.** Für  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sei

$$\|A\| := \sqrt{\text{Spur}(A \bar{A}^T)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

**Bemerkung 10.3.**

- (i) Schreibt man  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  in der Form  $A = A_1 + A_2 i$  mit  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so wird  $\mathbb{C}^{n \times n}$  zum euklidischen Raum der Dimension  $2n^2$  (über  $\mathbb{R}$ ) mit der üblichen Norm. Insbesondere gilt

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{und} \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

für  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

- (ii) Sei  $U(n, \mathbb{C}) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \bar{A}^T\} \leq \text{GL}(n, \mathbb{C})$  die *unitäre Gruppe* vom Grad  $n$ . Für  $U, V \in U(n, \mathbb{C})$  und  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist dann

$$\begin{aligned} \|UAV\|^2 &= \text{Spur}(UAV \bar{V}^T \bar{A}^T \bar{U}^T) = \text{Spur}(U(A \bar{A}^T)U^{-1}) = \text{Spur}(U^{-1}U A \bar{A}^T) \\ &= \text{Spur}(A \bar{A}^T) = \|A\|^2. \end{aligned}$$

- (iii) Der Spektralsatz aus der linearen Algebra besagt, dass für jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $A \bar{A}^T = \bar{A}^T A$  eine Matrix  $U \in U(n, \mathbb{C})$  existiert, sodass  $UAU^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist.<sup>2</sup> Insbesondere gilt dies falls  $A$  unitär oder *hermitesch* ist (d. h.  $\bar{A}^T = A$ ).

---

<sup>2</sup>Siehe Vorlesungsskript Lineare Algebra

**Satz 10.4.** Jede Darstellung  $\Delta : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  ist zu einer Darstellung  $\Delta' : G \rightarrow \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$  ähnlich.

*Beweis.* Die Matrix  $M := \sum_{g \in G} \Delta(g) \overline{\Delta(g)}^T$  ist hermitesch. Nach dem Spektralsatz existiert  $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$  mit  $UMU^{-1} = D$ , wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist. Wegen  $\overline{U}^T = U^{-1}$  ist dann

$$D = UMU^{-1} = \sum_{g \in G} U \Delta(g) U^{-1} U \overline{\Delta(g)}^T U^{-1} = \sum_{g \in G} U \Delta(g) U^{-1} \cdot \overline{U \Delta(g) U^{-1}}^T.$$

Wir können also annehmen, dass  $M$  eine Diagonalmatrix ist. Nach Definition sind die Hauptdiagonaleinträge von  $M$  reell und positiv. Insbesondere ist  $M = P^2$  für ein  $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ . Wie üblich gilt  $\Delta(h) M \overline{\Delta(h)}^T = M$  und  $(P^{-1} \Delta(h) P) (P \overline{\Delta(h)}^T P^{-1}) = 1_n$  für alle  $h \in G$ . Also ist  $P^{-1} \Delta(h) P \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$  für alle  $h \in G$ .  $\square$

**Satz 10.5 (JORDAN).** Es existiert eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit folgender Eigenschaft: Jede endliche Gruppe  $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  besitzt einen abelschen Normalteiler  $A \trianglelefteq G$  mit  $|G : A| \leq f(n)$ .

*Beweis (TAO).* Induktion nach  $n$ : Im Fall  $n = 1$  können wir sicher  $f(1) := 1$  setzen. Sei  $n \geq 2$ . Die Inklusionsabbildung  $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  ist eine Darstellung von Grad  $n$ . Nach Satz 10.4 können wir  $G \leq \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$  annehmen, indem wir  $G$  durch  $xGx^{-1}$  für ein  $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  ersetzen.

Sei  $\epsilon > 0$  und

$$H := \langle x \in G : \|x - 1\| < \epsilon \rangle.$$

Für  $x \in H$  mit  $\|x - 1\| < \epsilon$  und  $g \in G$  ist  $\|gxg^{-1} - 1\| = \|gxg^{-1} - gg^{-1}\| = \|g(x - 1)g^{-1}\| = \|x - 1\| < \epsilon$  nach Bemerkung 10.3. Also ist  $H \trianglelefteq G$ . Sei  $x_1, \dots, x_s \in G$  ein Repräsentantensystem für  $G/H$ . Dann ist  $\|x_i - x_j\| = \|x_i x_j^{-1} - 1\| \geq \epsilon$  für  $i \neq j$ . Andererseits gilt  $\|x_i\| = \sqrt{\mathrm{Spur}(x_i \overline{x_i}^T)} = \sqrt{\mathrm{Spur}(1_n)} = \sqrt{n}$  für  $i = 1, \dots, s$ . Die Teilmenge  $M := \{x \in \mathbb{C}^{n \times n} : \|x\| = \sqrt{n}\}$  des euklidischen Raums  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ist beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt). Nach dem Satz von Heine-Borel aus Analysis 1 lässt sich  $M$  durch endlich viele, sagen wir  $g(n)$ , offene Kugeln vom Radius  $\epsilon/2$  überdecken. In jeder Kugel kann höchstens ein  $x_i$  liegen. Insbesondere ist  $|G : H| = s \leq g(n)$ .

**Annahme:**  $Z(H) \leq \mathbb{C}^\times 1_n$ .

Im Fall  $Z(H) = H$  sind wir fertig mit  $A := H$  und  $f(n) := g(n)$ . Sei also  $x \in H \setminus Z(H)$ , sodass  $\|x - 1\|$  minimal ist ( $G$  endlich). Da nicht alle Erzeuger von  $H$  in  $Z(H)$  liegen können, ist  $\|x - 1\| < \epsilon$ . Sei außerdem  $y \in H$  mit  $\|y - 1\| < \epsilon$ . Wir wählen  $u \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ , sodass  $uxu^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist (Spektralsatz). Schreibe  $u(x - 1)u^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und  $u(y - 1)u^{-1} = (\beta_{ij})$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|(x - 1)(y - 1)\|^2 &= \|u(x - 1)u^{-1}u(y - 1)u^{-1}\|^2 = \sum_{i,j} |\alpha_i \beta_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j,k} |\alpha_i|^2 |\beta_{jk}|^2 \\ &= \left( \sum_i |\alpha_i|^2 \right) \left( \sum_{j,k} |\beta_{jk}|^2 \right) = \|u(x - 1)u^{-1}\|^2 \|u(y - 1)u^{-1}\|^2 = \|x - 1\|^2 \|y - 1\|^2. \end{aligned}$$

Analog ist auch  $\|(y - 1)(x - 1)\| \leq \|x - 1\| \|y - 1\|$ . Es folgt

$$\|xyx^{-1}y^{-1} - 1\| = \|xy - yx\| = \|(x - 1)(y - 1) - (y - 1)(x - 1)\| \leq 2\|x - 1\| \|y - 1\| < 2\epsilon \|x - 1\| < \|x - 1\|$$

für  $\epsilon < \frac{1}{2}$ . Nach Wahl von  $x$  ist also  $z := xyx^{-1}y^{-1} \in Z(H)$ . Nach der Annahme ist  $z = \lambda 1_n$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Offenbar ist  $\det(z) = \det(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$ , d. h.  $\lambda^n = 1$ . Insbesondere gibt es nur  $n$  Möglichkeiten für  $\lambda$ . Es gilt  $|\lambda - 1| \sqrt{n} = \|z - 1\| < \|x - 1\| < \epsilon$ . Wählt man  $\epsilon$  klein genug, so folgt  $\lambda = 1$  und  $xyx^{-1}y^{-1} = z = 1$ . Also ist  $x$  mit allen Erzeugern von  $H$  vertauschbar. Dies liefert den Widerspruch  $x \in Z(H)$ .

Also existiert  $z \in Z(H) \setminus \mathbb{C}1_n$ . Wegen  $z \in U(n, \mathbb{C})$  existiert ein  $u \in U(n, \mathbb{C})$  mit

$$d := uzu^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 1_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k 1_{n_k} \end{pmatrix},$$

wobei  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  paarweise verschieden sind (o. B. d. A.). Wegen  $z \notin \mathbb{C}1_n$  gilt  $k > 1$ . Man zeigt leicht:

$$C_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}(d) = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{GL}(n_k, \mathbb{C}) \end{pmatrix} \cong \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C}) \times \dots \times \mathrm{GL}(n_k, \mathbb{C}).$$

Somit ist auch  $H \leq C_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}(z) = u^{-1} C_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}(d)u \cong \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C}) \times \dots \times \mathrm{GL}(n_k, \mathbb{C})$ . Sei  $\pi_i : H \rightarrow \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$  die  $i$ -te Projektion. Wegen  $k > 1$  ist  $n_i < n$ . Nach Induktion existiert ein abelscher Normalteiler  $N_i / \mathrm{Ker}(\pi_i) \leq H / \mathrm{Ker}(\pi_i) \cong \pi_i(H) \leq \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$  mit  $|H : N_i| = |H / \mathrm{Ker}(\pi_i) : N_i / \mathrm{Ker}(\pi_i)| \leq f(n_i)$ . Sei

$$\pi : H \rightarrow H / \mathrm{Ker}(\pi_1) \times \dots \times H / \mathrm{Ker}(\pi_k), \quad g \mapsto (g \mathrm{Ker}(\pi_1), \dots, g \mathrm{Ker}(\pi_k)).$$

Dann ist  $\mathrm{Ker}(\pi) = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\pi_i) = 1$ . Wir definieren

$$K := \pi^{-1}(N_1 / \mathrm{Ker}(\pi_1) \times \dots \times N_k / \mathrm{Ker}(\pi_k)) = N_1 \cap \dots \cap N_k.$$

Da  $\pi$  injektiv ist, ist  $K$  ein abelscher Normalteiler von  $H$ . Da auch die Abbildung  $H/K \rightarrow H/N_1 \times \dots \times H/N_k$ ,  $gK \mapsto (gN_1, \dots, gN_k)$  injektiv ist, gilt

$$|H : K| \leq |H : N_1| \dots |H : N_k| \leq f(n_1) \dots f(n_k).$$

Die Funktion  $h(n) := \max\{f(i) : 1 \leq i \leq n-1\}^n$  erfüllt also  $|H : K| \leq h(n)$ . Insgesamt ist  $|G : K| = |G : H| |H : K| \leq g(n)h(n)$ . Da die Normalteilerrelation nicht transitiv ist, ist allerdings nicht unbedingt  $K \leq G$ . Wir betrachten daher die Operation  $\varphi : G \rightarrow \mathrm{Sym}(G/K)$  mit  ${}^g(hK) := ghK$  für  $g, h \in G$  (vgl. Beweis von Satz 7.11). Man zeigt leicht, dass  $A := \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq K$  gilt. Insbesondere ist  $A$  ein abelscher Normalteiler von  $G$  mit  $|G : A| = |G : \mathrm{Ker}(\varphi)| \leq |\mathrm{Sym}(G/K)| = |G : K|! \leq (g(n)h(n))!$ . Die Funktion  $f(n) := (g(n)h(n))!$  erfüllt somit die Behauptung.  $\square$

### Bemerkung 10.6.

- (i) Wie in Aufgabe 20 zeigt man, dass  $G := \mathrm{SL}(2, 5)$  auf der Menge der sechs eindimensionalen Untervektorräume von  $\mathbb{F}_5^2$  mit Kern  $Z(G) = \langle -1_2 \rangle$  operiert. Es folgt  $\mathrm{SL}(2, 5)/Z(G) \cong A_5$  und  $Z(G)$  ist der größte abelsche Normalteiler von  $G$ . Außerdem besitzt  $G$  einen treuen (irreduziblen) Charakter vom Grad 2. Dies zeigt  $f(2) \geq |G : Z(G)| = 60$ . Es gilt sogar Gleichheit (ohne Beweis).
- (ii) Collins hat  $|G : A| \leq (n+1)!$  für  $n \geq 71$  in der Situation von Satz 10.5 gezeigt. Nach Aufgabe 30 ist diese Schranke auch optimal. Der Beweis benutzt allerdings die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

**Definition 10.7.** Eine Untergruppe  $H \leq G$  heißt  $\pi$ -Hallgruppe, falls  $H$  eine  $\pi$ -Gruppe ist und kein Primteiler von  $|G : H|$  in  $\pi$  liegt. Insbesondere ist  $\mathrm{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$ .

### Beispiel 10.8.

- (i) Die  $p$ -Hallgruppen von  $G$  sind genau die  $p$ -Sylowgruppen.
- (ii) Sei  $G$  abelsch und  $S_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$ . Für  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  ist dann  $G_\pi := \prod_{p \in \pi} S_p$  eine  $\pi$ -Hallgruppe von  $G$ .

(iii)  $A_5$  besitzt keine  $\{2, 5\}$ -Hallgruppe.

(iv) Nach Aufgabe 16 sind Frobeniuskerne und Frobeniuskomplemente stets Hallgruppen.

**Definition 10.9.**

- (i) Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ .
- (ii) Sei  $p \in \mathbb{P}$  und  $|G| = mp^a$  mit  $p \nmid m$ . Ein Charakter  $\chi$  von  $G$  heißt *p-rational*, falls  $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$  für alle  $g \in G$  gilt.

**Beispiel 10.10.** Im Fall  $p \nmid |\langle g \rangle|$  ist  $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$  (als Summe von  $|\langle g \rangle|$ -ten Einheitswurzeln). Insbesondere ist jeder Charakter  $p$ -rational, falls  $p \nmid |G|$ .

