UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MÉTODOS NUMÉRICOS
PARA LA CIENCIA E INGENIERÍA

Braulio Sánchez Ibáñez

Profesor: Valentino González

Auxiliar: Felipe Pesce

Santiago, Chile

2015.

1. Considere una partícula de masa m que se mueve verticalmente sólo en el eje Y, rebotando contra un suelo que oscila sinusoidalmente con amplitud A y frecuencia ω. El choque contra el suelo es inelástico siguiendo la siguiente regla de choque.

$$v'_p(t^*) = (1+\eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*)$$

donde t* es el instante del bote, vp y vp' son las velocidades justo antes y justo después del bote, y vs es la velocidad del suelo en ese instante y η es un coeficiente de restitución (η entre 0, y 1; η=1 corresponde al caso elástico).

Inicialmente la partícula está en contacto con el suelo y con velocidad hacia arriba mayor que la velocidad del éste.

El sistema descrito tiende a generar soluciones estables (periódicas) luego de un período de relajación. A veces la solución es trivial, con la partícula pegándose al suelo y a veces no hay solución periódica. La solución periódica más sencilla es cuando la partícula rebota contra el suelo con el mismo período que tiene la oscilación de éste.

Los parámetros del problema son (A, ω, η, m, g) y la condición inicial (y(0), v(0)). Adimensionalice el problema con m=1, g=1, y A=1.

Escriba una rutina que le permita calcular (y_{n+1}, v'_{n+1}), dados (y_n, v'_n),: la posición y velocidad luego del n-ésimo choque.

<u>Respuesta:</u> En el instante inmediatamente posterior a cada choque n (acontecido en $t = t_n$), la pelota tendrá una velocidad v_n^p siempre mayor a la velocidad del suelo v_n^s. Además, tanto el suelo como la pelota estarán a la misma altura y_n.

La pelota realiza un movimiento uniformemente acelerado regido por la ecuación

$$y(t) = y_n + v_n^p t - \frac{g}{2} t^2$$

Por otra parte, el movimiento del suelo viene descrito por la ecuación (considerando la condición inicial $y_0 = 0$)

$$z(t) = A \ \sin(\omega(t + t_n))$$

El tiempo t_{n+1} del choque siguiente corresponde simplemente al cero de la función $f(t) = y(t) - z(t)$. Una vez conocido t_{n+1}, que se determina con el módulo **scipy.optimize.brentq**, se evalúa en $y(t)$ y en $\dot{y}(t)$ para obtener y_{n+1} y u_{n+1}^p, respectivamente, donde u_{n+1}^p es la velocidad de la pelota justo antes del choque $n + 1$. De igual forma, se evalúa t_{n+1} en $\dot{z}(t)$ para obtener v_{n+1}^s. Es decir,

$$y_{n+1} = y_n + v_n^p t_{n+1} - \frac{g}{2} t_{n+1}^2$$

$$u_{n+1}^p = v_n^p - g t_{n+1}$$

$$v_{n+1}^s = A\omega \cos(\omega(t + t_{n+1}))$$

Con estos valores se calcula la velocidad de la pelota después del choque $n + 1$

$$v_{n+1}^p = (1 + \eta) v_{n+1}^s - \eta u_{n+1}^p$$

De esta forma, se obtiene el par (y_{n+1}, v_{n+1}^{p}) en función de (y_n, v_n^p), donde la condición inicial de la recurrencia es $y_0 = 0$, $v_0^p = 2$, $t_0 = 0$.

La implementación de esta recursión en Python viene dada por el siguiente **for:**

```
for i in range(N):
    def zy(x):    #función altura de la pelota
        return (y[i]+v[i]*x-(0.5*numpy.power(x,2)))

    def vy(x):    #función velocidad de la pelota
        return v[i]-g*x

    def zs(x):   #función altura del suelo
        return A*sin(w*(x+t[i]) + 0)

    def vs(x):   #función velocidad del suelo
        return A*w*cos(w*(x+t[i]) + 0)

    def f(x):  #diferencia entre ambas alturas
        return zy(x)-zs(x)

    for j in range(len(h)):
        if f(h[j])<0:
            tc=optimize.brentq(f, h[0], h[j])
             break



    y[i+1]=zy(tc)  #altura del choque
    v[i+1]=(1+eta)*vs(tc) - eta*vy(tc)  #velocidad del choque
    t[i+1]=t[i]+tc   #tiempo del choque
```

N es el número de choques considerados en el programa. Primero se definen las funciones zy(x): altura de la pelota, vy(x): velocidad de la pelota antes del choque, zs(x): altura del suelo, vs(x): velocidad del suelo, f(x): diferencia de alturas entre la pelota y el suelo.

