Introducción teórico-matemática a los problemas de decisión estática bajo incertidumbre

Este documento presenta una **introducción formal** a la formulación y análisis de **problemas de decisión estática bajo incertidumbre**. Su objetivo es exponer los elementos esenciales — definiciones, ecuaciones y enfoques heurísticos — que permiten mapear un problema real a este marco teórico, proporcionando también la **intuición** necesaria para su aplicación práctica.

La exposición se asume para lectores con base en teoría de la probabilidad y teoría de la decisión, pero que necesiten un **recorrido conceptual** que integre los componentes clave de la **incertidumbre**, la **información parcial** (o "proxy") y el **razonamiento heurístico**.

---

1. Fundamentos de los problemas de decisión bajo incertidumbre

Proceso de Abstracción de Problemas

Nivel 1: Mundo Real

Características:

- Complejidad total del problema
- Múltiples variables interactuando
- Ruido e información irrelevante
- Restricciones prácticas

Nivel 2: Modelo Conceptual

Elementos:

- Variables relevantes identificadas
- Relaciones principales establecidas
- Objetivos clarificados
- Restricciones importantes

Nivel 3: Modelo Matemático

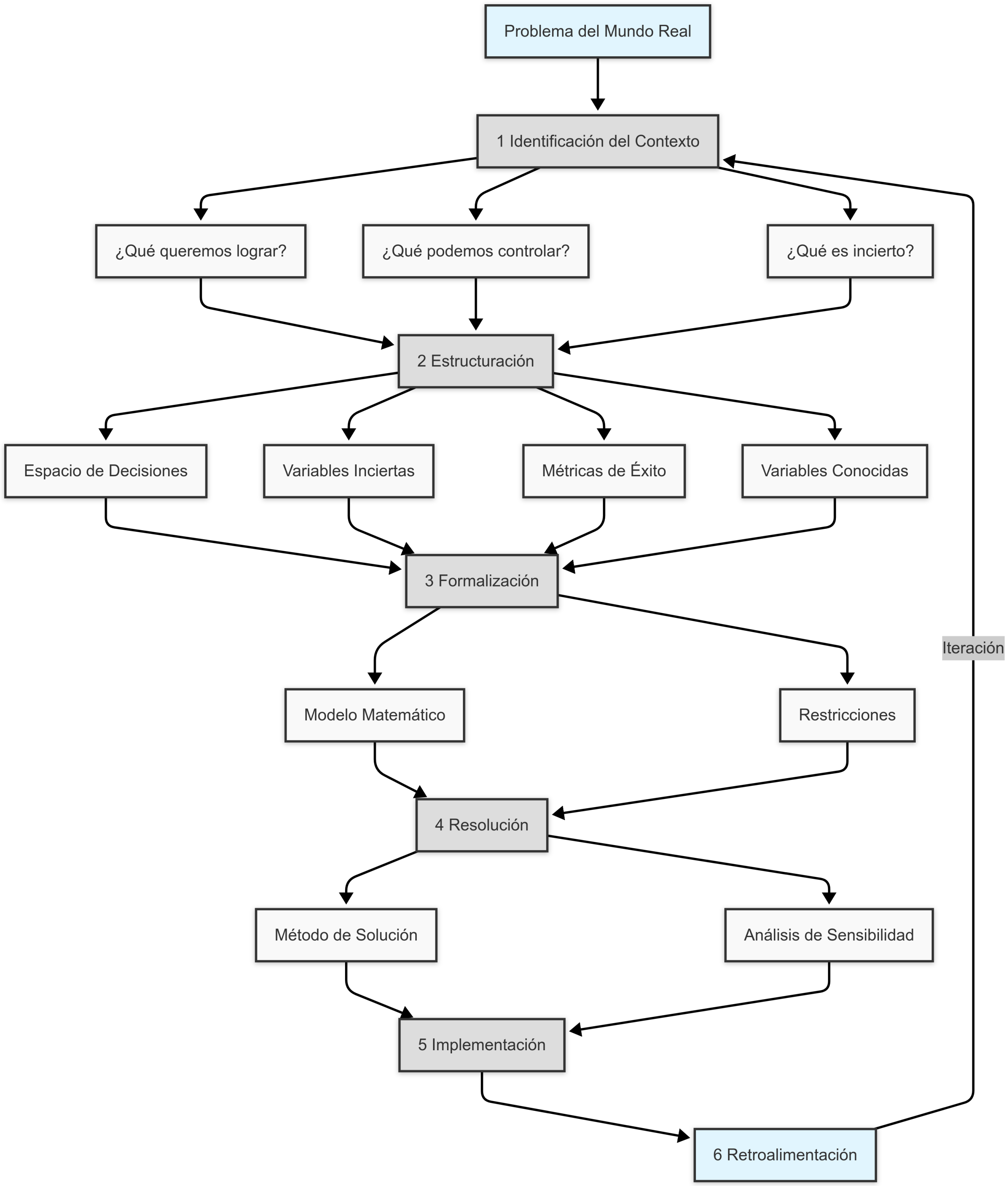
Componentes:

