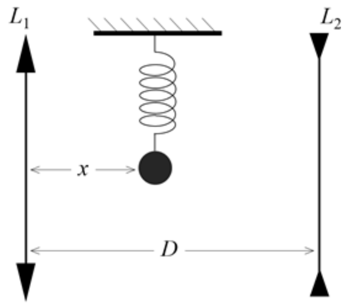
CICLO IME 4 - FÍSICA

TURMA IME-ITA

2022

1ª QUESTÃO

Um corpo está preso ao teto por meio de uma mola ideal. Em um dado momento, este recebe um determinado impulso e passa a realizar um movimento harmônico simples. Coloca-se, então, o corpo entre duas lentes L_1 e L_2, sendo a primeira convergente e a segunda divergente. Sabendo que as amplitudes dos movimentos das imagens produzidas nas lentes 1 e 2 são iguais, determine a distância, ao longo do eixo óptico, entre o corpo e L_1.

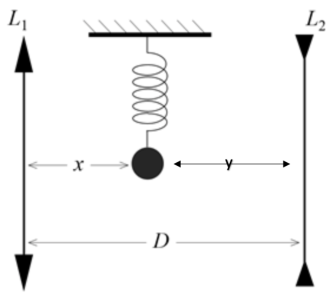


Dados

- Distância entre os centros das lentes, $D = 80cm$.
- Distância focal de $L_1, 20cm$;
- Distância focal de $L_2, 30cm$;

Gabarito

Chamando a distância do corpo a L_2 de y temos:



Pela Lei de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Para a lente 1 (convergente, ou seja, $f > 0$):

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{p'_1}$$

Isolando p'_1 encontramos:

$$p_1' = \frac{f_1 x}{x - f_1} = \frac{20x}{x-20}$$

Analogamente para a lente 2 (divergente, ou seja, $f < 0$):

$$p_2' = \frac{-f_2 y}{y + f_2} = \frac{-30y}{y+30}$$

O enunciado diz que as amplitudes dos movimentos são iguais.

$$|A_1| = |A_2|$$

Sendo que, as amplitudes do movimento em cada lente é a distância da imagem até a lente:

$$A_1 = \frac{20}{x-20}$$

$$A_2 = \frac{-30}{y+30}$$

Substituindo o valor de y por $80 - x$, temos:

$$A_2 = \frac{-30}{(80-x)+30} = \frac{-30}{110-x}$$

Devemos então abrir em 2 casos.
Primeiro caso: $A_1 = -A_2$

$$\frac{20}{x-20} = \frac{-30}{110-x}$$

Resolvendo, chegamos em:

$$x = -160\ cm$$

Como $0 < x < 80$, esse caso não é possível.
Segundo caso: $A_1 = A_2$

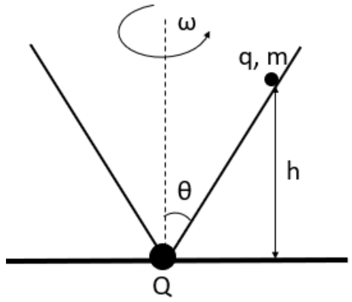
$$\frac{20}{x-20} = \frac{30}{110-x}$$

Resolvendo, chegamos em:

$$\boxed{x = 56\ cm}$$

2ª QUESTÃO

Uma pequena esfera de carga $+Q$ encontra-se fixa no vértice de um cone, conforme mostra a figura. Quando o cone gira ao redor de seu eixo central com velocidade angular ω, uma esfera de massa m encontra-se em repouso em relação ao cone, posicionada a uma altura h do vértice. Determine o valor de q.



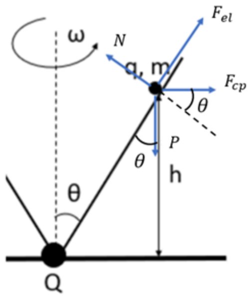
Observação: Descosidere o atrito no cone;

Dados

- Aceleração da gravidade, g.
- Permissividade elétrica do meio, ε_0;
- Ângulo de inclinação do cone, θ;

Gabarito

Primeiramente, faremos o equilíbrio de forças na esfera de massa m supondo um sentido para a força elétrica existente.



Veja que na imagem, a força elétrica está no sentido tal que q e Q possuem cargas positivas (força repulsiva). Entretanto se ocorrer o contrário ($q < 0$), basta inverter o sentido da força. Equilíbrio estático na direção da superfície do cone:

$$F_{el} + F_{cp} \cdot sen\theta = P \cdot cos\theta$$

$$\frac{kqQ}{d^2} + m\omega^2 R \cdot sen\theta = mg \cdot cos\theta$$

Veja agora pela figura que $d = \dfrac{h}{cos\theta}$ sendo d a distância entre as esferas carregadas, assim como $R = h \cdot tan\theta$ sendo R a distância entre a particula de carga q e o eixo do cone.

Usando na equação de equilíbrio:

$$\frac{kqQ \cdot cos^2\theta}{h^2} + m\omega^2 h \cdot tan\theta \cdot sen\theta = mg \cdot cos\theta$$

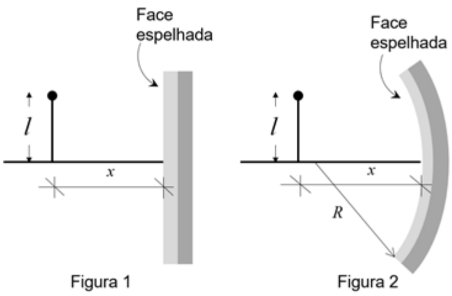
Isolando o q na expressão chegamos em:

$$\boxed{q = \frac{mh^2}{kQ \cdot cos^2\theta}(g \cdot cos\theta - \omega^2 h \cdot tan\theta \cdot sen\theta)}$$

Observação: para o caso de $q < 0$, a força elétrica terá sentido oposto, e com isso, a expressão da força elétrica seria trocada por $-\frac{k|q|Q}{d^2}$. Entretanto, a expressão $-|q|$ é o próprio valor da carga q.

