



**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Y MATEMÁTICAS**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

---

**MÉTODOS NUMÉRICOS**  
**PARA LA CIENCIA E INGENIERÍA**

**TAREA 5**

**“Integración de la ecuación  
de Laplace y Poisson”**

**Braulio Sánchez Ibáñez**

**16.880.977-8**

Profesor: Valentino González

Auxiliar: Felipe Pesce

---

**Santiago, Chile**

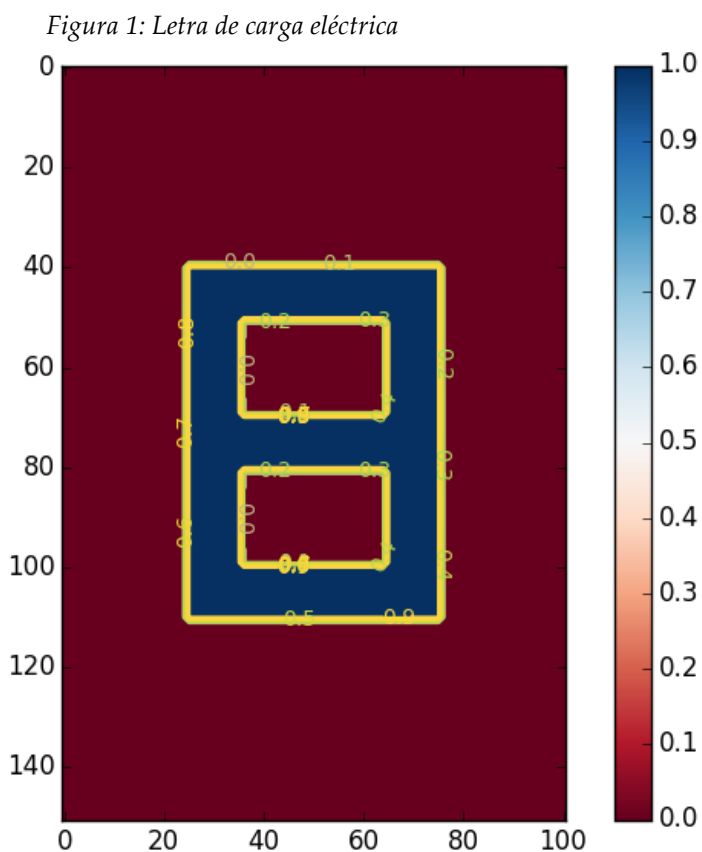
## PREGUNTA 1

El objetivo de este trabajo es integrar numéricamente la ecuación bidimensional de Poisson.

$$\nabla^2 V(x, y) = -\rho(x, y)$$

Donde  $V(x, y)$  es el potencial electrostático y  $\rho(x, y)$  es la densidad de carga. Se considera un rectángulo centrado en el origen de dimensiones 10[cm]x15[cm], en cuyo interior existe una letra B de carga total  $Q = 1[C]$  distribuida uniformemente. El perímetro del rectángulo está conectado a tierra, por lo que el potencial ahí es nulo.

La letra B se ubica dentro de un rectángulo de dimensiones 5[cm]x7[cm] centrado en el origen, tal como muestra la siguiente figura:



Considerando que el ancho de cada línea es de 1 centímetro, el área total de la letra es  $A = 23[cm^2]$ , por lo que la densidad de carga es

$$\rho(x, y) = \frac{1}{23} \left[ \frac{C}{cm^2} \right]$$

Además, en la posición  $y = -5.5[cm]$  existe una línea horizontal que se extiende desde  $x = -3[cm]$  hasta  $x = 3[cm]$ , y que impone la siguiente condición de borde para la derivada

$$\frac{dV}{dn} = \pm 1$$

Donde el sentido de la normal  $n$  es positivo saliendo de la línea y se adopta el signo positivo en la zona  $y > -5.5$ . Este tipo de condiciones de borde sobre la derivada del campo se denominan tipo Neumann. La condición, en términos de la variable  $y$  es, para ambos lados de la línea:

$$\frac{dV}{dy} = +1$$

La integración de la ecuación se realiza mediante el método de sobre-relajación sucesiva. Primero, se discretiza el rectángulo  $[-2.5, 2.5] \times [-3.5, 3.5]$  en pequeños cuadrados de lado  $h = 0.1[cm]$ , formando una grilla de puntos equiespaciados. Se inicia con una solución  $V$  nula, es decir,  $V=0$  para todo punto. En función de esta solución inicial se va calculando, iterativamente, el valor del potencial en cada punto  $(i, j)$  de la grilla a través de la expresión:

$$V_{i,j} = (1 - \omega)V_{i,j} + \frac{\omega}{4}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j})$$