Para determinar el tiempo tc del próximo choque se utiliza, como ya se dijo, la rutina **optimize.brentq(f, a, b),** donde f es la función a la cual se le busca un cero y [a,b] es el intervalo donde se realiza la búsqueda. Debe cumplirse que f(a) y f(b) tengan distinto signo para que la rutina funcione. Es claro que f(0)=0, ya que la pelota y el piso están a la misma altura al inicio de cada movimiento, y además zy(x)>zs(x) para x cercano a 0 (durante un intervalo posterior al choque la pelota estará siempre sobre el piso, hasta que choquen nuevamente), por lo que f(x)>0 para x cercano a 0. El problema es entonces determinar algún instante posterior donde f(x)<0. Para esto, se genera un vector h que parte en 0.0000001 y termina en 50.0000001, con un paso de 0.1. Como f(0.0000001)>0, se implementa nuevamente una recursión **for, if** que recorra el vector h y se detenga en el instante en que f(h[j])<0:

```
for j in range(len(h)):
        if f(h[j])<0:
            tc=optimize.brentq(f, h[0], h[j])
             break
```

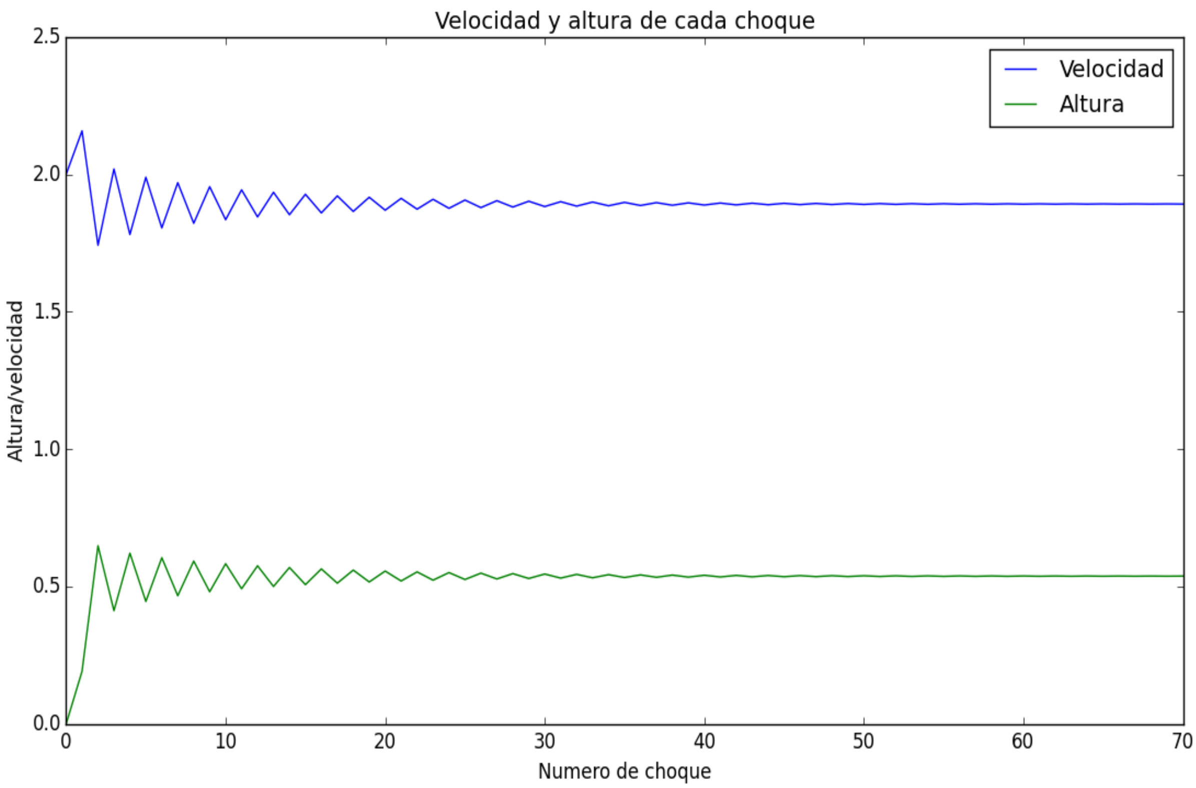
El cero tc se buscará, entonces, en el intervalo (h[0], h[j]).