3ª QUESTÃO

Uma lâmina bimetálica é composta por dois materiais cujos coeficientes de dilatação são α e β, sendo a superfície mais próxima do objeto espelhada, conforme a figura 1. Um objeto de tamanho l é posicionado em frente a essa lâmina, a uma distância x da mesma. A lâmina é então aquecida, variando sua temperatura em θ graus. Nessa nova situação, pode-se considerar que a parte 1 formará um espelho gaussiano, em que o raio será dado pelo raio da superfície interna de 1, conforme mostra a figura 2.



Sabendo que a distância x permanece inalterada, calcule o que se pede.

a) a distância focal do espelho gerado;

b) o deslocamento da imagem;

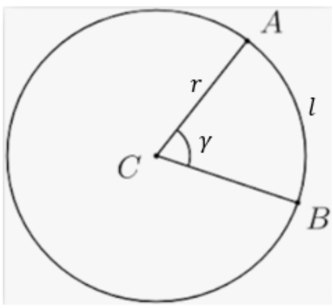
c) a variação relativa do tamanho da imagem.

Dados

- Comprimento inicial da lâmina, L_0;
- Espessura da parte 1, e_1;
- Espessura da parte 2, e_2.

Gabarito

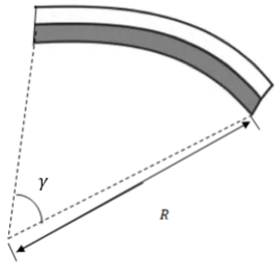
a) Analisando geometricamente a situação, será necessário lidar com arcos de circunferência, uma vez que a distãncia focal está associada ao raio que, por sua vez, está associado a curvatura das lâminas.



O comprimento $AB = l$ pode ser calculado em função do ângulo central e do raio:

$$l = \gamma r$$

Na situação da questão, após a dilatação das lâminas:



Sendo L_1 o comprimento da parte 1 e L_2 o comprimento da parte dois, temos:

$$L_1 = \gamma R_1$$

$$L_2 = \gamma R_2$$

Onde R_1 e R_2 são os raios médios das partes 1 e 2, respectivamente.Para o cálculo dos raios médios,consideramos qe este é o raio dos comprimentos que passam "no meio"das lâminas, ou seja:

$$R_1 = R + \frac{e_1}{2}$$

$$R_2 = R + e_1 + \frac{e_2}{2}$$

Dividindo as equações do ângulo central, obtemos que:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Obtemos L_1 e L_2 a partir da dilatação das lâminas. Sendo L_0 o comprimento inicial de tais lâminas:

$$L_1 = L_0(1 + \alpha\theta)$$

$$L_2 = L_0(1 + \beta\theta)$$

Substituindo os valores de R_1 e R_2 obtidos em função de R e das espessuras:

$$\frac{L_0(1 + \alpha\theta)}{L_0(1 + \beta\theta)} = \frac{R + \frac{e_1}{2}}{R + e_1 + \frac{e_2}{2}}$$

Isolando R:

$$R = \frac{e_1 + e_2 + 2e_1\alpha\theta + (e_2 - e_1)\beta\theta}{2(\beta - \alpha)\theta}$$

Como a distância focal f é tal que $f = \frac{R}{2}$, portanto:

$$\boxed{f = \frac{e_1 + e_2 + 2e_1\alpha\theta + (e_2 - e_1)\beta\theta}{4(\beta - \alpha)\theta}}$$

b) A imagem do objeto na primeira situação(sem curvatura) é a imagem da reflexão num espelho plano. Então:

$$p'_1 = -x$$

Quardo a lâmina está curvada, sua imagem passa a ser feita por um espelho côncavo. Utilizando a equação dos pontos conjugados, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{p'_2}$$

$$p'_2 = \frac{xf}{x-f}$$

O deslocamento é dado pela diferença das posições das imagens. Logo:

$$\Delta p' = |p'_2 - p'_1| = \left|\frac{xf}{x-f} - (-x)\right|$$

$$\boxed{\Delta p' = \left|\frac{x^2}{x-f}\right|}$$

Onde f é dada pelo item a):

$$f = \frac{e_1 + e_2 + 2e_1\alpha\theta + (e_2 - e_1)\beta\theta}{4(\beta-\alpha)\theta}$$

c) Como o tamanho da primeira imagem é igual ao tamanho do objeto, para encontrarmos a variação relativa do tamanho da imagem, podemos encontrar o tamanho da imagem na segunda situação (com as lâminas bimetálicas) por meio da equação de aumento linear:

$$A = -\frac{p'}{p}$$

$$\frac{i}{o} = \frac{\frac{xf}{x-f}}{x}$$

$$\left|\frac{i}{o}\right| = \left|\frac{f}{x-f}\right|$$

O tamanho da imagem é, portanto:

$$i = \frac{fl}{x-f}$$

A variação relativa é dada por:

$$VR = \frac{\Delta i}{i_0}$$

$$VR = \frac{\frac{fl}{x-f} - l}{l}$$

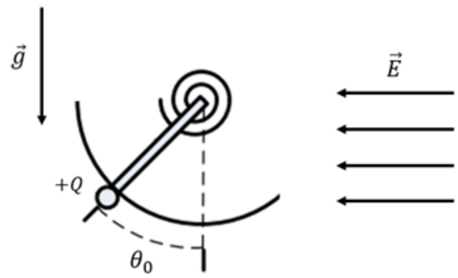
Portanto:

$$\boxed{VR = \frac{2f-x}{x-f}}$$

Com f dada pelo item a)

4ª QUESTÃO

Um dispositivo possui uma haste de comprimento l, com um dos extremos conectado a uma mola espiral fixa e o outro conectado a um corpo pontual de massa m e carga $+Q$. O torque de reação da mola $\tau_R = k\theta$, onde k é uma constante de proporcionalidade e θ é o ângulo de deslocamento da mola em relação à vertical. Sabe-se que o dispositivo encontra-se numa região na qual atua um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ horizontal e campo gravitacional $\vec{g}$ vertical, como mostra a figura, passando a ter uma posição de equilíbrio deslocada de um ângulo θ_0 da horizontal. Ao deslocar o corpo pontual de um ângulo inicial muito pequeno, o sistema passa a oscilar.



Determine o período de oscilação deste movimento em função de l, θ_0, k, m, g, Q e E.

Gabarito

Devemos começar a questão pensando em como vamos trabalhar com uma mola espiral (de torque), já que não estamos acostumados com isso.

