



CICLO ITA 1 - FÍSICA

TURMA IME-ITA

2022



GABARITO

1. $8H(v - gn)^2 = gn^2(2v - gn)^2$
2. $erro = 0,01\%$
3. $t = 60T$
4. $Q_{transf} = 2C$
5. $\alpha_c = \alpha_1$
6. a. $\vec{v}_{img} = (4, t, 3)$
b. $\vec{S}_{img} = (4t, -t^2 - 10, 3t)$
7. $Q = -\frac{2\pi\lambda R h^3}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$
8. $v = 15,23 \text{ m/s}$
9. $\omega = \frac{\theta c}{2nR}$
10. $t = 11,5 \text{ s}$

1ª QUESTÃO

Uma pedra é solta do alto de uma torre de altura H . Após se passarem n segundos, outra pedra é arremessada para baixo com uma velocidade v . Mostre que as duas pedras chegarão ao solo juntas se:

$$8H(v - gn)^2 = gn^2(2v - gn)^2$$

Gabarito

Calculando o tempo para a primeira pedra atingir o chão:

$$0 = H - \frac{gt^2}{2} \quad (\text{I})$$

Calculando o tempo para a segunda pedra, lançada n segundos depois, atingir o chão:

$$0 = H - v(t - n) - \frac{g(t - n)^2}{2} \quad (\text{II})$$

Como o t tem o mesmo valor, podemos isolar nas duas equações e igualar
Equação I:

$$\frac{gt^2}{2} = H \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Bhaskara na equação II:

$$t - n = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot H}}{2 \cdot \frac{g}{2}}$$

Como $t - n > 0$:

$$t - n = -\frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} \quad t = n - \frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}$$

Igualando:

$$n - \frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \sqrt{\frac{2H}{g}} - n + \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}$$

Elevando ao quadrado:

$$\frac{2H}{g} + \frac{v^2}{g^2} - 2n \cdot \frac{v}{g} + n^2 + 2 \left(\frac{v}{g} - n \right) \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}$$

Simplificando:

$$\frac{2nv}{g} - n^2 = 2 \left(\frac{v}{g} - n \right) \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad n(2v - gn) = 2(v - gn) \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Elevando novamente ao quadrado e multiplicando por g :

$$\boxed{8H(v - gn)^2 = gn^2(2v - gn)^2}$$

2ª QUESTÃO

Dois carros, A e B , se encontram inicialmente na origem do eixo x . Um observador inercial O , também localizado na origem, mede o tempo de percurso dos carros e suas velocidades por meio de um relógio pendular de período igual a 2 s à 20 °C. O carro A parte primeiro em M.U. na direção positiva do eixo x e sua velocidade medida é de 36 km/h. Após 30 min de percurso, a temperatura do ambiente é elevada instantaneamente à 40 °C, de modo que o relógio sofra uma dilatação também instantânea. Nesse mesmo instante, o carro B parte do eixo x no mesmo sentido de A , de tal forma que, sem os devidos conhecimentos de dilatação e não percebendo a variação na velocidade medida de A , o tempo de encontro medido pelo observador foi de 2 h. Calcule o erro na velocidade do carro B , medida pelo observador.

Dados

- $\alpha = 4 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Gabarito

Podemos descobrir a distância entre A e B no instante em que B começa a se deslocar:

$$\Delta S_A = 36 \cdot 0,5 = 18 \text{ km}$$

Sendo assim, conseguimos encontrar a velocidade relativa medida entre os carros:

$$v_{rel} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{18 \text{ km}}{1,5 \text{ h}} = 12 \text{ km/h}$$

Portanto, a velocidade de B vale:

$$v_B = 12 + 36 = 48 \text{ km/h}$$

No entanto, houve um erro na medição do tempo, que podemos encontrar da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1}{2} t_0 \alpha \Delta \theta$$

Onde $\Delta t = t - t_0$, sendo t_0 o tempo correto e t o tempo incorreto (1,5 h).