- Espacio de estados Ω bien definido
- Conjunto de decisiones D
- Funciones de utilidad/costo
- Distribuciones de probabilidad

Nivel 4: Modelo Computacional

Implementación:

- Algoritmos de solución
- Estructuras de datos
- Métodos numéricos
- Criterios de convergencia



PROF

1.1 Definición básica

En un **problema de decisión estática** bajo incertidumbre, un **decisor** (o **agente**) debe **elegir** una acción (o un conjunto de acciones) **antes** de conocer con certeza el estado del mundo que afectará el resultado. Formulemos estos elementos:

- Ω: **Espacio de estados** o **estados de la naturaleza**. Cada $\omega \in \Omega$ representa una configuración posible del mundo.
- D: **Espacio de decisiones**. Cada $d \in D$ es una acción o estrategia completa que el agente puede tomar.

- $\mathcal{X}(\omega, d)$: **Resultado** (o **outcome**) resultante de la decisión d cuando el estado del mundo es ω. A veces se modela como un **pago/beneficio** (o "payoff"), otras veces como un **costo** o **utilidad**.

El decisor generalmente no sabe **a priori** cuál es ω, pero dispone de un **modelo probabilístico** $p(\omega)$ que indica la probabilidad (o densidad) de cada estado. Suponemos que:

$$
\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1
$$

(o la integral se iguala a 1, en el caso continuo).

1.2 Función de utilidad o métricas de evaluación

Para evaluar las decisiones, suele usarse una **función de utilidad** $U(\omega, d)$ o, alternativamente, una **función de pérdidas** o **ganancias**. En muchos casos, se define:

$$
U(\omega, d) = u\bigl(\mathcal{X}(\omega, d)\bigr)
$$

donde u es una transformación (posiblemente el "valor monetario" o alguna función de preferencia).

Valor esperado de la utilidad

En la teoría de la decisión clásica, el decisor busca **maximizar** (o minimizar) la **esperanza** de su utilidad (o costo). Así, el **criterio de Valor Esperado (VE)** se expresa como:

$$
\mathbb{E}[U(d)] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)U(\omega, d)
$$

(En caso continuo, se reemplaza la suma por la integral respectiva). La **decisión óptima** se define como:

PROF

$$
d^* = \arg\max_{d \in D} \mathbb{E}[U(d)]
$$

1.3 Decisión estática vs. dinámica

- **Estática**: El agente escoge su acción completa **antes** de observar la realización de ω. (La información disponible antes de la decisión es la misma para todo el horizonte del problema).
- **Dinámica**: Existen decisiones secuenciales, donde el agente puede ir actualizando su información y tomando nuevas decisiones sobre la marcha.

En este documento, nos centraremos en el **caso estático**.

