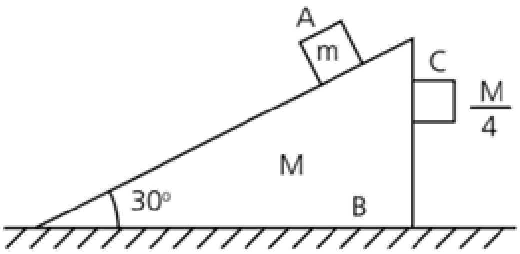
CICLO ITA 3 - FÍSICA

TURMA IME-ITA

2022

1ª QUESTÃO

Na disposição mostrada na figura a seguir, um bloco A, de massa m, foi colocado em uma cunha lisa B, de massa M. A cunha repousa sobre uma superfície lisa horizontal. Outro bloco C, de massa $M/4$, foi colocado em contato com a cunha B, como mostrado. O coeficiente de atrito entre o bloco C e a parede da cunha vertical é $\mu = 3/4$.



a) Encontre a relação entre as acelerações de m e M.

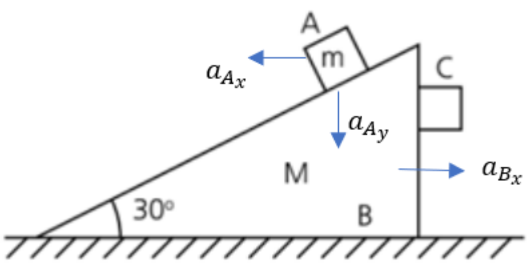
b) Encontre a normal em C.

c) Encontre a relação m/M para qual o bloco C não deslizará em relação à cunha após a massa m ser liberada.

Gabarito

a)

Primeiramente, veja que a relação entre as acelerações de m e M tem ligação direta com o vínculo do movimento;



Entretando escreveremos primeiro a conservação do centro de massa do conjunto para obter uma relação entre as acelerações.

Seja a_x a aceleração da massa m no eixo x e a_B a aceleração de B.

$$ma_x = Ma_B + \frac{M}{4}a_B$$

Mas veja que não há movimento relativo entre a cunha B e o bloco C, portanto no eixo x dizemos que $a_C = a_B$:

$$ma_x = \frac{5}{4}Ma_B$$

$$a_x = \frac{5M}{4m}a_B$$

Já para o vínculo do movimento, diremos que:

$$\sqrt{3}a_y = a_B + \frac{5M}{4m}a_B = \left(1 + \frac{5M}{4m}\right)a_B$$

$$a_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{5M}{4m}\right)a_{B_x}$$

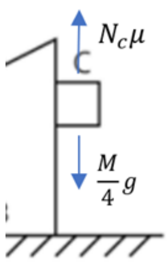
Fazendo $a^2 = a_x^2 + a_y^2$:

$$a_A = a_B\sqrt{\left(\frac{5M}{4m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{5M}{4m}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{a_A}{a_B} = \sqrt{\left(\frac{5M}{4m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{5M}{4m}\right)^2}}$$

b)

Pensando no equilíbrio do bloco:



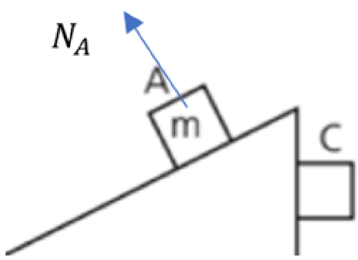
$$F_{at} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Ma_B}{4} = \frac{3Ma_B}{16}$$

$$a_{cy} = P - F_{at} = \frac{M}{16} \cdot (4g - 3a_B)$$

Pensamos agora no equilibrio dos corpos para determinar as acelerações; Para o bloco C:

$$N = \frac{M}{4} \cdot a_B$$

Já para o bloco A, iremos analisar as forças internas:



$$mg - Ncos30° = ma_y \Rightarrow Ncos30° = mg - ma_y$$

$$ma_x = Nsen30°$$

Fazendo a razão das equações:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a_x}{g - a_y}$$

Usando os valores anteriormente encontrados de a_x e a_y

$$\sqrt{3} = \frac{g - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{5M}{4m}\right) \cdot \frac{4m}{5M}a_x}{a_x}$$

Portanto:

$$a_x = g\frac{5\sqrt{3}M}{4(5M+m)}$$

$$a_B = \frac{4m}{5M} \cdot g\frac{5\sqrt{3}M}{4(5M+m)}$$

Finalmente para a normal no bloco C:

$$N = \frac{M}{4} \cdot a_B$$

$$\boxed{N_c = mg\frac{\sqrt{3}M}{4(5M+m)}}$$

c)
Para essa situação igualaremos a força de atrito com o peso:

$$\mu N_c = mg \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot mg\frac{\sqrt{3}M}{4(5M+m)} = \frac{M}{4}g$$