Logo:

$$t = t_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \Delta \theta \right) \Rightarrow \Rightarrow t_0 = \frac{t}{1 + \frac{1}{2} \alpha \Delta \theta} = \frac{1,5}{1 + 0,5 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = \frac{1,5}{1,0004}$$

Portanto, conseguimos encontrar a velocidade real:

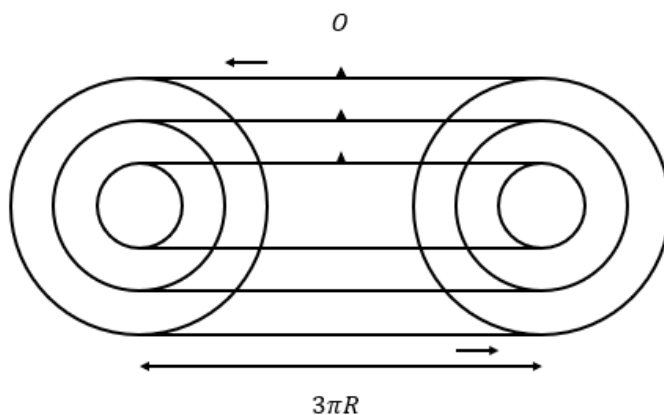
$$v_{rel} = \frac{18 \text{ km}}{\frac{1,5}{1,0004} \text{ h}} = 12,0048 \text{ km/h} \quad v_{B,real} = 36 + 12,0048 = 48,0048 \text{ km/h}$$

Logo, chegamos ao erro na aferição da velocidade:

$$erro = \frac{v_{B,real} - v_B}{v_{B,real}} = \frac{0,0048}{48,0048} \Rightarrow \boxed{erro = 0,01\%}$$

3ª QUESTÃO

Dois eixos iguais são construídos em forma de três cilindros concêntricos cujos raios valem respectivamente R , $2R$ e $3R$ e a distância entre os centros vale $L = 3\pi R$. Ambos os eixos giram com mesmo período de rotação T e três correias são presas nos eixos como mostra a figura. Em cada correia há uma marca, que no instante $t = 0$, está alinhada com a referência O . Supondo que as correias giram sem escorregar nos eixos, qual o menor tempo para que as três marcas estejam alinhadas novamente com a referência O ?



Gabarito

Vamos calcular a velocidade com as quais as correias se movem:

$$v_1 = \omega \cdot R; \quad v_2 = \omega \cdot 2R; \quad v_3 = \omega \cdot 3R$$

Substituindo ω por $\frac{2\pi}{T}$, temos:

$$v_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot R; v_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot 2R; v_3 = \frac{2\pi}{T} \cdot 3R$$

Analisando o período que leva para cada correia retornar ao ponto O :

Correia 1:

$$\Delta S_1 = 2\pi R + 6\pi R = 8\pi R = v \cdot t_1 \Rightarrow 8\pi R = \frac{2\pi R}{T} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 4T$$

Correia 2:

$$\Delta S_1 = 2\pi \cdot 2R + 6\pi R = 10\pi R = v \cdot t_2 \Rightarrow 10\pi R = \frac{2\pi R}{T} \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 5T$$

Correia 3:

$$\Delta S_1 = 2\pi \cdot 3R + 6\pi R = 12\pi R = v \cdot t_3 \Rightarrow 12\pi R = \frac{2\pi R}{T} \cdot t_3 \Rightarrow t_3 = 6T$$

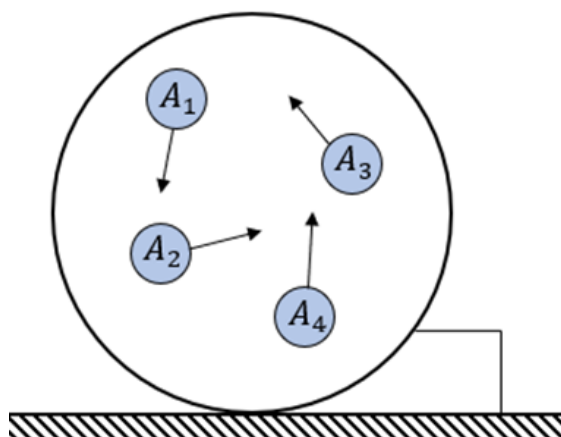
Sendo assim, o tempo para todas estarem alinhadas em O é o MMC dos tempos t_1 , t_2 e t_3 .

Logo:

$$t = 60T$$

4ª QUESTÃO

Na figura abaixo temos quatro esferas idênticas em um recipiente esférico condutor aterrado por um fio.