---

2. Incertidumbre e información parcial

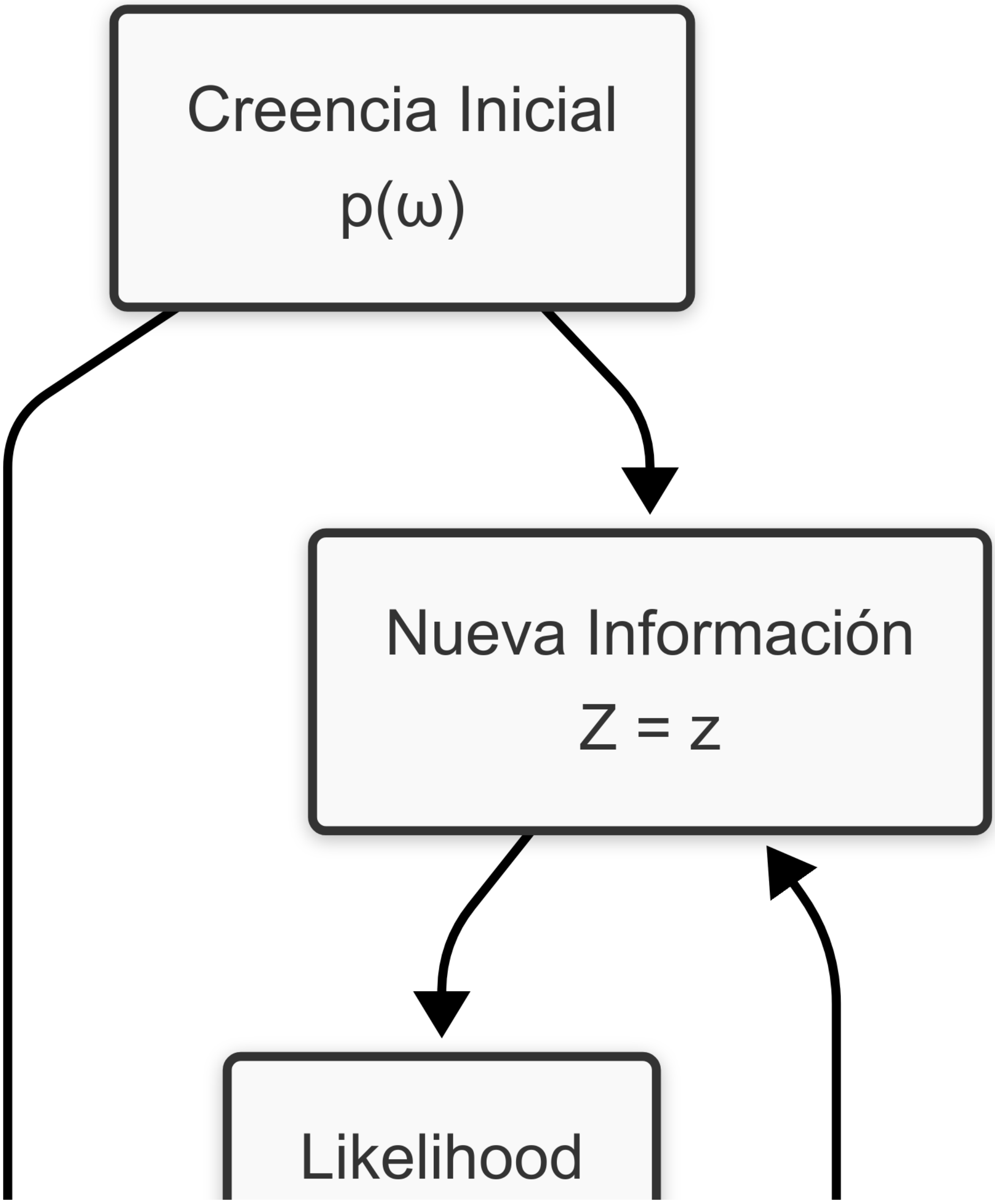
En muchos problemas, el decisor no observa ω **directamente**, sino que recibe **información parcial**, a menudo ruidosa o incompleta, acerca del verdadero estado. Llamemos a esta información un **"proxy"** o un **vector de observaciones** Z.