A ideia é mudarmos a análise de força resultante para torque resultante, levando esta mudança para o MHS também, como:

$$F = k_{mhs}x$$

$$\tau = k'_{mhs}\theta$$

Pensando nessa ideia, vamos encontrar qual é a diferença entre k_{mhs} e k'_{mhs}, realizando as devidas analogias:

$$\tau = I\alpha \; F = ma$$

$$\tau = k'\theta = kx$$

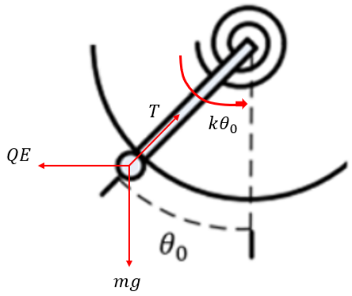
Usando as ideias de MHS em que $a = \omega^2 x$ e analogamente $\alpha = \omega^2\theta$, e substituindo as equações de cima:

$$\frac{F}{m} = \omega^2\frac{F}{k} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{\tau}{I} = \omega^2\frac{\tau}{k'} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k'}{I}}$$

Logo, podemos utilizar que o período vale $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{k'}}$, aonde $\tau_{res} = k'\theta$.

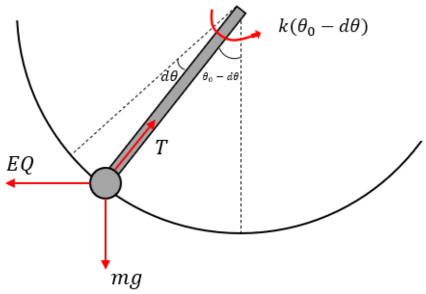
Analisando a situação inicial:



Realizando equilíbrio de momentos no ponto de contato com a mola:

$$QE.lcos(\theta_0) = mg.lsen(\theta_0) + k\theta_0$$

Vamos guardar esta equação, e agora vamos analisar um pequeno deslocamento $d\theta$ e encontrar o torque resultante, buscando chegar numa expressão da forma $\tau_{res} = k'_{mhs}\theta$:



Vamos analisar o torque resultante em relação ao ponto de contato com a mola em espiral:

$$\tau_{res} = EQ.lcos(\theta_0 - d\theta) - mg.lsen(\theta_0 - d\theta) - k(\theta_0 - d\theta)$$

Abrindo os senos e cossenos:

$$\tau_{res} = EQ.l(cos(\theta_0)cos(d\theta) + sen(\theta_0).sen(d\theta)) - mg.l(sen(\theta_0)cos(d\theta) - cos(\theta_0)sen(d\theta)) - k\theta_0 + kd\theta$$

Usando que $cos(d\theta) = 1$ e que $sen(d\theta) = d\theta$:

$$\tau_{res} = EQlcos(\theta_0) - mglsen(\theta_0) - k\theta_0 + d\theta_0(EQlsen(\theta_0) + mglcos(\theta_0) + k)$$

Observando a equação da situação inicial, podemos simplificar o τ_{res}:

$$\tau_{res} = d\theta_0(EQlsen(\theta_0) + mglcos(\theta_0) + k)$$

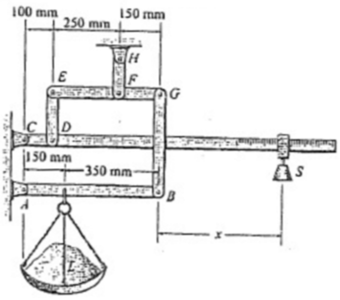
Logo, podemos perceber que $k'_{mhs} = EQlsen(\theta_0) + mglcos(\theta_0) + k$
Sendo assim, substituindo na equação do período anteriormente escrita:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}}$$

$$\boxed{2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{EQlsen(\theta_0) + mglcos(\theta_0) + k}}}$$

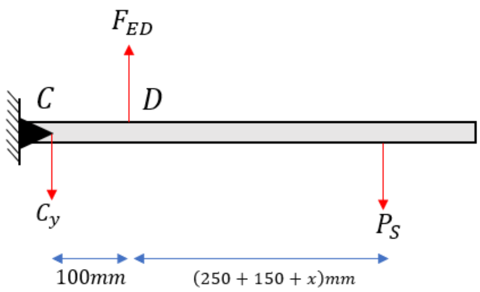
5ª QUESTÃO

A balança de plataforma consiste de uma combinação de alavancas da terceira e primeira classes, de modo que a carga sobre uma alavanca se torna o esforço que move a próxima alavanca. Por meio desse arranjo, um pequeno peso pode equilibrar um objeto pesado. Se $x = 450\ mm$ e a massa do contrapeso S é $2\ kg$, determine a massa da carga L necessária para manter o equilíbrio.



Gabarito

Vamos começar realizando o equilíbrio na barra horizontal do meio:

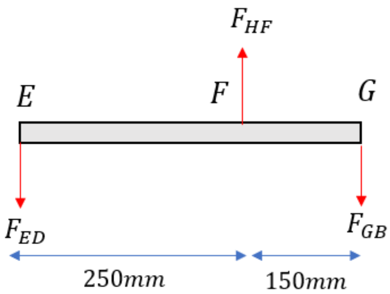


Utilizando que o somatório de momentos no ponto C é nulo:

$$100.F_{ED} = (500 + x) \cdot 20$$

$$F_{ED} = \frac{500 + 450}{5} = 190$$

Agora, vamos olhar o equilíbrio na barra horizontal de cima:

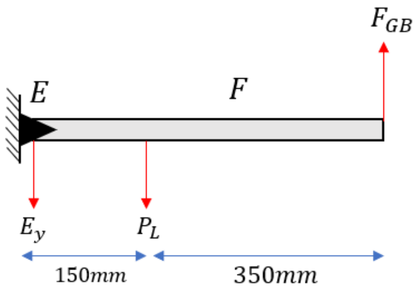


Usando que o somatório de momentos no ponto F é nulo:

$$250 \cdot 190 = 150 \cdot F_{GB}$$

$$F_{GB} = \frac{950}{3}$$

Agora vamos olhar o equilíbrio na barra horizontal debaixo:



Usando que o somatório de momentos no ponto E é nulo:

$$150 \cdot P_L = 500 \cdot F_{GB}$$

$$150 \cdot 10m_L = 500 \cdot \frac{950}{3}$$

$$\boxed{m_L = \frac{950}{9}\ kg}$$

6ª QUESTÃO

A empresa Gordo Ice Cream decidiu melhorar seu sistema de armazenamento dos deliciosos sorvetes. Esse sistema funciona como um refrigerador cuja temperatura interna deve ser constante e igual a $-3°C$. O equipamento possui uma porta feita de inox, o que o faz ser afetado pelo calor ambiente. Além disso, as outras superfícies possuem ganhos térmicos equivalentes a 60% do fluxo pela porta. O refrigerador é abastecido por um motor que fornece uma potência igual a gerada pela queima de 0,4L de um gás J por segundo.