**Lemma 10.11.** Seien  $p \neq q$  Primzahlen, sodass  $G$  kein Element der Ordnung  $pq$  besitzt. Dann ist jeder Charakter  $\chi \in \text{Irr}(G)$   $p$ -rational oder  $q$ -rational.

*Beweis.* Nehmen wir an, dass  $\chi \in \text{Irr}(G)$  weder  $p$ -rational noch  $q$ -rational ist. Wir schreiben  $n := |G| = p^a m_p = q^b m_q$  mit  $p \nmid m_p$  und  $q \nmid m_q$ . Sei  $\mathcal{G}_p := \text{Gal}(\mathbb{Q}_n | \mathbb{Q}_{m_p})$  und  $\mathcal{G}_q := \text{Gal}(\mathbb{Q}_n | \mathbb{Q}_{m_q})$ . Dann existieren  $\gamma_p \in \mathcal{G}_p$  und  $\gamma_q \in \mathcal{G}_q$  mit  $\gamma_p \chi \neq \chi \neq \gamma_q \chi$  (siehe Beispiel 6.15).

Ist  $g \in G$  mit  $p \nmid |\langle g \rangle|$ , so ist  $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{m_p}$ . Insbesondere ist  $\gamma_p(\chi(g)) = \chi(g)$ . Analog ist  $\gamma_q(\chi(g)) = \chi(g)$  für  $q \nmid |\langle g \rangle|$ . Da  $G$  kein Element der Ordnung  $pq$  besitzt, gilt  $p \nmid |\langle g \rangle|$  oder  $q \nmid |\langle g \rangle|$  für alle  $g \in G$ . Dies zeigt

$$((\chi - \gamma_p \chi), (\chi - \gamma_q \chi))_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi - \gamma_p \chi)(g) \overline{(\chi - \gamma_q \chi)(g)} = 0.$$

Wegen  $\gamma_p \chi, \gamma_q \chi \in \text{Irr}(G)$  ist  $(\chi, \gamma_p \chi)_G = (\chi, \gamma_q \chi)_G = 0$ . Es folgt der Widerspruch

$$0 = (\chi, \chi)_G + (\gamma_p \chi, \gamma_q \chi)_G \geq 1. \quad \square$$

**Lemma 10.12.** Für  $\text{ggT}(n, m) = 1$  ist  $\mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Sei  $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{nm}}$ . Wegen  $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}(\zeta^m)$  und  $\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}(\zeta^n)$  ist die Einschränkung

$$\Gamma : \text{Gal}(\mathbb{Q}_{nm} | \mathbb{Q}_n) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}_m | \mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m)$$

ein wohldefinierter Homomorphismus. Sei  $\gamma \in \text{Ker}(\Gamma)$ . Wegen  $\text{ggT}(n, m) = 1$  existieren  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = an + bm$ . Dann ist  $\gamma(\zeta) = \gamma(\zeta^{an+bm}) = \gamma(\zeta^n)^a \gamma(\zeta^m)^b = \zeta^{na} \zeta^{mb} = \zeta$ . Also ist  $\Gamma$  injektiv und

$$\varphi(m) = \frac{\varphi(nm)}{\varphi(n)} = \frac{[\mathbb{Q}_{nm} : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}_n : \mathbb{Q}]} = [\mathbb{Q}_{nm} : \mathbb{Q}_n] = |\text{Gal}(\mathbb{Q}_{nm} | \mathbb{Q}_n)| \leq |\text{Gal}(\mathbb{Q}_m | \mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m)| \leq \varphi(m).$$

Der Hauptsatz der Galoistheorie impliziert die Behauptung.  $\square$

**Lemma 10.13.** Sei  $\chi$  ein treuer  $p$ -rationaler Charakter von  $G$ , wobei  $p \mid |G|$ . Dann ist  $\chi(1) \geq p - 1$ .

*Beweis.* O. B. d. A. sei  $p \geq 3$ . Wir schreiben  $|G| = mp^a$  mit  $p \nmid m$ . Nach Voraussetzung ist  $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$  für alle  $g \in G$ . Sei  $P \leq G$  mit  $|P| = p$ . Dann hat  $\chi_P$  Werte in  $\mathbb{Q}_p$ . Nach Lemma 10.12 ist also  $\chi(x) \in \mathbb{Q}$  für  $x \in P$ . Da  $\chi$  treu ist, enthält  $\chi_P$  einen nichttrivialen Bestandteil  $\psi \in \text{Irr}(P)$ . Für  $1 \neq \gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p | \mathbb{Q})$  ist  $\gamma \psi \neq \psi$  ein irreduzibler Bestandteil von  $\gamma(\chi_P) = \chi_P$ . Wegen  $|\text{Gal}(\mathbb{Q}_p | \mathbb{Q})| = p - 1$  besitzt  $\chi_P$  also mindestens  $p - 1$  irreduzible Bestandteile. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 10.14** (FRATTINI Argument). Sei  $N \trianglelefteq G$  und  $P \in \text{Syl}_p(N)$ . Dann ist  $G = N N_G(P)$ .

*Beweis.* Für  $g \in G$  ist  $gPg^{-1} \leq gNg^{-1} = N$ . Nach Sylow existiert ein  $x \in N$  mit  $gPg^{-1} = xPx^{-1}$ . Also ist  $g = x(x^{-1}g) \in N N_G(P)$ .  $\square$

**Lemma 10.15.** Sei  $G$  abelsch und  $p \mid |G|$ . Dann existiert eine Untergruppe  $H \leq G$  mit  $|G : H| = p$ .

*Beweis.* Da  $G$  das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist, können wir annehmen, dass  $G$  eine  $p$ -Gruppe ist. Im Fall  $|G| = p$  können wir  $H = 1$  wählen. Sei nun  $|G| > p$ , und sei  $x \in G$  ein Element der Ordnung  $p$ . Nach Induktion besitzt  $G/\langle x \rangle$  eine Untergruppe  $H/\langle x \rangle$  mit  $|G : H| = |G/\langle x \rangle : H/\langle x \rangle| = p$ .  $\square$

**Satz 10.16** (BLICHFELDT). Eine endliche Gruppe  $G \leq \text{GL}(n, \mathbb{C})$  besitzt eine abelsche  $\pi$ -Hallgruppe für  $\pi := \{p \in \mathbb{P} : p > n + 1\}$ .

*Beweis.* Wir argumentieren durch Doppelinduktion nach  $n$  und dann nach  $|G|$ . Im Fall  $n = 1$  ist  $G$  abelsch und die Behauptung folgt aus Beispiel 10.8(ii). Sei also  $n \geq 2$ . Sei  $\chi$  der treue Charakter vom Grad  $n$ , der durch die Einbettung  $G \hookrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  entsteht.

**Behauptung:** Jede  $\pi$ -Untergruppe  $H \leq G$  ist abelsch.

Sei  $\psi$  ein irreduzibler Bestandteil von  $\chi_H$ . Dann ist  $\psi(1) \mid |H|$ . Jeder Primteiler  $p$  von  $\psi(1)$  erfüllt also  $n + 1 < p \leq \psi(1) \leq \chi(1) = n$ . Folglich ist  $\psi(1) = 1$ . Also ist  $\chi_H$  eine Summe von irreduziblen Charakteren  $\psi_1, \dots, \psi_k$  vom Grad 1. Somit ist  $H' \subseteq \text{Ker}(\psi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\psi_k) = \text{Ker}(\chi_H) = \text{Ker}(\chi) \cap H = 1$  (siehe Aufgabe 9) und  $H$  ist abelsch.

Es genügt daher zu zeigen, dass irgendeine  $\pi$ -Hallgruppe existiert.

**Behauptung:**  $\chi \in \text{Irr}(G)$ .

Sei  $\chi$  reduzibel und  $\chi = \chi_1 + \chi_2$  mit  $K_i := \text{Ker}(\chi_i)$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $G/K_i \leq \text{GL}(\chi_i(1), \mathbb{C})$  mit  $\chi_i(1) < n$ . Nach Induktion besitzt  $G/K_i$  abelsche  $\pi_i$ -Hallgruppen mit  $\pi_i := \{p \in \mathbb{P} : p > \chi_i(1) + 1\}$  für  $i = 1, 2$ . Wegen  $\pi \subseteq \pi_i$  gibt es auch  $\pi$ -Hallgruppen  $H_i/K_i$  von  $G/K_i$  für  $i = 1, 2$  (Beispiel 10.8(ii)). Gilt  $H_i < G$  für ein  $i$ , so existiert nach Induktion eine  $\pi$ -Hallgruppe  $H$  von  $H_i$ . Für alle  $p \in \pi$  ist dann  $p \nmid |G/K_i : H_i/K_i| |H_i : H| = |G : H_i| |H_i : H| = |G : H|$ . Wir können daher  $H_i = G$  für  $i = 1, 2$  annehmen. Insbesondere ist  $G/K_i$  abelsch. Wegen  $K_1 \cap K_2 = \text{Ker}(\chi_1) \cap \text{Ker}(\chi_2) = \text{Ker}(\chi) = 1$  ist die Abbildung  $G \rightarrow G/K_1 \times G/K_2$ ,  $g \mapsto (gK_1, gK_2)$  injektiv. Insbesondere ist auch  $G$  abelsch und die Behauptung folgt aus Beispiel 10.8(ii).

**Behauptung:**  $G' = G$ .

Sei  $G' < G$ . Nach Lemma 10.15 existiert ein Normalteiler  $N \trianglelefteq G$  mit  $|G : N| = p \in \mathbb{P}$  (denn  $G/G'$  ist abelsch). Nach Induktion besitzt  $N$  eine  $\pi$ -Hallgruppe  $H$ . Im Fall  $p \notin \pi$  ist  $H$  auch eine  $\pi$ -Hallgruppe von  $G$ . Sei also  $p \in \pi$ . Im Fall  $H \trianglelefteq G$  ist  $HP$  eine  $\pi$ -Hallgruppe von  $G$ , wobei  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Sei also  $H \not\trianglelefteq G$ . Dann existiert eine Sylowgruppe  $Q$  von  $H$  mit  $Q \not\trianglelefteq G$  (anderenfalls wäre  $H$  als Produkt von Normalteilern auch normal). Dann ist  $Q$  auch eine Sylowgruppe von  $N$  und das Frattini Argument zeigt  $G = N N_G(Q)$ . Da  $H$  abelsch ist, gilt  $H \subseteq N_G(Q)$ . Außerdem ist

$$|G : N_G(Q)| = |N N_G(Q) : N_G(Q)| = |N : N \cap N_G(Q)| = |N : N_N(Q)| \mid |N : H|.$$

Insbesondere liegen die Primteiler von  $|G : N_G(Q)|$  nicht in  $\pi$ . Wegen  $N_G(Q) < G$  besitzt  $N_G(Q)$  eine  $\pi$ -Hallgruppe  $K$ . Offenbar ist dann  $K$  auch eine  $\pi$ -Hallgruppe von  $G$  und wir sind fertig.

**Behauptung:**  $Z(G)$  ist eine  $\pi'$ -Gruppe.

Sei  $Z \leq Z(G)$  mit  $|Z| = p \in \pi$ . Nach Satz 2.14 ist  $Z \subseteq Z(\chi)$ . Sei  $\Delta$  eine Darstellung mit Charakter

$\chi$ . Für  $1 \neq x \in Z$  ist dann  $\Delta(x) = \lambda 1_n$  für eine  $p$ -te Einheitswurzel  $\lambda \neq 1$ . Wegen  $p > n$  ist  $\det(\Delta(x)) = \lambda^n \neq 1$ . Also ist  $\det \Delta \neq 1_G$  im Widerspruch zu  $G' = G$ .

Sei nun  $H \leq G$  eine  $\pi$ -Untergruppe von maximaler Ordnung.

**Behauptung:**  $\text{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$ .

Sei  $1 \neq x \in H$  ein  $p$ -Element. Da  $Z(H)$  eine  $\pi'$ -Gruppe ist, gilt  $C := C_G(x) < G$ . Nach Induktion besitzt  $C$  eine  $\pi$ -Hallgruppe  $K$ . Da  $H$  abelsch ist (siehe oben), gilt  $H \subseteq C$  und somit  $|H| \leq |K|$ . Aus der Maximalität von  $H$  folgt  $|H| = |K|$ . Sei  $x \in P \in \text{Syl}_p(G)$ . Da  $P$  als  $\pi$ -Untergruppe abelsch ist, gilt  $P \leq C$  und  $p \nmid |G : C|$ . Andererseits ist  $p \nmid |C : K| = |C : H|$  und  $p \nmid |G : C||C : H| = |G : H|$ .

Wir dürfen annehmen, dass  $G$  mindestens ein  $\pi$ -Element besitzt, d. h.  $H \neq 1$  (anderenfalls ist  $G$  eine  $\pi'$ -Gruppe und die Behauptung gilt mit  $H = 1$ ). Sei also  $p$  ein Primteiler von  $|H|$ . Wir nehmen an, dass  $H$  keine  $\pi$ -Hallgruppe ist. Also existiert ein  $q \in \pi$  mit  $q \mid |G : H|$ .

