UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA CIENCIA E INGENIERÍA

TAREA 3

Braulio Sánchez Ibáñez

16.880.977-8

Profesor: Valentino González

Auxiliar: Felipe Pesce

Santiago, Chile

2015.

1. El oscilador de Van der Pol fue propuesto para describir la dinámica de algunos circuitos eléctricos. La ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt}$$

donde k es la constante elástica y μ es un coeficiente de roce. Si $|x| > a$, el roce amortigua el movimiento, pero si $|x| < a$, el roce inyecta energía al sistema. Se puede hacer un cambio de variable para convertir la ecuación a:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds}$$

Con lo cual la ecuación sólo depende del parámetro μ^*. Indique cuál es el cambio de variable realizado.

Integre la ecuación de movimiento usando el método de Runge-Kutta de orden 3 visto en clases. Se pide que Ud. implemente su propia versión del algoritmo, describa la discretización usada y el paso de tiempo. Use μ*=1.RRR, donde RRR son los 3 últimos dígitos de su RUT antes del guión. Integre la solución hasta $T = 20\pi$ para las siguientes condiciones iniciales:

- $\frac{dy}{ds}(0) = 0; \quad y(0) = 0.1$
- $\frac{dy}{ds}(0) = 0; \quad y(0) = 4.0$

Grafique $y(s)$ y la trayectoria en el espacio $\left(y, \frac{dy}{ds}\right)$.

Respuesta: El cambio de variables que permite reducir la ecuación es el siguiente:

$$\boxed{s = \sqrt{k}t, \quad x = ay}$$

Se calcula la primera y segunda derivada de la función $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = a\sqrt{k}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\sqrt{k}\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dt} = ak\frac{d^2y}{ds^2}$$

Reemplazando en la ecuación del oscilador se obtiene:

$$ak\frac{d^2y}{ds^2} = -aky - \mu(a^2y^2 - a^2)a\sqrt{k}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu\frac{a^2}{\sqrt{k}}(y^2 - 1)\frac{dy}{ds}$$

Si se define $\frac{a^2}{\sqrt{k}}\mu = \mu^*$, se obtiene la nueva ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds}$$

Se integrará la ecuación utilizando el método de Runge-Kutta de orden 3. Este método permite resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0, \ \ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dados $x_n,\ y_n,\ t_n$ y un paso h, se calculan los siguientes factores:

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n, y_n)$$
$$l_1 = h \cdot g(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_n + \tfrac{h}{2}, x_n + \tfrac{k_1}{2}, y_n + \tfrac{l_1}{2}\right)$$
$$l_2 = h \cdot g\left(t_n + \tfrac{h}{2}, x_n + \tfrac{k_1}{2}, y_n + \tfrac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f(t_n + h, x_n - k_1 + 2k_2, y_n - l_1 + 2l_2)$$
$$l_3 = h \cdot g(t_n + h, x_n - k_1 + 2k_2, y_n - l_1 + 2l_2)$$

Los valores $x_{n+1},\ y_{n+1}$ vienen dados por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + l_3)$$

Para resolver una ecuación de diferencial de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2y}{ds^2} = f(s, y, y')$$

se hace el cambio $v = \frac{dy}{ds}$, con lo que $\frac{dv}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2} = f(s, y, v)$.

Por lo tanto , la ecuación de segundo orden puede escribirse como el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{ds} = g(s, y, v) = v \\ \dfrac{dv}{ds} = f(s, y, v) \end{cases}$$

En el caso del oscilador de Van der Pol, $f(s, y, v) = -y - \mu^*(y^2 - 1)v$.

Con esto, las recurrencias del método se reducen a:

$$k_1 = h \cdot v_n$$
$$l_1 = h \cdot (-y_n - \mu^*({y_n}^2 - 1)v_n)$$

$$k_2 = h \cdot \left(v_n + \frac{l_1}{2}\right)$$
$$l_2 = h \cdot f\left(y_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot (v_n - l_1 + 2l_2)$$
$$l_3 = h \cdot f(y_n - k_1 + 2k_2, v_n - l_1 + 2l_2)$$

Con lo que $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$,

$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + l_3$

Para la integración de la ecuación, se considerará el intervalo de integración $[0, 20\pi]$, dividido en $N = 10^6$ intervalos, por lo que el paso h de la recurrencia es $h = 20\pi/10^6 \approx 0.000063$. La rutina se implementa en una recursión `for` y se obtienen los gráficos de la función $y(s)$ y de la trayectoria $\left(y(s), \frac{dy(s)}{ds}\right) = (y, v)$, para las siguientes condiciones iniciales, y el parámetro $\mu^* = 1.977$.