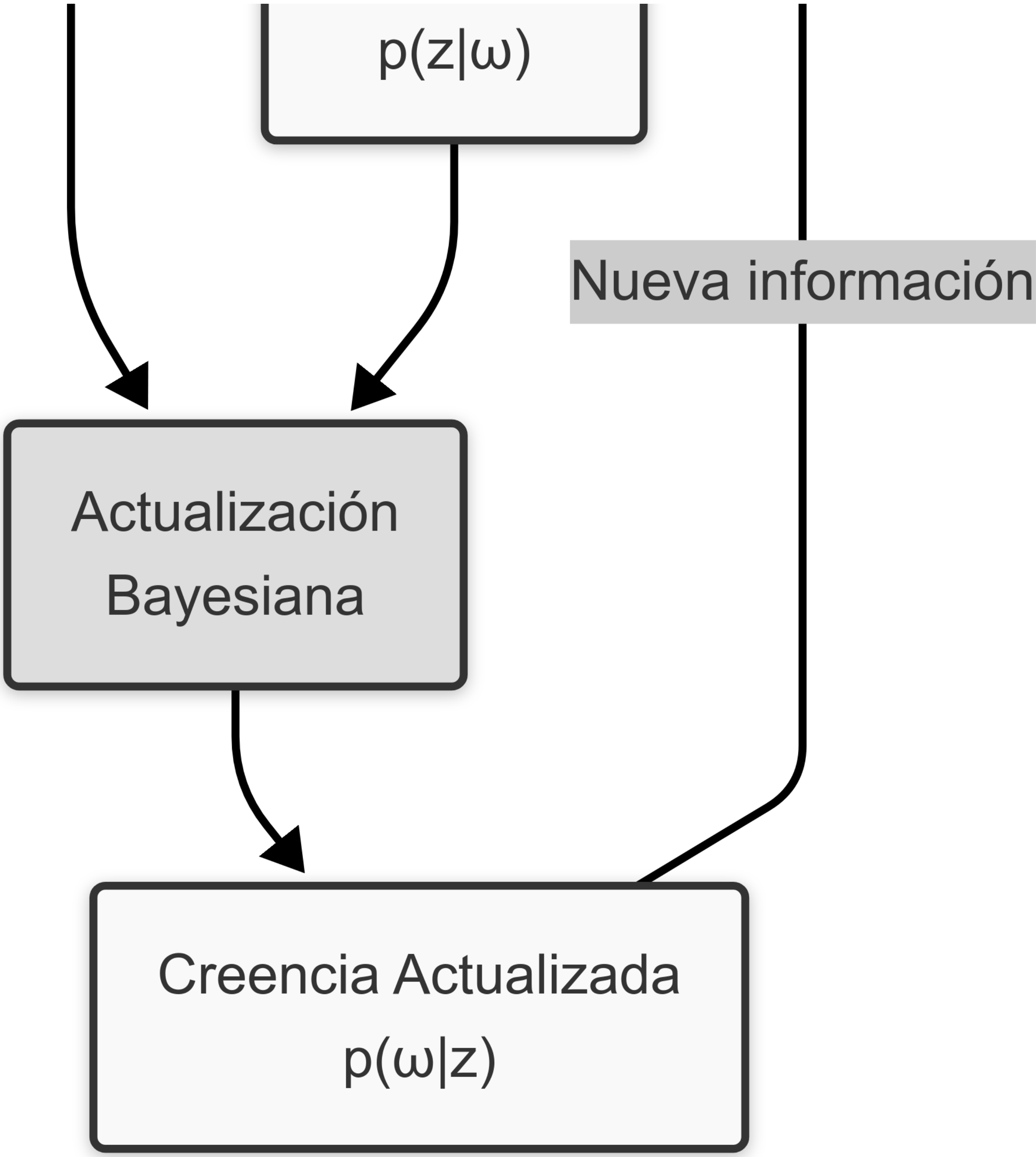
2.1 Variables aleatorias y distribución condicional

Sea Z una variable (o conjunto de variables) aleatoria(s) con la distribución $p(z \mid \omega)$. Al obtener el valor observado z, el decisor puede actualizar su creencia sobre ω usando la **regla de Bayes**:

$$
p(\omega \mid z) = \frac{p(z \mid \omega)p(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} p(z \mid \omega')p(\omega')}
$$

En muchos problemas prácticos, **no** se dispone de $p(z \mid \omega)$ exacta, sino que se recurre a **estimaciones**, **modelos simplificados** o **correlaciones empíricas**.