**Behauptung:**  $G$  besitzt kein Element der Ordnung  $pq$ .

Anderenfalls existieren  $x, y \in G$  mit  $|\langle x \rangle| = p$ ,  $|\langle y \rangle| = q$  und  $y \in C_G(x)$ . Nach Sylow dürfen wir  $x \in H$  annehmen. Mit den obigen Bezeichnungen ist  $y \in C$ ,  $q \mid |C|$  und daher  $q \mid |K| = |H|$ . Dies widerspricht  $\text{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$ .

Nach Lemma 10.11 ist  $\chi$   $r$ -rational für ein  $r \in \{p, q\}$ . Lemma 10.13 impliziert nun  $n = \chi(1) \geq r - 1$  im Widerspruch zu  $r \in \pi$ .  $\square$

**Satz 10.17** (WIELANDT). Für  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  sind je zwei abelsche  $\pi$ -Hallgruppen von  $G$  konjugiert.

*Beweis.* Seien  $A, B \leq G$  abelsche  $\pi$ -Hallgruppen. Wir argumentieren durch Induktion nach  $|\pi|$ . Im Fall  $|\pi| \leq 1$  folgt die Behauptung aus dem Satz von Sylow. Sei  $|\pi| \geq 2$ . Wir schreiben  $A = \prod_{p \in \pi} S_p$  und  $B = \prod_{p \in \pi} T_p$  mit  $S_p, T_p \in \text{Syl}_p(G)$ . Sei  $q \in \pi$  fest. Nach Induktion existiert ein  $g \in G$  mit

$$g \left( \prod_{q \neq p \in \pi} S_p \right) g^{-1} = \prod_{q \neq p \in \pi} T_p.$$

Ersetzt man  $A$  durch  $gAg^{-1}$ , so kann man  $S_p = T_p$  für alle  $p \neq q$  annehmen. Offenbar ist dann  $S_q, T_q \in \text{Syl}_q(N_G(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p))$ . Nach Sylow existiert ein  $h \in N_G(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p)$  mit  $hS_qh^{-1} = T_q$ . Dann ist

$$hAh^{-1} = hS_qh^{-1}h \left( \prod_{q \neq p \in \pi} S_p \right) h^{-1} = T_q \prod_{q \neq p \in \pi} S_p = B. \quad \square$$

**Beispiel 10.18.** Im Allgemeinen sind zwei  $\pi$ -Hallgruppen von  $G$  nicht konjugiert. Sei zum Beispiel  $G := \text{GL}(3, 2)$  und

$$H := \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \text{GL}(2, 2) \end{pmatrix} \leq G, \quad K := \begin{pmatrix} \text{GL}(2, 2) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq G.$$

Wegen  $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$  und  $|H| = |K| = 24$  sind  $H$  und  $K$   $\{2, 3\}$ -Hallgruppen von  $G$ . Nehmen wir an, dass ein  $g \in G$  mit  $gHg^{-1} = K$  existiert. Sei  $e_1 := (1, 0, 0)$  und  $g \cdot e_1 = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{F}_2^3$ . Für alle  $x \in K$  ist dann

$$x(\alpha, \beta, \gamma) = g \underbrace{(g^{-1}xg)}_{\in H} e_1 = g \cdot e_1 = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Mit  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$  folgt  $\beta = \gamma = 0$ . Aus  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$  folgt nun der Widerspruch  $\alpha = 0$ . Somit sind  $H$  und  $K$  nicht in  $G$  konjugiert.



**Satz 10.19** (BRAUER-BURNSIDE). Sei  $\theta$  ein treuer Charakter von  $G$ , der genau  $r$  verschiedene Werte  $a_1, \dots, a_r$  annimmt. Dann tritt unter den irreduziblen Bestandteilen von  $\theta^0 = 1_G, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{r-1}$  jeder irreduzible Charakter von  $G$  auf.

*Beweis.* Sei  $\chi \in \text{Irr}(G)$  kein irreduzibler Bestandteil von  $\theta^0, \theta, \dots, \theta^{r-1}$ , und sei  $A_j := \{g \in G : \theta(g) = a_j\}$  für  $j = 1, \dots, r$ . Dann ist

$$0 = |G|(\theta^s, \chi)_G = \sum_{g \in G} \theta^s(g) \chi(g^{-1}) = \sum_{j=1}^r a_j^s \sum_{g \in A_j} \chi(g^{-1})$$

für  $s = 0, \dots, r-1$ . Daher ist  $(\sum_{g \in A_1} \chi(g^{-1}), \dots, \sum_{g \in A_r} \chi(g^{-1}))$  eine Lösung des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & \cdots & a_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

Matrizen dieser Form (Vandermonde-Matrix) sind bekanntlich invertierbar. Folglich ist  $\sum_{g \in A_j} \chi(g^{-1}) = 0$  für  $j = 1, \dots, r$ . Sei  $j \in \{1, \dots, r\}$  mit  $1 \in A_j$ , also  $a_j = \theta(1)$ . Da  $\theta$  treu ist, ist  $A_j = \{1\}$ , und man hat den Widerspruch  $\chi(1) = 0$ .  $\square$

**Beispiel 10.20.** Für den regulären Charakter  $\theta$  von  $G$  gilt  $r = 2$  in Satz 10.19 (falls  $G \neq 1$ ). Tatsächlich wissen wir bereits, dass jeder irreduzible Charakter in  $\theta = \theta^{r-1}$  vorkommt.

## 11 Die Charaktere von $S_n$ und $A_n$

### Bemerkung 11.1.

- (i) Nach Aufgabe 27 sind zwei Elemente in  $S_n$  genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zyklentyp haben. Folglich kann man die Menge der Konjugationsklassen mit den Partitionen von  $n$  identifizieren. Dabei ist eine *Partition* von  $n$  eine Folge von natürlichen Zahlen  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$  und  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$ .
- (ii) Im Folgenden werden wir die Charaktertafel von  $S_n$  berechnen, indem wir auch die irreduziblen Charaktere mit den Partitionen identifizieren. Nach Aufgabe 27 ist dies eine ganzzahlige Matrix.

### Definition 11.2.

- (i) Sei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  eine Partition von  $n$ . Das *Young-Diagramm* von  $\lambda$  ist eine Anordnung von  $n$  Boxen mit  $\lambda_i$  Boxen in der  $i$ -ten Zeile. Durch Spiegelung an der Diagonalen erhält man das *entgegengesetzte* Young-Diagramm mit Partition  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_l)$  mit  $\lambda'_i := |\{j : \lambda_j \geq i\}|$  für  $i = 1, \dots, l$ . Sicher ist  $\lambda'' = \lambda$  (vgl. Beispiel 11.3).
- (ii) Ein *Young-Tableau* (von  $\lambda$ ) ist ein mit den Zahlen  $1, \dots, n$  ausgefülltes Young-Diagramm (von  $\lambda$ ), wobei in jeder Zeile die Zahlen aufsteigend sortiert sind.

**Beispiel 11.3.** Sei  $\lambda = (4, 2, 2, 1) = (4, 2^2, 1)$  eine Partition von 9. Dann sind das Young-Diagramm von  $\lambda$ , ein Young-Tableau und das entgegengesetzte Young-Diagramm gegeben durch:


2	3	6	7					
1	8							
5	9							
4								


**Bemerkung 11.4.**

- (i) Wir werden die Young-Tableaus  $Y$  von  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  oft mit den Mengenpartitionen  $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$  mit  $Y_1 \cup \dots \cup Y_k = \{1, \dots, n\}$  und  $|Y_i| = \lambda_i$  für  $i = 1, \dots, k$  identifizieren. Offenbar operiert dann  $S_n$  durch  ${}^gY := (g(Y_1), \dots, g(Y_k))$  transitiv auf der Menge der Young-Tableaus von  $\lambda$ . Sei  $\varphi_\lambda$  der entsprechende Permutationscharakter (siehe Aufgabe 29). Der Stabilisator von  $Y$  ist gegeben durch die *Young-Untergruppe*

$$S_Y := (S_n)_Y = \text{Sym}(Y_1) \times \dots \times \text{Sym}(Y_k) \cong S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}.$$

Nach Aufgabe 29 ist  $\varphi_\lambda = 1_{S_Y}^{S_n}$ . Sei  $\text{sgn}$  der alternierende Charakter von  $S_n$  (siehe Beispiel 1.2).

Wir setzen  $\psi_\lambda := \text{sgn} \cdot \varphi_\lambda = (\text{sgn}_{S_Y} \cdot 1_{S_Y})^{S_n} = (\text{sgn}_{S_Y})^{S_n}$ .

- (ii) Sei  $Y' = (Y'_1, \dots, Y'_l)$  das zu  $Y$  gespiegelte Young-Tableau (als Mengenpartition). Dann ist  $|Y_i \cap Y'_j| \leq 1$  für alle  $i, j$  (Schnitt von Zeile und Spalte). Dies zeigt  $S_Y \cap S_{Y'} = 1$ .

**Beispiel 11.5.**

- (i) Für  $\lambda = (n)$  ist  $S_Y = S_n$ ,  $\varphi_\lambda = 1_{S_n}$  und  $\psi_\lambda = \text{sgn}$ .  
(ii) Für  $\lambda = (1^n)$  ist  $S_Y = 1$ , und  $\varphi_\lambda = 1_1^{S_n} = (\text{sgn}_1)^{S_n} = \psi_\lambda$  ist der reguläre Charakter von  $S_n$ .  
(iii) Für  $\lambda = (n-1, 1)$  kann man die Menge der Young-Tableaus mit  $\{1, \dots, n\}$  identifizieren. Also ist  $\varphi_\lambda$  der natürliche Permutationscharakter vom Grad  $n$  (Aufgabe 29).

**Satz 11.6.** Für jede Partition  $\lambda$  von  $n$  ist  $(\varphi_\lambda, \psi_{\lambda'})_{S_n} = 1$ . Insbesondere gibt es genau einen gemeinsamen irreduziblen Bestandteil  $\chi_\lambda$  von  $\varphi_\lambda$  und  $\psi_{\lambda'}$ .

*Beweis.* Sei  $Y$  ein Young-Tableau von  $\lambda$ . Nach Frobenius und Mackey ist

$$\begin{aligned} (\varphi_\lambda, \psi_{\lambda'})_{S_n} &= (1_{S_Y}^{S_n}, (\text{sgn}_{S_{Y'}})^{S_n})_{S_n} = ((1_{S_Y}^{S_n})_{S_{Y'}}, \text{sgn}_{S_{Y'}})_{S_{Y'}} \\ &= \sum_{S_{Y'}gS_Y \in S_{Y'} \backslash S_n / S_Y} (1_{S_{Y'} \cap gS_Yg^{-1}}^{S_{Y'}}, \text{sgn}_{S_{Y'}})_{S_{Y'}} = \sum_{S_{Y'}gS_Y \in S_{Y'} \backslash S_n / S_Y} (1_{D_g}, \text{sgn}_{D_g})_{D_g} \quad (11.1) \end{aligned}$$

mit  $D_g := S_{Y'} \cap gS_Yg^{-1} = S_{Y'} \cap S_{gY}$ . Für  $g = 1$  ist  $D_g = 1$  und  $(1_{D_g}, \text{sgn}_{D_g})_{D_g} = 1$  nach Bemerkung 11.4(ii). Wir müssen zeigen, dass alle anderen Summanden in (11.1) verschwinden. Sei also  $(1_{D_g}, \text{sgn}_{D_g})_{D_g} > 0$  für ein  $g \in S_n$ . Angenommen zwei Zahlen  $a, b$  liegen in der gleichen Zeile von  ${}^gY$  und in der gleichen Spalte von  $Y$ . Dann wäre die Transposition  $(a, b)$  in  $D_g$  und  $1_{D_g} \neq \text{sgn}_{D_g}$ . Daher verteilen sich die Zahlen einer Zeile von  ${}^gY$  auf paarweise verschiedene Spalten von  $Y$ . Insbesondere existiert ein  $h_1 \in S_{Y'}$ , sodass die ersten Zeilen von  ${}^gY$  und  ${}^{h_1}Y$  als Mengen übereinstimmen. Analog existiert  $h_2 \in S_{Y'}$ , sodass die ersten beiden Zeilen von  ${}^gY$  und  ${}^{h_2h_1}Y$  übereinstimmen usw. Schließlich existiert  $h \in S_{Y'}$  mit  ${}^gY = {}^hY$ , d. h.  $h^{-1}g \in S_Y$ . Dies zeigt  $S_{Y'}gS_Y = S_{Y'}S_Y$  und wir sind fertig.  $\square$

**Definition 11.7.** Sei  $\leq$  die lexikografische Ordnung auf der Menge der Partitionen von  $n$ , d. h.

$$\lambda < \mu \iff \exists k : \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}, \lambda_k < \mu_k.$$

**Satz 11.8** (FROBENIUS-YOUNG). Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\text{Irr}(S_n) = \{\chi_\lambda : \lambda \text{ Partition von } n\}$ .

