CICLO DIAGNÓSTICO - MATEMÁTICA

TURMA IME-ITA

2022

1ª QUESTÃO

Sejam $P(n)$ e $S(n)$ o produto e a soma, respectivamente, dos dígitos do número inteiro n. Por exemplo, $P(23) = 6$ e $S(23) = 5$.

Suponha que N seja um número de dois dígitos tal que $N = P(N) + S(N)$.

Determine todos os possíveis valores de N de acordo com as condições enunciadas.

SIMULADO ITA OBJETIVO - CICLO 05

QUESTÃO 01

Considere um número $z \in \mathbb{C}$ tal que: $\frac{z}{1+2i} = -1 + 2i$. Dessa forma, assinale a sua forma trigonométrica:

A ( ) $3cis(\pi)$

B ( ) $3cis(2\pi)$

C ( ) $4cis(\frac{\pi}{2})$

D ( ) $5cis(\pi)$

E ( ) $4cis(\frac{3\pi}{2})$

Gabarito: D

SOLUÇÃO:

QUESTÃO 02

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Para facilitar suas aulas de Análise Combinatória, Santanelli deseja pintar as faces de um tetraedro regular com cores distintas em cada uma, dispondo para isso 8 cores diferentes. Qual o total de maneiras em que Santanelli poderá pintar as faces do poliedro citado?

a) 140

b) 210

c) 560

d) 420

e) 1680

SOLUÇÃO:

QUESTÃO 03

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Considere as afirmativas: I. Um conjunto finito T de números naturais é chamado de egoísta se o seu tamanho pertence a T. Por exemplo, $T = 2, 3, 7$ é egoísta, pois o tamanho de T é 3 e $3 \in T$. Então a quantidade total de subconjuntos egoístas de $1, 2, \cdots, 10$ é 512. II. Sejam os conjuntos $A = 1, 2, 3, 4$ e $B = 5, 6, 7$, a probabilidade de escolher, aleatoriamente, um par ordenado do produto cartesiano $B \times A$ em que a soma das suas coordenadas seja um número par, sabendo que a sua ordenada é par, é $\frac{1}{6}$. III. A área da região limitada por $x \geq 0$, $y \leq 0$ e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - 1| - 1$ é de 2 unidades de área. Marque a alternativa que contém todas as afirmações corretas:

a) I e III

b) II

c) I, II e III

d) I

e) II e III

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 04

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Considere as afirmativas a respeito da Geometria Espacial: I. Por um ponto exterior a um plano passa apenas uma reta paralela ao plano. II. Duas retas cuja interseção é vazia não necessariamente são paralelas. III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ao outro. IV. Duas retas distintas paralelas a um plano são paralelas entre si. Estão corretas:

a) II e III

b) I e II

c) II, III e IV

d) III e IV

e) Todas.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 05

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$. Pode-se afirmar que:

a) f é crescente e g é decrescente.

b) f e g se interceptam para $x = 0$.

c) $f(0) + g(0) = 0$.

d) $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.

e) $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$, para todo x real.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 06

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Qual o valor de:

$$\left(4\cos^2 9^\circ - 1\right)\left(4\cos^2 27^\circ - 1\right)\left(4\cos^2 81^\circ - 1\right)\left(4\cos^2 243^\circ - 1\right)?$$

a) 0

b) 1

c) -1

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 07

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Sabendo que $x^5 = 1$, calcule o valor numérico de:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x} + \frac{x^4}{1+x^3}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) -1

e) -2

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 08

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Se:

$$3\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-4\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=\frac{\pi}{3},$$

então qual o valor de x?

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) -1

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 09

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Considere o sistema tridimensional de coordenadas cartesianas e um segmento de comprimento l, localizado no primeiro octante, com uma das extremidades na origem. Se o segmento determinada ângulos α, β e γ com os eixos coordenados x, y e z, respectivamente, então calcule: $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$.

a) 1

b) l

c) $2l$

d) -1

e) l^2-3

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 10

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Sabendo que $x^3=303^3+404^3+505^3$, então determine o valor de: $\sqrt{\frac{x}{6}-1}$.

a) 4

b) 10

c) 1

d) 2

e) 12

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 11

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Considere a função quadrática definida nos reais tal que $f(x) = x^2 - 6x + 12$. Se $f(f(a)) = 259$, qual a soma dos módulos dos possíveis valores de a?

a) 6

b) 7

c) 1

d) 8

e) 10

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 12

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q??