PROF

2.2 Formulación de un problema con información parcial

El decisor recibe $Z = z$ y luego **selecciona** d. En la versión **estática** pura, puede ocurrir que:

- El decisor **no pueda** observar z en el momento de decidir (o lo observa pero la acción no puede cambiar).
- O bien el decisor observa z y, **sin más interacciones posteriores**, elige d.

En cualquier caso, la **estrategia** puede definirse como una función δ que asocia cada valor posible de z a una decisión $\delta(z)$. Esta visión se generaliza fácilmente al marco de la decisión estática con "observaciones previas".

---

3. Mapeo de problemas reales a esta formulación

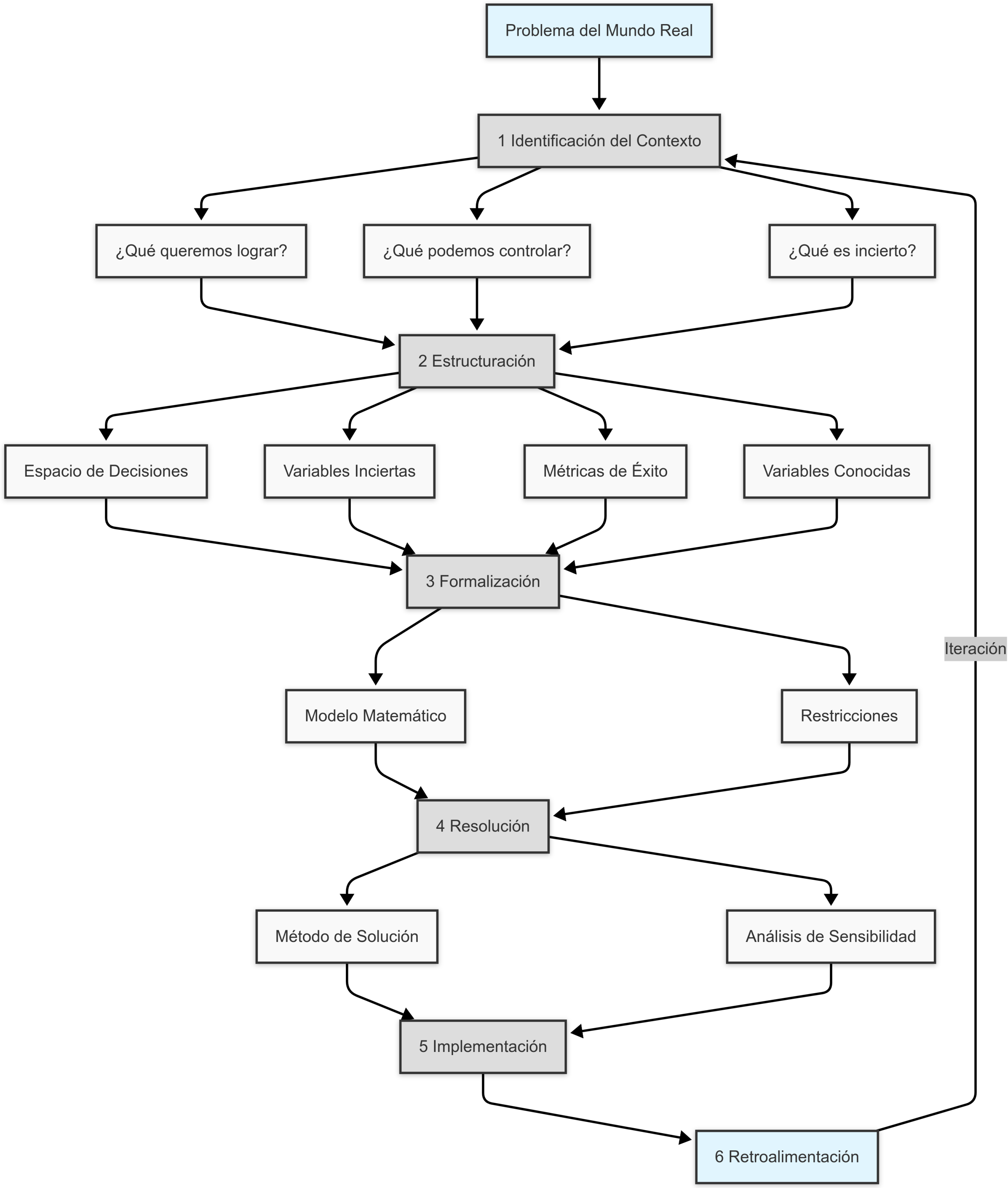
Para "ver" un problema real como un **problema de decisión estática** bajo incertidumbre:

1. **Identificar las decisiones** (D): ¿Qué conjunto de acciones estratégicas se tienen disponibles?
2. **Modelar el estado de la naturaleza** (Ω): ¿Cuáles son las circunstancias exógenas (incertidumbre) relevantes?
3. **Definir la función de utilidad (o costo)**: ¿Cómo valorar cada outcome? ¿Cuáles criterios se priorizan (tiempo, riesgo, costos, etc.)?
4. **Establecer el modelo probabilístico**:
   - ¿Cómo se distribuyen los estados ω?
   - ¿Qué información parcial/proxy existe (variables Z)?
   - ¿Cómo se relaciona Z con ω? (p.ej. $p(z \mid \omega)$ estimado o supuesto).
5. **Evaluar** las posibles decisiones con la esperanza de la utilidad o un criterio multicriterio.

---

4. Heurísticas y enfoques aproximados

En muchas situaciones reales, la complejidad hace que sea **impracticable** obtener la solución óptima bajo el criterio de valor esperado de utilidad. Además, los datos disponibles para estimar $p(\omega)$ o $p(z \mid \omega)$ pueden ser **muy limitados** o ruidosos



PROF

. En estos casos, se utilizan **heurísticas** o **reglas de dedo** que aproximan el proceso de decisión.

4.1 Heurísticas de elección de decisión

1. **Máximo verosímil** ("most likely state"):

   - Estimar cuál ω es más probable dado $Z=z$ y tomar la decisión óptima suponiendo que ese es el estado real.

     $$
     \omega_{\text{ML}}(z) = \arg\max_{\omega} p(\omega \mid z)
     $$

    - Limitación: ignora la incertidumbre residual sobre el resto de estados.

2. **Valor Esperado Simplificado**:

    - Asumir que las posibles divergencias de ω respecto a la más probable son poco relevantes, y calcular la utilidad esperada de forma agregada pero con un modelo simplificado (tal vez ignorando correlaciones).

3. **Reglas de umbrales**:

    - Basadas en correlaciones directas entre Z y ciertos outcomes, estableciendo que si z supera un cierto umbral (o combina ciertos valores), entonces se elige d_A; de lo contrario, se elige d_B.

4. **Minimax** o **Maximin**:

    - Seleccionar d que **maximice** la utilidad mínima posible (o minimice el máximo costo). Se ignoran probabilidades, priorizando robustez ante un "peor caso" plausible.

4.2 Heurísticas de inferencia con datos escasos

- **Frecuencias empíricas**: Usar conteos y correlaciones directas a partir de datos limitados:
  $
  \hat{p}(\omega \mid z) \approx \frac{\text{# de observaciones con }(\omega, z)}{\text{# total de observaciones con }z}
  $
- **Suavizado (smoothing)**: Añadir pseudo-cuentas (Dirichlet, Laplace) para evitar probabilidades nulas en muestras pequeñas.
- **Expert-based**: Incorporar conocimiento experto o "best guesses" cuando los datos son insuficientes.

---

5. Proceso sistemático de diseño de un problema de decisión estática

PROF

Cuando enfrentamos un **problema real** y queremos **diseñar** (o "mapear") un modelo de decisión estática bajo incertidumbre:

1. **Recolección de información**:

    - Identificar las **variables de interés** (incertidumbre principal).
    - Determinar **qué observaciones** o "proxy" pueden estar disponibles.
    - Definir los **factores** que determinan la **utilidad** o **pérdida**.

2. **Abstracción y simplificación**:

    - Delimitar un conjunto **manejable** de **estados** Ω.
    - Establecer el conjunto de **decisiones** realistas D.
    - Reducir la complejidad de $p(\omega)$ y $p(z \mid \omega)$ con suposiciones (e.g. independencia, distribuciones paramétricas, etc.).

