



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MÉTODOS NUMÉRICOS
PARA LA CIENCIA E INGENIERÍA

TAREA 7

**“Integración de un fluido
compresible mediante el método
de las características”**

Braulio Sánchez Ibáñez

16.880.977-8

Profesor: Valentino González

Auxiliar: Felipe Pesce

Santiago, Chile

El objetivo de esta tarea es calcular la densidad y velocidad de un fluido compresible sin viscosidad ni gravedad en un flujo unidimensional. El primer principio que rige a este fenómeno es la conservación de la masa, resumida en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0$$

El segundo principio es la conservación del momentum lineal, ya que no existe roce. Esto es equivalente a que se satisfaga la segunda ley de Newton, donde la única fuerza externa es aquella debida a la presión. Esto se expresa en la siguiente ecuación:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Se usará además la ecuación de estado $p = A\rho^\gamma$, con $\gamma = 5/3$, que corresponde a un polítropo de coeficiente $n = 1.5$ utilizado para modelar estrellas cuyos núcleos son completamente convectivos. El dominio de integración es $x \in [0,1]$ y se usará el valor $A = 4$, para $x \leq 1/3$ y $A = 1$ para $x > 1/3$. Las condiciones iniciales y de borde son

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$v(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\rho(x, 0) = 1 + 0.0977(1 + \cos(10\pi x)), \quad \forall x \leq 0.1$$

$$\rho(x, 0) = 1, \quad \forall x > 0.1$$

El método de las características permite reducir la EDP a una ecuación diferencial ordinaria a lo largo de curvas denominadas características. En el problema del fluido compresible las características están definidas por las ecuaciones

$$f: \frac{dx}{dt} = v + c, \quad g: \frac{dx}{dt} = v - c$$

Donde $c = A\gamma\rho^{\gamma-1}$ es la velocidad del sonido en el fluido.

Para integrar, se comienza desde la curva $\Gamma = \{(x, 0), x \in [0, 1]\}$, donde los valores de los campos ρ y v son conocidos por condiciones iniciales.

Dados dos puntos P y Q consecutivos en la curva Γ , se determinan los valores del punto R que es aquel donde se intersecan las características f del punto P y g del punto Q. El tiempo asociado al punto R se determina con las ecuaciones de las características

$$x_R - x_P = (v_P + c_P)(t_R - t_P)$$

$$x_R - x_Q = (v_Q - c_Q)(t_R - t_Q)$$

Lo que da como solución

$$t_R = \frac{x_Q - x_P + t_P(v_P + c_P) - t_Q(v_Q - c_Q)}{v_P + c_P - v_Q + c_Q}$$

$$x_R = x_P + (v_P + c_P)(t_R - t_P)$$

Estos son valores aproximados de primero orden. Para mejorar la precisión, se iterará aumentando el orden hasta obtener la convergencia, definida por algún criterio.

Los valores de ρ y v aproximados a primer orden en el punto R se obtienen integrando la ecuación diferencial $c d\rho \pm \rho dv = 0$ sobre la característica correspondiente, lo que se traduce en el siguiente sistema:

$$c_P(\rho_R - \rho_P) + \rho_P(v_R - v_P) = 0$$

$$c_Q(\rho_R - \rho_Q) - \rho_Q(v_R - v_Q) = 0$$

Lo que da como solución

$$v_R = \frac{\frac{v_P \rho_P}{c_P} + \frac{v_Q \rho_Q}{c_Q} + \rho_P - \rho_Q}{\frac{\rho_P}{c_P} + \frac{\rho_Q}{c_Q}}$$

$$\rho_R = \rho_P - \frac{\rho_P}{c_P} (v_R - v_P)$$

Estos valores del punto R se iteran recursivamente hasta obtener la convergencia, con los siguientes sistemas de ecuaciones

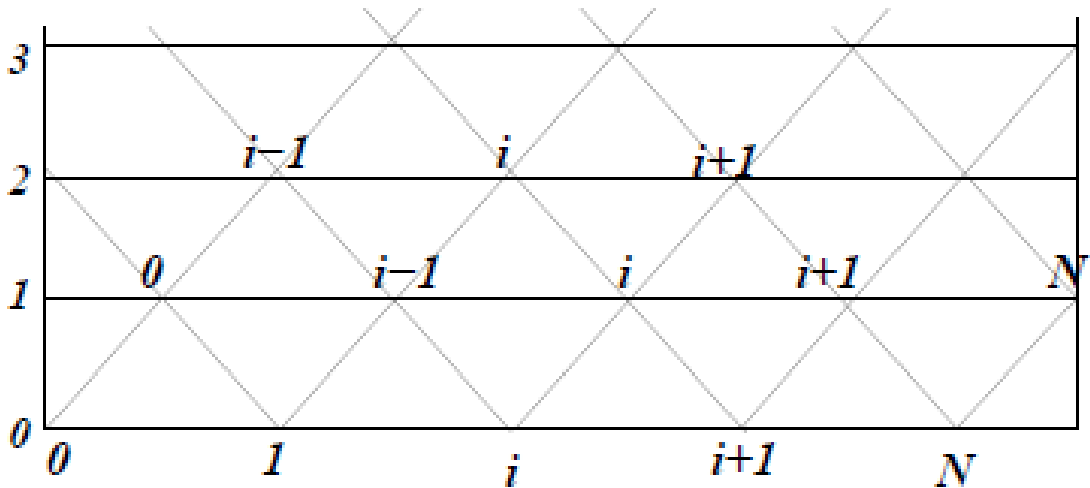
$$x_R^{n+1} - x_P = \frac{1}{2} (v_P + v_R^n + c_P + c_R^n) (t_R^{n+1} - t_P)$$