Finalmente, el vector tiempo absoluto (contado desde el choque 0) se irá actualizando de la forma t[i+1]=t[i]+tc.

2. Usando η=0.15 y para ω = 1.66, estime N_{relax}, el número de botes necesarios para relajar el sistema.

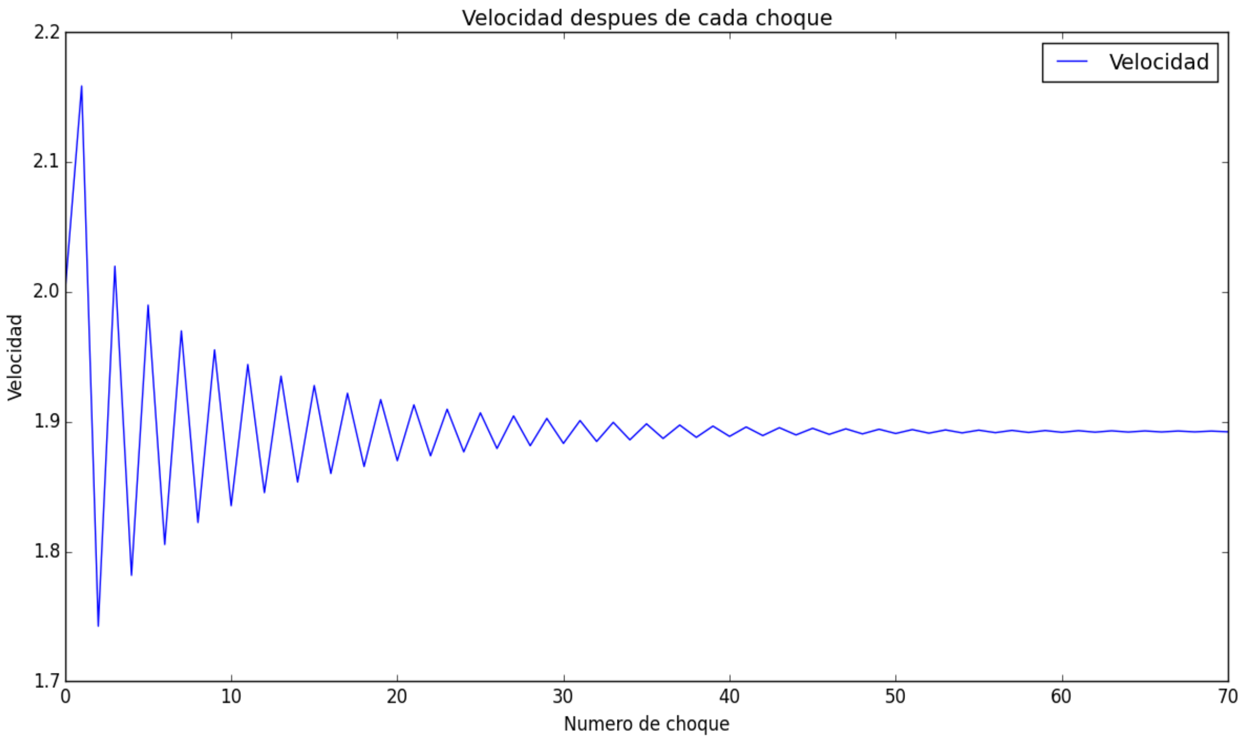
   Se ejecuta el programa y se grafica la velocidad posterior a cada choque. El siguiente gráfico contiene 2 curvas, una representa la velocidad de la pelota después de cada choque y la otra corresponde a la altura en la que se produce el choque. El eje OY no tiene unidades, debido a la adimensionalización de las constantes.

Figura 1: velocidades y altura después de cada choque, considerando $\omega = 1.66$



Se puede apreciar que, en este caso, $N_{relax} = 2$, ya que prácticamente a partir del segundo rebote el sistema presenta un comportamiento periódico sinusoidal, que converge, para N más grandes, a un valor específico. Se ha considerado N_{relax} aquel en donde el sistema comienza a mostrar comportamiento periódico.