O dono da empresa, Scheffinho, decide contratar dois engenheiros, João e Renan, para realizar projetos de melhoria do sistema.

João, formado no IME, propõe: "O material da porta do refrigerador pode ser substituído por vidro e as outras superfícies com um material que faça ter ganhos térmicos equivalentes a 91% da porta. Além de ser abastecido por um motor que fornece uma potência igual a gerada pela queima de 0,2L de gasolina por segundo"

Renan, formado no ITA, propõe: "O material da porta do refrigerador pode ser substituído por plástico e as outras superfícies com um material que faça ter ganhos térmicos equivalentes a 86% da porta. Além de ser abastecido por um motor que fornece uma potência igual a gerada pela queima de 0,3L de diesel por segundo"

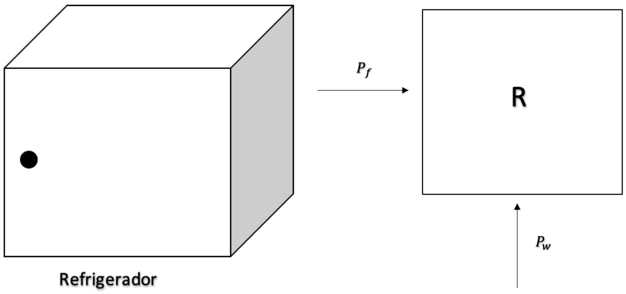
Scheffinho vai contratar o projeto com maior eficiência. Qual será o escolhido?

Dados

- Condutividade térmica do inox, $0,80W.(m.°C)^1$;
- Condutividade térmica do plástico, $0,85W.(m.°C)^1$
- Condutividade térmica do vidro, $0,75W.(m.°C)^1$;
- Dimensões da porta, 2 m (altura) x 50 cm (largura).

- Energia gerada na combustão da gasolina, $5kJ/L$
- Energia gerada na combustão do diesel, $3kJ/L$
- Energia gerada na combustão do gás J, $4kJ/L$
- Espessura do inox, 20 mm;
- Espessura do plástico, 15 mm;
- Espessura do vidro, 25 mm;
- Temperatura do ambiente externo ao refrigerador, $27°C$;

Gabarito



Calculando o fluxo de calor através das paredes do refrigerador:
Inicialmente:

$$\Phi_{porta} = \frac{k_{inox} \cdot A \cdot \Delta T}{l}$$

$$\Phi_{porta} = \frac{0,8 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 30}{0,02} = 1200\ J/s$$

Como o enunciado diz, as outras superfícies possuem ganhos térmicos equivalentes a 60% da porta. Logo, calculando esse ganho total:

$$\Phi_{superficies} = 1200 \cdot 0,6 \cdot 5$$

$$\Phi = 3600\ J/s$$

$$\Phi_{tot} = 3600 + 1200 = 4800\ J/s$$

Calor fornecido pela queima do combustível:

$$Q = 0,4 \cdot 4000 = 1600\ J$$

$$P = 2000\ J/s$$

Logo, a eficiência original é igual a:

$$e = \frac{Q_f}{W} = \frac{4800}{2000} = 2,4$$

Vamos agora analisar os projetos dos engenheiros:
O projeto do João inclui colocar uma porta de vidro e as demais superfícies com ganhos equivalentes a 91% da porta.
Calculando o fluxo de calor através das superfícies

$$\Phi_{porta} = \frac{0,75 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 30}{0,025} = 900\ J/s$$

$$\Phi_{superficies} = 0,91 \cdot 5 \cdot 900 = 4095\ J/s$$

$$\Phi_{tot} = 4095 + 900 = 4995\ J/s$$

Calor fornecido pela queima do combustível (que na proposta do João é a gasolina):

$$Q = 0,2 \cdot 5000 = 1000\ J$$

$$P = 1000\ J/s$$

Logo, a eficiência do projeto é igual a:

$$e_1 = \frac{4995}{1000} = 4,995$$

O projeto do Renan inclui colocar uma porta de plástico e as demais superfícies com ganhos equivalentes a 86% da porta.

Calculando o fluxo de calor através das superfícies:

$$\Phi_{porta} = \frac{0,85 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 30}{0,015} = 1700\ J/s$$

$$\Phi_{superficies} = 0,86 \cdot 5 \cdot 1700 = 7310\ J/s$$

$$\Phi_{tot} = 7310 + 1700 = 9010\ J/s$$

Calor fornecido pela queima do combustível (que na proposta do Renan é o diesel):

$$Q = 0,3.3000 = 900\ J$$

$$P = 900\ J/s$$

Logo, a eficiência do projeto é igual a:

$$e_2 = \frac{9010}{900} = 10,011$$

Portanto, teríamos que o projeto escolhido seria o de Renan por ter a maior eficiência. Porém, temos que observar que o refrigerador possui suas temperaturas fixas e, então, possui uma eficiência máxima associado (considerando que fosse um Refrigerador de Carnot).

Calculando essa eficiência máxima:

$$e_{max} = \frac{1}{\frac{T_q}{T_f} - 1}$$

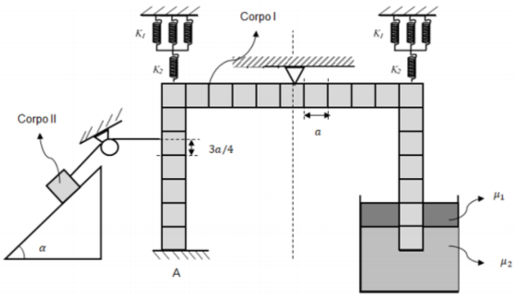
$$e_{max} = \frac{1}{\frac{300}{270} - 1} = 9$$

Observe que o projeto de Renan possui maior eficiência mas ele viola a Segunda Lei da Termodinâmica ao possuir uma eficiência maior que ao ciclo de Carnot associado.

