CICLO DIAGNÓSTICO - MATEMÁTICA

TURMA IME-ITA

2022

GABARITO

1. 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99

2. a. $\frac{49}{38}$
b. 20

3. $1+\sqrt{5}$

4. a. $x^4+12x^3+49x^2+78x+40$
b. $\{x^3+9x^2+26x+24, x^3+8x^2+19x+12, x^3+7x^2+14x+8, x^3+6x^2+11x+6\}$
c. $n=11$ e $n=12$
d. 8028
e. $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

5. a. $\frac{1}{24}$
b. $\frac{11}{24}$

1ª QUESTÃO

Sejam $P(n)$ e $S(n)$ o produto e a soma, respectivamente, dos dígitos do número inteiro n. Por exemplo, $P(23)=6$ e $S(23)=5$.
Suponha que N seja um número de dois dígitos tal que $N=P(N)+S(N)$.
Determine todos os possíveis valores de N de acordo com as condições enunciadas.

Gabarito

Utilizando a representação de um número de dois dígitos na base 10, obtemos:

$$\begin{aligned} 10a+b &= ab+a+b \\ ab &= 9a \\ b &= 9 \end{aligned}$$

Dessa forma, o número N de dois algarismos deve terminar com 9. Como o seu primeiro algarismo pode variar, obtemos as seguintes possibilidades:

$$\begin{cases} N=19 & \Rightarrow P(19)+S(19)=9+10=19 \\ N=29 & \Rightarrow P(29)+S(29)=18+11=29 \\ N=39 & \Rightarrow P(39)+S(39)=27+12=39 \\ N=49 & \Rightarrow P(49)+S(49)=36+13=49 \\ N=59 & \Rightarrow P(59)+S(59)=45+14=59 \\ N=69 & \Rightarrow P(69)+S(69)=54+15=69 \\ N=79 & \Rightarrow P(79)+S(79)=63+16=79 \\ N=89 & \Rightarrow P(89)+S(89)=72+17=89 \\ N=99 & \Rightarrow P(99)+S(99)=81+18=99 \end{cases}$$

2ª QUESTÃO

Seja o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 7 \\ ax^3 + by^3 = 16 \\ ax^4 + by^4 = 42 \end{cases}$$

Calcule o valor numérico de

a) $a + b$

b) $ax^5 + by^5$

Gabarito

Tomando a primeira equação e multiplicando por $(x + y)$:

$$(ax + by)(x + y) = ax^2 + by^2 + xy(a + b) \Rightarrow 3(x + y) = 7 + xy(a + b)$$

Fazendo o mesmo com a segunda equação:

$$(ax^2 + by^2)(x + y) = ax^3 + by^3 + xy(ax + by) \Rightarrow 7(x + y) = 16 + 3xy$$

E com a terceira equação

$$(ax^3 + by^3)(x + y) = ax^4 + by^4 + xy(ax^2 + by^2) \Rightarrow 16(x + y) = 72 + 7xy$$

Das duas últimas equações obtidas:

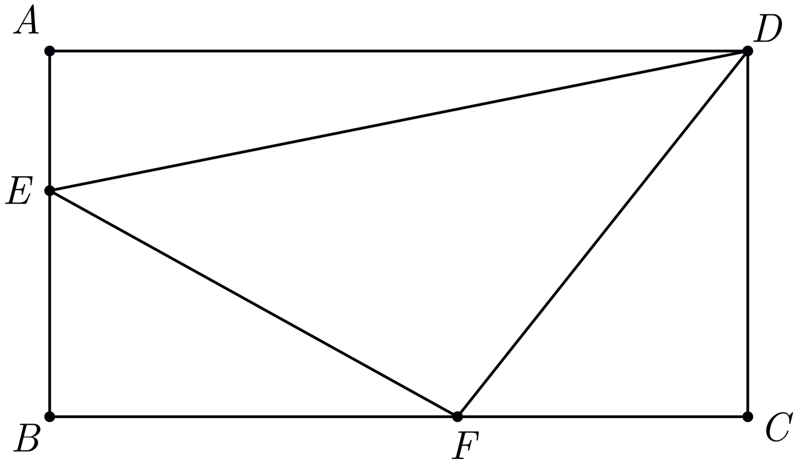
$$\begin{cases} 7(x + y) = 16 + 3xy) \\ 16(x + y) = 42 + 7xy \end{cases}$$

Na primeira equação obtida:

$$3(-14) = 7 - 38(a + b) \Rightarrow \boxed{a + b = \frac{49}{38}}$$

3ª QUESTÃO

No retângulo $ABCD$ abaixo, os triângulos ADE, BEF e CDF possuem areas iguais, e a medida do segmento CF é de 2 unidades.



Determine a medida do segmento BF.