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass die  $\chi_\lambda$  paarweise verschieden sind. Sei also  $\chi_\lambda = \chi_\mu$  für Partitionen  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  und  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$  von  $n$ . Nach Definition ist  $(\varphi_\lambda, \psi_{\mu'})_{S_n} \neq 0$ . Seien  $Y$  und  $Z$  Young-Tableaus von  $\lambda$  bzw.  $\mu$ . Wie im Beweis von Satz 11.6 existiert ein  $g \in S_n$  mit  $S_{Z'} \cap S_{gY} = 1$ . Ersetzt man  $Y$  durch  ${}^gY$ , so kann man  $g = 1$  annehmen. Mit  $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$  und  $Z' = (Z'_1, \dots, Z'_m)$  gilt also  $|Y_i \cap Z'_j| \leq 1$ . Wir wollen  $\lambda \leq \mu$  zeigen. Es gilt  $\lambda_1 = |Y_1| \leq m = \mu_1$ . Nehmen wir nun an, dass  $\lambda_j = \mu_j$  für  $j \leq i$  gilt. Man kann dann die ersten  $i$  Zeilen von  $Y$  genau auf die ersten  $i$  Spalten von  $Z'$  verteilen. Wegen  $Y_{i+1} \subseteq \{1, \dots, n\} = Z'_1 \cup \dots \cup Z'_m$  hat  $Z'$  also mindestens  $|Y_{i+1}| = \lambda_{i+1}$  Zeilen mit mindestens  $i+1$  Boxen, d. h.  $\mu_{i+1} = |\{j : |Z'_j| \geq i+1\}| \geq \lambda_{i+1}$ . Dies zeigt  $\lambda \leq \mu$ . Wegen  $(\varphi_\mu, \psi_{\lambda'})_{S_n} \neq 0$  gilt analog auch  $\mu \leq \lambda$  und wir sind fertig.  $\square$

**Lemma 11.9.** Für eine Partition  $\lambda$  ist  $\varphi_\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} (\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \chi_\mu$ .

*Beweis.* Sei  $(\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \neq 0$  für eine Partition  $\mu$ . Dann ist auch  $(\varphi_\lambda, \psi_{\mu'})_{S_n} \neq 0$  und wie im Beweis von Satz 11.8 folgt  $\lambda \leq \mu$ .  $\square$

**Lemma 11.10.** Seien  $\lambda$  und  $\mu$  Partitionen von  $n$ . Für ein Element  $g \in S_n$  vom Zyklentyp  $\mu$  ist dann  $\varphi_\lambda(g)$  die Anzahl der Möglichkeiten die Komponenten von  $\mu$  auf die Komponenten von  $\lambda$  zu verteilen.

**Beispiel 11.11.** Sei  $\lambda = (5, 4)$  und  $\mu = (3, 2^2, 1^2)$ . Dann ist  $\varphi_\lambda(g) = 5$ , veranschaulicht durch eingefärbte Young-Diagramme:



*Beweis von Lemma 11.10.* Sei  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  und  $g = \sigma_1 \dots \sigma_k$  mit disjunkten Zyklen  $\sigma_i$  der Länge  $\mu_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Nach Aufgabe 29 ist  $\varphi_\lambda(g)$  die Anzahl der Young-Tableaus von  $\lambda$ , die durch  $g$  festbleiben. Ein Young-Tableau  $Y$  von  $\lambda$  bleibt genau dann unter  $g$  fest, wenn für  $i = 1, \dots, k$  die nichttriviale Bahn von  $\sigma_i$  in einem  $Y_j$  liegt. Für  $Y$  gibt es daher genau so viele Möglichkeiten wie es Möglichkeiten gibt, die  $\mu_i$  in das Young-Diagramm von  $\lambda$  zu verteilen.  $\square$

**Bemerkung 11.12.** Lemma 11.9 und Lemma 11.10 erlauben es  $\text{Irr}(S_n)$  rekursiv zu berechnen. Nach Beispiel 11.5 ist  $\chi_{(n)} = \varphi_{(n)} = 1_{S_n}$ . Nehmen wir an, dass  $\chi_\mu$  für  $\mu > \lambda$  bekannt ist. Da  $\chi_\lambda$  nur einmal in  $\varphi_\lambda$  auftritt, ist  $\chi_\lambda = \varphi_\lambda - \sum_{\mu > \lambda} (\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \chi_\mu$ . Nach Aufgabe 29 ist außerdem  $(\varphi_\lambda, \chi_{(n)})_{S_n} = 1$ . Insbesondere ist  $\chi_{(n-1,1)} = \varphi_{(n-1,1)} - 1_{S_n}$ .

**Lemma 11.13.** Für jede Partition  $\lambda$  von  $n$  gilt  $\chi_{\lambda'} = \text{sgn} \cdot \chi_\lambda$ .

*Beweis.* Nach Aufgabe 6 ist  $\text{sgn} \cdot \chi_\lambda$  ein irreduzibler Bestandteil von  $\text{sgn} \cdot \varphi_\lambda = \psi_\lambda = \psi_{\lambda'}$  und von  $\text{sgn} \cdot \psi_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'}$ .  $\square$

**Beispiel 11.14.** Sei  $n = 5$ . Die Partitionen von 5 in absteigender Reihenfolge sind  $(5)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 1^2)$ ,  $(2^2, 1)$ ,  $(2, 1^3)$ ,  $(1^5)$ . Wegen Lemma 11.13 brauchen wir  $\varphi_\lambda$  nur für drei Partitionen zu berechnen:

$g$	$(1^5)$	$(2, 1^3)$	$(2^2, 1)$	$(3, 1^2)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$	$(5)$
$ S_5 : C_{S_5}(g) $	1	10	15	20	20	30	24
$\varphi_{(4,1)}$	5	3	1	2	.	1	.
$\varphi_{(3,2)}$	10	4	2	1	1	.	.
$\varphi_{(3,1^2)}$	20	6	.	2	.	.	.

Die zweite Zeile enthält dabei die Längen der Konjugationsklassen und Nullen werden durch Punkte gekennzeichnet. Nun ist  $\chi_{(5)} = 1_{S_5}$ . Aus Bemerkung 11.12 ergibt sich  $\chi_{(4,1)} = \varphi_{(4,1)} - 1_{S_5}$ . Weiter ist  $(\varphi_{(3,2)}, \chi_{(4,1)})_{S_5} = 1$  und  $\chi_{(3,2)} = \varphi_{(3,2)} - 1_{S_5} - \chi_{(4,1)}$ . Schließlich ist  $(\varphi_{(3,1^2)}, \chi_{(3,2)})_{S_5} = 1$  und  $(\varphi_{(3,1^2)}, \chi_{(4,1)})_{S_5} = 2$ . Also ist  $\chi_{(3,1^2)} = \varphi_{(3,1^2)} - 1_{S_5} - \chi_{(3,2)} - 2\chi_{(4,1)}$ .

$S_5$	$(1^5)$	$(2, 1^3)$	$(2^2, 1)$	$(3, 1^2)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$	$(5)$
$(5)$	1	1	1	1	1	1	1
$(4, 1)$	4	2	.	1	-1	.	-1
$(3, 2)$	5	1	1	-1	1	-1	.
$(3, 1^2)$	6	.	-2	.	.	.	1
$(2^2, 1)$	5	-1	1	-1	-1	1	.
$(2, 1^3)$	4	-2	.	1	1	.	-1
$(1^5)$	1	-1	1	1	-1	-1	1

**Bemerkung 11.15.**

- (i) Sei  $\lambda$  eine Partition von  $n$  mit Young-Diagramm  $Y$ . Für eine Box  $b := (i, j)$  von  $Y$  ist der *Haken*  $H(b)$  von  $b$  die Vereinigung der Boxen  $(i, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $\dots$  und der Boxen  $(i+1, j)$ ,  $(i+2, j)$ ,  $\dots$ . Sei  $h(b) := |H(b)| = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ . Wir können die  $h(b)$  in das Young-Diagramm schreiben, zum Beispiel:

7	5	2	1
4	2		
3	1		
1			

Es gilt die *Hakenformel*:

$$\chi_\lambda(1) = \frac{n!}{\prod_{b \text{ Box von } Y} h(b)}$$

(ohne Beweis). Für obiges Tableau ergibt sich  $\chi_\lambda(1) = 216$ .

- (ii) Entfernt man den Haken  $H(b)$  aus  $Y$ , so erhält man das Young-Diagramm einer Partition  $\lambda \setminus H(b)$  von  $n - h(b)$ . Weiterhin nennt man  $l(b) := \lambda'_j - i$  die *Beinlänge* von  $b$ . Sei nun  $x \in S_n$  vom Typ  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$  und  $y \in S_{n-\mu_k}$  vom Typ  $(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_l)$ . Dann gilt die *Murnaghan-Nakayama-Formel*

$$\chi_\lambda(x) = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y, \\ h(b)=\mu_k}} (-1)^{l(b)} \chi_{\lambda \setminus H(b)}(y)$$

(ohne Beweis). Im Fall  $\mu_k = n$  betrachtet man dabei  $\chi_{\lambda \setminus H(b)}$  als trivialen Charakter auf der trivialen Gruppe  $S_0 = \text{Sym}(\emptyset)$ . Für  $\mu_k = 1$  erhält man die *Verzweigungsregel*

$$(\chi_\lambda)_{S_{n-1}} = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y, \\ h(b)=1}} \chi_{\lambda \setminus H(b)}$$

(ohne Beweis).

- (iii) Im Folgenden werden wir  $\text{Irr}(A_n)$  aus  $\text{Irr}(S_n)$  konstruieren und dabei annehmen, dass  $\text{Irr}(S_n)$  gegeben ist. O. B. d. A. sei stets  $n \geq 3$ .
- (iv) Sei  $\sigma = (a_1, \dots, a_m) \in S_n$  ein Zyklus der Länge  $m$ . Dann ist  $\sigma = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_{m-1}, a_m)$  und  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-1}$ . Ist  $g \in S_n$  ein beliebiges Element vom Zyklentyp  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , so ist also  $\text{sgn}(g) = (-1)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_k - k} = (-1)^{n-k}$ .

**Satz 11.16.** *Sei  $g \in K \in \text{Cl}(A_n)$  ein Element vom Zyklentyp  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Genau dann ist  $K \notin \text{Cl}(S_n)$ , wenn die  $\lambda_i$  ungerade und paarweise verschieden sind. Gegebenenfalls ist  ${}^{(1,2)}K \in \text{Cl}(A_n)$  und  $K \dot{\cup} {}^{(1,2)}K \in \text{Cl}(S_n)$ .*

*Beweis.* Es gilt  $K \in \text{Cl}(S_n)$  genau dann, wenn  $|A_n : C_{A_n}(g)| = |K| = |S_n : C_{S_n}(g)|$ . Wegen  $|A_n : C_{A_n}(g)| = |A_n : A_n \cap C_{S_n}(g)| = |A_n C_{S_n}(g) : C_{S_n}(g)|$  ergibt sich

$$K \notin \text{Cl}(S_n) \iff C_{S_n}(g) \subseteq A_n.$$

Sei  $g = \sigma_1 \dots \sigma_k$  mit disjunkten Zyklen  $\sigma_i$  der Länge  $\lambda_i$ . Nehmen wir zunächst an, dass ein  $\lambda_i$  gerade ist. Dann ist  $\sigma_i \in C_{S_n}(g) \setminus A_n$ . Also können wir annehmen, dass alle  $\lambda_i$  ungerade sind. Setzen wir als Nächstes voraus, dass die  $\lambda_i$  nicht paarweise verschieden sind, also o. B. d. A.  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Wir schreiben  $\sigma_1 = (a_1, \dots, a_{\lambda_1})$  und  $\sigma_2 = (b_1, \dots, b_{\lambda_1})$ . Dann ist  $\tau := (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1}) \notin A_n$ . Außerdem ist  $\tau \sigma_1 \tau = \sigma_2$ ,  $\tau \sigma_2 \tau = \sigma_1$  und  $\tau \sigma_i \tau = \sigma_i$  für alle  $i \geq 3$ . Dies zeigt  $\tau \in C_{S_n}(g) \setminus A_n$ .

Seien nun umgekehrt die  $\lambda_i$  ungerade und paarweise verschieden. Wir berechnen  $|S_n : C_{S_n}(g)|$ , indem wir die Möglichkeiten für  $g$  zählen (d. h. die Elemente vom Zyklentyp  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ). Für die  $\lambda_1$  Elemente des Zyklus  $\sigma_1$  gibt es  $\frac{n!}{(n-\lambda_1)!}$  Möglichkeiten. Davon liefern allerdings je  $\lambda_1$  Möglichkeiten das gleiche Element. Also gibt es  $\frac{n!}{\lambda_1(n-\lambda_1)!}$  Möglichkeiten für  $\sigma_1$ . Analog gibt es danach noch  $\frac{(n-\lambda_1)!}{\lambda_2(n-\lambda_1-\lambda_2)!}$  Möglichkeiten für  $\sigma_2$  usw. Dies zeigt

$$|S_n : C_{S_n}(g)| = \frac{n!(n-\lambda_1)!(n-\lambda_1-\lambda_2)! \dots (n-\lambda_1-\dots-\lambda_{k-1})!}{\lambda_1 \dots \lambda_k (n-\lambda_1)!(n-\lambda_1-\lambda_2)! \dots \underbrace{(n-\lambda_1-\dots-\lambda_k)!}_{=0}} = \frac{n!}{\lambda_1 \dots \lambda_k}$$

und  $|C_{S_n}(g)| = \lambda_1 \dots \lambda_k$ . Offenbar ist  $\langle \sigma_1 \rangle \dots \langle \sigma_k \rangle \subseteq C_{S_n}(g)$  und  $|\langle \sigma_1 \rangle \dots \langle \sigma_k \rangle| = |\langle \sigma_1 \rangle| \dots |\langle \sigma_k \rangle| = \lambda_1 \dots \lambda_k$ . Also ist  $C_{S_n}(g) = \langle \sigma_1 \rangle \dots \langle \sigma_k \rangle \subseteq A_n$ . Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Sei nun  $K \notin \text{Cl}(S_n)$ . Wie üblich ist  ${}^{(1,2)}K \in \text{Cl}(A_n)$ . Sei  $K \subseteq \tilde{K} \in \text{Cl}(S_n)$ . Dann ist sicher  $K \cup {}^{(1,2)}K \subseteq \tilde{K}$ . Für jedes  $h \in \tilde{K}$  existiert umgekehrt ein  $x \in S_n$  mit  $h = xgx^{-1}$ . Ist  $x \in A_n$ , so ist  $h \in K$ . Anderenfalls ist  $(1,2)x \in A_n$  und  $h = (1,2)((1,2)xgx^{-1}(1,2))(1,2) \in {}^{(1,2)}K$ . Dies zeigt  $\tilde{K} = K \dot{\cup} {}^{(1,2)}K$ .  $\square$

**Beispiel 11.17.** Für  $n \geq 3$  gibt es stets ein  $K \in \text{Cl}(A_n)$  mit  $K \notin \text{Cl}(S_n)$ . Für ungerades  $n$  kann man nämlich Zyklentyp  $(n)$  in Satz 11.16 wählen und für gerades  $n$  Zyklentyp  $(n-1, 1)$ .