a. $y_0 = y(0) = 0.1; \quad v_0 = \frac{dy}{ds}(0) = 0$

Figura 1: Oscilador de Van der Pol

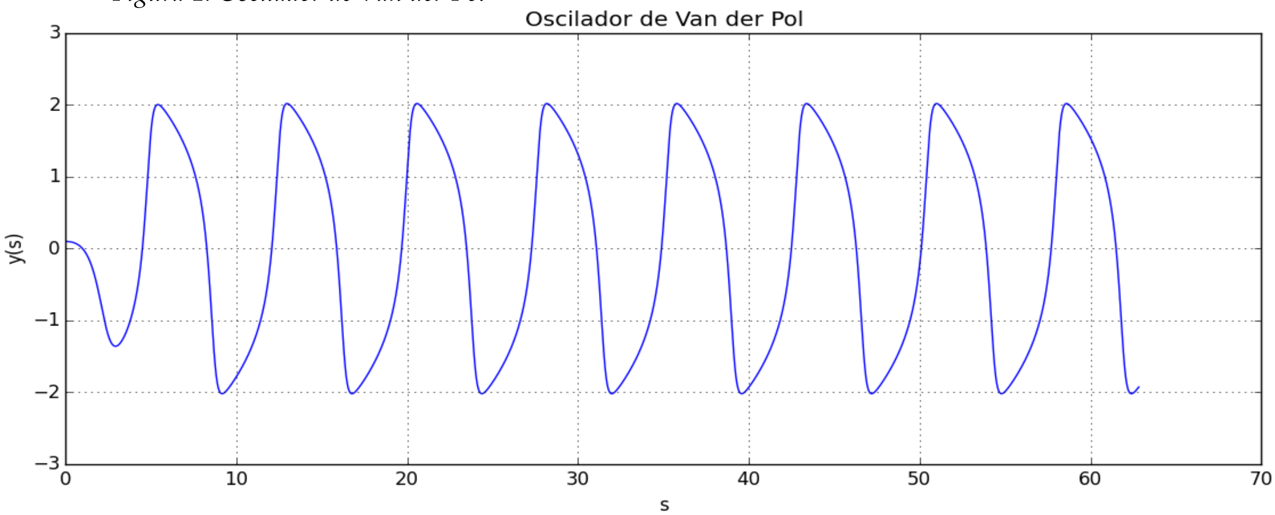
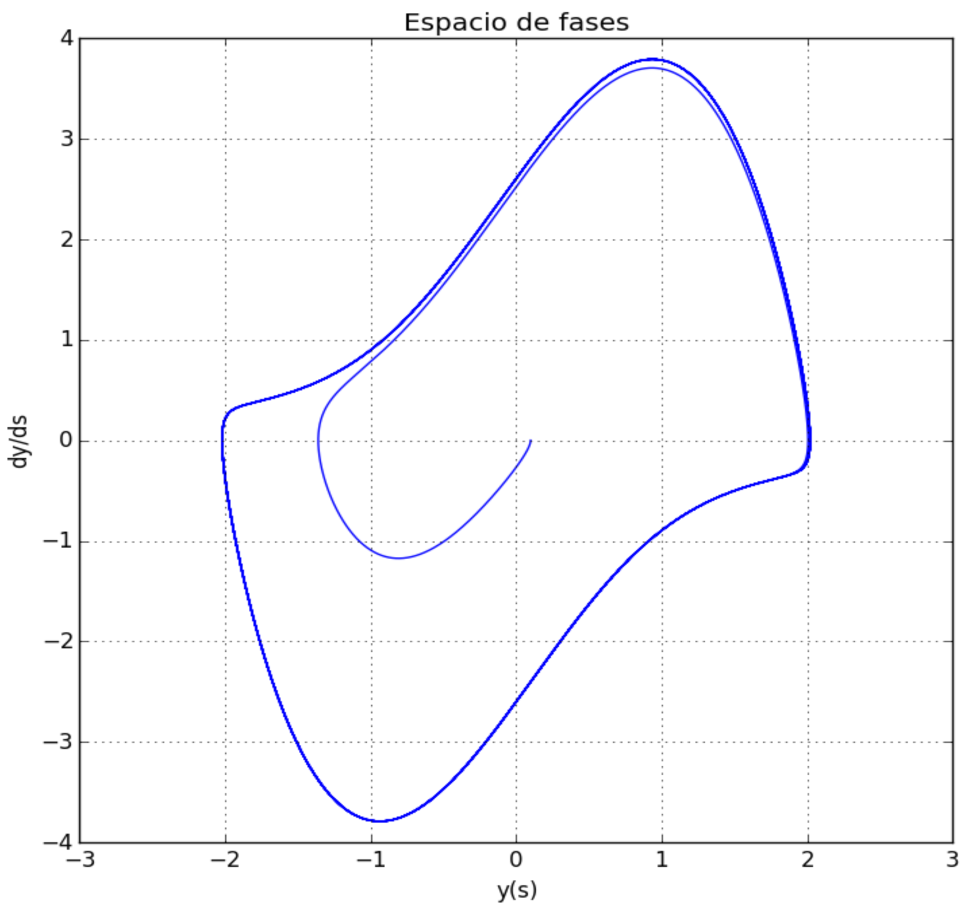