$$x_R^{n+1} - x_Q = \frac{1}{2} (v_Q + v_R^n - c_Q - c_R^n) (t_R^{n+1} - t_Q)$$

$$(c_P + c_R^n) (\rho_R^{n+1} - \rho_P) = -(v_R^{n+1} - v_P) (\rho_P + \rho_R^n)$$

$$(c_Q + c_R^n) (\rho_R^{n+1} - \rho_Q) = (v_R^{n+1} - v_Q) (\rho_Q + \rho_R^n)$$

Figura 1: curvas características



La figura 1 ilustra la forma en que se va calculando los valores a través del método de las características. Notar que al pasar del tiempo par a impar se debe calcular el último punto R de la secuencia sólo con el punto P de la iteración anterior. Para ello, se usará sólo la ecuación de la característica f desde el punto D, con las condiciones de borde $x_R = 1, v_R = 0$. Las expresiones para t_R y ρ_R son:

$$t_R = \frac{1 - x_P}{v_P + c_P} + t_P$$

$$\rho_R = \rho_P \left(\frac{v_P}{c_P} + 1 \right)$$

Al pasar de tiempo impar a par se debe calcular el primer punto R de la secuencia sólo con el punto Q de la secuencia anterior, usando la característica g y las condiciones de borde $x_R = v_R = 0$. El tiempo y la densidad vienen dados por

$$t_R = \frac{-x_P}{v_P - c_P} + t_P$$

$$\rho_R = \rho_P \left(-\frac{v_P}{c_P} + 1 \right)$$

Se inicia con los valores en $t=0$ y con ellos se calculan los valores del paso siguiente a través de las características, generando una nueva curva Γ , con la cual se repite el proceso y se calculan los valores del segundo paso, generando otra curva Γ , y así sucesivamente. Cada nueva curva Γ calculada tendrá sus propios valores para x, t, ρ, v , pero ya no será uniforme para x ni para t . Se repite este proceso la cantidad de veces que sea necesaria hasta alcanzar una cantidad de datos adecuada para hacer los análisis correspondientes.

En este caso, los valores calculados serán de orden 10 en cuanto a precisión. Para estos fines es que se define el método **avanza(xp,xq,tp,tq,vp,vq,rhop,rhoq,m,A,gamma)**, cuyas variables de entrada son los valores x, t, v, ρ de los puntos P y Q antes definidos, además de A y γ , que son los parámetros de la ecuación de estado. La variable m corresponde al orden que se quiere obtener para los datos calculados; en este caso, $m=10$. El método devuelve un vector $(t_n, x_n, v_n, \rho_n, c_n)$ con los valores del orden deseado.