Com isso, Scheffinho vai escolher o projeto de João, formado no IME.

7ª QUESTÃO

Considere um corpo I formado por 23 blocos cúbicos idênticos em formato de C. Dois sistemas de molas atuam sobre o corpo I. O sistema de molas da extremidade da esquerda foi comprimido de x_1 e o da extremidade da direita foi comprimido de x_2 . O corpo II, idêntico aos blocos que compõem I, está em equilíbrio em cima de um plano inclinado de um ângulo α com a horizontal que possui um coeficiente de atrito μ. Na extremidade da direita do corpo I, dois dos 23 blocos estão submersos em dois líquidos imiscíveis de densidades μ_1 e μ_2 .

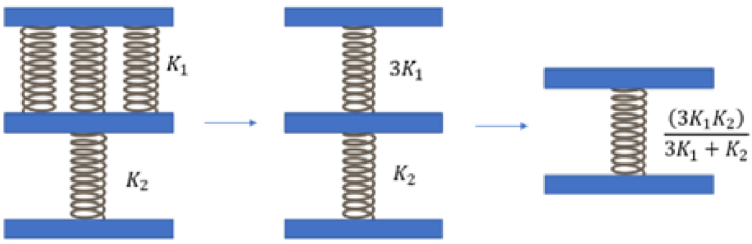


Considerando a gravidade como g, determine o valor da normal do solo no bloco, no ponto A, para que o corpo II esteja na iminência de descer o plano inclinado, considerando a geometria da figura apresentada.

Gabarito

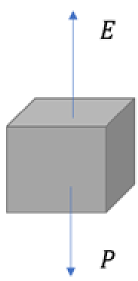
Iremos analisar os diferentes equilíbrios separadamente:

Inicialmente, faz-se a troca das associações de molas por uma mola tal que: 3 molas em paralelo são representadas por uma de constante elástica equivalente $k' = 3k$. Assim como duas molas em série são tais que $\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. Dessa forma trocamos a associação por uma única mola de k igual a:



Partindo agora para o equilíbrio de forças da lateral esquerda do corpo 1:

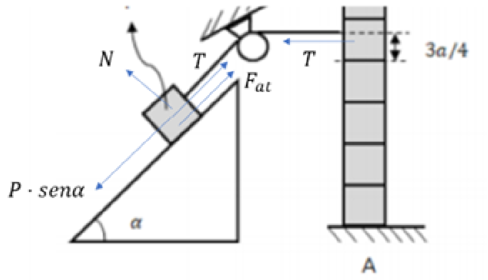
Em cada um dos dois blocos submersos teremos:



Assim, faremos a soma dos empuxos para, no final das análises, calcular o torque. Sendo E_1 o empuxo existente no bloco imerso no líquido de densidade μ_1 e E_2 o empuxo do líquido de densidade μ_2:

$$E_1 = \mu_1 V g$$
$$E_2 = \mu_2 V g$$

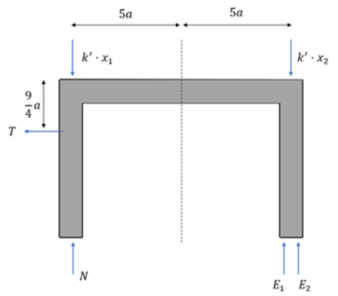
Para o equilíbrio do corpo II na lateral esquerda do corpo II:



$$T = P \cdot sen\alpha - P \cdot cos\alpha \cdot \mu$$

Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre os corpos, e P o peso do bloco: $P = \rho \cdot a^3 g$ (com ρ sendo a densidade do bloco)

Finalmente, podemos montar o equilíbrio de torque para o corpo I como um todo:



Fazendo que o corpo não está rotacionando, a soma dos torques resultantes deve dar zero (sendo o torque dado pelo produto da força pelo braço de alavanca):

$$N \cdot 5a + T \cdot \frac{9}{4}a + k' \cdot x_2 \cdot 5a = k' \cdot x_1 \cdot 5a + (E_1 + E_2) \cdot 5a$$

Observação: como o corpo é simétrico, não há necessidade de incorporar os pesos dos blocos no somatório de momentos, visto que se anularão.

Substituindo os valores encontrados anteriormente:

$$5 \cdot N + \frac{9}{4}P \cdot (sen\alpha - \mu cos\alpha) + \frac{15k_1k_2}{3k_1 + k_2} \cdot (x_2 - x_1) = 5 \cdot a^3 g \cdot (\mu_1 + \mu_2)$$

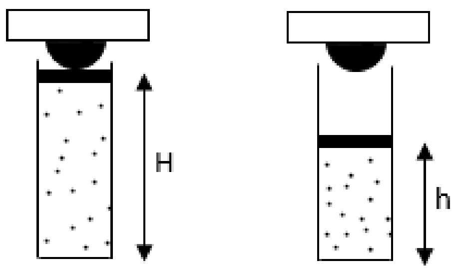
Isolando o valor de N na equação obtemos:

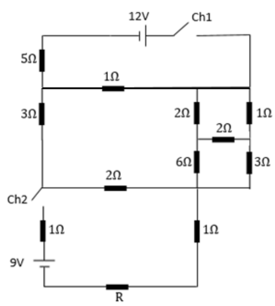
$$N = a^3 g \cdot (\mu_1 - \mu_2) - \frac{9}{20}P \cdot (sen\alpha - \mu cos\alpha) - \frac{3k_1k_2}{3k_1 + k_2} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\boxed{N = a^3 g \cdot (\mu_1 - \mu_2) - \frac{9}{20}(\rho \cdot a^3 g) \cdot (sen\alpha - \mu cos\alpha) - \frac{3k_1k_2}{3k_1 + k_2} \cdot (x_2 - x_1)}$$

8ª QUESTÃO

Numa fábrica, ocorre um processo endotérmico que retira energia de um gás que está, inicialmente, à temperatura de $25°C$. Quando o processo chega ao fim, uma lâmpada é acesa para que o técnico responsável fique ciente do término. Para isso, usa-se um dispositivo que funciona da seguinte forma: um mol de gás monoatômico está contido num recipiente cilíndrico sob a pressão de um êmbolo de massa m, que se encontra tangenciando um sensor. Enquanto a presença do êmbolo é detectada pelo sensor, as chaves Ch1 e Ch2 do circuito abaixo são mantidas abertas. Ao fim do processo, o êmbolo desce uma altura h e não é mais detectado, fazendo com que ambas as chaves sejam fechadas para que o circuito funcione e o resistor da lâmpada, cuja resistência vale R, acenda. Sabe-se que a potência dissipada por este resistor é máxima e que a altura h é igual ao comprimento do resistor da lâmpada.