Qual a soma dos quadrados das inclinações das retas que passam por $(8, 15)$ e são tangentes à parábola $y = x^2 - 6x$?

a) 20

b) 400

c) 208

d) 304

e) 40

SOLUÇÃO:
SIMULADO ITA DISCURSIVO - CICLO 05
QUESTÃO 01

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q01

Seja a função f, definida em $\mathbb{R} - \frac{-d}{c}$, expressa por:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

com a, b, c e d reais não nulos. Sabendo que $f(19) = 19$, $f(97) = 97$ e $f(f(x)) = x$, determine os valores de a, b, c e d.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 02

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q02

A área do triângulo formado pelas interseções da reta paralela ao eixo coordenado OX, que passa pelo ponto $P(h,k)$, e das retas $y = x$ e $x + y = 2$, tomadas duas a duas, é $4h^2$. Determine o lugar geométrico de P.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 03

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q03

Determine o valor da expressão:

$$E = \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right).$$

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 04

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q04

Represente geometricamente os afixos dos complexos $Z = x + yi$ tais que:

$$arg\left(\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

onde $Z_1 = 10 + 6i$, $Z_2 = 4 + 6i$ e $arg(Z)$ indica o argumento de um número complexo Z.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 05

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q05

Sejam α e β as raízes de $x^2 - 6x - 2 = 0$, com $\alpha > \beta$. Definindo $a_n = \alpha^n - \beta^n$, para $n \geq 1$, então calcule:

$$\frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9}.$$

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 06

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q06

Considere os planos π_1 e π_2 secantes ao longo da reta r de modo que o ângulo α entre eles está no intervalo $(0, 2\pi)$. Um triângulo equilátero ABC, de lado medindo l, contido em π_2, é tal que o lado AB está em r e a projeção ortogonal de C em π_1 é representada pelo ponto D. Sendo $\theta = \angle CAD$ tal que $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$, determine: (a) o valor de θ; (b) o volume do tetraedro $ABCD$.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 07

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q07

Calcule os valores dos inteiros n e p de modo que:

$$\frac{\binom{n}{p}}{1} = \frac{\binom{n}{p+1}}{2} = \frac{\binom{n}{p+2}}{3}.$$

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 08

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q08

Considere a matriz quadrada: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \\ \end{pmatrix} em que a e b são números reais. (a) Denotando a transposta da matriz A por A^t , determine todos os valores de a e b tais que: $A^tA = AA^t$. (b) Adotando $a = b = 2$, determine todos os possíveis valores de $\tan\theta$ na equação matricial:

$$Av = \lambda v,$$

em que v é a matriz coluna para $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ e λ e θ são números reais.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 09

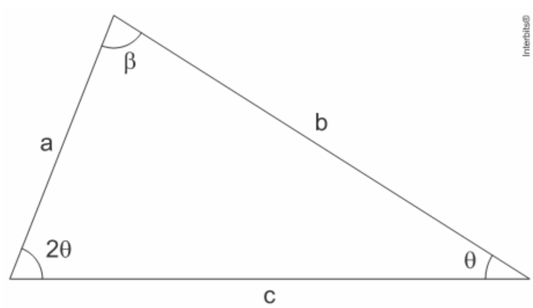
ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q09

Uma sequência de números reais não nulos $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é uma progressão harmônica se a sequência formada pelos inversos $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$ é uma progressão aritmética. Dessa forma, sendo a, b e c termos consecutivos de uma progressão harmônica, demonstre que: $b = \frac{2ac}{a+c}$.

SOLUÇÃO:
QUESTÃO 10

ITA-5 OBJ MATEMÁTICA Q10

Considere o triângulo abaixo.



(a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine os possíveis valores para θ. (b) Prove que, se $c = 2a$, então $\beta = 90°$.

SOLUÇÃO:

---

a) 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99

Utilizando a representação de um número de dois dígitos na base 10, obtemos:

$$\begin{aligned} 10a + b &= ab + a + b \\ ab &= 9a \\ b &= 9 \end{aligned}$$

Dessa forma, o número N de dois algarismos deve terminar com 9. Como o seu primeiro algarismo pode variar, obtemos as seguintes possibilidades:

$$\begin{cases} N = 19 & \Rightarrow P(19) + S(19) = 9 + 10 = 19 \\ N = 29 & \Rightarrow P(29) + S(29) = 18 + 11 = 29 \\ N = 39 & \Rightarrow P(39) + S(39) = 27 + 12 = 39 \\ N = 49 & \Rightarrow P(49) + S(49) = 36 + 13 = 49 \\ N = 59 & \Rightarrow P(59) + S(59) = 45 + 14 = 59 \\ N = 69 & \Rightarrow P(69) + S(69) = 54 + 15 = 69 \\ N = 79 & \Rightarrow P(79) + S(79) = 63 + 16 = 79 \\ N = 89 & \Rightarrow P(89) + S(89) = 72 + 17 = 89 \\ N = 99 & \Rightarrow P(99) + S(99) = 81 + 18 = 99 \end{cases}$$