Figura 2: Velocidad después de cada choque, w=1.66



3. Pruebe con un par de otros valores para ω entre 1.66 y 1.7. ¿Es N_{relax} comparable?

Figura 3: w=1.68

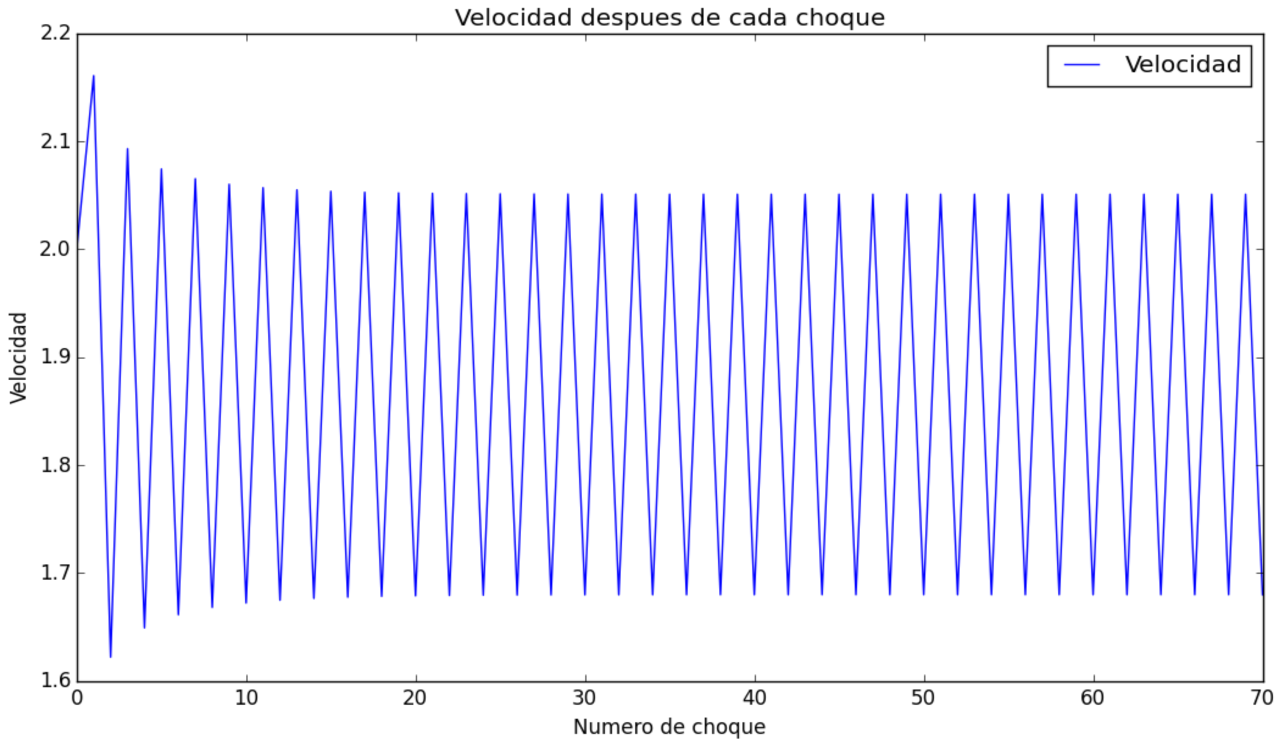
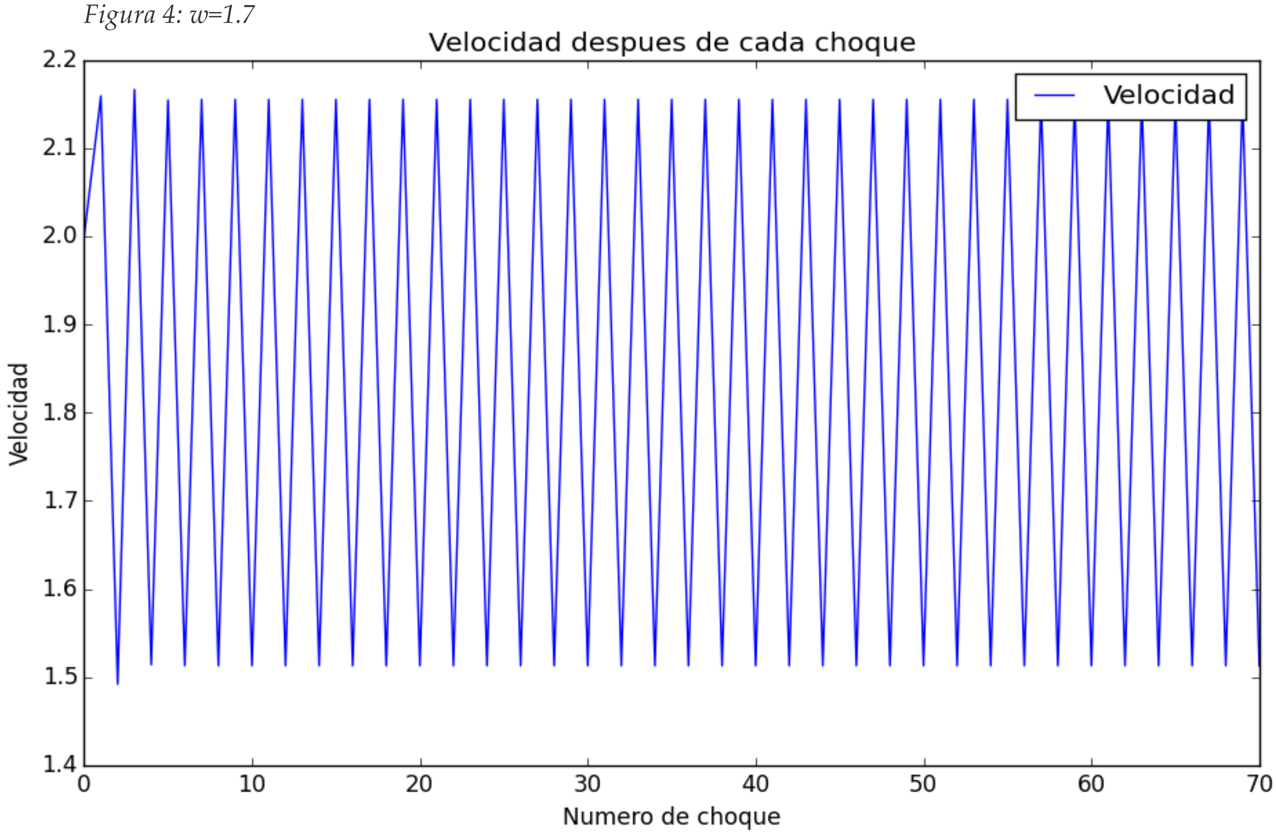


