



# CICLO IME 4 - MATEMÁTICA

TURMA IME-ITA

2022



## DADOS

### Elementos

Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar (g mol <sup>-1</sup> )	Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar (g mol <sup>-1</sup> )
H	1	1,01	Cl	17	35,45
He	2	4,00	Ar	18	39,95
C	6	12,01	K	19	39,10
N	7	14,01	Ca	20	40,08
O	8	16,00	Cr	24	52,00
F	9	19,00	Fe	26	55,84
Ne	10	20,18	Cu	29	63,55
Na	11	22,99	Zn	30	65,38
Mg	12	24,31	Br	35	79,90
S	16	32,06	I	53	126,90

### 1ª QUESTÃO

Valor: 1,00

Definindo  $\{X\}$  como o número inteiro mais próximo do número real  $X$ , por exemplo  $\{4,3\} = 4$  e  $\{7,7\} = 8$ , calcule o somatório:

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + \cdots + \{\sqrt{100}\}.$$

### 2ª QUESTÃO

Valor: 1,00

Considere o polinômio abaixo:  $P(x) = x^4 + 10x^3 + 33x^2 + 40x + 16 + k$  Sabendo que  $-9$  é o valor mínimo desse polinômio, determine todas as raízes de  $P(x)$ .

<b>3ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>O lugar geométrico descrito pela equação <math>3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0</math> equivale à união de duas retas concorrentes. Sendo assim, determine:</p> <p>(a) O ponto de interseção.  (b) O ângulo entre as retas.</p>	
<b>4ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Determine quantos subconjuntos <math>S</math> não vazios de <math>1, 2, \dots, 14, 15</math> existem tais que:</p> <p>(i) não existem dois inteiros consecutivos pertencentes a <math>S</math>;  (ii) se <math>S</math> possui <math>k</math> elementos, então nenhum elemento de <math>S</math> será menor que <math>k</math>.</p>	
<b>5ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Considere as funções afins crescentes <math>f(x) = ax + b</math> e <math>g(x) = bx + a</math>, onde <math>a, b \in \mathbb{Z}</math>. Determine todos os possíveis valores de <math>a</math> e <math>b</math> tais que:</p> $f \circ g(50) - g \circ f(50) = 28.$	
<b>6ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Resolva a equação nos reais:</p> $x + a^3 = \sqrt[3]{a - x},$ <p>em que <math>a</math> é um parâmetro real.</p>	
<b>7ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Sendo <math>x</math> um ângulo de um triângulo tal que:</p> $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$ <p>a) Prove que <math>x</math> é o maior ângulo do triângulo. b) Calcule <math>\operatorname{cos} 3x</math>.</p>	

<b>8ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Um baralho de 32 cartas contém 2 coringas diferentes, cada um dos quais é numerado 0. Existem também 10 cartões vermelhos numerados de 1 a 10 e da mesma forma para azuis e verdes. Lucas escolhe um número de cartas do baralho formando uma mão. Se uma carta na mão for numerada <math>K</math>, então o valor da carta é <math>2^k</math> e o valor da mão é a soma dos valores das cartas na mão. Determine o número de mãos que possuem como valor:</p> <p>a) 10 pontos b) 2022 pontos</p>	
<b>9ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Dado que:  <math>\sin \alpha + 2 \sin \beta + 3 \sin \gamma = 0</math> e  <math>\cos \alpha + 2 \cos \beta + 3 \cos \gamma = 0</math>,  calcule o valor numérico de: <math>\sin (\beta + \gamma) + 2 \sin (\alpha + \gamma) + 3 \sin (\alpha + \beta)</math>.</p>	
<b>10ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Sejam dois círculos tangentes ao eixo <math>OX</math>, com centros nos pontos <math>(2, 4)</math> e <math>(14, 9)</math> e raios medindo 4 e 9, respectivamente. Determine a equação da outra reta tangente externa comum aos círculos.</p>	