**Satz 11.18.** *Sei  $\chi := \chi_\lambda \in \text{Irr}(S_n)$  für eine Partition  $\lambda$  von  $n$ . Im Fall  $\lambda \neq \lambda'$  ist  $\chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)$  und im Fall  $\lambda = \lambda'$  ist  $\chi_{A_n} = \xi_\lambda + {}^{(1,2)}\xi_\lambda$  mit  $\xi_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$  und  $\xi_\lambda \neq {}^{(1,2)}\xi_\lambda$ . Auf diese Weise tritt jeder irreduzible Charakter von  $A_n$  auf.*

*Beweis.* Es gilt

$$(\chi, \chi)_{S_n} + (\chi, \text{sgn} \cdot \chi)_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi(g)^2 + \text{sgn}(g) \chi(g)^2 = \frac{2}{n!} \sum_{g \in A_n} \chi(g)^2 = (\chi_{A_n}, \chi_{A_n})_{A_n}.$$

Im Fall  $\lambda \neq \lambda'$  ist  $\text{sgn} \cdot \chi = \chi_{\lambda'} \neq \chi$  und  $(\chi_{A_n}, \chi_{A_n})_{A_n} = 1$ , d. h.  $\chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)$ .

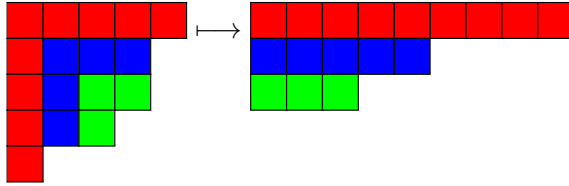
Sei nun  $\lambda = \lambda'$ . Dann ergibt sich  $(\chi_{A_n}, \chi_{A_n})_{A_n} = 2$  und  $\chi_{A_n}$  ist die Summe zweier verschiedener irreduzibler Charaktere von  $A_n$ . Aus Satz 4.11 folgt also  $\chi_{A_n} = \xi_\lambda + {}^{(1,2)}\xi_\lambda$  für ein  $\xi_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$ .

Sei schließlich  $\xi \in \text{Irr}(A_n)$  beliebig. Dann ist  $(\chi_{A_n}, \xi)_{A_n} = (\chi, \xi^{S_n})_{S_n} \neq 0$  für ein  $\chi \in \text{Irr}(S_n)$ . Also entsteht  $\xi$  auf obige Weise.  $\square$

**Bemerkung 11.19.** Wie üblich operiert  $\langle (1, 2) \rangle$  auf  $\text{Irr}(A_n)$  und auf  $\text{Cl}(A_n)$ . Nach Brauers Permutationslemma gibt es genau so viele Paare  ${}^{(1,2)}\xi_\lambda \neq \xi_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$  wie es Paare  ${}^{(1,2)}K \neq K \in \text{Cl}(A_n)$  gibt. Dies sieht man auch durch folgende Bijektion:

$$\Phi : \{\text{Partitionen } \lambda = \lambda'\} \longrightarrow \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \text{ mit } \lambda_i \text{ ungerade und paarweise verschiedenen}\},$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \longmapsto (2\lambda_1 - 1, 2\lambda_2 - 3, 2\lambda_3 - 5, \dots)$$



**Satz 11.20.** Sei  $\lambda = \lambda'$  eine Partition von  $n$ . Dann existiert genau eine Partition  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$  von  $n$  mit  $\chi_\lambda(g) \equiv 1 \pmod{2}$  für ein  $g \in S_n$  vom Zyklentyp  $\mu$ . Es gilt

$$\xi_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\chi_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \mu, \\ \frac{1}{2}\chi_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\mu_1 \dots \mu_k} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } g \text{ konjugiert,} \\ \frac{1}{2}\chi_\lambda(h) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\mu_1 \dots \mu_k} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } {}^{(1,2)}g \text{ konjugiert} \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von  $\xi_\lambda$ . Die Abbildung  $\Gamma : \lambda \rightarrow \mu$  ist eine Bijektion zwischen den Partitionen  $\lambda = \lambda'$  und den Partitionen  $\mu$  mit paarweise verschiedenen ungeraden Teilen.

*Beweis.* Wir argumentieren durch Induktion nach  $(n, \lambda)$ , wobei  $\lambda$  lexikografisch geordnet ist. O. B. d. A. sei  $n \geq 4$ .

**Fall 1:**  $\lambda < (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$ .

Sei  $\Phi(\lambda) = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ . Dann ist  $\eta_1 < n$  und nach Induktion kennt man die Charaktere  $\xi_1 := \xi_{\Gamma^{-1}(\eta_1)} \in \text{Irr}(A_{\eta_1})$  und  $\xi_2 := \xi_{\Gamma^{-1}(\eta_2, \dots, \eta_l)} \in \text{Irr}(A_{n-\eta_1})$ . Somit ist  $\xi_1 \xi_2 \in \text{Irr}(A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1})$ . Mittels  $A_{n-\eta_1} \cong \text{Alt}(\{\eta_1 + 1, \eta_1 + 2, \dots, n\})$  können wir  $A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$  als Untergruppe von  $A_n$  auffassen. Wir setzen

$$\theta := (\xi_1 \xi_2 - {}^{(1,2)}\xi_1 \xi_2)^{A_n}.$$

Sei  $\theta(h) \neq 0$  für ein  $h \in A_n$ .

**Behauptung:**  $h$  hat Zyklentyp  $\eta$ .

**Beweis:** Es existiert ein  $x \in A_n$  mit  $xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$ . Wir schreiben  $xhx^{-1} = (xhx^{-1})_1(xhx^{-1})_2$

mit  $(xhx^{-1})_1 \in A_{\eta_1}$  und  $(xhx^{-1})_2 \in A_{n-\eta_1}$ . Ist  $(xhx^{-1})_1$  kein  $\eta_1$ -Zyklus, so wäre nach Induktionsvoraussetzung  $\xi_1((xhx^{-1})_1) = {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1)$  und  $\theta(h) = 0$ . Wir können also annehmen, dass  $h_1$  ein  $\eta_1$ -Zyklus ist. Wegen  $\eta_1 > \eta_i$  für  $i \geq 2$  ist  $x \in S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1}$ . Nehmen wir als Nächstes an, dass  $h_2$  nicht Zyklentyp  $(\eta_2, \dots, \eta_l)$  hat. Im Fall  $\eta_2 = 1$  wäre  $l = 2$  und  $h_2 = 1$ , da die  $\eta_i$  paarweise verschieden sind. Dieser Widerspruch zeigt  $\eta_2 \neq 1$  und  $n - \eta_1 \geq 2$ . Nun hat auch  $(xhx^{-1})_2$  nicht Zyklentyp  $(\eta_2, \dots, \eta_l)$  und es folgt  $\xi_2((xhx^{-1})_2) = \xi_2(h)$  für alle  $x \in S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1}$ . Sei  $\zeta := (\eta_1 + 1, \eta_1 + 2)$ . Mit  $x$  durchläuft auch  $(1, 2)\zeta x$  die Menge  $A_n \cap (S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1})$ . Dabei gilt

$$\xi_1(((1, 2)\zeta xhx^{-1}\zeta(1, 2))_1) - \xi_1((\zeta xhx^{-1}\zeta)_1) = {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1) - \xi_1((xhx^{-1})_1).$$

Dies ergibt den Widerspruch

$$\theta(h) = \frac{\xi_2(h_2)}{|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|} \sum_{x \in A_n \cap (S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1})} (\xi_1((xhx^{-1})_1) - {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1)) = 0.$$

**Behauptung:**  $\theta = \tilde{\xi}_\lambda - {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda$  mit  $\tilde{\xi}_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$ .

**Beweis:** Im Fall  $\eta_2 = 1$  ist

$$\theta(h) = \frac{1}{|A_{\eta_1}|} \sum_{x \in A_{\eta_1}} \xi_1(xhx^{-1}) - {}^{(1,2)}\xi_1(xhx^{-1}) = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Das Vorzeichen hängt hierbei von der Wahl des Charakters  $\xi_1$  ab und wird im Folgenden unerheblich sein. Sei nun  $\eta_2 > 1$  und  $\chi_2 := \chi_{\Gamma^{-1}(\eta_2, \dots, \eta_l)} \in \text{Irr}(S_{n-\eta_1})$ . Die Summanden in  $\theta(h)$  treten in Paaren der Form

$$\pm \sqrt{(-1)^{\frac{\eta_1-1}{2}} \eta_1} \left( \frac{1}{2} \chi_2(h_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-\eta_1-(l-1)}{2}} \eta_2 \dots \eta_l} \right)$$

auf (ersetze  $x$  durch  $(1, 2)\zeta x$  wie oben). Wegen  $|A_n \cap (S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1})| = 2|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|$  folgt

$$\theta(h) = \pm 2 \frac{\sqrt{(-1)^{\frac{\eta_1-1}{2} + \frac{n-\eta_1-l+1}{2}} \eta_1 \dots \eta_l}}{2} = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l}.$$

Dies zeigt

$$(\theta, \theta)_{A_n} = \frac{2|A_n : C_{A_n}(h)|}{|A_n|} \eta_1 \dots \eta_l = 2.$$

Wegen  ${}^{(1,2)}\theta = -\theta$  existiert ein  $\tilde{\xi}_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$  mit  $\theta = \tilde{\xi}_\lambda - {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda$ .

**Behauptung:** Die Aussage gilt.

**Beweis:** Sei  $\tilde{\chi}_\lambda := \tilde{\xi}_\lambda^{S_n} \in \text{Irr}(S_n)$  (siehe Satz 4.13). Sei  $\tilde{h} \in A_n$  vom Zyklentyp  $\eta$ . Anhand der oben berechneten Werte für  $\theta$  folgt

$$\tilde{\xi}_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \eta, \\ \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } \tilde{h} \text{ konjugiert,} \\ \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) - \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } {}^{(1,2)}\tilde{h} \text{ konjugiert} \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von  $\tilde{\xi}_\lambda$ . Nach Definition verschwindet  $\tilde{\chi}_\lambda$  auf  $S_n \setminus A_n$ . Ist  $\tilde{\chi}_\lambda(h) \equiv 1 \pmod{2}$ , so ist  $h \in A_n$ , und  $\frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h)$  ist keine ganz-algebraische Zahl. Also muss dann  $h$  Zyklentyp  $\eta$  haben. Nehmen

wir indirekt  $\tilde{\chi}_\lambda(\tilde{h}) \equiv 0 \pmod{2}$  an. Mit  $\tilde{\xi}_\lambda(\tilde{h})$  ist dann auch  $\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l}$  ganz-algebraisch. Somit wäre auch

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1 \dots \eta_l \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$$

ganz-algebraisch. Dieser Widerspruch zeigt, dass  $\tilde{\chi}_\lambda$  für genau eine Konjugationsklasse von  $S_n$  ungerade Werte annimmt. Für verschiedene  $\lambda < (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$  erhält man offenbar auch verschiedene  $\tilde{\chi}_\lambda$ . Somit gilt die Behauptung des Satzes für alle Charaktere von  $S_n$  bis auf (möglicherweise) einen.

**Fall 2:**  $\lambda = (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$ .

Wegen  $\Phi(\lambda) = (n)$  ist  $n$  ungerade. Wir bezeichnen den „fehlenden“ Charakter mit  $\tilde{\chi}_\lambda \in \text{Irr}(S_n)$ . Wie üblich zerfällt  $(\tilde{\chi}_\lambda)_{A_n} = \tilde{\xi}_\lambda + {}^{(1,2)}\tilde{\xi}_\lambda$  mit  $\tilde{\xi}_\lambda \in \text{Irr}(A_n)$ . Sei  $h \in K \in \text{Cl}(A_n)$  vom Zyklentyp  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ . Ist  $K \in \text{Cl}(S_n)$ , so ist  $\xi_\lambda(h) = \xi_\lambda({}^{(1,2)}h) = {}^{(1,2)}\xi_\lambda(h) = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)$ . Wir können nach Satz 11.16 also annehmen, dass die  $\eta_i$  paarweise verschieden und ungerade sind.