Determine a energia que o gás perde para que ocorra o processo.

Dados

- Altura inicial do cilindro, $H = 10\ cm$
- Massa do êmbolo, $m = 1\ kg$
- Resistividade do resistor da lâmpada, $\rho = 3,7\ \Omega.mm$
- Área transversal do resistor da lâmpada, $a = 21,5\ mm^2$

Gabarito

A energia que o gás perde é numericamente igual a variação da energia interna do gás. Veja que poderia ser obtida outra conclusão ao pensar que a energia cedida se refere ao calor cedido pelo gás. De fato, esse fator também será uma energia perdida pelo gás. Portanto, serão consideradas as duas respostas.

Sendo assim, a energia que o gás perde é dada por:

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(PV)$$

Inicialmente, quando o êmbolo toca o sensor:

$$V_0 = HA \quad e \quad P_0 = \frac{mg}{A} + P_{atm}$$

Sendo A a área da seção transversal do recipiente e considerando, obrigatoriamente, a pressão atmosférica, uma vez que o equilíbrio inicial à $25°C$ só é satisfeito se houver uma pressão atmosférica (aplique clapeyron na situação inicial assumindo que $P_0 = \frac{mg}{A}$ e veja que chega-se em um absurdo).

Na situação final, quando o gás está a uma altura h:

$$V_f = hA \quad e \quad P_f = P_0 = \frac{mg}{A} + P_{atm}$$

Portanto:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\Delta(PV) = \frac{3}{2}(P_fV_f - P_0V_0) = \frac{3}{2}P_0(V_f - V_0)$$

$$\Delta U = \frac{3}{2}(\frac{mg}{A} + P_{atm})(hA - HA) = \frac{3}{2}(mg + P_{atm}A)(h - H)$$

Uma vez que m, g e H são dados, basta apenas obter os valores de h e A.

Na situação inicial:

$$P_0V_0 = nRT_0$$

$$(\frac{mg}{A} + P_{atm})HA = nRT_0$$

$$(mg + P_{atm}A)H = nRT_0$$

Substituindo os dados:

$$(10 + 10^5A)0,1 = 1 \cdot 8,31 \cdot 298$$

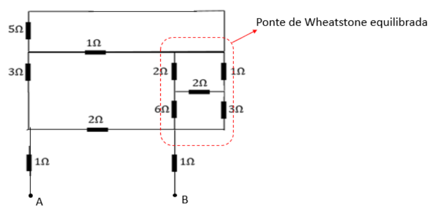
$$A = 0,247\ m^2$$

Agora, portanto, entra a situação do circuito. Observe que o enunciado relaciona R e h, então parece uma boa ideia obter a resistência R.

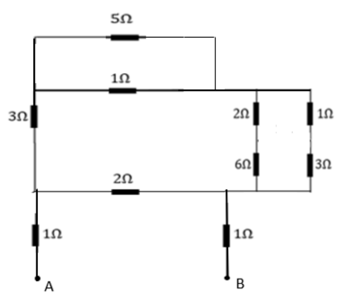
Ainda conforme o enunciado, R é tal que ocorre máxima trasferência de potência e, com isto, é evidente que o caminho é usar Thévenin, uma vez que na condição de máxima transferência de potência tem-se que:

$$R = R_{Th}$$

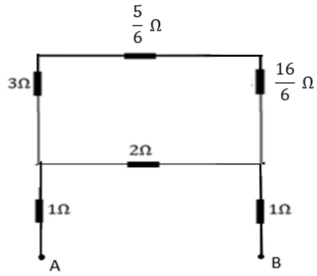
Para R_{Th}, identificando os terminais de R e colocando as fontes de tensão em repouso (que equivale a substitui-las por fios), chega-se a seguinte configuração:



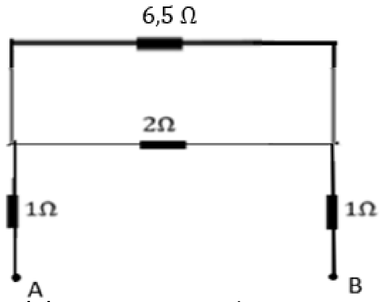
Portanto:



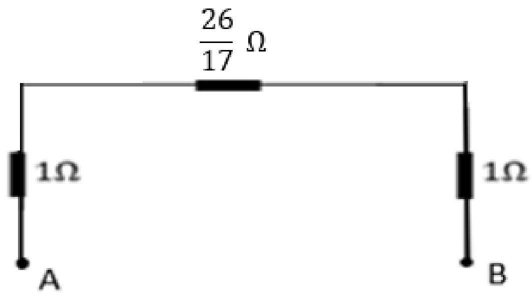
Realizando as associações em paralelo:



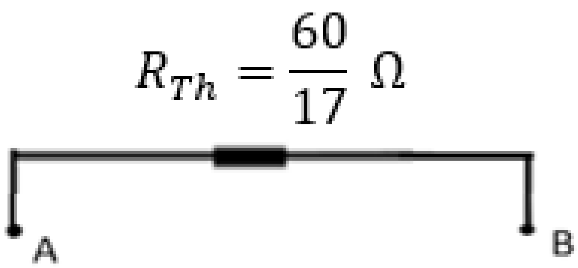
Associação em série dos resistores na parte superior:



Paralelo na parte superior:



Por fim, em série:



Desse modo temos que:

$$R = R_{Th} = \frac{60}{17}\Omega$$

Veja que R também pode ser obtida através da fórmula:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{a}$$

Onde a é a área da seção transversal da resistência R, ρ sua resistividade e l seu comprimento. De acordo com enunciado, $l = h$, desse modo:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{a} = \frac{\rho \cdot h}{a}$$

Sendo assim:

$$h = R\frac{a}{\rho}$$

Portanto:

$$\Delta U = \frac{3}{2}(mg + P_{atm}A)\left(R\frac{a}{\rho} - H\right)$$

Substituindo os dados:

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot (10 + 10^5 \cdot 0,247) \cdot \left(\frac{60}{17} \cdot \frac{21,5 \cdot 10^{-6}}{3,7 \cdot 10^{-3}} - 0,1\right) = -2965,2\ J$$

Logo, o gás perde aproximadamente $\boxed{2965,2\ J}$.
Alternativamente, não está errado obter o calor perdido pelo gás:
Trabalho recebido pelo gás:

$$\tau = -\tau_{ext} = -P_{ext}\Delta V = -\left(\frac{mg}{A} + P_{atm}\right)(HA - hA) = -1976,8\ J$$

Da segunda lei:

$$\Delta U = Q - \tau \ \rightarrow Q = \Delta U + \tau$$

Sendo assim:

$$\boxed{Q = -2965,2 - 1976,8 = -4942\ J}$$

9ª QUESTÃO

Um transmissor de radar está fixo em um referencial S' que se move para a direita com velocidade v em relação a um referencial S. Com a utilização de um cronômetro mecânico (essencialmente um relógio de pêndulo) de período T' (medido em relação a S'), o transmissor emite pulsos de radar a cada oscilação completa, os quais se propagam com a velocidade da luz, sendo captados por um receptor, o qual está fixo no referencial S.

a) Qual é o período T do cronômetro, detectado por um observador A em repouso em relação ao referencial S?

b) Curiosamente, o receptor não detecta o intervalo de tempo entre os pulsos como sendo T ou T'. Determine esse intervalo de tempo detectado pelo receptor.

c) Explique porque o receptor mede para o transmissor um período diferente daquele medido pelo observador A, mesmo que ambos estejam fixos em relação a S.

Gabarito

A dificuldade na questão encontra-se em determinar quais são os 3 períodos presentes na questão e o que cada um deles significa. Iniciando no item a): Determinaremos como eventos a serem analisados: 1) O início da oscilação do pêndulo 2) O Final da oscilação do pêndulo

Para esses eventos, podemos concluir que o referencial próprio para estes será o referencial S', visto que ambos os eventos ocorrerão na mesma posição neste referencial (Imagine você parado ao lado do relógio do referencial S'. Para você, ambos os eventos 1 e 2 ocorreram ao seu lado. Para uma pessoa no referencial S o mesmo não ocorre, já que o relógio para essa pessoa está em movimento, mudando de posição ao longo da oscilação).

Determinado o referencial próprio, lembramos que o tempo próprio é o $menor$ tempo que pode ser medido entre 2 eventos. Como $\gamma > 1$, teremos:

$$\Delta t_{Próprio}.\gamma = \Delta t_{NãoPróprio}$$

Logo,como $\Delta t_{Próprio} = T'$, teremos:

$$\boxed{T = \gamma.T' = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Explicando o item c e determinando o intervalo no item b:

O período T determinado no item a) é o intervalo de tempo medido no referencial S entre o início e o final de uma oscilação do pêndulo e, portanto, entre a emissao de cada frente de onda dos pulsos de radar.

Ou seja, enquanto no referencial S' eu emito um pulso de radar a cada tempo T', no referencial S eu observo a emissão dos mesmos pulsos a cada tempo T.

No entanto, o receptor fixo no referencial S não irá receber esses pulsos a cada intervalo de tempo T. Isso é consequência do movimento da fonte em relação ao receptor, que vai alterar a distância entre duas frentes de onda, podendo aumentar ou reduzir a frequência (e portanto o período) percebido (Efeito Doppler). Obs: Veja que o fato do referencial S' mover-se para a direita pode significar que a mesma está se aproximando ou afastando de S. Com isso, analisaremos ambos os casos.

O efeito Doppler relativístico consiste em juntar esses 2 efeitos juntos: - A mudança da frequência/período da fonte ao mudar de referencial - O efeito Doppler clássico, devido ao movimento da fonte em relação ao observador

Para determinar o período percebido pelo receptor, basta utilizarmos a fórmula do Doppler relativístico:

$$f_{Recebido} = f_{Emitido}\sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}$$

Lembrando que a frequência aumenta quando há uma aproximação da fonte (Blue Shift, sinais de cima no numerador e denominador) e diminui quando há um afastamento da mesma (Red Shift, sinais de baixo).

Logo:

$$\boxed{\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T'}\sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}}}$$

Onde o valor Δt é o valor detectado pelo receptor, sendo menor para um caso de aproximação da fonte e maior, no caso de afastamento desta.

Veríamos ainda que o intervalo de tempo Δt é consequência de um efeito Doppler Clássico sobre o período T:

$$f_{Obs} = f_{Fonte}.\frac{c \pm v_{Obs}}{c \mp v_{Fonte}}$$

Como estamos no referencial S, a velocidade do receptor é 0. Além disso, o sinal utilizado no denominador será negativo para uma aproximação e positivo para um afastamento. Logo:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T}.\frac{c}{c \mp v}$$

$T = \gamma.T'$:

$$\Delta t = \gamma T'.\frac{(c \mp v)}{c} = T'\frac{(c \mp v)}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = T'\frac{(c \mp v)}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}$$

$$\boxed{\Delta t = T'\sqrt{\frac{c \mp v}{c \pm v}}}$$

Sendo o mesmo resultado que obtivemos anteriormente (Sinais de cima para aproximação e sinais debaixo para afastamento).

10ª QUESTÃO

Um esguicho de irrigação libera jatos contínuos e simultâneos de água enquanto gira em torno de um eixo fixo com velocidade angular ω. A partir das figuras fornecidas, determine:

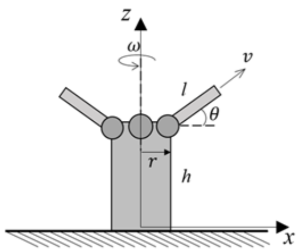


Figura 1

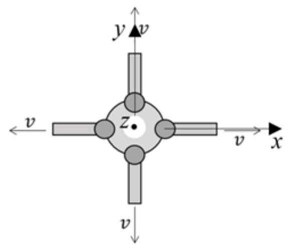


Figura 2

a) o tempo que as gotículas demoram para chegar ao solo desde o instante que são liberadas;

b) após a segundos, quatro gotículas estão sendo lançadas pelas mangueiras. Determine a posição de cada uma delas após tocarem no chão;

c) a área da figura formada pelas gotículas quando atingem o ponto de altura máxima

d) determine a equação da curva de z em função de x, y e t do feixe de água que é observado momentaneamente num instante t, resultante do lançamento contínuo da água.