Figura 2: Espacio de fases



b. $y_0 = y(0) = 4.0; \quad v_0 = \frac{dy}{ds}(0) = 0$

Figura 3: Oscilador de Van der Pol

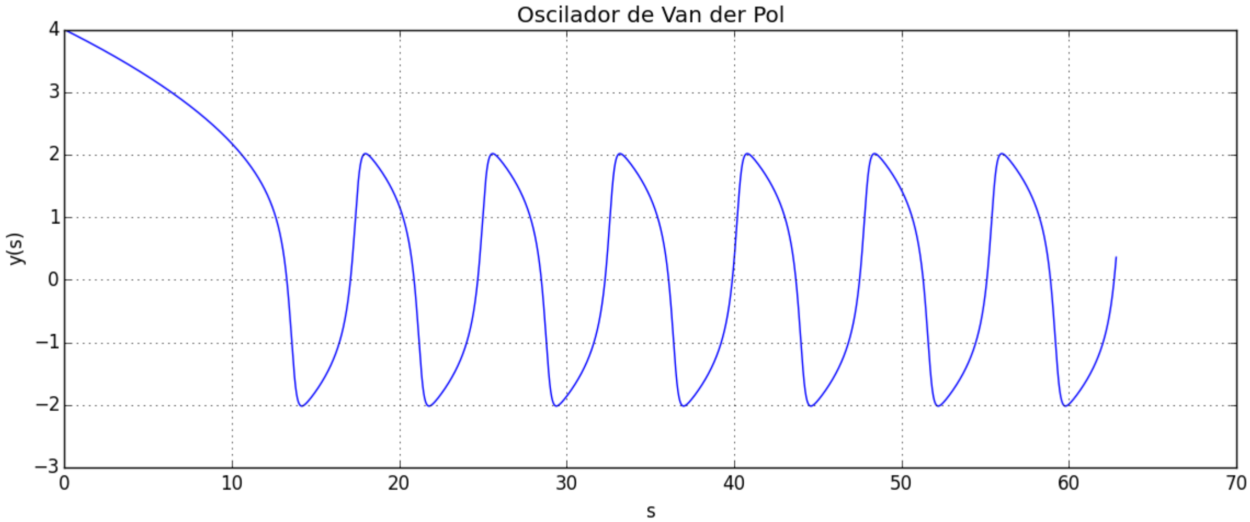
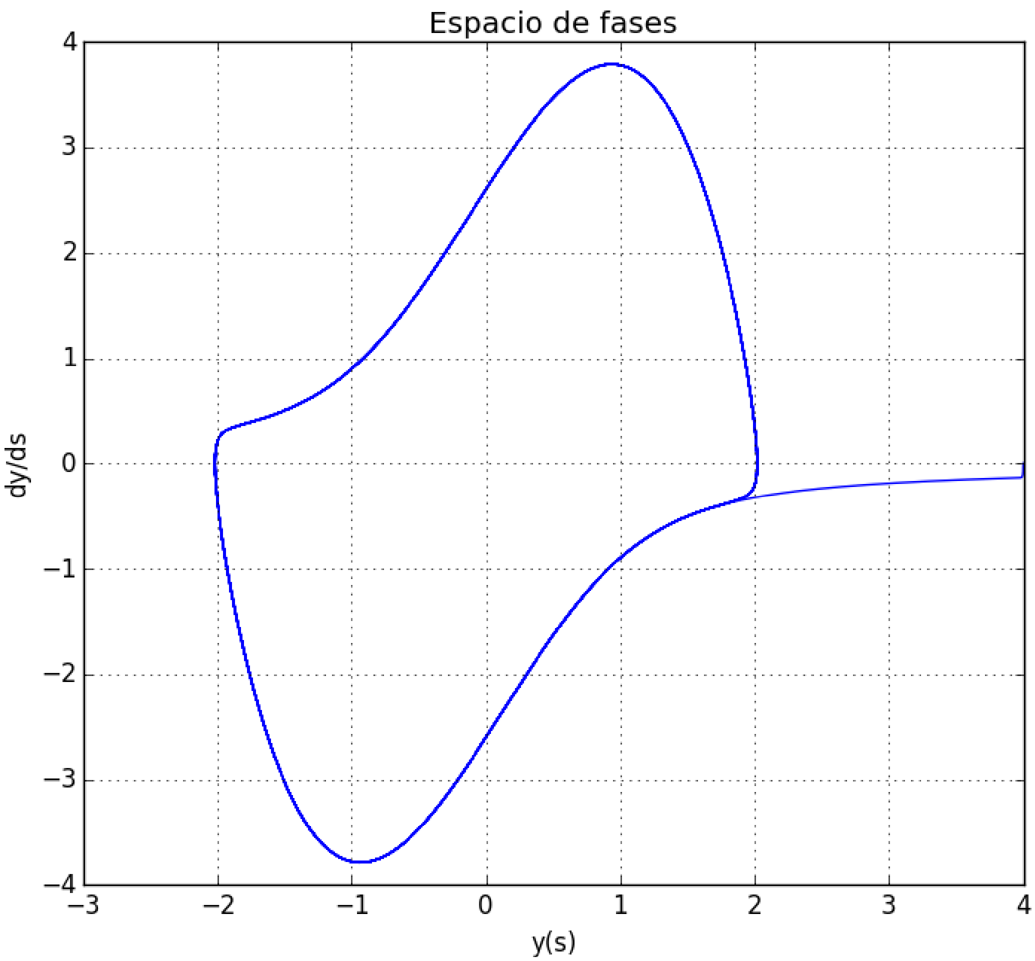


