CICLO IME 2 - MATEMÁTICA

TURMA IME-ITA

2022

1ª QUESTÃO

Piva e Santanelli apostam uma corrida, ambos partindo da largada. Piva corre sempre a uma velocidade de 8 km por hora, enquanto Santanelli corre 6 km na primeira hora e acelera de modo a correr mais $\frac{1}{2}$ km a cada hora seguinte. Após quantas horas decorridas do início da corrida Santanelli alcançará Piva?

Gabarito

Seja t o número de horas decorridas até que eles se encontrem. A distância total percorrida por Piva será de: $P = 8t$. Por outro lado, Santanelli inicia a primeira hora pecorrendo 6 km e percorre $\frac{1}{2}$ km a mais a cada hora seguinte, totalizando:

$$S = 6 + (6 + \frac{1}{2}) + (6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \cdots + \left(6 + (t-1)\frac{1}{2}\right) = \frac{(23+t)t}{4}.$$

Igualando: $8t = \frac{(23+t)t}{4} \rightarrow t = 0$ ou $\boxed{t = 9}$.

2ª QUESTÃO

Um hexágono é constituído de quatro triângulos retângulos. Para a sua construção, considere o primeiro triângulo retângulo de hipotenusa medindo x e cateto de medida igual a 1. O outro cateto do primeiro triângulo serve de hipotenusa para o segundo, que tem como um dos lados do hexágono um cateto de medida também igual a 1. De modo análogo, a contrução é feita até que o quarto triângulo retângulo possua como lados do hexágono dois catetos de medidas iguais a 1. Dessa forma:

(a) Calcule x.

(b) Demonstre que no vértice comum aos quatro triângulos retângulos assim construídos tem-se um ângulo interno do hexágono com medida inferior a $150°$.

Gabarito

(a) A partir do quarto triângulo retângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras, pode-se encontrar, sucessivamente, as hipotenusas dos triângulos anteriores: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2$ e $\boxed{x = \sqrt{5}}$.

(b) Observa-se, portanto, que o segundo triângulo possui ângulo interno no vértice compartilhado medindo $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$ e o quarto triângulo, por ser retângulo e isósceles, medindo $45°$. Utilzando o fato de a tangente ser uma função crescente para os ângulos agudos, o primeiro triângulo possui ângulo no respectivo vértice medindo $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) < \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$ e o terceiro, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) = \arctan(1) = 45°$. Logo, no ângulo interno θ do hexágono: $\boxed{\theta < 30° + 30° + 45° + 45° = 150°}$.

3ª QUESTÃO

Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?

Gabarito

Sejam A o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 4 nos milhares, B o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 3 nas centenas, C o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 2 nas dezenas e D o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 1 nas unidades. A quantidade descrita no problema é: $9.9.8.7 - n(A \cup B \cup C \cup D)$, lembrado que para um número ter 4 algarismos não pode ter dígito dos milhares 0. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) = &n(A) + n(B) + n(C) + n(D) \\ &- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) \\ &+ n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) \\ &- n(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

Sendo que:

$$\begin{cases} n(A) = 9.8.7 = 504 \\ n(B) = n(C) = n(D) = 8.8.7 = 448 \\ n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(A \cap D) = 8.7 = 56 \\ n(B \cap C) = n(B \cap D) = n(C \cap D) = 7.7 = 49 \\ n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = n(A \cap C \cap D) = 7 \\ n(B \cap C \cap D) = 6 \\ n(A \cap B \cap C \cap D) = 1 \end{cases}$$

Portanto:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = (504 + 3.448) - (3.56 + 3.49) + (3.7 + 6) - 1 = 1559.$$

Finalmente:

$$9.9.8.7 - n(A \cup B \cup C \cup D) = 4536 - 1559 = \boxed{2977}.$$

4ª QUESTÃO

Determine todos a,b inteiros e p primo tais que:

$$a^4 + 4b^4 = p^2$$

Gabarito

Completando quadrado para fatorar a expressão:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + 4b^4 - 2a^2b^2$$

$$a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 2a^2b^2 = (a^2 - 2a^2b^2 + 2b^2)(a^2 + 2a^2b^2 + 2b^2)$$

Logo:

$$\left(a^2 - 2a^2b^2 + 2b^2\right)\left(a^2 + 2a^2b^2 + 2b^2\right) = p^2$$

Seja $A = a^2 - 2a^2b^2 + 2b^2$ e $B = a^2 + 2a^2b^2 + 2b^2$, repare que $A + B = 2(a^2 + 2b^2)$, que é positivo por ser quadrado perfeito. Assim, podemos concluir que não há possibilidade de distribuir o fator $-p$ entre A e B.