2ª QUESTÃO

Seja o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 7 \\ ax^3 + by^3 = 16 \\ ax^4 + by^4 = 42 \end{cases}$$

Calcule o valor numérico de

a) $a + b$

b) $ax^5 + by^5$

Gabarito

a) $\frac{49}{38}$

b) 20

Tomando a primeira equação e multiplicando por $(x + y)$:

$$(ax + by)(x + y) = ax^2 + by^2 + xy(a + b) \Rightarrow 3(x + y) = 7 + xy(a + b)$$

Fazendo o mesmo com a segunda equação:

$$(ax^2 + by^2)(x + y) = ax^3 + by^3 + xy(ax + by) \Rightarrow 7(x + y) = 16 + 3xy$$

E com a terceira equação

$$(ax^3 + by^3)(x + y) = ax^4 + by^4 + xy(ax^2 + by^2) \Rightarrow 16(x + y) = 72 + 7xy$$

Das duas últimas equações obtidas:

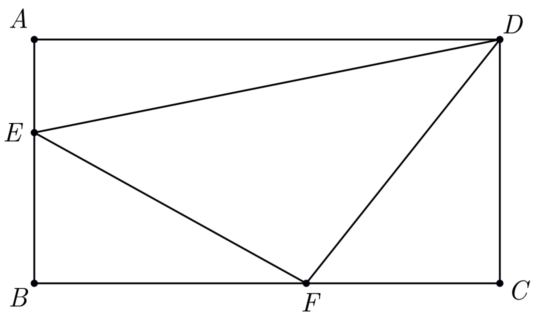
$$\begin{cases} 7(x + y) = 16 + 3xy) \\ 16(x + y) = 42 + 7xy \end{cases}$$

Na primeira equação obtida:

$$3(-14) = 7 - 38(a + b) \Rightarrow \boxed{a + b = \frac{49}{38}}$$

3ª QUESTÃO

No retângulo $ABCD$ abaixo, os triângulos ADE, BEF e CDF possuem areas iguais, e a medida do segmento CF é de 2 unidades.



Determine a medida do segmento BF.

Gabarito

a) $1 + \sqrt{5}$

Considere a medida do segmento CD igual a y unidades e a do segmento BF pedido de x unidades. Obtemos, assim, as seguites áreas apra os triângulos equivalentes:

1. $[CDF] = \frac{2y}{2} = y$

2. $[BEF] = y \Rightarrow \frac{BE \cdot x}{2} = y \Rightarrow BE = \frac{2y}{x}$

3. $[ADE] = y \Rightarrow \frac{AD \cdot DE}{2} = y$

Logo:

$$\frac{(x + 2)\left(y - \frac{2y}{x}\right)}{2} = y$$

$$(x + 2)(x - 2) = 2x$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

Assim,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Como a medida deve ser um valor real positivo, então:

$$\boxed{BF = x = 1 + \sqrt{5}}$$

4ª QUESTÃO

Sejam os inteiros positivos n e k tais que $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n$. Dessa forma, definimos o polinômio P de grau $n-1$ por:

$$P(x) = \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{(x+k)}$$

a) Determine o polinômio correspondente a $n = 5$ e $k = 3$.

b) Construa todos os possíveis polinômios tais que $n = 4$.

c) Certo polinômio possui o coeficiente de x^{n-2} igual a 67, determine os valores de n e k para tal polinômio.

d) Calcule a soma de todos os coeficientes de todos os possíveis polinômios de grau 5.

e) Para um polinômio de grau n, determine a expressão do menor coeficiente possível de x^{n-3}.