Inicialmente, apenas as esferas A_1 e A_3 encontram-se carregadas, com cargas elétricas iguais a 4 C e -5 C, respectivamente. Durante o movimento aleatório das esferas dentro do recipiente, a esfera A_1 choca-se com a esfera A_2 . Posteriormente, a esfera A_2 choca-se simultaneamente com a esfera A_3 e A_4 . Após, a esfera A_3 choca-se com a parede do recipiente. Por fim, a esfera A_4 choca-se com a parede do recipiente e atinge, depois disso, a esfera A_1 . Sabendo que durante o movimento das cargas ocorrem apenas os choques citados acima e tais choques não dissipam energia, determine:

- A carga final da esfera A_4 .
- A carga total transferida através do fio durante todo o processo.

Gabarito

Listando as cargas das esferas:

$$Q_{A_2} = Q_{A_4} = 0 \text{ C}; Q_{A_1} = 4 \text{ C}; Q_{A_3} = -5 \text{ C}$$

Vamos analisar choque a choque.

Primeiro choque: esferas A_1 e A_2 .

$$Q_{A_1} = Q_{A_2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \text{ C}$$

Segundo choque: esferas A_2 , A_3 e A_4 .

$$Q_{A_2} = Q_{A_3} = Q_{A_4} = \frac{2 + (-5) + 0}{3} = -1 \text{ C}$$

Terceiro e quarto choques: esferas A_3 e A_4 com a parede do recipiente.

Como o recipiente se encontra aterrado:

$$Q_{A_3} = Q_{A_4} = 0 \text{ C}$$

Quinto choque: esferas A_4 e A_1 .

$$Q_{A_1} = Q_{A_4} = \frac{0 + 2}{2} = 1 \text{ C}$$

Portanto, temos o item (a):

$$Q_{A_4} = 1 \text{ C}$$

Item (b):

As cargas transferidas no aterramento foram as de A_4 e A_3 nos instantes dos choques com o recipiente.

$$Q_{transf} = |(-1) + (-1)| = 2 \text{ C}$$

5ª QUESTÃO

Três barras metálicas A , B e C são dispostas de modo que A e B possuem o mesmo comprimento L e são articuladas por um pino P . A barra C é posta em contato pelas extremidades com as barras A e B , de modo que juntas formem um triângulo obtuso de abertura θ . Considerando α_A , o coeficiente de dilatação linear da barra A , e α_B , o coeficiente de dilatação linear da barra B , tal que, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_1$, calcule o coeficiente de dilatação linear da barra C de modo que, para qualquer temperatura, o triângulo formado pelas três barras seja semelhante ao inicial.

Gabarito

Para o triângulo ser semelhante após um ΔT , temos que garantir que o ângulo \hat{C} permaneça o mesmo. Usando lei dos cossenos no início:

$$L_{0C}^2 = L^2 + L^2 - 2L^2 \cos \theta = 2L^2(1 - \cos \theta) \quad (\text{II})$$

Após ΔT , temos:

$$L_{0C}^2(1 + \alpha_c \Delta T)^2 = L^2(1 + \alpha_1 \Delta T)^2 + L^2(1 + \alpha_1 \Delta T)^2 - 2L^2(1 + \alpha_1 \Delta T)^2 \cos \theta$$

Logo:

$$L_0 C^2 (1 + \alpha_c \Delta T)^2 = 2L^2 (1 - \cos \theta) (1 + \alpha_1 \Delta T)^2 \quad (II)$$

Substituindo I em II e simplificando, chegamos em:

$$\begin{aligned} L_0 C^2 (1 + \alpha_c \Delta T)^2 &= L_0 C^2 (1 + \alpha_1 \Delta T)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 + \alpha_c \Delta T)^2 &= (1 + \alpha_1 \Delta T)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + \alpha_c \Delta T &= 1 + \alpha_1 \Delta T \end{aligned}$$

Sendo assim, chegamos em:

$$\boxed{\alpha_c = \alpha_1}$$

6ª QUESTÃO

Um espelho plano, inicialmente posicionado no plano xz , translada segundo o vetor velocidade:

$$\vec{V} = (t^3 - 4t + 8, 3t, t^2)$$

Enquanto isso, uma massa pontual move-se segundo a equação de movimento:

$$\vec{S} = (4t, \frac{5t^2}{2} + 10, 3t)$$

Determine:

- O vetor velocidade da imagem no instante $t > 0$.
- A posição da imagem no instante t .