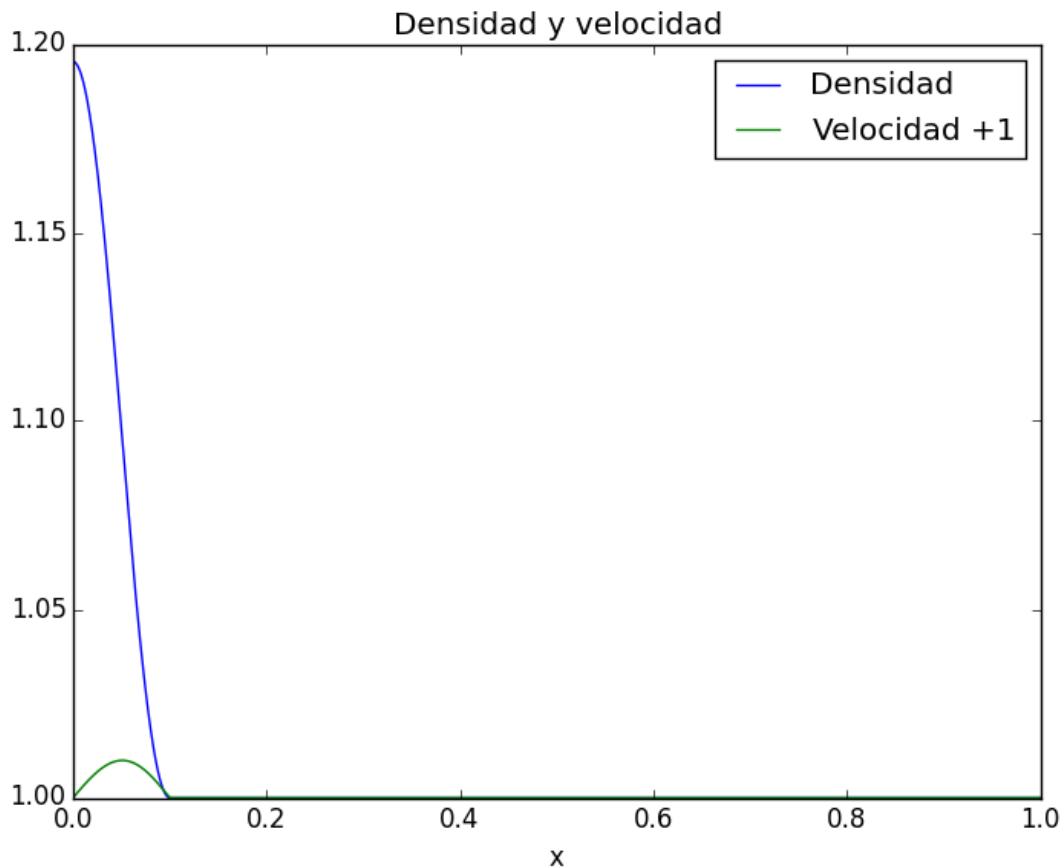
Posteriormente, se divide el intervalo $[0,1]$ en 10.000 intervalos iguales y se comienza a integrar de izquierda a derecha, calculando los bordes de manera diferente al resto, como ya se discutió. Se comienza con la curva Γ de condiciones iniciales, cuyos datos están almacenados en los vectores **x,t,v,rho** y se calculan los dos pasos siguientes (tiempo impar y tiempo par) y se almacenan en una matriz de 2×10.000 , denominadas **x1,t1, v1, rho1**. Una vez hecho esto, se sobrescriben los vectores **x,t,v,rho** con los valores del último paso calculado (los del tiempo par) y se repite el proceso anterior. Se ejecuta esto 50 veces, de modo de obtener 100 pasos (o 100 “tiempos”) y se almacenan los valores del último paso (paso 100) en las matrices de 1.000×10.000 **xf,tf,vf,rhof**, que son las que contendrán los resultados finales. Esto se hace debido a que se necesitan muchas iteraciones para avanzar un par de décimas en el tiempo, por lo que para obtener resultados lejanos en el tiempo y poder estudiar el comportamiento del sistema es necesario seleccionar sólo algunos datos, en este caso 1 de cada 100 iteraciones. Si se quisieran considerar todos los datos, se necesitarían matrices con miles de millones de datos, lo que es imposible tanto en tiempo de cálculo como en memoria del computador. Como las matrices finales tienen 1000 filas, se necesitan $100 \times 1000 = 100.000$ iteraciones para llenar cada una, además de los 10.000 cálculos que requiere cada paso al desplazarse por el eje X. Esto hace que, claramente, el