Figura 4: w=1.7



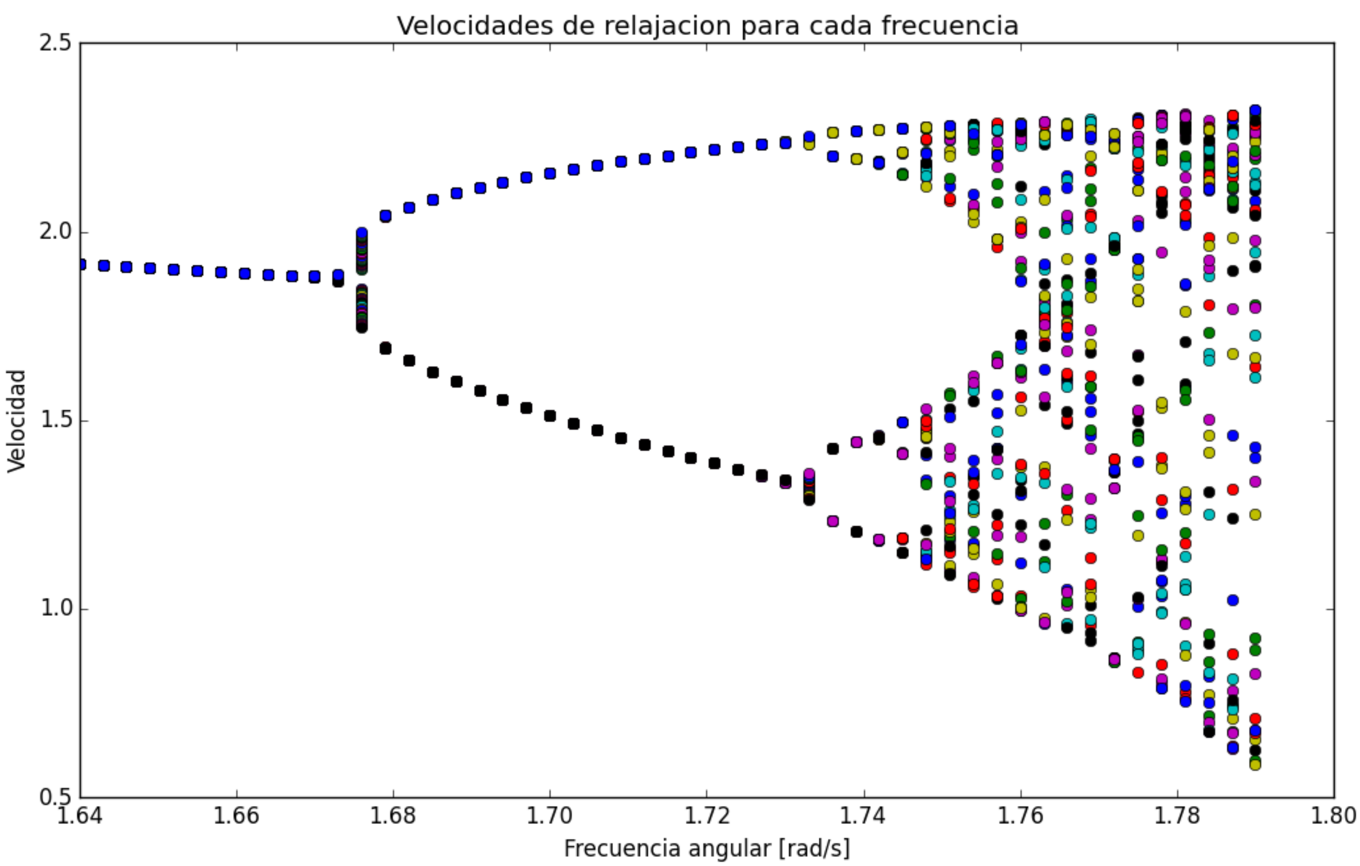
Puede verse que en ambos casos $N_{relax} = 2$, ya que casi inmediatamente después de iniciar el sistema se vuelve periódico.