Gabarito

Para o primeiro item, podemos calcular a velocidade da imagem lembrando que: as componentes da velocidade do corpo paralelas ao espelho são iguais às componentes da velocidade. Porém, perpendicularmente ao plano do espelho, temos a seguinte relação:

$$v_{img} = 2v_{esp} - v_{obj}$$

Calculando a velocidade da massa pontual:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = (4, 5t, 3)$$

Sendo assim, temos nos eixos x e z :

$$v_{x,img} = v_{x,obj} = 4$$

$$v_{y,img} = v_{y,obj} = 3$$

$$v_{z,img} = 2v_{y,esp} - v_{y,obj} = 2 \cdot 3t - 5t = t$$

Portanto, temos:

$$\boxed{\vec{v}_{img} = (4, t, 3)}$$

Para o segundo item, podemos usar a mesma ideia, mas com a posição, lembrando que o espelho inicialmente se encontra na origem.

Posição do espelho

$$y_{esp} = \int 3t \, dt = \frac{3t^2}{2}$$

Sendo assim:

$$x_{img} = x_{obj} = 4t$$

$$y_{img} = 2y_{esp} - y_{obj} = 2 \cdot \frac{3t^2}{2} - \left(\frac{5t^2}{2} + 10 \right) = -t^2 - 10$$

$$z_{img} = z_{obj} = 3t$$

Portanto, a posição da imagem é:

$$\vec{S}_{img} = (4t, -t^2 - 10, 3t)$$

Outra forma que podemos fazer este item seria usar a velocidade da imagem e adicionar as condições iniciais:

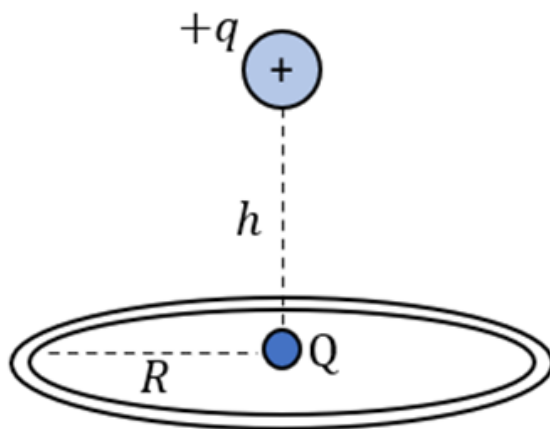
$$\vec{S}_{img} = \int \vec{v}_{img} \, dt \vec{S}_{img} = \left(4t + x_0, \frac{t^2}{2} + y_0, 3t + z_0 \right)$$

Porém, no início ($t = 0$), temos que $y_{0,img} = -y_{0,obj} = -10$, uma vez que o espelho se encontra na origem, enquanto as coordenadas xz são as mesmas do objeto. Logo:

$$\vec{S}_{img} = (4t, -t^2 - 10, 3t)$$

7ª QUESTÃO

Uma esfera A carregada com carga elétrica $+q$ encontra-se verticalmente acima do centro de um aro circular fixo com densidade linear uniforme de carga λ .



Sabendo que o raio do aro é R e a distância entre a esfera A e o centro do aro é h , determine o valor da carga Q que deve ser fixada no centro do aro a fim de que a esfera A esteja em equilíbrio eletrostático. Desconsidere a gravidade no local.

Gabarito

Vamos calcular a força elétrica resultante na carga $+q$.

Pegando um pedaço pequeno do aro (dl) e usando a lei de Coulomb, encontramos uma força de módulo igual a:

$$dF_{el} = \frac{kq(\lambda dl)}{D^2}$$

Onde, por Pitágoras, D vale $\sqrt{h^2 + R^2}$.