Los puntos del perímetro no se recalculan, ya que ellos deben ser cero, por condición de borde. En el caso de los puntos adyacentes a la línea de la condición de Neumann, se usa la misma ecuación anterior, pero reemplazando el valor del potencial sobre la línea por aquel que se obtiene usando la derivada, es decir,

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} + \frac{dV_{i,j}}{dy} h$$

Como la derivada vale 1, la expresión para calcular los puntos adyacentes a la línea es

$$V_{i,j} = (1 - \omega)V_{i,j} + \frac{\omega}{4}(V_{i,j} + h + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j})$$

$$V_{i,j} = (1 - \omega)V_{i,j} + \frac{\omega}{4}(V_{i+1,j} + V_{i,j} - h + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j})$$

La primera para la zona bajo la línea, y la segunda para la zona sobre la línea.

$\omega \in (0,2)$  es el factor de relajación.

A continuación se presentan los gráficos de la solución del potencial, para el caso  $\omega = 1.2$ . El primer gráfico es una representación tridimensional del potencial; el segundo corresponde a las curvas de nivel para distintas intensidades; el tercero es un corte transversal a lo largo de  $x = 0$ , es decir, a través del eje de simetría vertical; y el cuarto es otro corte transversal, pero en  $x = -2.2 [cm]$ . Debido a que con 1 [C] los efectos de la letra no eran notorios, se decidió considerar una carga total de  $Q = 10[C]$ .