Simplificando:

$$3\sqrt{3}m = 4(5M+m) \Rightarrow 20M = m(3\sqrt{3} - 4)$$

Logo:

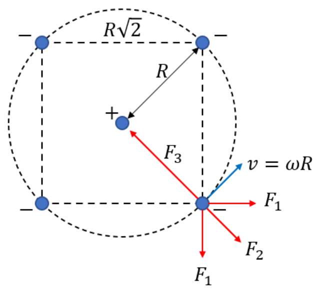
$$\boxed{\frac{m}{M} = \frac{20}{3\sqrt{3} - 4}}$$

2ª QUESTÃO

Quatro elétrons de massa m se movem em uma mesma órbita circular ao redor de um próton. Os elétrons formam um quadrado a todo instante. Considerando como sendo e a carga elementar e R o raio da órbita, determine a velocidade angular dos elétrons.

Gabarito

Visualizando o sistema, devemos montar um equilíbrio de tal forma que o formato do quadrado se mantenha, além de igualar a resultante das forças no sentido radial à força centrípeta:



Façamos agora a resultante centrípeta em um dos elétrons:

$$F_3 - 2 \cdot F_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - F_2 = F_{cp}$$

Em que F_1 é a força de interação entre dois eletrons adjacentes no quadrado, F_2 representa a interação entre dois elétrons opostos em relação ao centro e F_3 é a força de atração do elétron com o próton.

Como a força centrípeta é calculada como $m\omega^2 R$:

$$\frac{ke^2}{R^2} - \sqrt{2} \cdot \frac{ke^2}{2R^2} - \frac{ke^2}{4R^2} = m\omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{\frac{ke^2}{mR^3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

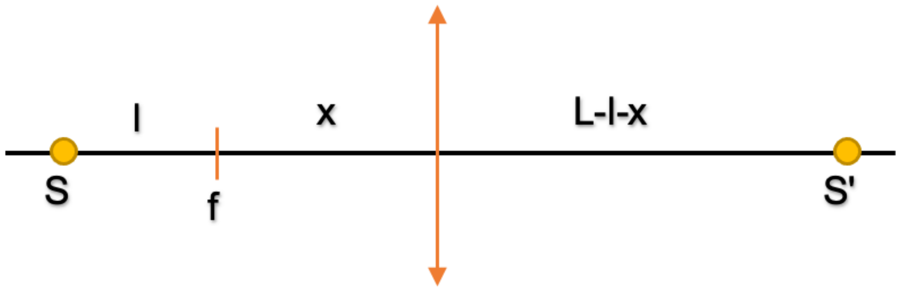
$$\boxed{\omega = \frac{e}{2R}\sqrt{\frac{k(3-2\sqrt{2})}{mR}}}$$

3ª QUESTÃO

Na figura a seguir temos uma fonte pontual de luz S, sua imagem S' obtida por meio de uma lente convergente e o foco F da lente mais próximo da fonte. Determine a posição da lente e sua distância focal. Dados: $SF = l$ e $SS' = L$

Gabarito

Colocando a lente com uma distância x do foco, temos:



Obs: A lente não pode estar entre o objeto e o foco
Usando a Lei de Gauss:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{l+x} + \frac{1}{L-l-x}$$

Fazendo o MMC:

$$(l+x)(L-l-x) = x(L-l-x) + x(l+x)$$

$$x^2 + 2xl + l^2 - lL = 0$$

$$x = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 - 4(l^2 - lL)}}{2}$$

x deve ser maior que 0 pela observação feita acima. Logo, a raiz negativa é descartada.

$$x = \frac{-2l \pm 2\sqrt{Ll}}{2}$$

$$x = -l + \sqrt{Ll}$$

Portanto, a Lente está a uma distância de $\boxed{\sqrt{Ll}}$ do objeto e possui distância focal $\boxed{x = -l + \sqrt{Ll}}$

4ª QUESTÃO

Um recipiente cilíndrico está na posição vertical, apoiado em uma das bases de área A, e contém em seu interior n mols de um gás ideal monoatômico, cujo expoente de Poisson é o γ. Impedindo que o gás escape para a atmosfera existe um pistão cilíndrico de massa M, perfeitamente ajustado a superfície interna do recipiente, podendo deslizar sobre a mesma sem atrito. Tanto o cilindro quanto o pistão são feitos de materiais isolantes térmicos. Inicialmente o pistão encontra-se em equilíbrio a uma altura H da base do recipiente. Sabe-se que a gravidade local é g.

a) Sendo P_0 a pressão atmosférica local, determine a pressão interna do gás na superfície inicial de equilíbrio.