Primeiro caso:

$$A = a^2 - 2a^2b^2 + 2b^2 = p \ (i)$$

$$B = a^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 = p \ (ii).$$

Subtraindo:$4ab = 0- > a = 0$ ou $b = 0$ Se a=0, substituindo em (i) $b^2 = p$, mas p é primo, então a única solução possível é $a = 0, b = \pm 1 \rightarrow p = 2$

Segundo caso:

$A = a^2 - 2a^2b^2 + 2b^2 = p^2$ e $B = a^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 = 1$. De B: $(a + b)^2 + b^2 = 1$ Como $a, b \,\epsilon\, \mathbb{Z}$, então se $|b| > 1 \rightarrow b^2 > 1 \rightarrow (a + b)^2 < 0$, não há solução.

Terceiro caso:

$A = a^2 - 2a^2b^2 + 2b^2 = 1$ e $B = a^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 = p^2$. Analogamente, $(a - b)^2 + b^2 = 1$ e não há solução. Assim, só resta $b = 0 \rightarrow a = 1$ que, como vimos, não é solução ou $b = \pm 1 \rightarrow a = \pm 1$. Daí teríamos $p^2 = 5$, que não funciona.

Portanto, as soluções são:

$$(a, b, p) = (0, 1, 2) \ ou \ (a, b, p) = (0, -1, 2).$$

5ª QUESTÃO

Dados reais a e b tais que $|a| < 1$ e $|b| < 1$, considere as séries infinitas:

$$x = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \cdots$$

$$y = 1 + 4b + 10b^2 + 20b^3 + \cdots$$

Calcule S em função de x e de y:

$$S = 1 + 3(ab) + 5(ab)^2 + \cdots$$

Gabarito

Simplificando inicialmente a expressão para x, multiplica-se a série por a e usa-se a série resultante para subtrair da inicial, obtendo-se:

$$(1-a)x = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$$

Forma-se, assim, uma PAG. Ao multiplicar a PAG pela razão a da PG e usar a série resultante para subtrair da obtida anteriormente:

$$(1-a)x - a(1-a)x = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a} \to x = \frac{1}{(1-a)^3} \to a = 1 - x^{-\frac{1}{3}}.$$

Procedendo de modo semelhante para y: $b = 1 - y^{-\frac{1}{4}}$. Finalmente, de modo análogo para S: $S = \frac{1+ab}{(1-ab)^2}$. Logo:

$$\boxed{S = \frac{1 + (1 - x^{-\frac{1}{3}})(1 - y^{-\frac{1}{4}})}{(1 - (1 - x^{-\frac{1}{3}})(1 - y^{-\frac{1}{4}}))^2}}.$$

6ª QUESTÃO

Dado que:

$$\sum_{k=1}^{35} \sin 5k = \tan \frac{m}{n},$$

com os ângulos medidos em graus e m e n inteiros positivos primos entre si tais que $\frac{m}{n} < 90$, calcule $m+n$.

Gabarito

Representanto por S o somatório dado:

$$S = \sin 5 + \sin 10 + \sin 15 ..... \sin 170 + \sin 175.$$

$$S \sin \frac{5}{2} = \sin \frac{5}{2}(\sin 5 + \sin 10 + \sin 15 ..... \sin 170 + \sin 175).$$

Usando a transformação de produto em soma:

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2},$$

logo:

$$2S \sin \frac{5}{2} = \cos \frac{5}{2} - \cos \frac{355}{2}$$

$$S \sin \frac{5}{2} = 2 \sin 90. \sin \frac{175}{2}$$

,então: $S = \tan \frac{175}{2}$ e $m + n = 175 + 2 = \boxed{177}$.

7ª QUESTÃO

Sejam α e β as raízes da equação: $x^2 - x + b = 0$. Definindo $S_k = \alpha^k + \beta^k$, calcule b sabendo que S_2, S_3 e S_5 estão em progressão aritmética.

Gabarito

Note que:

$$\alpha^2 - \alpha + b = 0$$
$$\beta^2 - \beta + b = 0$$

Assim, multiplicando a primeira por α^{k-2} e a segunda por β^{k-2}

$$\alpha^k - \alpha^{k-1} + b\alpha^{k-2} = 0$$
$$\beta^k - \beta^{k-1} + b\beta^{k-2} = 0$$

Logo somando: $S_k - S_{k-1} + b.S_{k-2} = 0$
Como $S_0 = 2, S_1 = 1$
Obtemos

$$\begin{cases} S_2 = 1 - 2b \\ S_3 = 1 - 3b \\ S_5 = 1 - 5b + 5b^2 \end{cases}$$

Sabendo que formam uma PA: $2S_3 = S_2 + S_5 \to 2 - 6b = 2 - 7b + 5b^2 \to \boxed{b = 0}$ ou $\boxed{b = \dfrac{1}{5}}$.

8ª QUESTÃO

Se os ângulos de um triângulo $\triangle ABC$ satisfazem a relação:

$$\cos(3A) + \cos(3B) + \cos(3C) = 1$$

e dois de seus lados medem 10 e 13, calcule a medida do terceiro lado.