4. Siga usando η=0.15. Haga un gráfico de v'_n versus ω con ω entre 1.66 y 1.79 y n =2×N_{relax},..., 2×N_{relax} + 49, es decir, ploteará 50 valores de v'_n por cada valor de ω. Si algún valor de ω le parece interesante, haga la grilla más fina en ese sector.

Para asegurarnos que el sistema está eventualmente relajado (y debido a la subjetividad y poco precisión con que se determina N_{relax}), se graficarán las velocidades asociadas a N=21 hasta N=70.

Se fabrica un vector de velocidades angulares desde 1.64 hasta 1.79, con un paso de 0.003. La matriz vf, de dimensión 50x50, donde la entrada vf[i,j] corresponde al choque número i asociado a la velocidad angular w[j]. Se grafican estos valores y se obtiene el siguiente gráfico

Figura 5: velocidades de relajo en función de la frecuencia



En el gráfico anterior, a cada calor de ω le corresponden 50 puntos asociados a las velocidades una vez que el sistema se ha relajado (N grande). Nótese que hasta aproximadamente $\omega = 1.671$ el sistema presenta una única velocidad de relajo, es decir, pasado un tiempo grande el sistema se estabilizará, produciéndose los choques periódicamente siempre a la misma altura y adquiriendo la pelota siempre la misma velocidad posterior al choque. Esto es equivalente a decir que el sistema presenta, a partir de cierto N grande, una solución única (y_1^*, v_1^*). Matemáticamente, el sistema converge asintóticamente hacia esa solución.

Pasado ese límite, el sistema se estabilizará en torno a dos puntos alternantes, es decir, los choques se producirán sólo en dos alturas bien definidas que se irán alternando (cada una asociada a una velocidad posterior al choque única para esa altura). Es decir, el sistema presenta, para N grande, dos soluciones bien definidas. Este comportamiento se mantiene hasta, aproximadamente, $\omega = 1.735$. A partir de ahí, el sistema presentará 4 soluciones únicas, es decir, 4 puntos de choque bien definidos, cada uno con su altura definida y velocidad posterior al choque única.

A partir de $\omega = 1.75$, las soluciones comienzan a aumentar sin patrón definido, pero manteniéndose las velocidades siempre dentro de dos intervalos claramente diferenciados.

Finalmente, para $\omega > 1.76$, las soluciones se vuelven caóticas, no periódicas, con velocidades que pueden tomar valores dentro de un rango bastante extenso.

Un ejemplo de este comportamiento se aprecia en el siguiente gráfico, donde claramente la curva representa un comportamiento caótico, donde hay intervalos donde la velocidad parece estabilizarse en torno a dos puntos (como entre N=20 y 40), pero luego pierde esa periodicidad, presentando un patrón muy irregular. Esto contrasta completamente con los gráficos de los casos anteriores, donde se ve claramente un comportamiento periódico.

Figura 6: w=1.785