Figura 4: Espacio de fases



2. El sistema de Lorenz es un set de ecuaciones diferenciales ordinarias conocido por tener algunas soluciones caóticas, la más famosa el llamado atractor de Lorenz. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

La solución más famosa se obtiene con $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$. Utilice esos parámetros, elija un set de parámetros iniciales (x_0, y_0, z_0) e integre la ecuación por un tiempo que estime conveniente. Esta vez se pide que utilice un algoritmo RK4, pero no se necesita implementarlo, puede usar los algoritmos disponibles en `scipy.integrate` o cualquier otro que encuentre y sea de uso libre.

Plotee en 3D la solución $(x(t), y(t), z(t))$.

Respuesta: Primero se integrará con el método RK4 implementado por el mismo alumno. Este caso se trata de un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, de la forma

$$\frac{dx}{ds} = f_1(x, y, z) = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{ds} = f_2(x, y, z) = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{ds} = f_3(x, y, z) = xy - \beta z$$

Los factores k_i se calculan de la forma

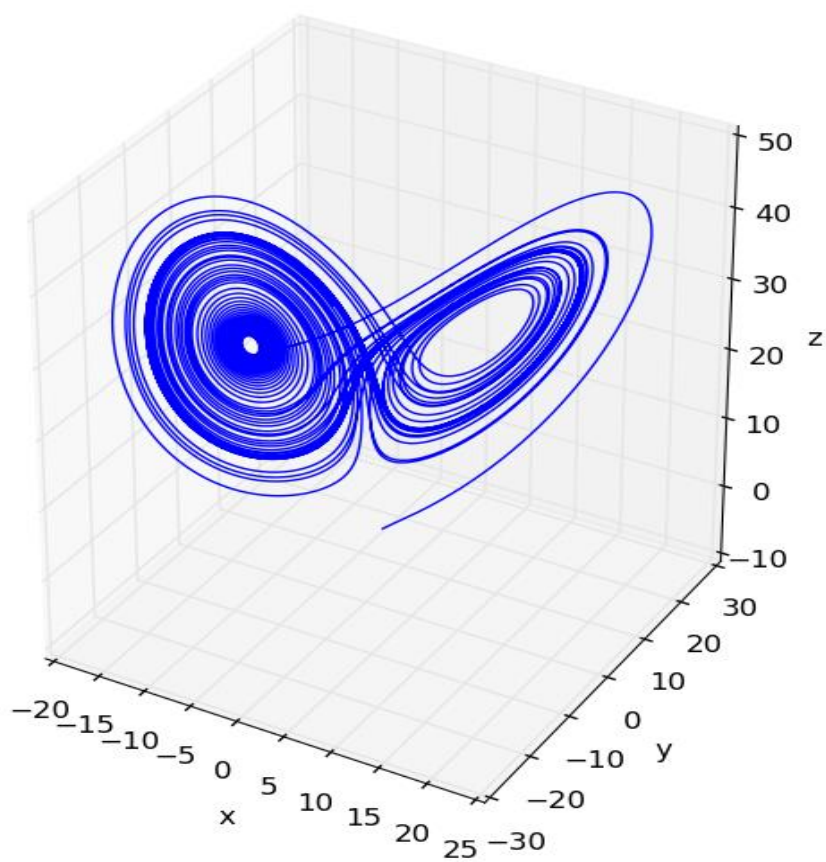
$$k_1 = h \cdot\ f_1(x_n, y_n, z_n)$$
$$k_2 = h \cdot f_1\left(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h \cdot f_1\left(x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2}\right)$$
$$k_4 = h \cdot f_1(x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + m_3)$$

