CICLO IME 2 - MATEMÁTICA

TURMA IME-ITA

2022

1ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Piva e Santanelli apostam uma corrida, ambos partindo da largada. Piva corre sempre a uma velocidade de 8 km por hora, enquanto Santanelli corre 6 km na primeira hora e acelera de modo a correr mais $\frac{1}{2}$ km a cada hora seguinte. Após quantas horas decorridas do início da corrida Santanelli alcançará Piva?

2ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Um hexágono é constituído de quatro triângulos retângulos. Para a sua construção, considere o primeiro triângulo retângulo de hipotenusa medindo x e cateto de medida igual a 1. O outro cateto do primeiro triângulo serve de hipotenusa para o segundo, que tem como um dos lados do hexágono um cateto de medida também igual a 1. De modo análogo, a contrução é feita até que o quarto triângulo retângulo possua como lados do hexágono dois catetos de medidas iguais a 1. Dessa forma:
(a) Calcule x.
(b) Demonstre que no vértice comum aos quatro triângulos retângulos assim construídos tem-se um ângulo interno do hexágono com medida inferior a $150°$.

3ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?

4ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Determine todos a,b inteiros e p primo tais que:

$$a^4 + 4b^4 = p^2$$

5ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Dados reais a e b tais que $|a| < 1$ e $|b| < 1$, considere as séries infinitas:

$$x = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \cdots$$
$$y = 1 + 4b + 10b^2 + 20b^3 + \cdots$$

Calcule S em função de x e de y:

$$S = 1 + 3(ab) + 5(ab)^2 + \cdots$$

6ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Dado que:

$$\sum_{k=1}^{35} \sin 5k = \tan \frac{m}{n},$$

com os ângulos medidos em graus e m e n inteiros positivos primos entre si tais que $\frac{m}{n} < 90$, calcule $m + n$.

7ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Sejam α e β as raízes da equação: $x^2 - x + b = 0$. Definindo $S_k = \alpha^k + \beta^k$, calcule b sabendo que S_2, S_3 e S_5 estão em progressão aritmética.

8ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Se os ângulos de um triângulo $\triangle ABC$ satisfazem a relação:

$$\cos(3A) + \cos(3B) + \cos(3C) = 1$$

e dois de seus lados medem 10 e 13, calcule a medida do terceiro lado.

9ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Se a e b são números reais não nulos tais que: $a^2 + b^2 = 4$.
Prove que:

$$\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1$$

10ª QUESTÃO	Valor: 1,00

Seja um $\triangle ABC$ de lados medindo $AB = 30$, $BC = 32$ e $AC = 34$. Considere X um ponto interior ao lado $\overline{BC}$ e I_1 e I_2 os incentros dos triângulos $\triangle ABX$ e $\triangle ACX$, respectivamente. Encontre o valor da área mínima do triângulo $\triangle AI_1I_2$ ao variar X ao longo do lado $\overline{BC}$.