Gabarito

Do $\triangle ABC$: $\cos(3\pi - 3B - 3C) = -\cos(3B + 3C)$. Na relação do enunciado:

$$-\cos(3B)\cos(3C) + \sin(3B)\sin(3C) + \cos(3B) + \cos(3C) = 1$$
$$(1 - \cos(3B))(1 - \cos(3C)) = \sin(3B)\sin(3C)$$
$$\frac{(1 - \cos(3B))(1 - \cos(3C))}{\sin(3B)\sin(3C)} = 1$$

Usando que $\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$, então: $\tan(3B/2)\tan(3C/2) = 1 \to 3(B + C)/2 = \pi/2 \to A = 2\pi/3$
Para obter o terceiro lado, basta aplicar a lei dos cossenos:

$$l^2 = 10^2 + 13^2 + 130 = 399 \to \boxed{l = \sqrt{399}}$$
$$13^2 = 10^2 + l^2 + 10l \to \boxed{l = \sqrt{94} - 5}$$

.

9ª QUESTÃO

Se a e b são números reais não nulos tais que: $a^2 + b^2 = 4$.
Prove que:

$$\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1$$

Gabarito

Solução 01:
Como a expressão:

$$a^2 + b^2 = 4$$

\ Assemelha-se muito com a relação fundamental, podemos fazer uma substituição trigonométrica:

$$a = 2sen(\theta)$$

$$b = 2cos(\theta)$$

Substituindo na expressão:

$$E = \frac{ab}{a+b+2} = \frac{4sin(\theta).cos(\theta)}{2sin(\theta) + 2cos(\theta) + 2} = \frac{2sin\theta cos\theta}{sin\theta + cos\theta + 1}$$

Parametrizando pela tangente do arco metade: Seja $tan\frac{\theta}{2} = t$ temos que :

$$sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Substituindo em E:

$$E = \frac{2.\frac{2t}{1+t^2}.\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \frac{2t - 2t^2}{1+t^2}$$

Analisando o que é pedido:

$$\frac{2t - 2t^2}{1+t^2} \leq \sqrt{2} - 1$$

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(1 + t^2\right) - 2t + 2t^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)t^2 - 2t + \left(\sqrt{2} - 1\right) \geq 0$$

Dividindo por $\sqrt{2} + 1$

$$t^2 - 2(\sqrt{2} + 1)t + \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 \geq 0$$

$$\left(t - \sqrt{2} + 1\right)^2 \geq 0$$

Repare que, como todo quadrado perfeito é maior ou igual a zero, concluímos em uma verdade. Logo, a desigualdade está provada.

Solução 02:

Usando o produto notável:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$ab = \frac{(a+b)^2 - 4}{2}$$

Seja $a + b = k$

Substituindo na expressão:

$$E = \frac{ab}{a+b+2} = \frac{\frac{k^2-4}{2}}{k+2} = \frac{(k+2)(k-2)}{2(k+2)} = \frac{k-2}{2} \ (i)$$

Pela desigualdade das médias:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{\frac{4}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$a + b \leq 2\sqrt{2}$$

Voltando em (i)

$$E = \frac{k-2}{2} \geq \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2} - 1$$

Portanto:

$$E \geq \sqrt{2} - 1$$

10ª QUESTÃO

Seja um $\triangle ABC$ de lados medindo $AB = 30$, $BC = 32$ e $AC = 34$. Considere X um ponto interior ao lado $\overline{BC}$ e I_1 e I_2 os incentros dos triângulos $\triangle ABX$ e $\triangle ACX$, respectivamente. Encontre o valor da área mínima do triângulo $\triangle AI_1I_2$ ao variar X ao longo do lado $\overline{BC}$.

Gabarito

Inicialmente, notamos que:

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1AX + \angle XAI_2 = \frac{\angle BAX}{2} + \frac{\angle CAX}{2} = \frac{\angle A}{2}.$$

A área do triângulo pedido pode ser expressa por:

$$[AI_1I_2] = \tfrac{1}{2}(AI_1)(AI_2)\sin\angle I_1AI_2.$$

Dessa forma, para minimizar a área pedida, basta minimizar o produto $(AI_1)(AI_2)$. Seja $\alpha = \angle AXB$, temos que:

$$\angle AI_1B = 180^\circ - (\angle I_1AB + \angle I_1BA) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \tfrac{\alpha}{2}.$$

Aplicando a lei dos senos em $\triangle ABI_1$:

$$\frac{AI_1}{AB} = \frac{\sin \angle ABI_1}{\sin \angle AI_1B} \qquad \Rightarrow \qquad AI_1 = \frac{c \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Analogamente, obtemos: $AI_2 = \frac{b \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Dessa forma:

$$[AI_1I_2] = \frac{bc \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{bc \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \alpha} \geq bc \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

com a igualdade para $\alpha = 90^\circ$, ou seja, quando X é o pé da altura traçada de A até $\overline{BC}$. Nesse caso, a área mínima é dada por: $bc \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. Sendo:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}},$$

analogamente para $\sin \frac{B}{2}$ e $\sin \frac{C}{2}$. Finalmente:

$$\begin{aligned} bc \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= bc \cdot \frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{8abc} \\ &= \frac{(30-32+34)(32-34+30)(34-30+32)}{8 \cdot 32} = \boxed{126}. \end{aligned}$$