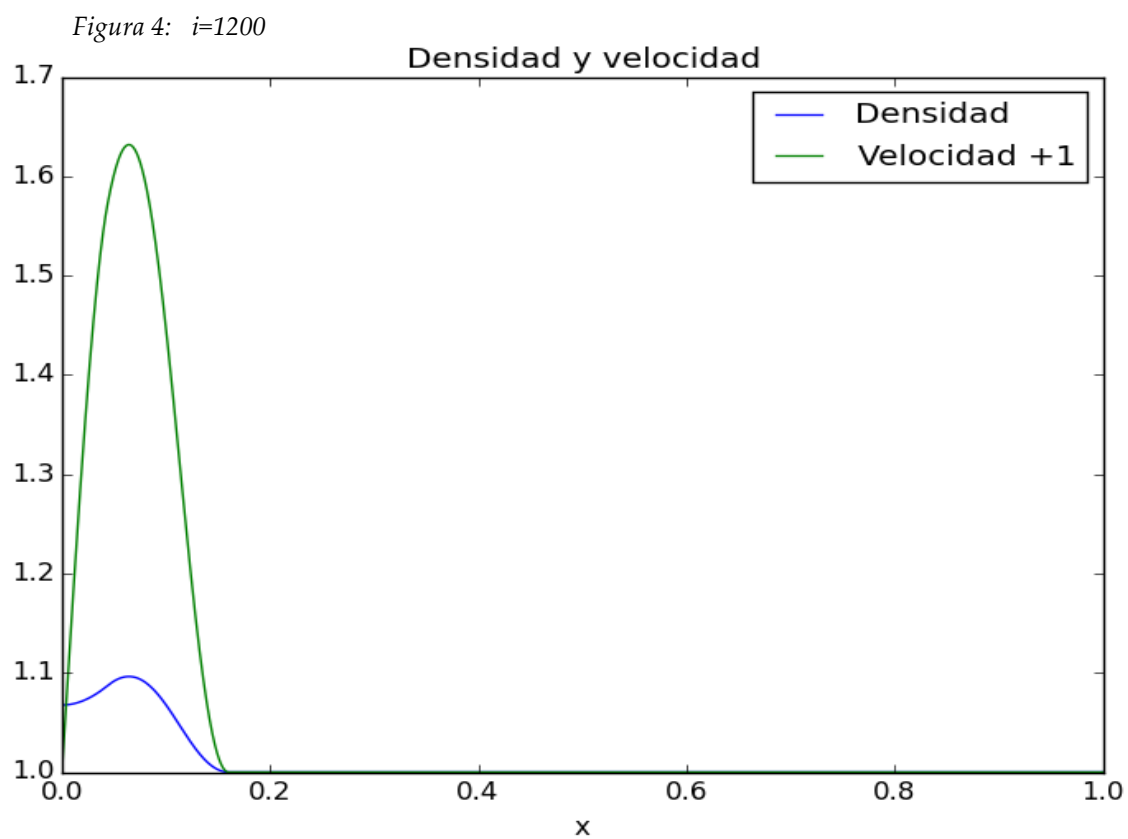
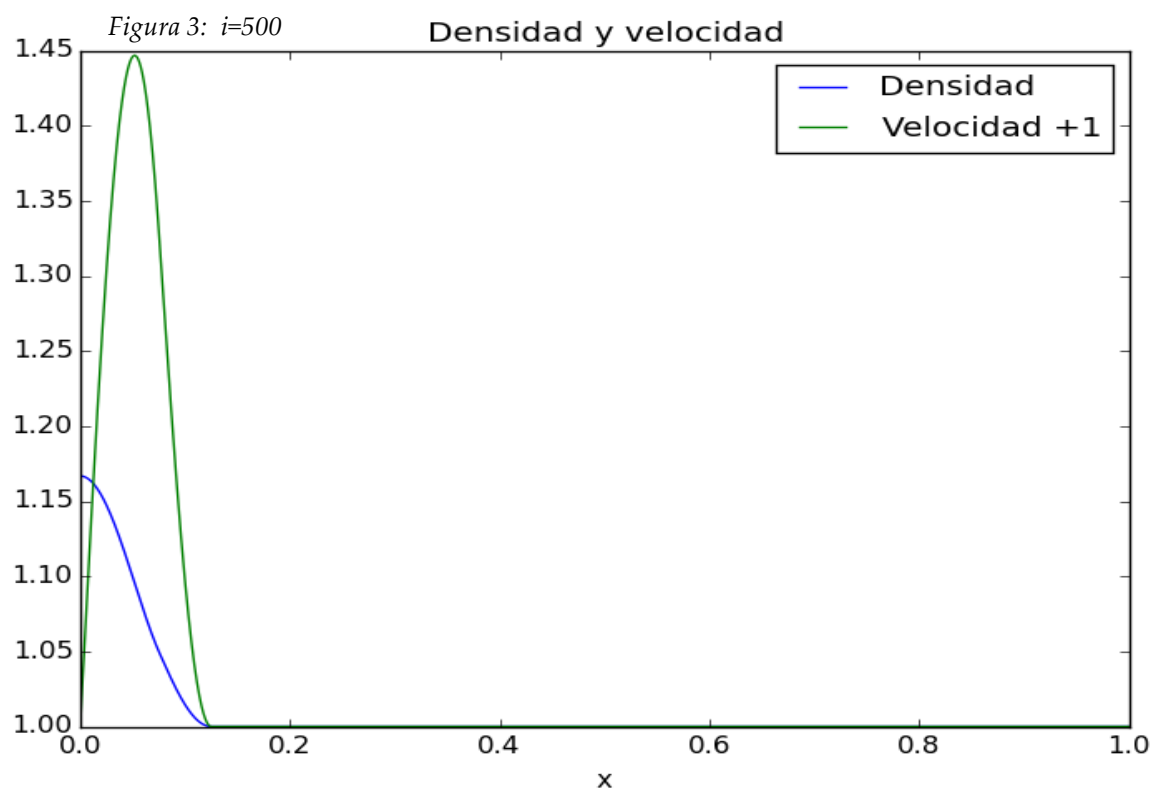
volumen de datos sea demasiado grande y se necesiten tiempos muy largos para obtener los resultados esperados.