**Fall 2.1:**  $\eta \neq (n)$ .

Sei  $\tau := \Phi^{-1}(\eta) \neq \lambda$ . Nach Fall 1 gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_\tau(h)\overline{\tilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)} + \tilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)\overline{\tilde{\xi}_\tau(h)} &= \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\tau(h)^2 - \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l, \\ \tilde{\xi}_\tau(h)\overline{\tilde{\xi}_\tau(h)} + \tilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)\overline{\tilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)} &= \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\tau(h)^2 + \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l. \end{aligned}$$

Sei  $a := \tilde{\xi}_\lambda(h)$  und  $b := \tilde{\xi}_\lambda({}^{(1,2)}h)$ . Dann ist  $a + b = \tilde{\chi}_\lambda(h)$ . Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi({}^{(1,2)}h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + \left( \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{2} \right) - \frac{\eta_1 \dots \eta_l}{2} + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}|C_{S_n}(h)| - \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 = a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |C_{A_n}(h)| &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi(h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + \left( \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{2} \right) + \frac{\eta_1 \dots \eta_l}{2} + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}|C_{S_n}(h)| + \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 = |C_{A_n}(h)| + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2. \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt  $a\bar{b} + b\bar{a} = a\bar{a} + b\bar{b}$  und  $(a - b)(\bar{b} - \bar{a}) = 0$ . Dies zeigt  $a = b = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)$ .

**Fall 2.2:**  $\eta = \Phi(\lambda)$ .

Dann ist  $\xi_\tau(h) = \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\tau(h)$  für alle  $\tau \neq \lambda$  nach Fall 1. Die zweite Orthogonalitätsrelation liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi({}^{(1,2)}h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + \left( \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{2} \right) + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\eta_1 \dots \eta_l + a\bar{b} + b\bar{a} - \frac{1}{2}\tilde{\chi}_\lambda(h)^2 \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned}
|C_{A_n}(h)| &= \sum_{\xi \in \text{Irr}(A_n)} \xi(h) \overline{\xi(h)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \in \text{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + \left( \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}(S_n), \\ \chi_{A_n} \notin \text{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{2} \right) + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{\tilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \eta_1 \dots \eta_l + a\bar{a} + b\bar{b} - \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h)^2.
\end{aligned}$$

Also ist  $\eta_1 \dots \eta_l = a(\bar{a} - \bar{b}) + b(\bar{b} - \bar{a}) = (a - b)(\bar{a} - \bar{b})$ . Sei  $h := (a_1^1, \dots, a_{\eta_1}^1)(a_1^2, \dots, a_{\eta_2}^2) \dots (a_1^l, \dots, a_{\eta_l}^l)$  und

$$x = \prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^{\frac{\eta_i-1}{2}} (a_{j+1}^i, a_{\eta_i-j+1}^i).$$

Dann ist  $xhx^{-1} = h^{-1}$ . Im Fall  $n - l \equiv 0 \pmod{4}$  ist  $\text{sgn}(x) = (-1)^{\frac{\eta_1-1}{2} + \dots + \frac{\eta_l-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-l}{2}} = 1$ . Dann sind also  $h$  und  $h^{-1}$  in  $A_n$  konjugiert und  $a, b \in \mathbb{R}$  (vgl. Beispiel 6.15). Es ergibt sich  $a - b = \pm \sqrt{\eta_1 \dots \eta_l}$  und  $a = \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2} \sqrt{\eta_1 \dots \eta_l}$ . Sei schließlich  $n - l \equiv 2 \pmod{4}$ . Hier ist  $\text{sgn}(x) = -1$ . Gäbe es ein  $y \in A_n$  mit  $yhy^{-1} = h^{-1}$ , so wäre  $x \in xC_{S_n}(h) = yC_{S_n}(h) \subseteq A_n$  (siehe Beweis von Satz 11.16). Also sind  $h$  und  $h^{-1}$  nicht in  $A_n$  konjugiert und  $b = \bar{a}$ . Somit ist  $a - \bar{a} = \sqrt{-\eta_1 \dots \eta_l}$  und  $a = \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2} \sqrt{-\eta_1 \dots \eta_l}$  bei geeigneter Wahl von  $\tilde{\chi}_\lambda$ . Für ein festes  $\tilde{h} \in A_n$  vom Zyklentyp  $\eta$  gilt also

$$\tilde{\chi}_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \eta, \\ \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } \tilde{h} \text{ konjugiert,} \\ \frac{1}{2} \tilde{\chi}_\lambda(h) - \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}} \eta_1 \dots \eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } {}^{(1,2)}\tilde{h} \text{ konjugiert.} \end{cases}$$

Zusammen mit Fall 1 folgt auch, dass  $\Gamma$  eine Bijektion ist.  $\square$

**Beispiel 11.21.** Für  $n = 5$  erhält man aus Beispiel 11.14 die Charaktertafel von  $A_5$  (vgl. Aufgabe 8):

$A_5$	$(1^5)$	$(2^2, 1)$	$(3, 1^2)$	$(5)_1$	$(5)_2$
$(5)$	1	1	1	1	1
$(4, 1)$	4	.	1	-1	-1
$(3, 2)$	5	1	-1	.	.
$(3, 1^2)_1$	3	-1	.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$(3, 1^2)_2$	3	-1	.	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**Bemerkung 11.22.** Sei  $\lambda = \lambda'$  mit Young-Diagramm  $Y$  und  $\Phi(\lambda) = \mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ . Sei  $x \in S_n$  vom Zyklentyp  $\mu$  und sei  $y \in S_{n-\mu_1}$  vom Zyklentyp  $(\mu_2, \dots, \mu_k)$ . Wir zeigen  $\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{n-k}{2}}$  durch Induktion nach  $k$ . Nach der Murnaghan-Nakayama-Formel gilt

$$\chi_\lambda(x) = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y, \\ h(b)=\mu_1}} (-1)^{l(b)} \chi_{\lambda \setminus H(b)}(y) = (-1)^{l(1,1)} \chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}} \chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y).$$

Im Fall  $k = 1$  ist  $\chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y) = 1 = \mu_1$  und  $\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ . Sei nun  $k \geq 2$  und die Aussage für  $k - 1$  bereits bewiesen. Dann gilt

$$\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}} \chi_{\lambda \setminus H(1,1)}(y) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2} + \frac{n-\mu_1-k+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-k}{2}}.$$

Insbesondere ist  $\chi_\lambda(x)$  ungerade und in Satz 11.20 gilt  $\Gamma = \Phi$ . Die im Beweis konstruierten Charaktere  $\tilde{\chi}_\lambda$  stimmen also mit  $\chi_\lambda$  überein. Außerdem kennt man somit die einzigen nicht-ganzzahligen Werte in der Charaktertafel von  $A_n$  explizit.

## 12 Aufgaben

**Aufgabe 1** (2 Punkte). Bestimmen Sie die irreduziblen Darstellungen einer endlichen zyklischen Gruppe.

**Aufgabe 2** (2+2+2 Punkte). Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Basis  $\{v_g : g \in G\}$ . Für  $g \in G$  sei  $\Delta(g)$  die lineare Abbildung auf  $V$ , die  $v_h$  auf  $v_{gh}$  abbildet für  $h \in G$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine treue Darstellung von  $G$  ist.
  - (ii) Berechnen Sie den Charakter von  $\Delta$ .
  - (iii) Zeigen Sie, dass  $\Delta$  für  $G \neq 1$  nicht irreduzibel ist.
- (Man nennt  $\Delta$  die *reguläre* Darstellung von  $G$ .)

**Aufgabe 3** (2+2+2+2+2+2 Punkte). Sei  $n \geq 3$  und

$$\sigma := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\zeta := e^{2\pi i/n}$ . Man nennt  $D_{2n} := \langle \sigma, \tau \rangle$  *Diedergruppe*.

- (i) Zeigen Sie:  $|D_{2n}| = 2n$ .
- (ii) Zeigen Sie, dass ein irreduzibler Charakter  $\chi$  von  $D_{2n}$  mit  $\chi(\sigma) = 1$  und  $\chi(\tau) = -1$  existiert.
- (iii) Zeigen Sie, dass für gerades  $n$  irreduzible Charaktere  $\chi$  und  $\psi$  von  $D_{2n}$  mit  $\chi(\sigma) = \psi(\sigma) = -1$  und  $\chi(\tau) = -\psi(\tau) = 1$  existieren.
- (iv) Zeigen Sie, dass  $D_{2n}$  eine Darstellung  $\Delta_r$  mit  $\Delta_r(\sigma) = \sigma^r$  und  $\Delta_r(\tau) = \tau$  für  $r \in \mathbb{Z}$  besitzt.
- (v) Zeigen Sie, dass  $\Delta_r$  für  $r = 1, \dots, (n-1)/2$  (bzw.  $r = 1, \dots, (n-2)/2$ ) irreduzibel ist, falls  $n$  ungerade (bzw. gerade) ist.
- (vi) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem für die Ähnlichkeitsklassen irreduzibler Darstellungen von  $D_{2n}$ .

**Aufgabe 4** (2 Punkte). Sei  $\Delta$  eine Matrixdarstellung einer endlichen Gruppe  $G$ , und sei  $g \in G$ . Zeigen Sie, dass  $\Delta(g)$  diagonalisierbar ist.

*Hinweis:* Man kann die Jordansche Normalform oder Satz 1.10 der Vorlesung benutzen.

**Aufgabe 5** (2+2+2 Punkte). Sei  $\Delta$  eine Matrixdarstellung von  $G$  mit Charakter  $\chi$ .

- (i) Zeigen Sie, dass auch  $\overline{\Delta}$  mit  $\overline{\Delta}(g) := \overline{\Delta(g)}$  für  $g \in G$  eine Matrixdarstellung von  $G$  ist. Dabei ist  $\overline{\Delta(g)}$  das komplex Konjugierte von  $\Delta(g)$ .
  - (ii)  $\Delta$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $\overline{\Delta}$  irreduzibel ist.
  - (iii)  $\overline{\Delta}$  hat Charakter  $\overline{\chi}$  mit  $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$  für  $g \in G$ .
- Hinweis:* Man kann Aufgabe 4 verwenden.

**Aufgabe 6** (2 Punkte). Seien  $\chi, \psi \in \text{Irr}(G)$  mit  $\chi(1) = 1$ . Zeigen Sie:  $\chi\psi \in \text{Irr}(G)$ .

**Aufgabe 7** (2+2+2+2 Punkte). Seien  $G, H$  endliche, abelsche Gruppen. Zeigen Sie:

- (i)  $\widehat{G} := \text{Irr}(G)$  ist eine abelsche Gruppe bzgl. Multiplikation. (Man nennt  $\widehat{G}$  Charaktergruppe von  $G$ .)
- (ii)  $\widehat{\widehat{G}} \cong G$   
*Hinweis:* Denken Sie an den Bidualraum. Verwenden Sie nicht (iv).
- (iii)  $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$ .
- (iv)  $\widehat{\widehat{G}} \cong G$ .

**Aufgabe 8** (2 Punkte). Bestimmen Sie die Charaktertafel von  $A_5$ .

**Aufgabe 9** (2+2+2 Punkte). Zeigen Sie:

- (i) Für Charaktere  $\chi, \psi$  von  $G$  gilt:  $\text{Ker}(\chi + \psi) = \text{Ker}(\chi) \cap \text{Ker}(\psi)$ .
- (ii) Jeder Normalteiler von  $G$  ist der Kern eines Charakters.
- (iii)  $\bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G)} \text{Ker}(\chi) = 1$ .

**Aufgabe 10** (2 Punkte). Finden Sie ein normiertes, ganzzahliges Polynom mit Nullstelle  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ .

**Aufgabe 11** (2 Punkte). Sei  $N \trianglelefteq G$  und  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . Zeigen Sie, dass  $(\chi_N)^G = \chi \rho$  gilt, wobei  $\rho$  die Inflation des regulären Charakters von  $G/N$  ist.

**Aufgabe 12** (3 Punkte). Sei  $A$  eine abelsche Untergruppe von  $G$ , und sei  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . Zeigen Sie:  $\chi(1) \leq |G : A|$ .

**Aufgabe 13** (3 Punkte). Berechnen Sie die Eigenwerte einer Permutationsmatrix. (Eine Permutationsmatrix enthält in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur Nullen.)

**Aufgabe 14** (3 Punkte). Sei  $H \leq G$  und  $\Delta$  eine Darstellung von  $H$  mit Charakter  $\chi$ . Sei  $t_1, \dots, t_m$  ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen von  $H$  nach  $G$ . Für  $g \in G$  sei  $\dot{\Delta}(g) := \Delta(g)$ , falls  $g \in H$  und  $0 \in \mathbb{Z}^{\chi(1) \times \chi(1)}$  sonst. Für  $g \in G$  definieren wir die Blockmatrix

$$\Delta^G(g) := \begin{pmatrix} \dot{\Delta}(t_1^{-1}gt_1) & \cdots & \dot{\Delta}(t_1^{-1}gt_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\Delta}(t_m^{-1}gt_1) & \cdots & \dot{\Delta}(t_m^{-1}gt_m) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $\Delta^G$  eine Darstellung von  $G$  mit Charakter  $\chi^G$  ist.