Figura 2: gráfico 3D del potencial

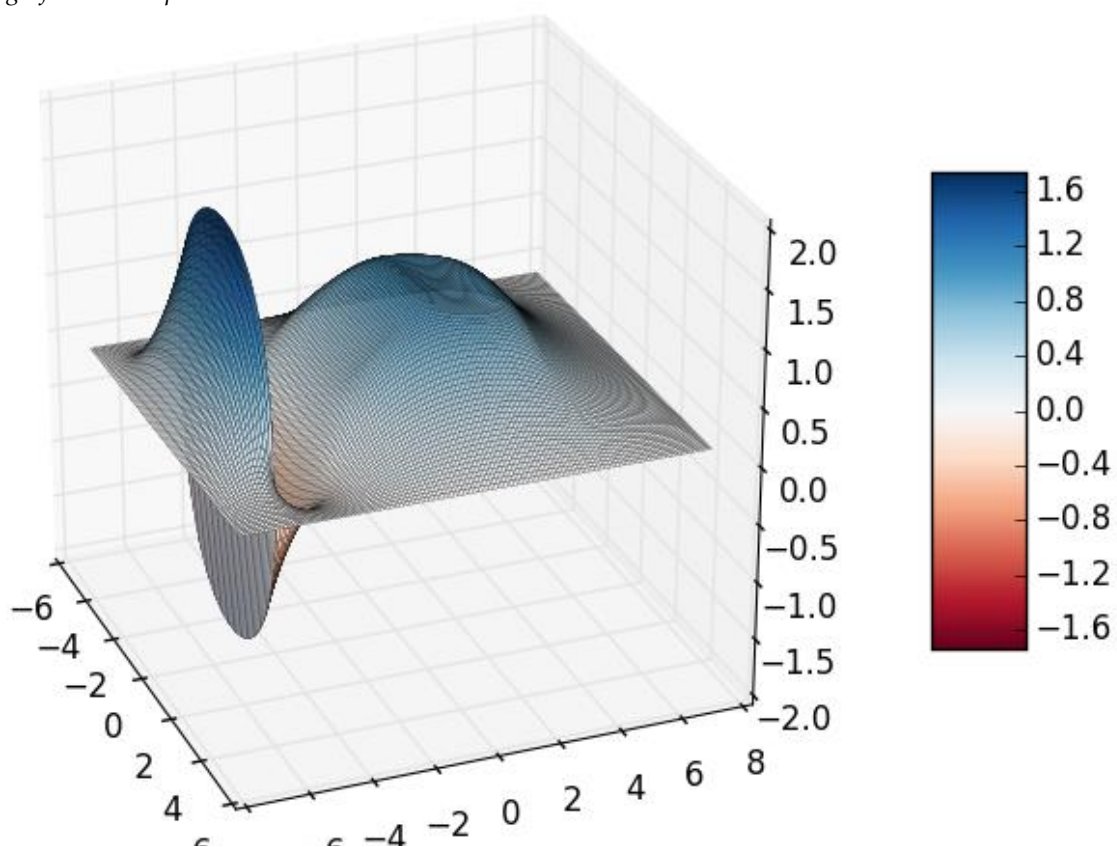


Figura 3: curvas de nivel

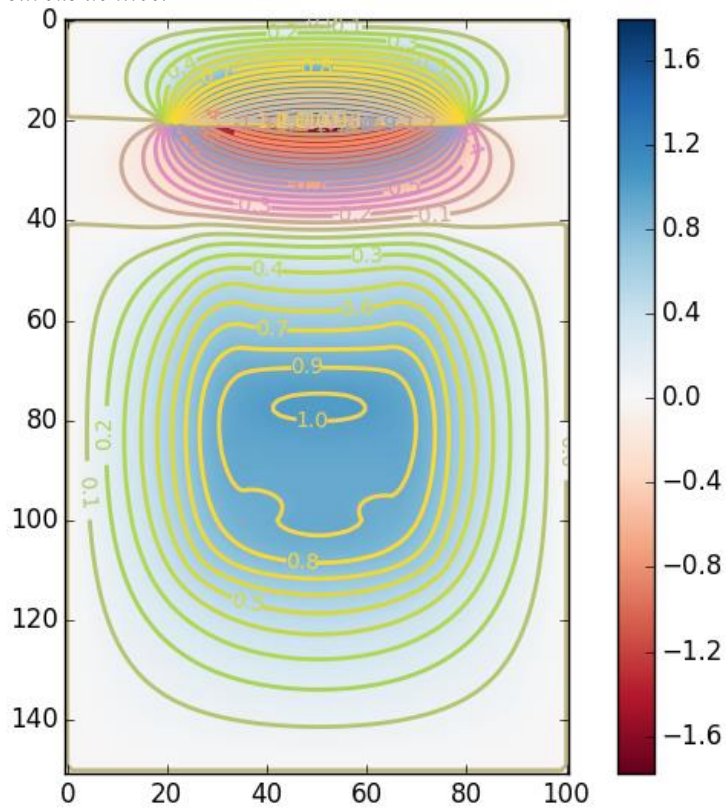
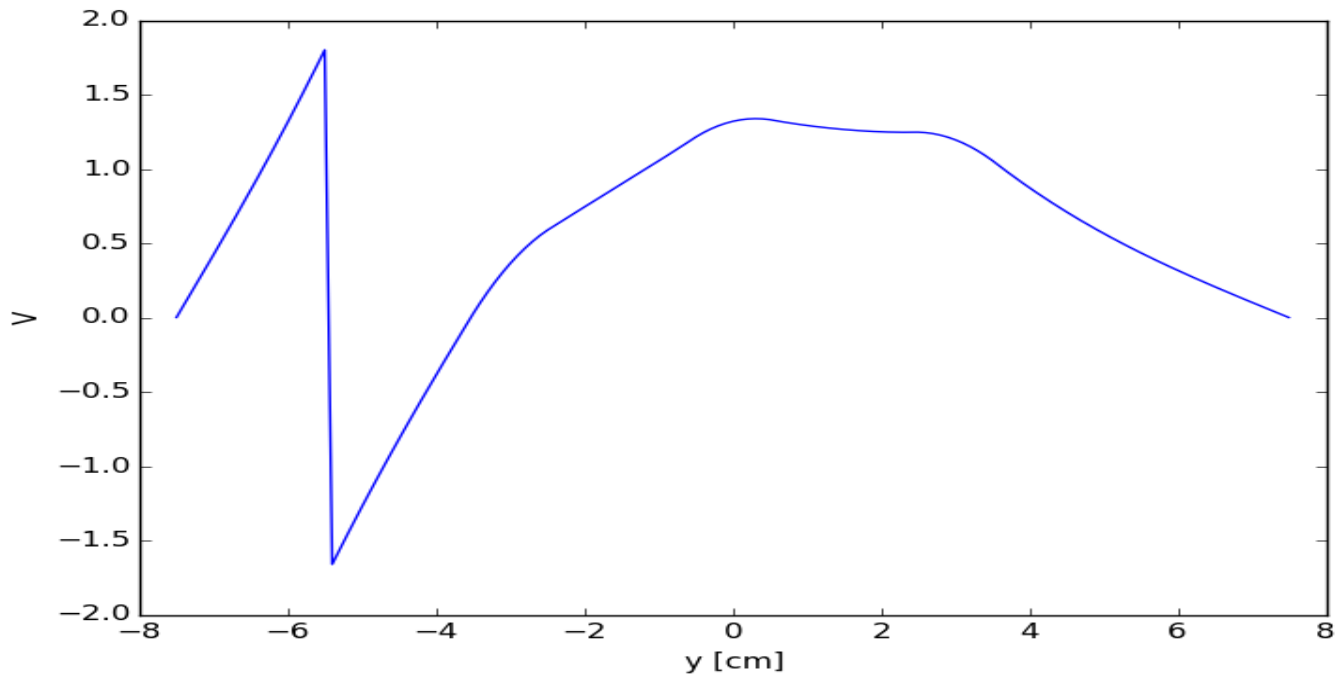
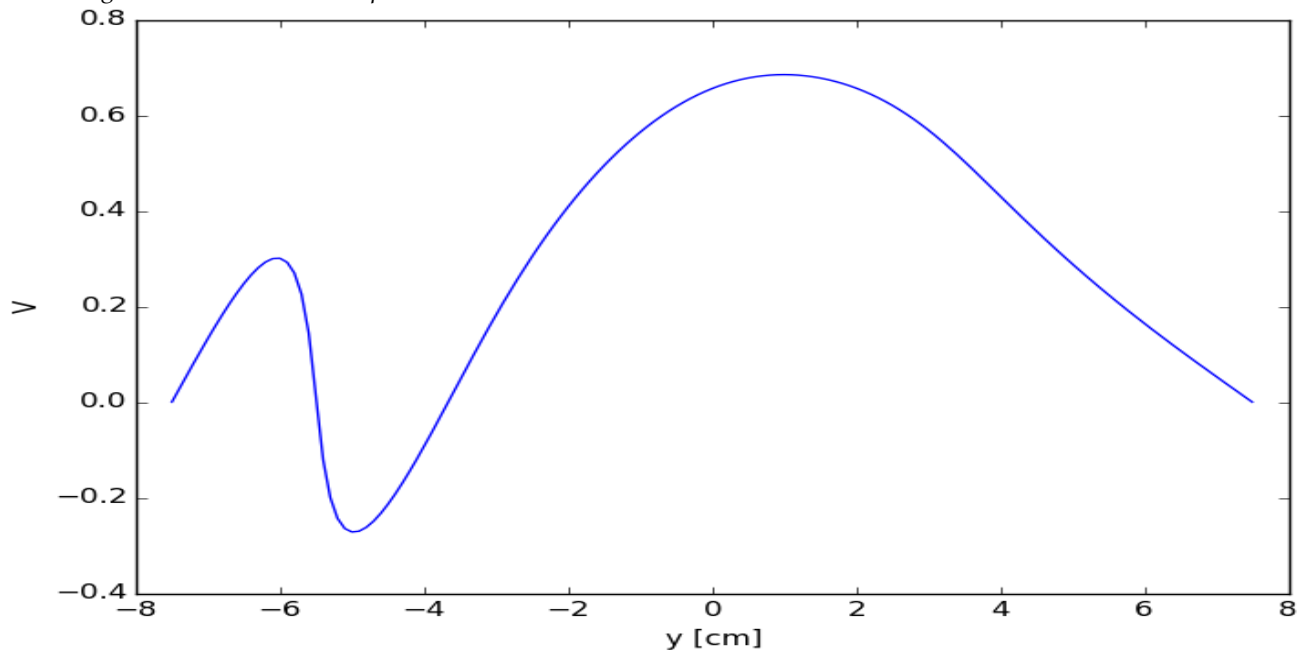


Figura 3: Corte transversal por  $x=0$



Los ejes no están en la misma escala. Sin embargo, lo que interesa es la forma y el comportamiento de la función, más que los valores que toma. Se ve claramente que en  $y = -5.5$  [cm] la función se hace discontinua, pero satisface la condición de Neumann, con derivada igual a la unidad a ambos lados de la línea.