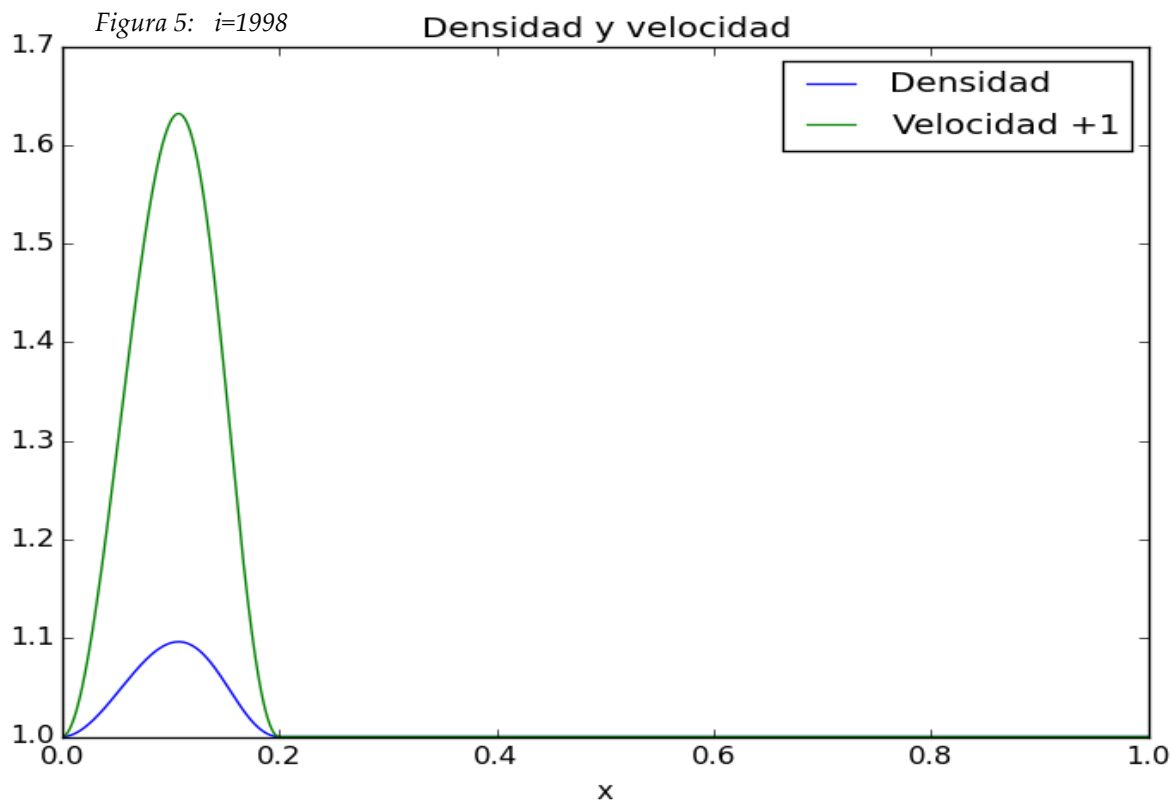
A continuación se presentan gráficos para tiempos cercanos, puesto que lo pedido en la tarea, que es llegar hasta $t=1.2$ requiere un tiempo extraordinariamente grande, del cual el alumno no dispone.

Se integró por tanto sólo sobre 2000 pasos, llegando hasta un tiempo promedio de $t=0.04$ segundos. Los siguientes gráficos presentan las curvas densidad y velocidad+1 en función de x , para $i=10, 500, 1200, 1998$.

Figura 2: $i=10$







A pesar de que el tiempo no es constante a lo largo de la línea de integración, su variación es muy poca, y ella se produce en la zona donde la densidad es constante igual a 1 y la velocidad nula, por lo que los gráficos reproducen fielmente lo que sucede en un tiempo relativamente constante. Los tiempos en cada línea de integración se muestran en los siguientes gráficos:

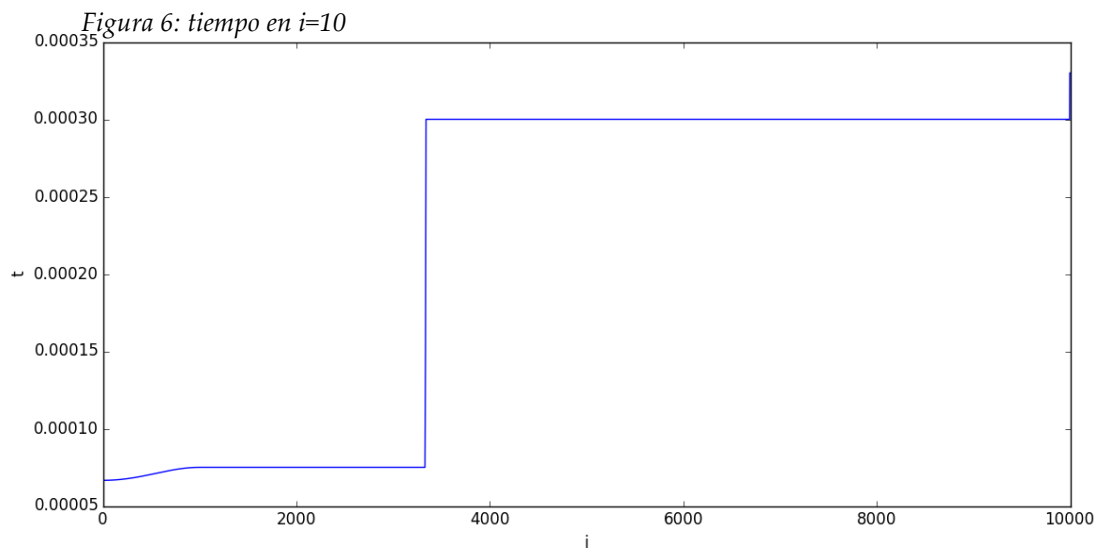


Figura 7: tiempo en $i=500$

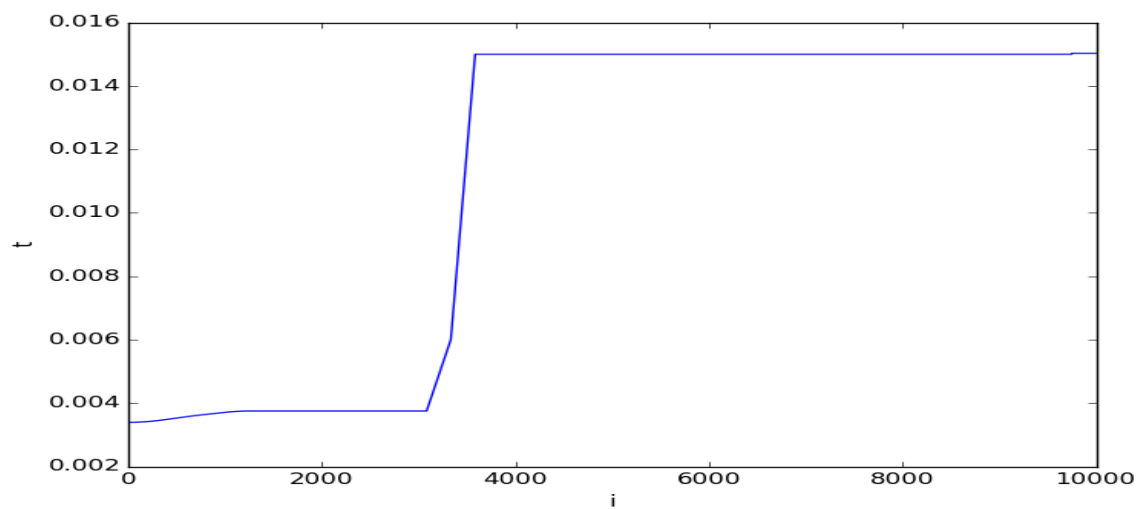


Figura 8: tiempo en $i=1200$

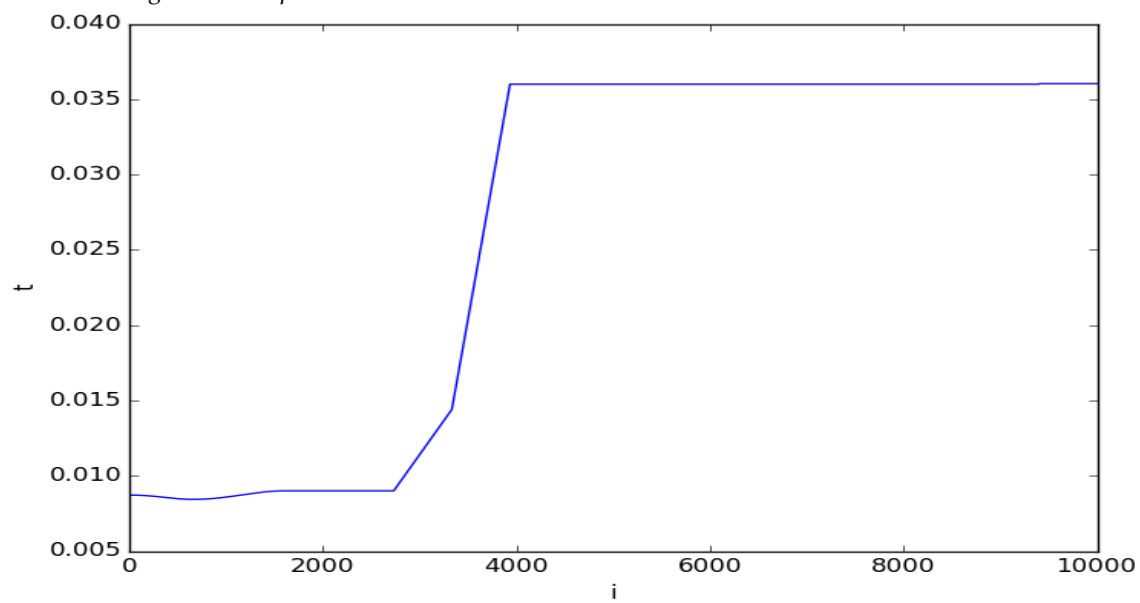
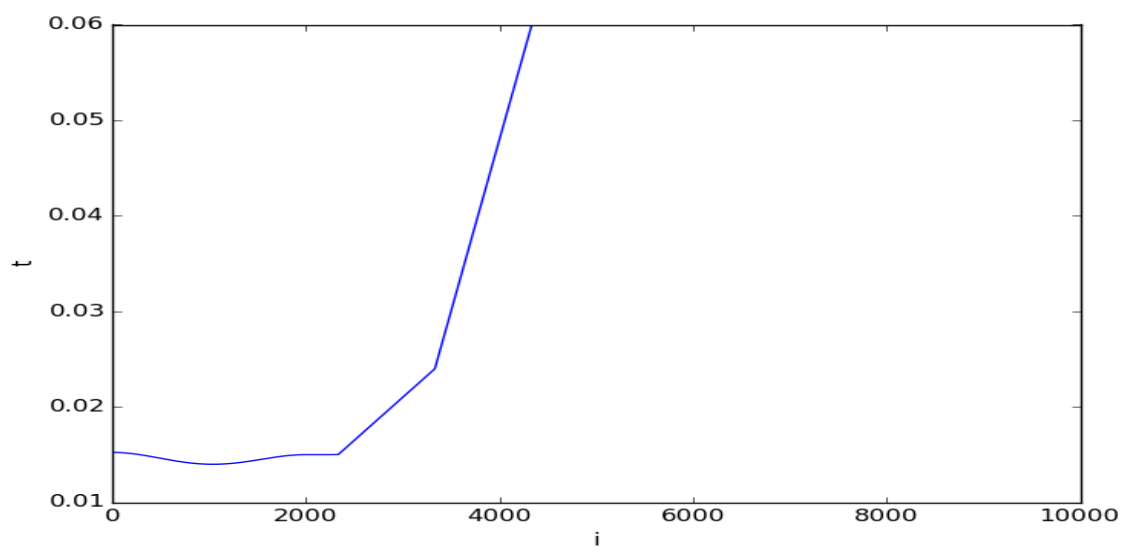