**Aufgabe 15** (3 Punkte). Sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $|K| > 2$ . Für  $a \in K^\times$  und  $b \in K$  sei  $f_{a,b} : K \rightarrow K$ ,  $x \mapsto ax + b$ . Zeigen Sie, dass

$$\text{Aff}(1, K) := \{f_{a,b} : a \in K^\times, b \in K\} \leq \text{Sym}(K)$$

eine Frobeniusgruppe ist.

**Aufgabe 16** (2 Punkte). Sei  $G$  eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement  $H$ . Zeigen Sie:  $\text{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$  (d. h.  $H$  ist eine *Hallgruppe* von  $G$ ).

**Aufgabe 17** (4 Punkte). Zeigen Sie, dass Untergruppen und Faktorgruppen von  $p$ -elementaren (bzw.  $p$ -quasielementaren) Gruppen wieder  $p$ -elementar (bzw.  $p$ -quasielementar) sind.

**Aufgabe 18** (2 Punkte). Sei  $P$  eine endliche  $p$ -Gruppe. Zeigen Sie, dass  $P$  genau dann einen treuen, irreduziblen Charakter besitzt, wenn  $Z(P)$  zyklisch ist.

**Aufgabe 19** (3 Punkte). Sei  $G = \langle g \rangle \cong C_3$  und  $\Delta : G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Q})$  mit  $\Delta(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass  $\Delta$  eine irreduzible  $\mathbb{Q}$ -Darstellung ist. Zeigen Sie auch, dass  $\Delta$  aufgefasst als  $(\mathbb{C}-)$ Darstellung reduzibel ist.

**Aufgabe 20** (2+2+2 Punkte). Sei  $G := \text{SL}(2, 3)$ . Zeigen Sie:

(i)  $|G| = 24$ .

(ii)  $G/Z(G) \cong A_4$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie die Operation von  $G$  auf der Menge der eindimensionalen Untervektorräumen von  $\mathbb{F}_3^2$ .

(iii)  $G$  ist keine M-Gruppe. (Nicht jede auflösbare Gruppe ist also eine M-Gruppe.)

**Aufgabe 21** (3 Punkte). Sei  $G$  eine Gruppe ungerader Ordnung. Zeigen Sie:  $k(G) \equiv |G| \pmod{16}$ .  
*Hinweis:* Betrachten Sie  $\bar{\chi} = \chi \in \text{Irr}(G)$ .

**Aufgabe 22** (3 Punkte). Konstruieren Sie irreduzible Charaktere mit Frobenius-Schur-Indikator 0, 1 und  $-1$ .

**Aufgabe 23** (10 Punkte). Entscheiden Sie, welche der folgenden Gruppeneigenschaften man an Hand der Charaktertafel von  $G$  ablesen kann:

(i)  $|G|$ ,

(ii) Kommutativität,

(iii) die Längen der Konjugationsklassen,

(iv) Einfachheit,

(v) Normalteiler und deren Ordnung,

(vi) Isomorphietyp von  $G/G'$ ,

(vii) Isomorphietyp von  $Z(G)$ ,

(viii) Auflösbarkeit,

(ix) Isomorphietyp (von  $G$ ),

(x) Auflösbarkeitsstufe, d. h.  $\min\{n \in \mathbb{N} : G^{(n)} = 1\}$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie Google.<sup>3</sup>

Zusatz: Nilpotenz, Nilpotenzklasse,  $F(G)$  (Fittinggruppe),  $\Phi(G)$  (Frattinigruppe), ... (soweit Begriffe bekannt).

**Aufgabe 24** (5 Punkte). Gegeben sei die Charaktertafel von  $G$ :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	$\bar{\beta}$	$-\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\beta$	$-\beta$	$\beta$	$\beta$	1	-1	1
1	-1	1	1	$\beta$	$-\beta$	$\beta$	$\beta$	$\bar{\beta}$	$-\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	1	-1	1
1	1	1	1	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\beta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$	1	1	1
1	1	1	1	$\beta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	1	1	1
2	.	$\alpha$	$\alpha'$	2	.	$\alpha$	$\alpha'$	2	.	$\alpha$	$\alpha'$	2	.	$\alpha$
2	.	$\alpha'$	$\alpha$	2	.	$\alpha'$	$\alpha$	2	.	$\alpha'$	$\alpha$	2	.	$\alpha'$
2	.	$\alpha$	$\alpha'$	$2\bar{\beta}$	.	$\gamma'$	$\gamma$	$2\beta$	.	$\bar{\gamma}'$	$\bar{\gamma}$	2	.	$\alpha$
2	.	$\alpha$	$\alpha'$	$2\beta$	.	$\bar{\gamma}'$	$\bar{\gamma}$	$2\bar{\beta}$	.	$\gamma'$	$\gamma$	2	.	$\alpha$
2	.	$\alpha'$	$\alpha$	$2\bar{\beta}$	.	$\gamma$	$\gamma'$	$2\beta$	.	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}'$	2	.	$\alpha'$
2	.	$\alpha'$	$\alpha$	$2\beta$	.	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}'$	$2\bar{\beta}$	.	$\gamma$	$\gamma'$	2	.	$\alpha$
3	-3	3	3	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	1	-1
3	3	3	3	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	-1
6	.	$3\alpha$	$3\alpha'$	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	$-\alpha$
6	.	$3\alpha'$	$3\alpha$	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	$-\alpha'$

mit

$$\begin{aligned} . &= 0, & \alpha &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, & \alpha' &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ \beta &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, & \gamma &= e^{2\pi i/15} + e^{8\pi i/15}, & \gamma' &= e^{14\pi i/15} + e^{-4\pi i/15}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie so viele Eigenschaften von  $G$  wie möglich.

**Aufgabe 25** (2 Punkte). Zeigen Sie, dass eine einfache Gruppe keinen irreduziblen Charakter vom Grad 2 besitzt.

**Aufgabe 26** (2 Punkte). Sei  $G$  eine einfache Gruppe mit einer Involution  $x$ , sodass  $C_G(x)$  zyklisch ist. Bestimmen Sie  $G$ .

**Aufgabe 27** (2+2 Punkte). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

- (i) Zwei Elemente in  $S_n$  sind genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zyklentyp haben.
- (ii) Die Charaktertafel von  $S_n$  ist ganzzahlig.

*Hinweis:* Verwenden Sie Galoistheorie.

**Aufgabe 28** (2 Punkte). Sei  $G = G' \leq \text{GL}(2, \mathbb{C})$  und  $A \neq 1$  ein abelscher Normalteiler von  $G$ . Zeigen Sie  $A = Z(G) \cong C_2$ .

---

<sup>3</sup>Für das Schreiben von Abschlussarbeiten muss auch Recherchieren geübt werden :-)

**Aufgabe 29** (2+2+2+2+2+2+2 Punkte). Sei  $f : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$  eine Gruppenoperation auf einer endlichen, nichtleeren Menge  $\Omega$ . Zeigen Sie:

- (i) Es gilt  $\text{Sym}(\Omega) \cong S_{|\Omega|}$ . Im Folgenden können wir also  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  annehmen.
- (ii) Die Abbildung  $F : \text{Sym}(\Omega) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}), \pi \mapsto (\delta_{i\pi(j)})_{i,j=1}^n$  ist ein Monomorphismus. Insbesondere ist  $\Delta := F \circ f : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  eine Darstellung von  $G$ . (Man nennt  $\Delta$  *Permutationsdarstellung*.)
- (iii) Für den Charakter  $\chi$  von  $\Delta$  gilt  $\chi(g) := |\{\omega \in \Omega : {}^g\omega = \omega\}|$  für  $g \in G$ . (Man nennt  $\chi$  *Permutationscharakter*.)
- (iv) Sei  $\omega_1, \dots, \omega_m$  ein Repräsentantensystem für die Bahnen von  $f$ . Dann ist

$$\chi = \sum_{i=1}^m 1_{G_{\omega_i}}^G,$$

wobei  $G_{\omega} := \{g \in G : {}^g\omega = \omega\}$  der *Stabilisator* von  $\omega \in \Omega$  in  $G$  ist.

- (v) Es gilt  $m = (1_G, \chi)_G$ . Insbesondere ist  $\chi - 1_G$  ein Charakter von  $G$ , falls  $|\Omega| > 1$ .
- (vi) Sind  $H_1, \dots, H_k$  beliebige Untergruppen von  $G$ , so ist auch

$$\sum_{i=1}^k 1_{H_i}^G$$

ein Permutationscharakter von  $G$ .

- (vii) Die Menge der Permutationscharaktere von  $G$  ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.

**Aufgabe 30** (2 Punkte). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  eine Untergruppe besitzt, die zu  $S_{n+1}$  isomorph ist.

*Hinweis:* Man kann Aufgabe 29 verwenden.

## Anhang: Charaktertafeln

Die Charaktertafeln von  $S_3, S_4, S_5$  und  $A_3, A_4, A_5$  wurden bereits berechnet.

$S_6$	$(1^6)$	$(2, 1^4)$	$(2^2, 1^2)$	$(2^3)$	$(3, 1^3)$	$(3, 2, 1)$	$(3^2)$	$(4, 1^2)$	$(4, 2)$	$(5, 1)$	$(6)$
$(6)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(5, 1)$	5	3	1	-1	2	.	-1	1	-1	.	-1
$(4, 2)$	9	3	1	3	.	.	.	-1	1	-1	.
$(4, 1^2)$	10	2	-2	-2	1	-1	1	.	.	.	1
$(3^2)$	5	1	1	-3	-1	1	2	-1	-1	.	.
$(3, 2, 1)$	16	.	.	.	-2	.	-2	.	.	1	.
$(3, 1^3)$	10	-2	-2	2	1	1	1	.	.	.	-1
$(2^3)$	5	-1	1	3	-1	-1	2	1	-1	.	.
$(2^2, 1^2)$	9	-3	1	-3	.	.	.	1	1	-1	.
$(2, 1^4)$	5	-3	1	1	2	.	-1	-1	-1	.	1
$(1^6)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1

$A_6$	$(1^6)$	$(2^2, 1^2)$	$(3, 1^3)$	$(3^2)$	$(4, 2)$	$(5, 1)_1$	$(5, 1)_2$
$(6)$	1	1	1	1	1	1	1
$(5, 1)$	5	1	2	-1	-1	.	.
$(4, 2)$	9	1	.	.	1	-1	-1
$(4, 1^2)$	10	-2	1	1	.	.	.
$(3^2)$	5	1	-1	2	-1	.	.
$(3, 2, 1)_2$	8	.	-1	-1	.	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$(3, 2, 1)_1$	8	.	-1	-1	.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$S_7$	$(1^7)$	$(2, 1^5)$	$(2^2, 1^3)$	$(2^3, 1)$	$(3, 1^4)$	$(3, 2, 1^2)$	$(3, 2^2)$	$(3^2, 1)$	$(4, 1^3)$	$(4, 2, 1)$	$(4, 3)$	$(5, 1^2)$	$(5, 2)$	$(6, 1)$	$(7)$
$(7)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(6, 1)$	6	4	2	.	3	1	-1	.	2	.	-1	1	-1	.	-1
$(5, 2)$	14	6	2	2	2	.	2	-1	.	.	.	-1	1	-1	.
$(5, 1^2)$	15	5	-1	-3	3	-1	-1	.	1	-1	1	.	.	.	1
$(4, 3)$	14	4	2	.	-1	1	-1	2	-2	.	1	-1	-1	.	.
$(4, 2, 1)$	35	5	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	.	.	1	.
$(4, 1^3)$	20	.	-4	.	2	.	2	2	.	.	.	.	.	.	-1
$(3^2, 1)$	21	1	1	-3	-3	1	1	.	-1	-1	-1	1	1	.	.
$(3, 2^2)$	21	-1	1	3	-3	-1	1	.	1	-1	1	1	-1	.	.
$(3, 2, 1^2)$	35	-5	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	.	.	-1	.
$(3, 1^4)$	15	-5	-1	3	3	1	-1	.	-1	-1	-1	.	.	.	1
$(2^3, 1)$	14	-4	2	.	-1	-1	-1	2	2	.	-1	-1	1	.	.
$(2^2, 1^3)$	14	-6	2	-2	2	.	2	-1	.	.	.	-1	-1	1	.
$(2, 1^5)$	6	-4	2	.	3	-1	-1	.	-2	.	1	1	1	.	-1
$(1^7)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1

$A_7$	$(1^7)$	$(2^2, 1^3)$	$(3, 1^4)$	$(3, 2^2)$	$(3^2, 1)$	$(4, 2, 1)$	$(5, 1^2)$	$(7)_1$	$(7)_2$
$(7)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(6, 1)$	6	2	3	-1	.	.	1	-1	-1
$(5, 2)$	14	2	2	2	-1	.	-1	.	.
$(5, 1^2)$	15	-1	3	-1	.	-1	.	1	1
$(4, 3)$	14	2	-1	-1	2	.	-1	.	.
$(4, 2, 1)$	35	-1	-1	-1	-1	1	.	.	.
$(4, 1^3)_1$	10	-2	1	1	1	.	.	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$
$(4, 1^3)_2$	10	-2	1	1	1	.	.	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$
$(3^2, 1)$	21	1	-3	1	.	-1	1	.	.