No entanto, percebemos pela simetria que as componentes horizontais da força elétrica se anulam. Sendo assim, podemos calcular a força resultante em y somando todas as forças.

$$F_y = \sum F_{el} \cdot \cos(\theta)$$

Nesse caso, conseguimos encontrar o valor para $\cos(\theta)$:

$$\cos(\theta) = \frac{h}{D} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

Portanto, temos:

$$F_y = \sum \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \cdot \frac{kq\lambda dl}{h^2 + R^2}$$
$$F_y = \frac{kqh\lambda}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \sum dl$$

Sendo assim, chegamos em:

$$F_y = \frac{kqh\lambda 2\pi R}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como a carga Q precisa anular a força F_y , temos que:

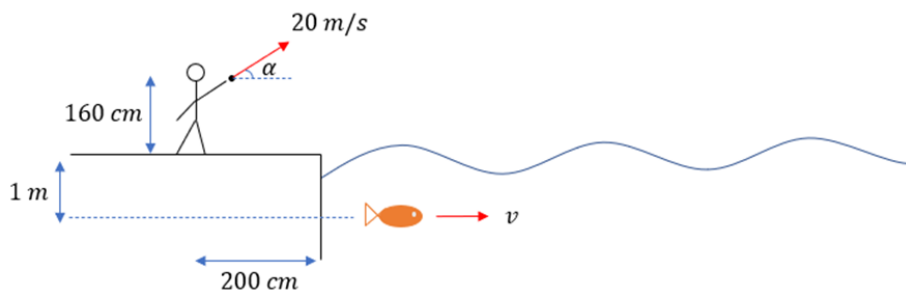
$$\frac{kqh\lambda 2\pi R}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{kQq}{h^2} = 0$$

Portanto:

$$Q = -\frac{2\pi\lambda R h^3}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

8ª QUESTÃO

Nenan Runes, um famoso pescador que utiliza métodos antigos, está a calcular a velocidade com que precisa jogar sua lança para acertar um peixe. Sabendo que Nenán joga a lança no mesmo instante em que o peixe sai da borda da superfície, e que calculou que a velocidade com que deveria jogar sua lança é de 20 m/s , calcule a velocidade do peixe.



Dados

- $\alpha = 37^\circ$

Gabarito

Calculando o tempo de voo da lança:

$$H = H_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

$$-1 = 1,6 + 20 \cdot \frac{3}{5} \cdot t - \frac{10t^2}{2} \Rightarrow 5t^2 - 12t - 2,6 = 0 \therefore t = 2,6 \text{ s}$$

Assim, conseguimos encontrar a distância horizontal percorrida pela lança:

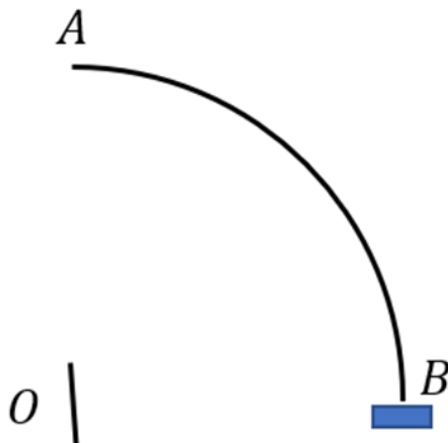
$$\Delta S = v_x \cdot t = 20 \cdot \frac{4}{5} \cdot 2,6 = 41,6 \text{ m}$$

Como o peixe começou o movimento $2,0 \text{ m}$ à frente, ele percorreu $39,6 \text{ m}$ até ser atingido pela lança. Sendo assim, podemos calcular sua velocidade:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{39,6}{2,6} \Rightarrow \boxed{v = 15,23 \text{ m/s}}$$

9ª QUESTÃO

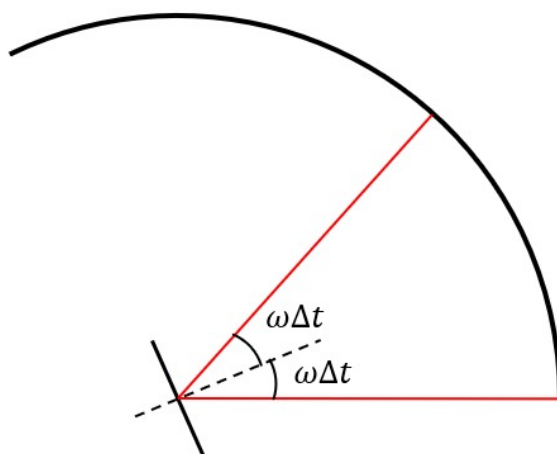
Localizado no centro de um anteparo circular de raio R e arco $\widehat{AB} = \theta$, está disposto um espelho plano, o qual gira em torno do centro com velocidade angular ω . No instante inicial $t = 0$, um laser muito próximo de B é ativado por um instante em direção ao centro, de modo que todo raio refletido no arco \widehat{AB} retorne pela mesma direção à qual incidiu.



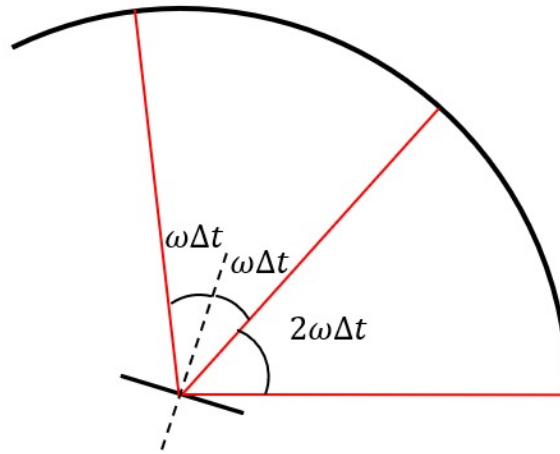
Neste mesmo instante, o espelho inicia seu movimento. Determine os possíveis valores de ω que permitam o raio emitido atingir um receptor colocado em A . Considere que durante a trajetória do raio, o espelho não realiza nenhuma volta completa.

Gabarito

A principal dificuldade da questão encontra-se na visualização do que está ocorrendo, assim como a determinação dos ângulos de rotação do feixe a cada reflexão. Para facilitarmos a notação ao longo da resolução da questão, chamamos de Δt a expressão $\frac{R}{c}$, o tempo para a luz ir do centro à circunferência. Com isso note que, inicialmente, partindo do ponto inicial até a extremidade, terá se passado Δt . Deste modo, o espelho rotacionará $\omega\Delta t$, gerando um raio de luz que fará um ângulo de $2\omega\Delta t$ com a horizontal:



No entanto, note agora que, desde a saída do feixe de luz até seu retorno ao espelho central, terá se passado $2\Delta t$, de onde vemos que o espelho rotacionará $2\omega\Delta t$, resultando na seguinte configuração:



Com isso, note o seguinte padrão: A cada ida e volta do feixe de luz, o espelho irá rotacionar $2\omega t$, de modo que sua normal fique ωt à esquerda do feixe incidente. Este último por sua vez, irá rotacionar $2\omega t$ no sentido anti-horário, de onde caímos em uma situação análoga à anterior (normal do espelho ωt à esquerda indo até ωt à esquerda, rotacionando o raio de $2\omega t$).

Portanto, vemos que a cada ida e volta, será adicionado o valor de $2\omega t$ no arco percorrido pelo laser, o qual atingirá o anteparo em arcos múltiplos de $2\omega \Delta t$. Portanto, como o laser parte de A e atinge B, sabemos que o ângulo total varrido pelo laser é θ , ou seja:

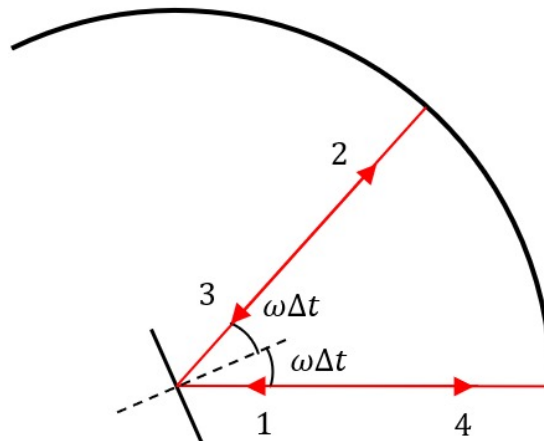
$$n \cdot 2\omega \Delta t = \frac{2n\omega R}{c} = \theta$$