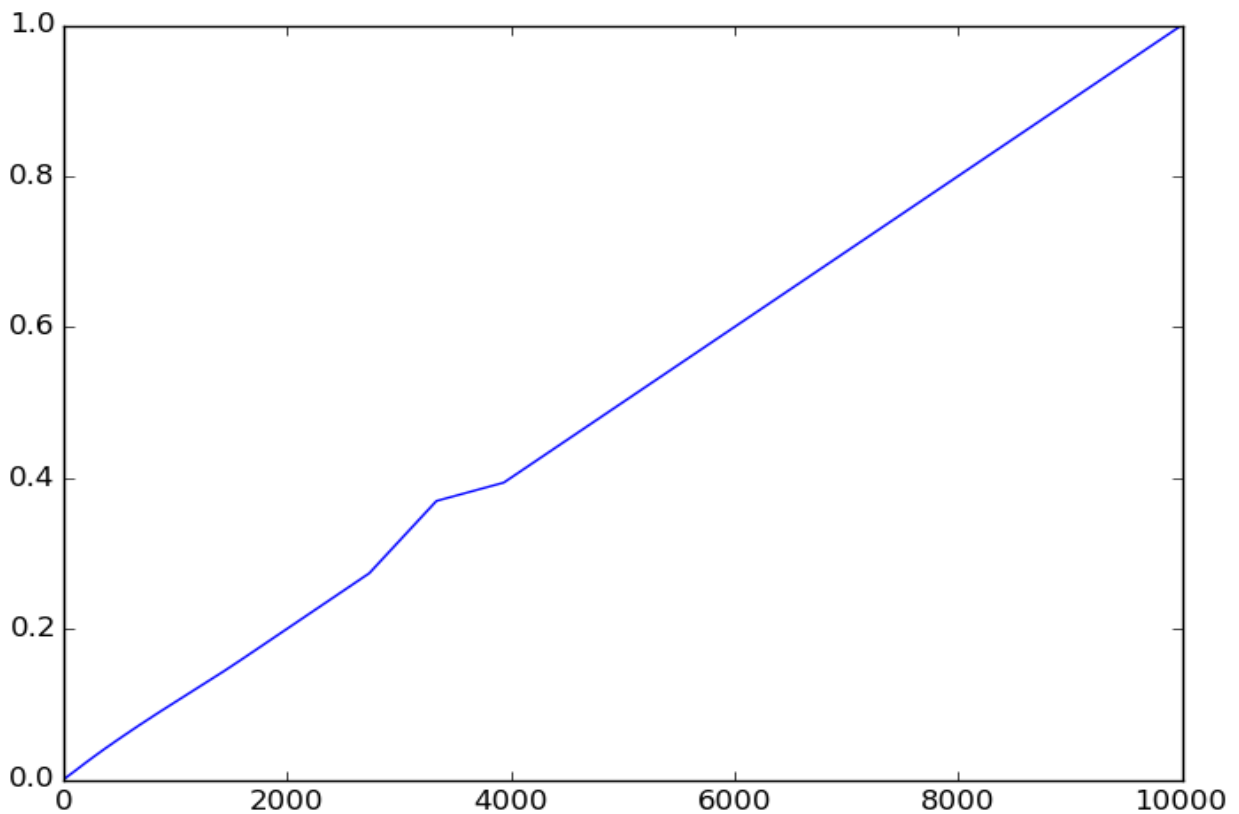
Figura 9: tiempo en $i=1998$



Se puede apreciar que en todos los casos la diferencia de tiempos es poca y muy acotada, además de que esta se produce lejos de la zona de interés donde densidad y velocidad son no constantes. A partir de los gráficos anteriores se puede concluir, entonces, que la figura 2 representa los perfiles de velocidad y densidad para aproximadamente $t=0.00007$ seg, la figura 3 para $t=0.0035$ seg, la figura 4 para $t=0.009$ seg y la figura 5 para $t=0.015$ seg.