3. **Formulación matemática**:

   - Especificar la **función de utilidad** $U(\omega, d)$ o un **vector de métricas** si es un problema multicriterio.
   - Incorporar la **probabilidad** $p(\omega \mid z)$ si la acción puede depender de z.

4. **Búsqueda de la solución**:

   - Aplicar el **criterio** de decisión apropiado (valor esperado, maximin, etc.).
   - Emplear **heurísticas** cuando el espacio de decisiones o la estimación de probabilidades sea muy grande o incierta.

5. **Validación y ajuste**:

   - Verificar si el modelo se ajusta a la realidad o si las simplificaciones resultan en decisiones poco robustas.
   - Iterar si es posible.

---

6. Ejemplo ilustrativo (genérico)

Para hacer más concreto el proceso, supongamos un escenario **abstracto**:

- **Decisiones**: $D = {d_1, d_2, d_3}$.
- **Estados**: $\Omega = {\omega_1, \omega_2, \omega_3}$.
- **Utilidad**:
  $$
  U(\omega_i, d_j) = u_{ij}
  \quad\text{para } i,j \in {1,2,3}
  $$
- **Distribución a priori**: $p(\omega_1) = 0.4,; p(\omega_2) = 0.3,; p(\omega_3)=0.3$

Supongamos, además, un **proxy** Z que puede tomar valores ${z_a, z_b}$. La regla bayesiana (o un modelo heurístico) nos permite estimar:
$$
p(\omega_i \mid z_a),
\quad
p(\omega_i \mid z_b)
$$

PROF

El decisor, una vez observa $Z=z_a$, elige $d^*(z_a)$. Similarmente para z_b. Se evalúa la utilidad esperada:

$$
\mathbb{E}[U(d \mid z_a)] = \sum_{i=1}^3 p(\omega_i \mid z_a)U(\omega_i, d)
$$

Si la decisión **depende** de Z, definimos una **política** δ tal que:
$
\delta(z_a) = d_j,\quad

$$
\delta(z_b) = d_k
$$

La **utilidad esperada global** de la política δ (antes de observar Z) se calcula ponderando la probabilidad de cada valor de Z:

$$
\mathbb{E}[U(\delta)] = \sum_{z \in {z_a, z_b}} p(z)\Bigl[\sum_{i=1}^3 p(\omega_i \mid z)U\bigl(\omega_i, \delta(z)\bigr)\Bigr]
$$

La **política óptima** δ^* sería la que maximiza esta esperanza.

---

7. Conclusiones y perspectivas

La **toma de decisiones estática bajo incertidumbre** es un marco fundamental para modelar y **resolver** problemas donde:

1. El decisor **no** puede cambiar su acción tras observar la realización de ω (o bien no tiene un proceso iterativo).
2. Existen datos o información incompleta (proxy) que se pueden utilizar para **inferir probabilidades** sobre los estados.
3. La incertidumbre se gestiona usando una combinación de **teoría de la probabilidad** (idealmente Bayes) y **heurísticas** (cuando el modelo es complejo o los datos son escasos).

La clave está en la **abstracción** adecuada del problema:

- Definir con cuidado la **utilidad** o las **métricas** que valoran el outcome.
- Entender cómo las **observaciones** (proxy) se relacionan con la **incertidumbre** (estados).
- Emplear métodos de **optimización** basados en el **valor esperado** o criterios alternos (p.ej. maximin) según la preferencia de riesgo.
- Incorporar **heurísticas** cuando sea difícil o costoso computar la solución exacta o ajustar un modelo probabilístico complejo.

Este tipo de abordaje es agnóstico a la naturaleza específica del problema (podría tratarse de logística, ingeniería, gestión de riesgos, etc.), siempre que podamos identificar los estados inciertos, las decisiones, la información parcial y la manera de valorarlas. Con esta guía, el lector puede reconocer la estructura subyacente en problemas reales y traducirlos a un problema de decisión estática bajo incertidumbre, para luego aplicar las herramientas y heurísticas aquí descritas.

Bibliografia

Raiffa, H. & Schlaifer, R. (1961). Applied Statistical Decision Theory.
Berger, J. O. (1985). Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis.
Keeney, R. L. & Raiffa, H. (1976). Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs