Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Métodos Numéricos para la Ingeniería y Ciencias

Tarea 1
Integración numérica

PROFESOR
Valentino González

NOMBRE ALUMNO
Braulio Sánchez Ibáñez

AUXILIAR
Felipe Pesce

1.- El archivo $sun_AMO.dat$ contiene el espectro del Sol, medido justo afuera de nuestra atmósfera, en unidades de energia por unidad de tiempo por unidad de area por unidad de longitud de onda. Lea el archivo y plotee el espectro del Sol (es decir, flujo vs. longitud de onda).

Primero se lee el archivo con la rutina numpy.loadtxt y se asigna a la variable a, dando origen a un arreglo de 1697x2, donde la primera columna representa la longitud de onda (en $[nm]$) y la segunda, los valores del flujo espectral (en $[Wm^{-2}nm^{-1}]$) asociados a cada λ.

Se construye el vector de longitudes de onda como l=a[:,0] y el de flujo como f=a[:,1], y posteriormente se grafican. Como para valores muy grandes de λ el flujo es muy pequeño, se graficarán los datos del intervalo $\lambda \in [119{,}5, 1330]$ nanómetros, de modo que el gráfico muestre la zona de interés entre el infrarrojo cercano y el ultravioleta cercano, que es donde el Sol emite casi el 95 % de la radiación total.

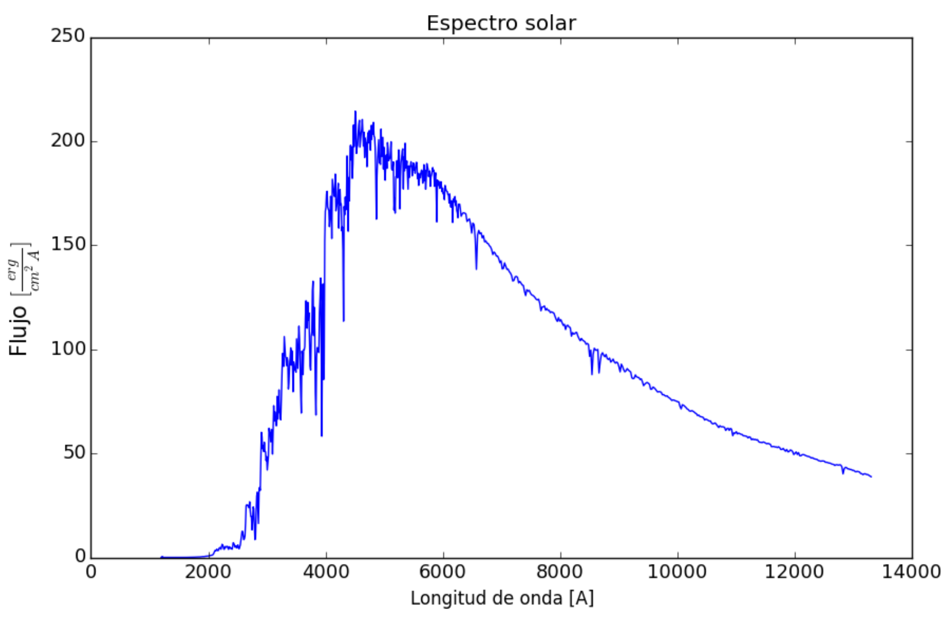

Figura 1: Espectro solar

2.- Elija un método apropiado para integrar el espectro en longitud de onda y calcule la luminosidad total del Sol (energía por unidad de tiempo total). Se pide que escriba su propio algoritmo para llevar a cabo la integración, en el futuro usaremos librerías de libre disposición.

Para integrar la curva se utilizará el método del trapecio, en donde el área bajo la curva se divide en n trapecios. El intervalo de integración $[a, b]$ se divide en n intervalos, donde el intervalo i-ésimo es $[x_i - x_{i-1}]$, $i = 1 \ldots n$. El área del i-ésimo trapecio será, entonces $dA_i = (x_i - x_{i-1})\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$. El área bajo la curva será simplemente la sumatoria

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

Primero se construye el arreglo de datos mediante la rutina numpy.loadtext, utilizando esta vez todos los valores que aparecen en el archivo. Se crea los vectores longitud de onda y flujo mediante lon=dat[:,0] y flu=dat[:,1], respectivamente. Mediante una recursión for se implemeta el método y se obtiene el valor del área, que para este caso corresponde al flujo de radiación recibido desde el Sol, en unidades de Watts sobre metro cuadrado.

$$F = 1366{,}091\left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Para la luminosidad del Sol, se multiplica este flujo por el área de la esfera de radio $R = 1[UA] = 1{,}496 \cdot 10^{11}[m]$, dando como resultado

$$L = 3{,}842 \cdot 10^{23}[kW]$$

Este valor experimental es muy similar al encontrado en la literatura $L_O = 3{,}846 \cdot 10^{23}[kW]$.

3.- La radiación de un cuerpo negro, en unidades de energía por unidad de tiempo, por unidad de área, por unidad de longitud de onda; está dada por la función de Planck:

$$B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

La potencia irradiada por un cuerpo negro se obtiene al integrar la función de Planck sobre todos los valores posibles de la longitud de onda. Con el cambio de variables $\lambda = \frac{hc}{xkT}$, $d\lambda = -\frac{hc}{x^2kT}dx$, esta integral se reduce a

$$P = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx$$

Para poder integrar esta integral impropia, se hace el cambio $x = \tan(y)$, $dx = \sec^2(y)dy$, quedando

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^3(y)\sec^2(y)}{e^{\tan(y)} - 1}dy$$

La función $f(y) = \frac{\tan^3(y)\sec^2(y)}{e^{\tan(y)}-1}$ tiene límite nulo en los valores $x = 0$ y $x = \pi/2$, por lo que no se indefine en el intervalo de integración, como puede apreciarse en el siguiente gráfico.

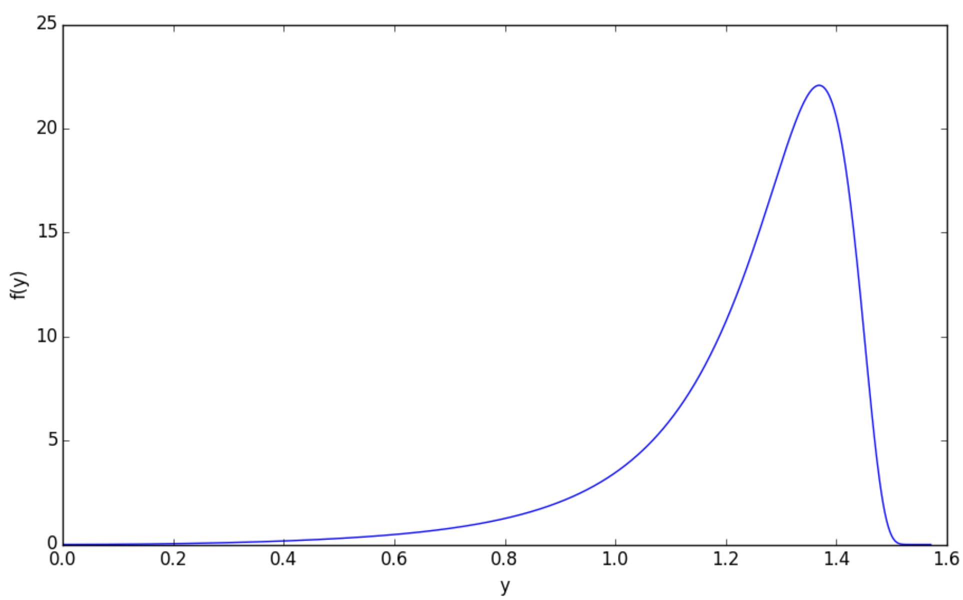

Figura 2: $f(y) = \frac{\tan^3(y)\sec^2(y)}{e^{\tan(y)}-1}$

Se implementa el método de los trapecios mediante una recursión for, haciendo previamente la asignación $f(0) = f(\pi/2) = 0$. Con el valor de esta integral se calcula el flujo (potencia por unidad de área) de un cuerpo negro con la misma temperatura efectiva del Sol, usando los siguientes valores para las constantes físicas:

$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}[J \cdot s]$ - constante de Planck
$c = 3 \cdot 10^{8}[m/s]$ - velocidad de la luz
$k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}[J/K]$ - cosntante de Boltzmann
$T = 5778[K]$ - temperatura efectiva del Sol

$$P = 6{,}311 \cdot 10^{7} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Este flujo P corresponde a la potencia irradiada por unidad de área sobre la superficie del Sol, por lo que puede ser calculado como

$$P = \frac{L}{4\pi R^2}$$

Donde L es la luminosidad total calculada en la parte (2). Se despeja el radio efectivo R y se obtiene

$$R = 696.002.907{,}052\ [m]$$

$$R = 696.002{,}907\ [km]$$

Valor muy cercano al encontrado en la literatura $R_O = 6{,}96 \cdot 10^{8}\ [m]$.

4.- El módulo scipy en Python incluye los metodos scipy.integrate.trapz y scipy.integrate.quad. Utilícelos para re-calcular las integrales calculadas en 2 y 3. Compare los valores obtenidos y la velocidad de ejecución del algoritmo escrito por Ud vs. scipy ¿A qué se debe la diferencia?

El método scipy.integrate.trapz se utiliza sobre conjunto de datos dicretos, como los del archivo del espectro solar. El valor de la integral se calcula como result=int.trapz(flu, lon), donde flu y lon son los vectores flujo y longitud de onda definidos en las partes anteriores. El valor arrojado por esta rutina es

$$F = 1366{,}091 \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Utilizando todos los decimales, en ambos casos arroja exactamente el mismo valor $F = 1366{,}09079684$, lo que indica que el método implementado en la parte (2) no difiere del de la rutina preestablecida scipy.integrate.trapz.

La rutina scipy.integrate.quad se aplica ya no sobre conjuntos de datos discrtetos, sino que sobre funciones previamente definidas en un intervalo determinado. En este caso la función a integrar es $f(y) = \frac{\tan^3(y)\sec^2(y)}{e^{\tan(y)}-1}$, pero como python no tiene definida la función secante, se escribe de la forma $f(y) = \frac{\sin^3(y)}{\cos^5(y)(e^{\tan(y)}-1)}$. El valor de la integral se calcula como result=int.quad(integrand, 0, pi/2), donde integrand es la función previamente definida y los dos valores son los extremos del intervalo de integración.

El valor de la integral obtenido a través del método de los trapecios (implementado por el alumno) es $I_1 = 6{,}49393940227$ y el que arroja la rutina scipy.integrate.quad es $I_2 = 6{,}493939402266$. Es decir, los valores presentan diferencias recién en el undécimo decimal. Se comparan estos valores con el valor teórico de la integral $\pi^4/15$:

$$r_1 = I_1 - \frac{\pi^4}{15} = 3{,}313 \cdot 10^{-13}$$

$$r_2 = I_2 - \frac{\pi^4}{15} = 1{,}776 \cdot 10^{-15}$$

En ambos casos el error es muy pequeño. Sin embargo, el método del trapecio presenta un error 2 órdenes de magnitud mayor que la rutina scipy.integrate.quad.