Figura 4: corte transversal por  $x=-2.2$



En este caso el corte no pasa por la línea de la condición de Neumann, por lo que el campo no es discontinuo, pero se puede apreciar que las derivadas en torno a ese punto ya se están aproximando a los valores que deben tomar en la condición de borde.

Se repite el proceso con los siguientes valores para  $\omega$ :

$$\omega \in \{0.4, 0.8, 1.0, 1.2, 1.6, 1.9\}$$

En cada caso, se determina el número de pasos necesarios para la convergencia. Se define la convergencia como el número de pasos requeridos para que la diferencia máxima entre dos soluciones sucesivas sea  $\varepsilon \leq 10^{-4}$ . Para lograr esto, el programa comienza con una solución  $V$ , y en base a ella calcula la nueva solución  $U$ . Se determina la máxima diferencia entre ellas **`r=numpy.max(abs(U-V))`**. La iteración se detiene cuando este valor  $r$  es menor o igual a la tolerancia máxima. Si no se satisface la condición de tolerancia,  $V$  toma los valores de la última solución  $U$  y se repite el proceso.

A continuación se presentan sólo los gráficos 3D de estas soluciones y una tabla con el número de pasos requeridos para la convergencia.

*Tabla 1: convergencia del método*

$\omega$	Pasos para la convergencia
0,4	4733
0,8	3364
1	2726
1,2	2158
1,6	1140
1,9	309

