



# CICLO IME 2 - MATEMÁTICA

TURMA IME-ITA

2022



## 1ª QUESTÃO

Valor: 1,00

Piva e Santanelli apostam uma corrida, ambos partindo da largada. Piva corre sempre a uma velocidade de 8 km por hora, enquanto Santanelli corre 6 km na primeira hora e acelera de modo a correr mais  $\frac{1}{2}$  km a cada hora seguinte. Após quantas horas decorridas do início da corrida Santanelli alcançará Piva?

## 2ª QUESTÃO

Valor: 1,00

Um hexágono é constituído de quatro triângulos retângulos. Para a sua construção, considere o primeiro triângulo retângulo de hipotenusa medindo  $x$  e cateto de medida igual a 1. O outro cateto do primeiro triângulo serve de hipotenusa para o segundo, que tem como um dos lados do hexágono um cateto de medida também igual a 1. De modo análogo, a construção é feita até que o quarto triângulo retângulo possua como lados do hexágono dois catetos de medidas iguais a 1. Dessa forma:

(a) Calcule  $x$ .

(b) Demonstre que no vértice comum aos quatro triângulos retângulos assim construídos tem-se um ângulo interno do hexágono com medida inferior a  $150^\circ$ .

## 3ª QUESTÃO

Valor: 1,00

Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?

## 4ª QUESTÃO

Valor: 1,00

Determine todos  $a, b$  inteiros e  $p$  primo tais que:

$$a^4 + 4b^4 = p^2$$

<b>5ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Dados reais <math>a</math> e <math>b</math> tais que <math> a  &lt; 1</math> e <math> b  &lt; 1</math>, considere as séries infinitas:</p> $x = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \dots$ $y = 1 + 4b + 10b^2 + 20b^3 + \dots$ <p>Calcule <math>S</math> em função de <math>x</math> e de <math>y</math>:</p> $S = 1 + 3(ab) + 5(ab)^2 + \dots$	
<b>6ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Dado que:</p> $\sum_{k=1}^{35} \sin 5k = \tan \frac{m}{n},$ <p>com os ângulos medidos em graus e <math>m</math> e <math>n</math> inteiros positivos primos entre si tais que <math>\frac{m}{n} &lt; 90</math>, calcule <math>m + n</math>.</p>	
<b>7ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Sejam <math>\alpha</math> e <math>\beta</math> as raízes da equação: <math>x^2 - x + b = 0</math>. Definindo <math>S_k = \alpha^k + \beta^k</math>, calcule <math>b</math> sabendo que <math>S_2, S_3</math> e <math>S_5</math> estão em progressão aritmética.</p>	
<b>8ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Se os ângulos de um triângulo <math>\triangle ABC</math> satisfazem a relação:</p> $\cos(3A) + \cos(3B) + \cos(3C) = 1$ <p>e dois de seus lados medem 10 e 13, calcule a medida do terceiro lado.</p>	
<b>9ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Se <math>a</math> e <math>b</math> são números reais não nulos tais que: <math>a^2 + b^2 = 4</math>. Prove que:</p> $\frac{ab}{a + b + 2} \leq \sqrt{2} - 1$	
<b>10ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,00</b>
<p>Seja um <math>\triangle ABC</math> de lados medindo <math>AB = 30</math>, <math>BC = 32</math> e <math>AC = 34</math>. Considere <math>X</math> um ponto interior ao lado <math>\overline{BC}</math> e <math>I_1</math> e <math>I_2</math> os incentros dos triângulos <math>\triangle ABX</math> e <math>\triangle ACX</math>, respectivamente. Encontre o valor da área mínima do triângulo <math>\triangle AI_1I_2</math> ao variar <math>X</math> ao longo do lado <math>\overline{BC}</math>.</p>	