Los factores l_i, m_i se calculan de la misma forma, pero cambiando f_1 por f_2, f_3, respectivamente.

Se integra con las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,-1)$, con parámetros $\sigma = 10,\ \beta = \frac{8}{3},\ \rho = 28$.

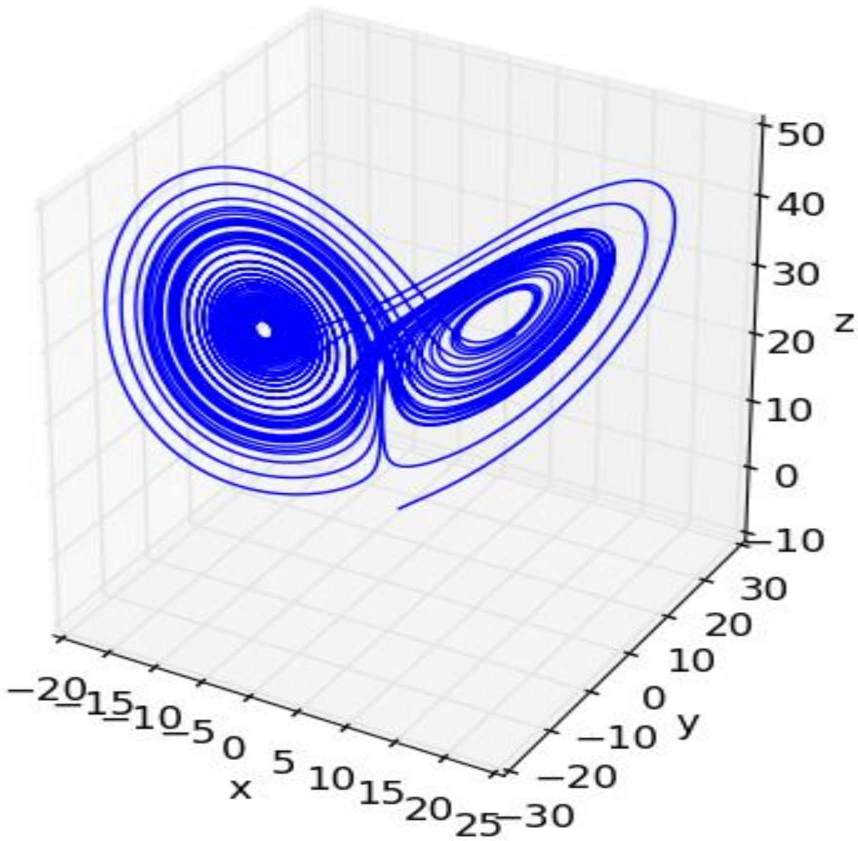
El intervalo de integración [0, 55] se divide en $N = 10^5$ intervalos de longitud $h = \frac{55}{N} = 0.00055$. El gráfico 3D de la solución es

Figura 5: Atractor de Lorenz, con RK4 implementado.



Ahora se repite el proceso, implementando la rutina **`scipy.integrate.ode,`** que utiliza el método Dormand-Prince, de la familia de los Runge-Kutta. La solución, para la misma condición inicial es

Figura 6: Atractor de Lorenz, con rutina desde scipy



3. <u>CONCLUSIONES</u>

En el caso del Oscilador de Van der Pol, para ambas condiciones iniciales, la amplitud de oscilación es la misma. Es decir, sin importar cuál sea la amplitud inicial del problema, el movimiento siempre converge a uno de amplitud constante, en este caso A=2. Esto también se verifica en los gráficos del espacio de fases, donde la trayectoria siempre converge a la misma curva cerrada, sin importar desde dónde inicie.

Para la pregunta 2, ambos métodos, el implementado por el alumno y el importado desde scipy, dan la misma solución. La solución, el atractor de Lorenz, corresponde a un movimiento claramente caótico (ya que es muy sensible a las condiciones iniciales) , pero en que la partícula orbita en torno a dos puntos bien definidos.