Gabarito

a) $x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40$

b) $\{x^3 + 9x^2 + 26x + 24, x^3 + 8x^2 + 19x + 12, x^3 + 7x^2 + 14x + 8, x^3 + 6x^2 + 11x + 6\}$

c) $n = 11$ e $n = 12$

d) 8028

e) $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

{=html} <!-- --> - Substituindo na expressão para P obtemos:

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = \boxed{x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40}.$$

a) Para $n = 4$, temos a seguinte expressão:

$$P(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+k)}$$

Abrindo nos casos para os valores de k:

$$\boxed{\begin{cases} k = 1 : P(x) = (x+2)(x+3)(x+4) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \\ k = 2 : P(x) = (x+1)(x+3)(x+4) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12 \\ k = 3 : P(x) = (x+1)(x+2)(x+4) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8 \\ k = 4 : P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \end{cases}}$$

b) Como o polinômio P possui grau $n-1$, o coeficiente de x^{n-2} é dado pela soma:

$$1+2+...+(k-1)+(k+1)+...+n=1+...+n-k=\frac{(1+n)n}{2}-k.$$

Testando os possíveis valores para n que mais aproximam a soma acima de 67:

$$\begin{cases} n=10: \frac{11\cdot 10}{2}-k=67 \Rightarrow k=-12 \\ n=11: \frac{12\cdot 11}{2}-k=67 \Rightarrow k=-1 \\ n=12: \frac{13\cdot 12}{2}-k=67 \Rightarrow k=11 \\ n=13: \frac{14\cdot 13}{2}-k=67 \Rightarrow k=24 \end{cases}$$

Como k é um inteiro positivo menor ou igual a n, temos que $\boxed{n=12}$ e $\boxed{k=11}$.

c) Se o grau é 5, então $n-1=5 \Rightarrow n=6$. Dessa forma:

$$P(x)=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)}{(x+k)}$$

Observe que, para obter a soma dos coeficientes de um polinômio, basta impor $x=1$:

$$P(1)=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{(1+k)}=\frac{7!}{(1+k)}.$$

Finalmente, para obter a soma dos coeficientes de todos os possíveis polinômios P, basta variar k de 1 a 6 e ir somando os resultados:

$$7!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)=\boxed{8028}.$$

d) Sabendo que o polinômio de grau n é representado por:

$$P(x)=\frac{(x+1)(x+2)...(x+n)(x+n+1)}{(x+k)},$$

com $1 \le k \le n+1$. O coeficiente líder corresponde ao monômio x^{n-1} e o coeficiente de x^{n-3} será formado pelo produto dois a dois. Para obter o menor coeficiente possível, basta impor $k=n+1$:

$$P(x)=(x+1)(x+2)...(x+n).$$

Portanto:

$$1\cdot 2+1\cdot 3+...+n\cdot(n-1)=\frac{(1+...+n)^2-(1^2+...+n^2)}{2}=$$
$$=\boxed{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}.$$

5ª QUESTÃO

Na escola de Carlos, um conceito A vale 4 pontos, um B vale 3 pontos, um C vale 2 pontos e um D vale apenas 1 ponto. Sua média final nos quatro cursos que ele está matriculado é calculada como a soma total de pontos dividida por 4. Ele tem certeza de que obterá A's em Matemática e em Ciências, e pelo menos um C em Inglês e História. Ele acha que tem uma chance de $\frac{1}{6}$. de obter um A em Inglês e uma chance de $\frac{1}{4}$ de obter um B. Em História, ele tem $\frac{1}{4}$ de chance de conseguir um A e $\frac{1}{3}$ de chance de obter um B, independentemente do que ele recebe em Inglês.

Dessa forma, responda:

a) Qual a probabilidade de Carlos obter média final igual a 4?

b) Se para ser aprovado a média final deve ser de ao menos 3,5, qual a probabilidade de Carlos obter aprovação?

Gabarito

a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{11}{24}$

Sejam e e h suas respectivas pontuações em Inglês e em História: - Se a média final for de 4 pontos, significa que Carlos obteve conceito A em todos os cursos. Dado que o conceito A já era garantido em Matemática e em Ciências, para que consiga A também em Inglês e em História tem-se:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{24}}.$$

- Para obter aprovação final, de acordo com as condições:

$$\frac{4+4+e+h}{4} \geq 3{,}5 \Rightarrow e+h \geq 6$$

Portanto, sabendo que Carlos não tirará um D, abrimos em casos:

$$\begin{cases} e = h = 3: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \\ e = 4 \text{ e } h = 2,3,4: & \frac{1}{6} \text{ de probabilidade} \\ h = 4 \text{ e } e = 2,3,4: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \text{ de probabilidade} \\ e = h = 3: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \end{cases}$$

O caso $e = h = 4$ foi contado duas vezes: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ de probabilidade. Logo, obtemos como a probabilidade de a média ser de ao menos 3,5:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{11}{24}}$$