Logo:

$$\omega = \frac{\theta c}{2nR}$$

\ Onde $n \in \mathbb{N}$

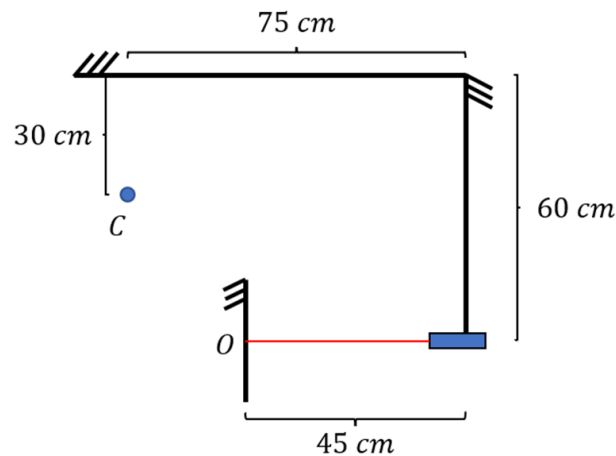
Obs: Veja que, embora o espelho rotacione $2\omega t$ a cada "ciclo"(ida e volta), o raio de luz também gira $2\omega t$, ao invés do dobro. Note que, na verdade, caso o espelho mantivesse sua posição após a primeira reflexão, por exemplo, o raio não refletiria novamente para a direção incidente, mas sim voltaria para a horizontal, percorrendo o caminho 1-2-3-4:



Ou seja, a partir da incidência do feixe '3', o raio que será rotacionado pelo giro do espelho será o raio refletido, 4, e não o raio da direção 2. Portanto, vemos que de fato, o raio 4 é rotacionado de $4\omega t$, como esperado pela teoria.

10ª QUESTÃO

A figura abaixo mostra 3 espelhos planos, sendo 2 destes fixos, formando entre si um ângulo de 90° e o terceiro com livre rotação em torno do ponto O :

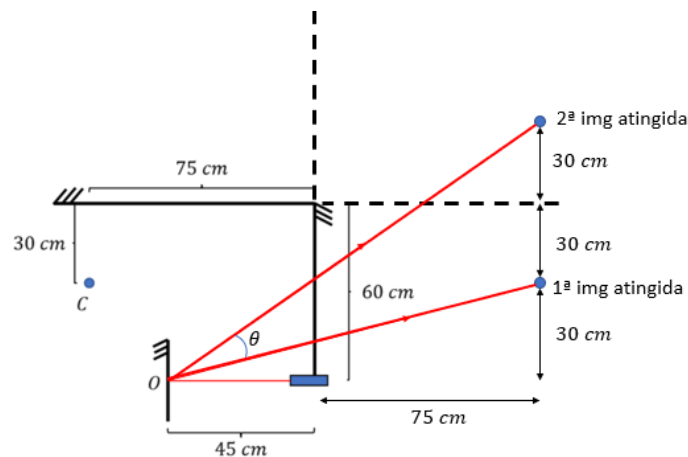


No ponto C , colocou-se um cronômetro, o qual inicia sua contagem ao ser atingido pelo laser e a termina após ser atingido pelo laser uma segunda vez. Determine a marcação do cronômetro, sabendo-se que o espelho em O gira no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante e igual a $1^\circ/\text{s}$.

Gabarito

Podemos sempre trocar múltiplas reflexões por um caminho em linha reta. Sabendo isso, como queremos que o laser atinja o cronômetro em C duas vezes, basta analisarmos as primeiras 2 imagens do ponto C que o laser pode atingir no seu caminho "em linha reta".

Assim, temos a seguinte figura:



O ângulo θ marcado na figura é o ângulo varrido pelo laser do início da contagem até o final. Calculando o valor de θ conseguimos encontrar o ângulo que o espelho girou.

O ângulo que o feixe faz para atingir a primeira imagem vale:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{30}{45 + 75}\right) = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

Nesse caso, como $\tan(\theta)$ é pequeno, podemos aproximar da seguinte maneira:

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{4} \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot \frac{180}{\pi} \approx 14^\circ$$

Para a segunda imagem, temos:

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{3 \cdot 30}{45 + 75}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 37^\circ$$

Portanto, podemos encontrar o valor de θ :

$$\theta = 37 - 14 = 23^\circ$$

Portanto, como sabemos que o ângulo varrido pelo feixe é o dobro do ângulo rotacionado pelo espelho (chamaremos de β), temos:

$$\beta = \frac{23^\circ}{2} = 11,5^\circ$$

Sendo assim, o tempo medido no cronômetro vale:

$$t = 11,5 \text{ s}$$