Los valores de x permanecen relativamente iguales en todos los casos, como puede verse en la siguiente figura, que representa los valores de x para $i=1200$. Se aprecia, salvo una pequeña zona, x crece monótonamente con j entre 0 y 1.

Figura 10: variación de x en $i=1200$



Para obtener los gráficos anteriores se utilizaron los valores de los 2000 pasos, sin seleccionar 1 cada 100 pasos. Sin embargo, para graficar densidad y velocidad en 3 dimensiones es necesario reducir el número de datos, para evitar problemas de memoria al momento de calcular. Es por esto que las matrices con las soluciones deben reducirse a dimensión 201x100, seleccionando 1 set de soluciones cada 100 pasos (al desplazarnos a través del tiempo) y 1 de cada 100 al desplazarnos por el eje x.

Se puede apreciar, en los gráficos 2 al 5, que la densidad comienza a disminuir su valor máximo, pero aumentando el ancho de la curva, desplazándose hacia la derecha. En el caso de la velocidad, esta aumenta su valor con el tiempo y el frente de velocidades también se desplaza hacia la derecha, pasando desde $x=0.1$ en el gráfico 2 hasta $x=0.2$ en el gráfico 5. Esto indica claramente que el pulso de densidad y velocidad se está desplazando hacia la derecha.

Los siguientes gráficos muestran una imagen tridimensional de la velocidad y la densidad.

Figura 11: velocidad

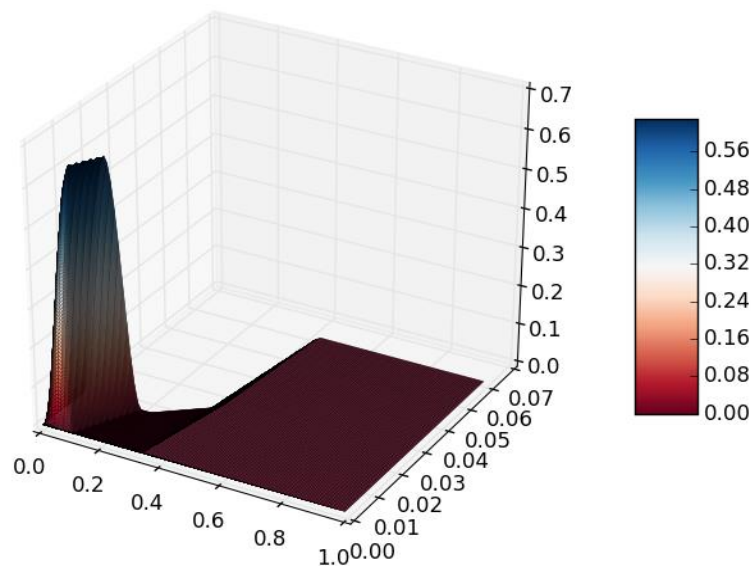
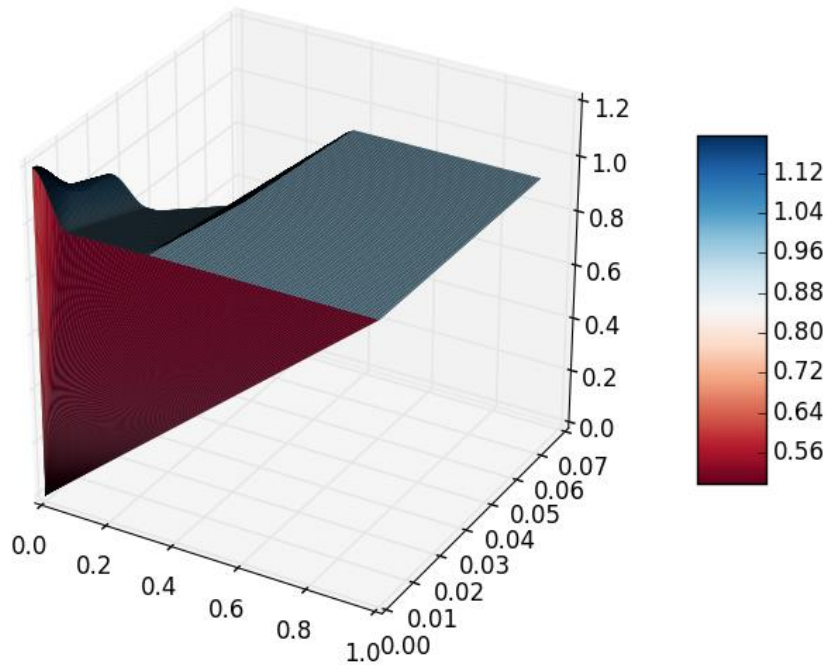


Figura 12: densidad



A pesar de no haber calculado hasta el tiempo especificado (por motivos técnicos), se adjunta el archivo con el código que lo realiza, para implementarlo en cualquier computador que tenga Python. El archivo que contiene este código es **tarea7.py**. Los gráficos y resultados en este informe tuvieron que hacerse con un código muy similar al anterior, pero con menos iteraciones. Tal código está contenido en el archivo **tarea7_2.py**