Figura 5:  $w=0.4$

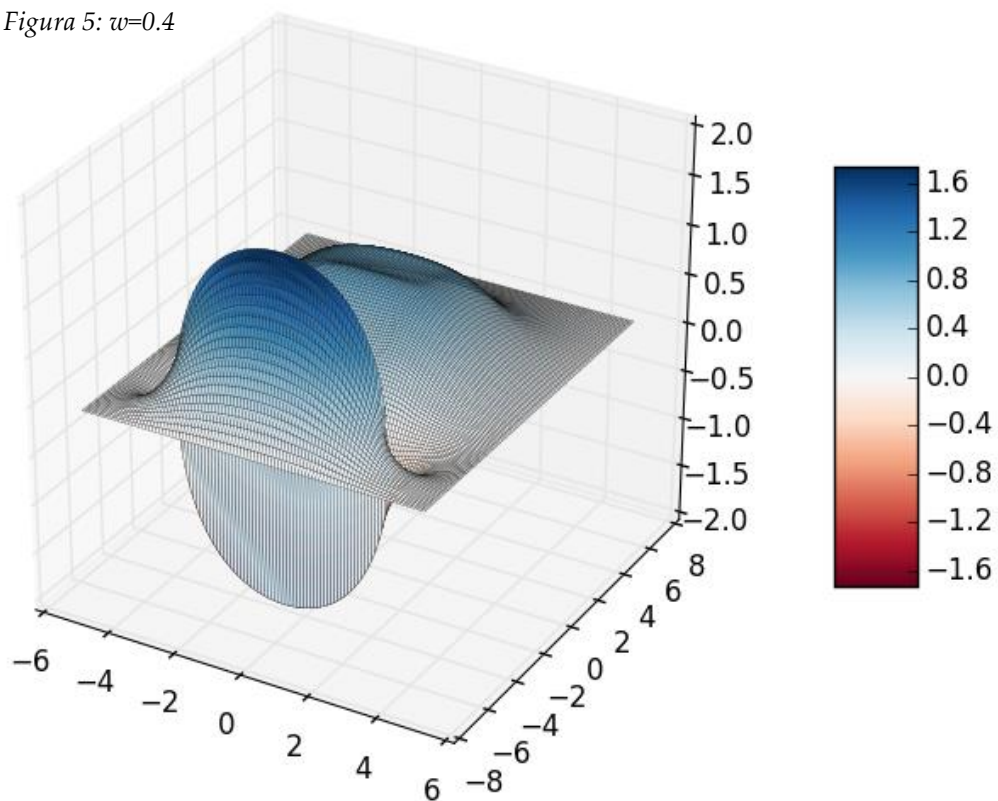


Figura 6:  $w=0.8$

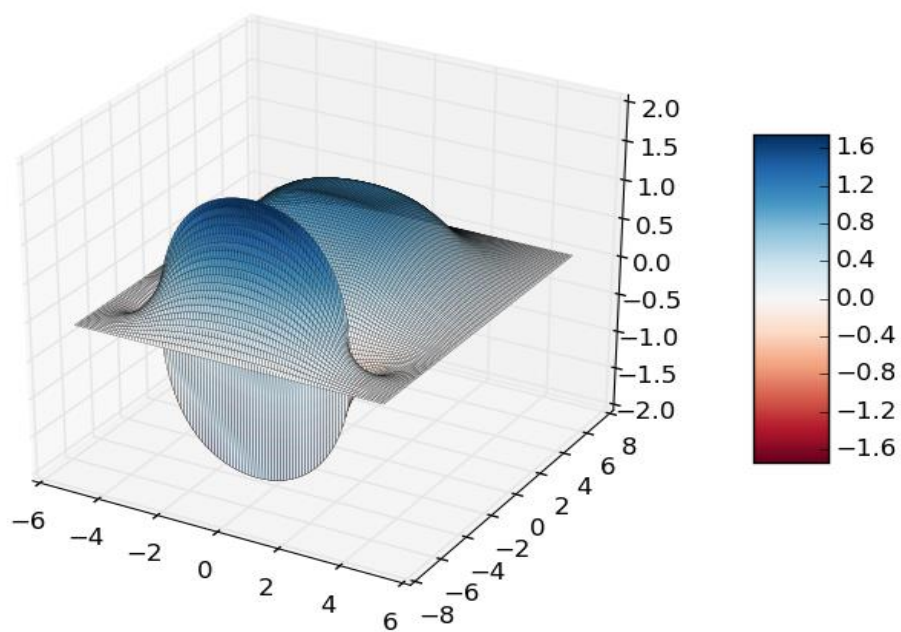




Figura 7:  $w=1.0$

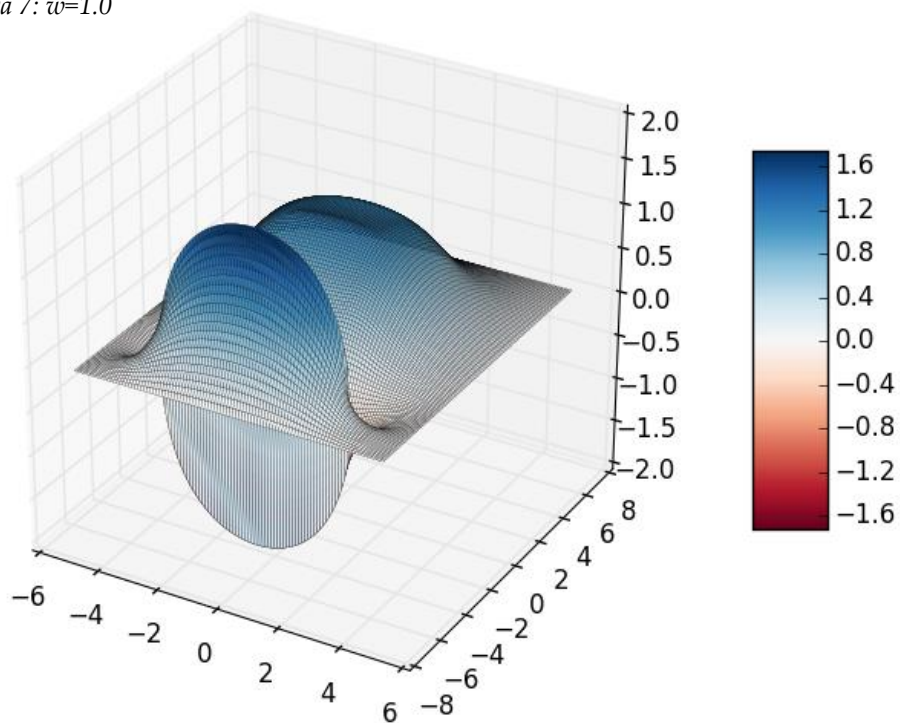


Figura 8:  $w=1.6$

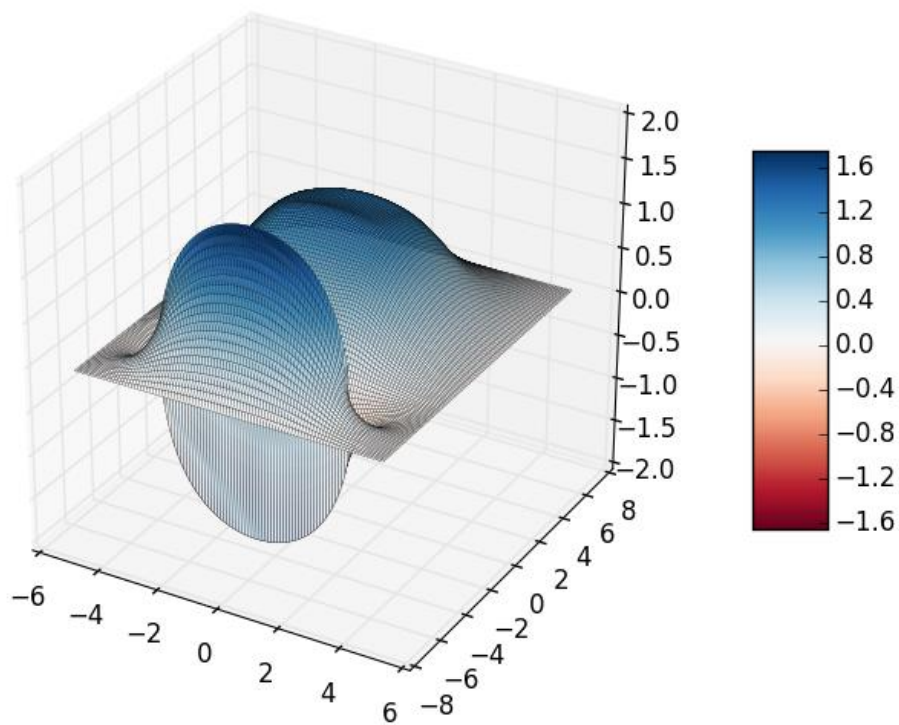
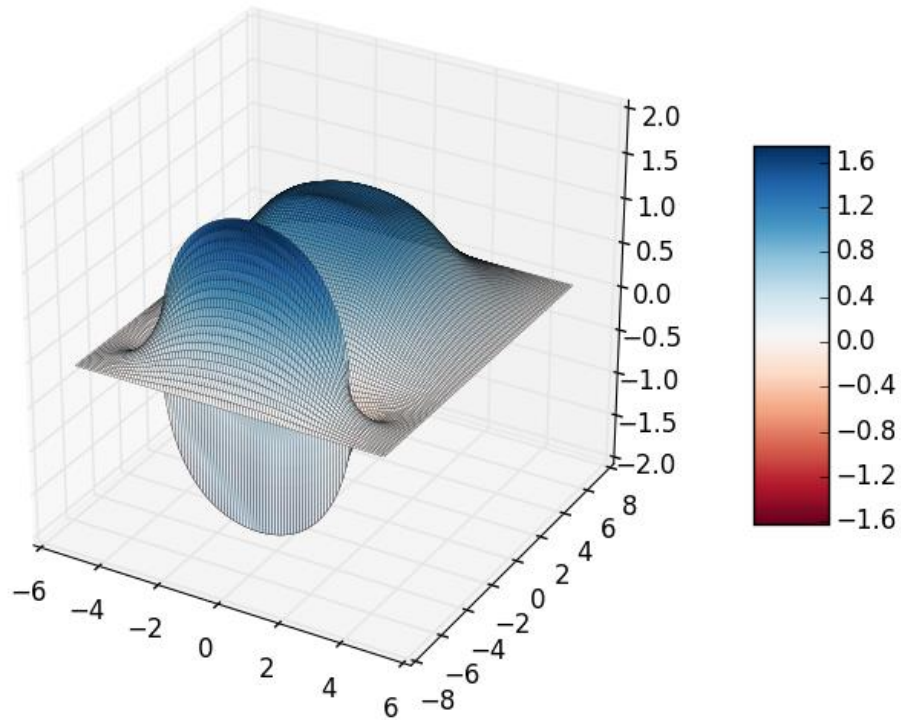


Figura 9:  $w=1.9$



Es claro ver que la solución es prácticamente la misma en todos los casos. Además, el factor de relajación se hace más óptimo a medida que se acerca a 2, es decir, converge en un número de pasos.

A partir de la tabla 1 se puede apreciar que para  $w=0.4$  se necesitan 4733 iteraciones para alcanzar la tolerancia deseada, en contraste con las apenas 309 iteraciones del caso  $w=1.9$ . En este caso la reducción del tiempo de cálculo es de, aproximadamente, 93%.