Dados

- Altura do esguicho, h;
- Comprimento da mangueira acoplada ao esguicho, l
- Raio de esguicho, r;

Gabarito

a) Para analisar o tempo de vôo, precisamos apenas olhar para a componente da velocidade em z, pois encontraremos o instante em que as gotículas atingem o solo. Como a velocidade linear dada pela rotação (equivalente ao ωR) está no plano xy, também não influencia no cálculo do tempo de vôo (não possui componente em z).

Encontrando a componente em z da velocidade:

$$v_z = vsen(\theta)$$

Para achar o tempo de vôo, queremos encontrar o instante em que as gotículas descem uma altura $h+lsen(\theta)$, ou seja, atingem o solo:

$$\Delta S = -h - lsen(\theta)$$

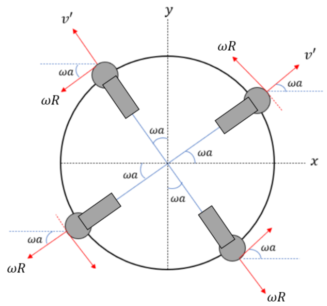
$$\Delta S = v_o t + \frac{at^2}{2}$$

$$vsen(\theta).t - \frac{gt^2}{2} = -h - lsen(\theta)$$

Resolvendo a equação de segundo grau:

$$\boxed{t_{\text{vôo}} = \frac{vsen(\theta) + \sqrt{v^2 sen^2(\theta) + 2g(h + lsen(\theta))}}{g}}$$

b) Após a segundos, todas continuarão na mesma altura, pois estavam apenas girando, portanto, mudarão suas coordenadas x e y. Para encontrar essas coordenadas no instante a, vejamos a vista superior (como na figura 2), considerando que as partículas giraram um ângulo ωa:



Sabendo que v' é a decomposição de v no plano xy, ou seja, $v' = vcos(\theta)$, vamos escrever a posição inicial e o vetor velocidade da gotícula que sai do jato que está no primeiro quadrante (lembrando que a distância das gotículas até o eixo de rotação é $R = r + lcos(\theta)$):

$$\vec{S_0} = (Rcos(\omega a),\ Rsen(\omega a))$$

$$\vec{V} = (vcos(\theta).cos(\omega a) - \omega R.sen(\omega a),\ vcos(\theta).sen(\omega a) + \omega R.cos(\omega a))$$

A posição desta partícula ao atingir o solo será o vetor posição $\vec{S} = \vec{S_0} + \vec{V}.t_{\text{vôo}}$, pois até atingir o solo terá se passado um tempo equivalente ao tempo de vôo. Como temos os vetores $\vec{S_0}$ e $\vec{V}$, além de termos o tempo de vôo $t_{\text{vôo}}$, conseguimos encontrar o seu vetor posição ao atingir o solo, sabendo que sua coordenada z será nula (pois chegou ao chão $z = 0$).

OBS: Para as gotículas que saem dos outros quadrantes a análise será análoga, visto que o movimento de uma partícula é apenas uma rotação de 90 graus da partícula adjacente.

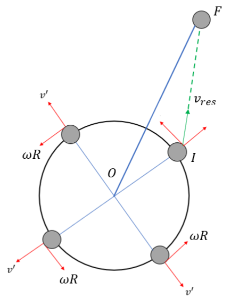
c) Agora, devemos achar a área da figura formada ao atingirem a altura máxima. Vamos primeiro achar o instante em que as gotículas atingem a altura máxima, que é atingida quando a velocidade no eixo z zera:

$$V_z = V_0 + at$$

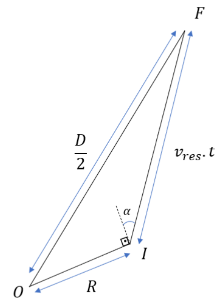
$$0 = vsen(\theta) - gt_1$$

$$t_1 = \frac{vsen(\theta)}{g}$$

Como todas as partículas estão sempre na mesma altura, podemos continuar utilizando a vista superior, ou seja, analisando a posição delas no plano xy. Sabemos também que a figura formada será um quadrado com centro conhecido, devido à simetria do problema (o movimento de uma partícula adjacente à outra é apenas uma rotação de 90 graus). Vejamos a vista superior, com as posições inicial (ponto I) e final (ponto F) da gotícula representadas, visando calcular a distância do ponto final até o centro do quadrado (diagonal do quadrado):



Analisando agora as distâncias no triângulo OIF, aonde $v_{res} = \sqrt{(\omega R)^2 + (vcos(\theta))^2}$:



Vejamos no desenho que α é o ângulo entre a v_{res} e a direção de ωR, logo:

$$\alpha = arctan(\frac{vcos(\theta)}{\omega R})$$

Achando o tamanho OF, que é a metade da diagonal do quadrado, usando lei dos cossenos:

$$(\frac{D}{2})^2 = (v_{res}.t_1)^2 + R^2 - 2Rv_{res}t_1.cos(90 + \alpha)$$

Subsituindo que $D^2 = 2S_{quadrado}$:

$$\frac{S_{quadrado}}{2} = (v_{res}.t_1)^2 + R^2 + 2Rv_{res}t_1.sen(\alpha)$$

$$\boxed{S_{quadrado} = 2((v_{res}.t_1)^2 + R^2 + 2Rv_{res}t_1.sen(\alpha))}$$

OBS: Na resposta da área, devemos substituir as seguintes informações:

$$v_{res} = \sqrt{(\omega R)^2 + (vcos(\theta))^2}$$

$$t_1 = \frac{vsen(\theta)}{g}$$

$$\alpha = arctan(\frac{vcos(\theta)}{\omega R})$$

$$R = r + lcos(\theta)$$

d)