$A_8$	$(1^8)$	$(2^2, 1^4)$	$(2^4)$	$(3, 1^5)$	$(3, 2^2, 1)$	$(3^2, 1^2)$	$(4, 2, 1^2)$	$(4^2)$	$(5, 1^3)$	$(6, 2)$	$(5, 3)_1$	$(5, 3)_2$	$(7, 1)_1$	$(7, 1)_2$
$(8)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(7, 1)$	7	3	-1	4	.	1	1	-1	2	-1	-1	-1	.	.
$(6, 2)$	20	4	4	5	1	-1	.	.	.	.	.	1	-1	-1
$(6, 1^2)$	21	1	-3	6	-2	.	-1	1	1	1	1	.	.	.
$(5, 3)$	28	4	-4	1	1	1	.	.	-2	1	1	-1	.	.
$(5, 2, 1)$	64	.	.	4	.	-2	.	.	-1	-1	-1	.	1	1
$(5, 1^3)$	35	-5	3	5	1	2	-1	-1	.	.	.	.	.	.
$(4^2)$	14	2	6	-1	-1	2	.	2	-1	-1	-1	.	.	.
$(4, 3, 1)$	70	2	-2	-5	-1	1	.	-2	.	.	.	1	.	.
$(4, 2^2)$	56	.	8	-4	.	-1	.	.	1	1	1	-1	.	.
$(4, 2, 1^2)_1$	45	-3	-3	.	.	.	1	1	.	.	.	.	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$
$(4, 2, 1^2)_2$	45	-3	-3	.	.	.	1	1	.	.	.	.	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$
$(3^2, 2)_1$	21	1	-3	-3	1	.	-1	1	1	$\frac{-1+\sqrt{-15}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-15}}{2}$	.	.	.
$(3^2, 2)_2$	21	1	-3	-3	1	.	-1	1	1	$\frac{-1-\sqrt{-15}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-15}}{2}$	.	.	.

Sei  $q$  eine Primzahlpotenz,  $x, y \in \mathbb{F}_q^\times$  und  $z \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ . Jedes Element in  $\text{GL}(2, q)$  ist zu einer der folgenden Matrizen konjugiert:  $a_x := \text{diag}(x, x)$ ,  $b_x := \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ ,  $c_{x,y} := \text{diag}(x, y)$  mit  $x \neq y$  und  $d_z$  mit

Eigenwerten  $z, z^q$ . Dabei gilt  $c_{x,y} \sim c_{y,x}$  und  $d_z \sim d_{z^q}$ . Insbesondere ist

$$2q - 2 + \frac{(q-1)(q-2)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} = q^2 - 1$$

die Anzahl der Konjugationsklassen von  $\text{GL}(2, q)$ . Seien  $\alpha, \beta \in \text{Irr}(\mathbb{F}_q)$  und  $\gamma \in \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^2})$  mit  $\alpha \neq \beta$  und  $\gamma^q \neq \gamma$ . Die Charaktertafel von  $\text{GL}(2, q)$  ist

	$\#$ $ {}^G g $	$q-1$ 1	$q-1$ $q^2-1$	$(q-1)(q-2)/2$ $q^2+q$	$q(q-1)/2$ $q^2-q$
$\text{GL}(2, q)$	$\#$	$a_x$	$b_x$	$c_{x,y}$	$d_z$
$\chi_\alpha$	$q-1$	$\alpha(x)^2$	$\alpha(x)^2$	$\alpha(x)\alpha(y)$	$\alpha(z^{q+1})$
$\psi_\alpha$	$q-1$	$q\alpha(x)^2$	0	$\alpha(x)\alpha(y)$	$-\alpha(z^{q+1})$
$\rho_{\alpha,\beta}$	$(q-1)(q-2)/2$	$(q+1)\alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x)$	0
$\tau_\gamma$	$q(q-1)/2$	$(q-1)\gamma(x)$	$-\gamma(x)$	0	$-\gamma(z) - \gamma(z)^q$

Es gilt  $|\text{SL}(2, q)| = (q-1)q(q+1)$ . Es existieren zyklische Untergruppen  $X, Y \leq G$  der Ordnung  $q-1$  bzw.  $q+1$  mit  $X \cap Y = Z = \langle -1_2 \rangle = Z(G)$ . Sei  $X_0 := X \setminus Z$  und  $Y_0 := Y \setminus Z$ . Die  $p$ -Sylowgruppen sind elementarabelsch der Ordnung  $q$ .

Sei zunächst  $q = p^n$  ungerade. Bis auf Konjugation gibt es zwei Elemente  $a, b$  der Ordnung  $p$ . Seien  $\alpha, \alpha_0 \in \text{Irr}(X) \setminus \{1_X\}$  und  $\beta, \beta_0 \in \text{Irr}(Y) \setminus \{1_Y\}$  mit  $\alpha^2 \neq \alpha_0^2 = 1 = \beta_0^2 \neq \beta^2$ . Die Charaktertafeln sind:

- $q \equiv 1 \pmod{4}$ :

$g$	1	-1	$x \in X_0$	$y \in Y_0$	$\pm a$	$\pm b$
$ C_G(g) $	1	1	$q^2 + q$	$q^2 - q$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$
$1_G$	1	1	1	1	1	1
$\rho$	$q$	$q$	1	-1	0	0
$\eta_1$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{1+\sqrt{q}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{q}}{2}$
$\eta_1^*$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{1-\sqrt{q}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{q}}{2}$
$\eta_2$	$\frac{q-1}{2}$	$-\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{\mp 1 + \sqrt{q}}{2}$	$\frac{\mp 1 - \sqrt{q}}{2}$
$\eta_2^*$	$\frac{q-1}{2}$	$-\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{\mp 1 - \sqrt{q}}{2}$	$\frac{\mp 1 + \sqrt{q}}{2}$
$\chi_\alpha$	$q+1$	$\alpha(-1)(q+1)$	$\alpha(x) + \alpha(x)^{-1}$	0	$\alpha(\pm 1)$	$\alpha(\pm 1)$
$\psi_\beta$	$q-1$	$\beta(-1)(q-1)$	0	$-\beta(y) - \beta(y)^{-1}$	$-\beta(\pm 1)$	$-\beta(\pm 1)$

- $q \equiv -1 \pmod{4}$ :

$g$	1	-1	$x \in X_0$	$y \in Y_0$	$\pm a$	$\pm b$
$ C_G(g) $	1	1	$q^2 + q$	$q^2 - q$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$
$1_G$	1	1	1	1	1	1
$\rho$	$q$	$q$	1	-1	0	0
$\eta_1$	$\frac{q+1}{2}$	$-\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{\mp 1 + \sqrt{-q}}{2}$	$\frac{\mp 1 - \sqrt{-q}}{2}$
$\bar{\eta}_1$	$\frac{q+1}{2}$	$-\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{\mp 1 - \sqrt{-q}}{2}$	$\frac{\mp 1 + \sqrt{-q}}{2}$
$\eta_2$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{-1 + \sqrt{-q}}{2}$	$\frac{-1 - \sqrt{-q}}{2}$
$\bar{\eta}_2$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{-1 - \sqrt{-q}}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{-q}}{2}$
$\chi_\alpha$	$q+1$	$\alpha(-1)(q+1)$	$\alpha(x) + \alpha(x)^{-1}$	0	$\alpha(\pm 1)$	$\alpha(\pm 1)$
$\psi_\beta$	$q-1$	$\beta(-1)(q-1)$	0	$-\beta(y) - \beta(y)^{-1}$	$-\beta(\pm 1)$	$-\beta(\pm 1)$



- $p = 2$ : Hier ist  $Z = 1$  und es gibt es bis auf Konjugation nur ein Element  $a$  der Ordnung 2.

$g$	1	$a$	$x \in X_0$	$y \in Y_0$
$ C_G(g) $	1	$q$	$q - 1$	$q + 1$
$1_G$	1	1	1	1
$\rho$	$q$	0	1	-1
$\chi_\alpha$	$q + 1$	1	$\alpha(x) + \alpha(x)^{-1}$	0
$\psi_\beta$	$q - 1$	-1	0	$-\beta(y) - \beta(y)^{-1}$

Dabei gilt  $\chi_\alpha = \chi_{\bar{\alpha}}$  und  $\psi_\beta = \psi_{\bar{\beta}}$ .

# Stichwortverzeichnis

## Symbole

$\|A\|$ , 43  
 $(\chi, \psi)_G$ , 7  
 $1_G$ , 3  
 ${}^\alpha\Delta$ , 30  
 ${}^\alpha\chi$ , 30  
 $CF(G)$ , 6  
 $C_G(g)$ , 6  
 $Cl(G)$ , 6  
 $C_n$ , 11  
 $\Delta \oplus \Gamma$ , 3  
 $\Delta_H$ , 3  
 $\Delta \otimes \Gamma$ , 10  
 $G'$ , 12  
 $G^{(i)}$ , 31  
 ${}^g\omega$ , 23  
 ${}^g\varphi$ , 19  
 $H \backslash G/K$ , 25  
 $Irr(G)$ , 6  
 $Irr(G|\varphi)$ , 19  
 $k(G)$ , 9  
 $\text{Ker}(\chi)$ , 13  
 $\lambda'$ , 49  
 $N_G(H)$ , 19  
 $\nu_n(\chi)$ , 32  
 $\omega_\chi(C)$ , 9  
 $\varphi^G$ , 17  
 $\varphi_H$ , 17  
 $\mathbb{Q}_n$ , 46  
 $\text{sgn}$ , 3  
 $\theta_n(g)$ , 32  
 $U(n, \mathbb{C})$ , 43  
 $x_p$ , 36  
 $x_\pi$ , 36  
 $Z(\chi)$ , 13  
 $\det \Delta$ , 6

## A

Artin, 29

## B

Bestandteil  
     irreduzibler, 10  
     Vielfachheit, 10  
 Blichfeldt, 47  
 Brauer, 30, 42  
 Brauer-Burnside, 49  
 Brauer-Dade, 36  
 Brauer-Fowler, 34  
 Brauer-Suzuki, 39  
 Brauers Induktionssatz, 28  
 Brauers Permutationslemma, 23  
 Burnside, 16, 42

Burnside-Algorithmus, 14  
 Burnside's Verlagerungssatz, 40

## C

Charakter, 6  
     algebraisch konjugiert, 31  
     Grad, 6  
     irreduzibler, 6  
     konjugiert, 19  
     linearer, 6  
      $p$ -rational, 46  
     treuer, 6  
     trivialer, 6  
     verallgemeinerter, 10  
     virtueller, 10  
     Zentrum, 13

Charaktergruppe, 59

Charaktertafel, 10

$A_4$ , 13  
 $A_5$ , 57  
 abelsche Gruppe, 11  
 $C_2 \times C_2$ , 12  
 $C_n$ , 11  
 $D_{2n}$ , 58  
 $S_4$ , 22  
 $S_5$ , 52

Clifford-Korrespondenz, 20

## D

Dade, 39

Darstellung, 3

Grad, 3  
 irreduzibel, 4  
 reduzibel, 4  
 reguläre, 58  
 treue, 3  
 triviale, 3  
 ähnlich, 4

Deflation, 3

$\Delta$ -invariant, 4

Diedergruppe, 58

Dixon-Schneider-Algorithmus, 14

Doppelnebenklassen, 25

## E

Exponent, 30

## F

Frattini Argument, 47  
 Frobenius, 24, 35, 40  
 Frobenius-Reziprozität, 18  
 Frobenius-Young, 51  
 Frobeniusgruppe, 23  
 Frobeniuskern, 25

Frobeniuskomplement, 23  
Frobenius-Schur-Indikator, 33

## G

Gallagher, 21  
ganz-algebraisch, 15  
Gruppenoperation, 23

## H

Haken, 52  
Hakenformel, 52  
Hallgruppe, 45

## I

Induktion, 17  
Inflation, 3  
Involution, 34  
Itô, 20

## J

Jordan, 44

## K

$K$ -Darstellung, 29  
Klassenfunktion, 6  
Klassenmultiplikationskonstante, 8  
Kommutator, 12  
Kommutatorgruppe, 12  
Konjugationsklasse, 6  
Kronecker-Produkt, 10

## M

Mackey, 25  
Maschke, 4  
Matrixdarstellung, 3  
    triviale, 3  
M-Gruppe, 31  
monomial, 31  
Murnaghan-Nakayama-Formel, 52

## N

normales Komplement, 23  
Normalisator, 19

## O

Orthogonalitätsrelation  
    erste, 7  
    zweite, 9

## P

Partition, 49  
 $p$ -Faktor, 36  
 $\pi$ -Element, 36  
 $\pi$ -Faktor, 36  
 $\pi$ -Gruppe, 36

## S

Satz von der Fokalgruppe, 41

Schur-Relationen, 7  
Schurs Lemma, 5  
Solomon, 26

## T

Taketa, 32  
Taunt, 22  
Trägheitsgruppe, 19

## U

unitäre Gruppe, 43

## V

Verzweigungsindex, 20  
Verzweigungsregel, 52

## W

Wielandt, 39, 48

## Y

Young-Diagramm, 49  
    entgegengesetztes, 49  
Young-Tableau, 49  
Young-Untergruppe, 50

## Z

Zentralisator, 6