Gabarito

Considere a medida do segmento CD igual a y unidades e a do segmento BF pedido de x unidades. Obtemos, assim, as seguites áreas apra os triângulos equivalentes:

1. $[CDF] = \frac{2y}{2} = y$
2. $[BEF] = y \Rightarrow \frac{BE \cdot x}{2} = y \Rightarrow BE = \frac{2y}{x}$
3. $[ADE] = y \Rightarrow \frac{AD \cdot DE}{2} = y$

Logo:

$$\frac{(x+2)\left(y - \frac{2y}{x}\right)}{2} = y$$
$$(x+2)(x-2) = 2x$$
$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

Assim,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Como a medida deve ser um valor real positivo, então:

$$\boxed{BF = x = 1 + \sqrt{5}}$$

4ª QUESTÃO

Sejam os inteiros positivos n e k tais que $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n$. Dessa forma, definimos o polinômio P de grau $n-1$ por:

$$P(x) = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{(x+k)}$$

a) Determine o polinômio correspondente a $n = 5$ e $k = 3$.

b) Construa todos os possíveis polinômios tais que $n = 4$.

c) Certo polinômio possui o coeficiente de x^{n-2} igual a 67, determine os valores de n e k para tal polinômio.

d) Calcule a soma de todos os coeficientes de todos os possíveis polinômios de grau 5.

e) Para um polinômio de grau n, determine a expressão do menor coeficiente possível de x^{n-3}.

Gabarito

a) Substituindo na expressão para P obtemos:

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = \boxed{x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40}.$$

b) Para $n = 4$, temos a seguinte expressão:

$$P(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+k)}$$

Abrindo nos casos para os valores de k:

$$\boxed{\begin{cases} k = 1 : P(x) = (x+2)(x+3)(x+4) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \\ k = 2 : P(x) = (x+1)(x+3)(x+4) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12 \\ k = 3 : P(x) = (x+1)(x+2)(x+4) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8 \\ k = 4 : P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \end{cases}}$$

c) Como o polinômio P possui grau $n-1$, o coeficiente de x^{n-2} é dado pela soma:

$$1 + 2 + ... + (k-1) + (k+1) + ... + n = 1 + ... + n - k = \frac{(1+n)n}{2} - k.$$

Testando os possíveis valores para n que mais aproximam a soma acima de 67:

$$\begin{cases} n = 10 : \frac{11 \cdot 10}{2} - k = 67 \Rightarrow k = -12 \\ n = 11 : \frac{12 \cdot 11}{2} - k = 67 \Rightarrow k = -1 \\ n = 12 : \frac{13 \cdot 12}{2} - k = 67 \Rightarrow k = 11 \\ n = 13 : \frac{14 \cdot 13}{2} - k = 67 \Rightarrow k = 24 \end{cases}$$

Como k é um inteiro positivo menor ou igual a n, temos que $\boxed{n = 12}$ e $\boxed{k = 11}$.

d) Se o grau é 5, então $n-1=5 \Rightarrow n=6$. Dessa forma:

$$P(x)=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)}{(x+k)}$$

Observe que, para obter a soma dos coeficientes de um polinômio, basta impor $x=1$:

$$P(1)=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{(1+k)}=\frac{7!}{(1+k)}.$$

Finalmente, para obter a soma dos coeficientes de todos os possíveis polinômios P, basta variar k de 1 a 6 e ir somando os resultados:

$$7!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)=\boxed{8028}.$$

e) Sabendo que o polinômio de grau n é representado por:

$$P(x)=\frac{(x+1)(x+2)...(x+n)(x+n+1)}{(x+k)},$$

com $1 \leq k \leq n+1$. O coeficiente líder corresponde ao monômio x^{n-1} e o coeficiente de x^{n-3} será formado pelo produto dois a dois. Para obter o menor coeficiente possível, basta impor $k=n+1$:

$$P(x)=(x+1)(x+2)...(x+n).$$

Portanto:

$$1\cdot 2+1\cdot 3+...+n\cdot(n-1)=\frac{(1+...+n)^2-(1^2+...+n^2)}{2}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}.$$

5ª QUESTÃO

Na escola de Carlos, um conceito A vale 4 pontos, um B vale 3 pontos, um C vale 2 pontos e um D vale apenas 1 ponto. Sua média final nos quatro cursos que ele está matriculado é calculada como a soma total de pontos dividida por 4. Ele tem certeza de que obterá A's em Matemática e em Ciências, e pelo menos um C em Inglês e História. Ele acha que tem uma chance de $\frac{1}{6}$. de obter um A em Inglês e uma chance de $\frac{1}{4}$ de obter um B. Em História, ele tem $\frac{1}{4}$ de chance de conseguir um A e $\frac{1}{3}$ de chance de obter um B, independentemente do que ele recebe em Inglês.
Dessa forma, responda:

a) Qual a probabilidade de Carlos obter média final igual a 4?

b) Se para ser aprovado a média final deve ser de ao menos 3,5, qual a probabilidade de Carlos obter aprovação?

Gabarito

Sejam e e h suas respectivas pontuações em Inglês e em História: - Se a média final for de 4 pontos, significa que Carlos obteve conceito A em todos os cursos. Dado que o conceito A já era garantido em Matemática e em Ciências, para que consiga A também em Inglês e em História tem-se:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{24}}.$$

- Para obter aprovação final, de acordo com as condições:

$$\frac{4+4+e+h}{4} \geq 3{,}5 \Rightarrow e+h \geq 6$$

Portanto, sabendo que Carlos não tirará um D, abrimos em casos:

$$\begin{cases} e = h = 3: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \\ e = 4 \text{ e } h = 2,3,4: & \frac{1}{6} \text{ de probabilidade} \\ h = 4 \text{ e } e = 2,3,4: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \text{ de probabilidade} \\ e = h = 3: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \end{cases}$$

O caso $e = h = 4$ foi contado duas vezes: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ de probabilidade. Logo, obtemos como a probabilidade de a média ser de ao menos 3,5:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{11}{24}}$$