

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Considere o número natural $n = 720$. Responda.

- a. (Valor: 0,5) Quantos divisores inteiros positivos possui n ?
- b. (Valor: 0,5) Quantos divisores inteiros positivos de n são múltiplos de 2 e de 3?
- c. (Valor: 0,5) Quantos divisores inteiros positivos de n são múltiplos de 2 ou de 3?
- d. (Valor: 0,5) Quantos são os números inteiros e positivos k , tais que $1 \leq k \leq n$, de modo que $\text{mdc}(n, k) = 1$?

Questão 2

Resolva:

- a. (Valor: 1,0) Sendo a e b reais, calcule o Valor: de $\frac{9}{5}(a + b)$ de acordo com o sistema de equações

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 183 \\ b\sqrt{a} + a\sqrt{b} = 182 \end{cases}$$

- b. (Valor: 1,0) Determine todas as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

Questão 3

Sejam os reais positivos x e y . Dessa forma, define-se:

$$F(x, y) = \frac{(x + y)(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

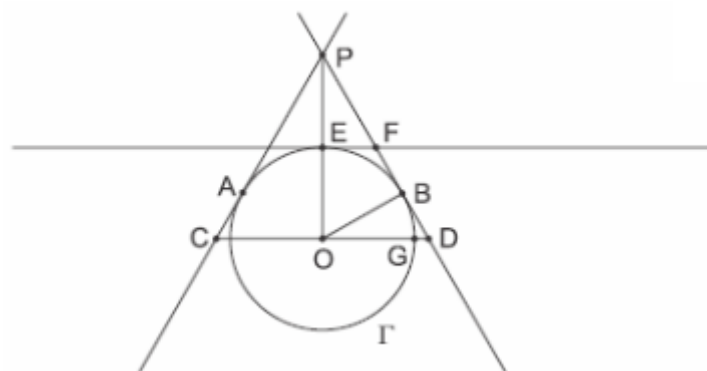
- a. (Valor: 0,5) Demonstre que $F(x, y) \geq 1$
- b. (Valor: 0,5) Substitua $a = x + y$ e $b = xy$ e determine uma expressão para $F(a, b)$
- c. (Valor: 0,5) Conclua que $F(a, b) \leq \frac{9}{8}$.

Questão 4

Leia os enunciados 1 e 2 abaixo para responder o que se pede.

Enunciado 1

Considere na figura abaixo uma circunferência Γ , com centro em O e raio igual a 3. Nela, seja o triângulo PCD equilátero, com altura OP medindo 6 unidades de comprimento e segmentos PA , PB e EF tangentes à circunferência.



- (Valor: 0,5) Qual a área do trapézio $ODFE$?
- (Valor: 0,5) Qual a área do setor circular OGB ?
- (Valor: 0,5) Qual a área da região que é simultaneamente exterior à circunferência Γ e interior ao triângulo PCD ?

Enunciado 2

Um ponto M é selecionado ao acaso no interior de um círculo C de raio 2 e centro O . Em seguida, constrói-se um quadrado, também centrado em O , que tem M como ponto médio de um de seus lados.

- (Valor: 0,5) Qual o lugar geométrico descrito pelo conjunto de pontos M de modo que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo C ?
- (Valor: 0,5) Calcule a probabilidade de que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo C ?

Questão 5

Considere o conjunto C de pontos do plano cartesiano da forma (m, n) , com m e n pertencentes a $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- (Valor: 1,0) Apresente todos os pontos (m, n) de C para os quais o produto $m \cdot n$ é maior do que 60.
- (Valor: 0,5) Sorteando-se um ponto (m, n) de C , com iguais probabilidades para todos os pontos, qual é a probabilidade de que a fração m/n seja redutível?
- (Valor: 0,5) Sorteando-se, com iguais probabilidades, dois pontos distintos de C , qual é a probabilidade de que a distância entre eles seja igual a $\sqrt{13}$?