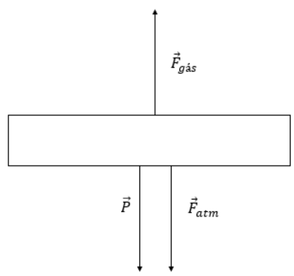
b) Suponha-se que o pistão é deslocado lentamente para baixo da sua posição de equilíbrio ate o gás ocupar um volume V. Determine a variação da energia interna do gás, após esse processo.

c) Se o deslocamento h for pequeno, compara a H, o pistão executará um movimento harmônico simples (MHS) após ser solto. Determine a frequência do mesmo (MHS).

Gabarito

O equilíbrio estático do pistão está relacionado à pressão do gás no cilindro uma vez que esta pressão, juntamente com a pressão atmosférica, garante o equilíbrio do pistão.

DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DO PISTÃO:



Onde:

$$|\vec{F_{atm}}| = P_o \cdot A \ \ e \ \ |\vec{F_{gás}}| = P_{gás} \cdot A$$

Substituindo na equação de equilíbrio, com $|\vec{P}| = Mg$:

$$Mg + P_o \cdot A = P_{gás} \cdot A \rightarrow \boxed{P_{gás} = P_0 + \frac{Mg}{A}}$$

O gás está termicamente isolado e, portanto, não ocorrem trocas de calor no sistema, sendo assim a transformação em questão é adiabática. Obs: O trecho "o pistão é deslocado lentamente"sugere que a tranformação é reversível e assim vale $P \cdot V^{\gamma} = cte$ Desse modo, temos que:

$$P \cdot V^{\gamma} = cte$$

Ou seja:

$$P_o \cdot V_o^{\gamma} = P_f \cdot V_f^{\gamma}$$

Onde:

$$V_o = A \cdot H \ \ e \ \ V_f = V$$

Com isso, obtemos P_f em função dos dados fornecidos pelo enunciado:

$$P_o \cdot V_o^{\gamma} = P_f \cdot V_f^{\gamma} \rightarrow P_f = P_o \cdot \left(\frac{V_o}{V_f}\right)^{\gamma}$$

Sendo assim,sabendo que para um gás monoatômico $\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T$, por clapeyron temos:

$$P \cdot V = nRT \rightarrow \frac{3}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2} \Delta(P \cdot V)$$

Veja que:

$$\Delta(P \cdot V) = P_f V_f - P_o V_o$$

Substituindo para que tenhamos apenas dados fornecidos pelo enunciado:

$$\Delta(P \cdot V) = P_o \cdot \left(\frac{V_o}{V_f}\right)^{\gamma} \cdot V_f - P_o V_o = P_o V_o \left(\left(\frac{V_o}{V_f}\right)^{\gamma - 1} - 1\right)$$

Substituindo os valores:

$$P_oV_o\left(\left(\frac{V_o}{V_f}\right)^{\gamma-1}-1\right)=(P_{atm}+\frac{Mg}{A})\cdot(A\cdot H)\cdot\left(\left(\frac{A\cdot H}{V}\right)^{\gamma-1}-1\right)$$

Portanto:

$$\boxed{\Delta U=\frac{3}{2}(P_{atm}+\frac{Mg}{A})\cdot(A\cdot H)\cdot\left(\left(\frac{A\cdot H}{V}\right)^{\gamma-1}-1\right)}$$

Na situação em que o pistão é deslocado h em relação a posição de equilíbrio teremos uma força resultante não nula atuando no pistão. Para que se tenha um MHS temos que a força resultante deve ser da forma $|F_{res}|=k\cdot h$, uma vez que h representa o deslocamento em relação à posição de equilíbrio. A partir do valor de k obtem-se a frequência f do MHS.

FORÇA RESULTANTE NO PISTÃO DESLOCADO:

Como o deslocamento foi para baixo, haverá uma resultante para cima a fim de reestabelecer a posição de equilíbrio:

$$F_{res}=AP_h-(Mg+AP_o)$$

Onde, nessa situação, obtemos a P_h como no item anterior sabendo que $P\cdot V^{\gamma}=cte$:

$$P_h=P_{\text{gás}}\cdot\left(\frac{A\cdot H}{A\cdot(H-h)}\right)^{\gamma}=(P_o+\frac{Mg}{A})\cdot\left(\frac{H}{(H-h)}\right)^{\gamma}$$

Onde $P_{\text{gás}}$ é a pressão do gás na posição de equilíbrio, encontrada no primeiro item. Sendo assim, substituindo o valor de P_h encontrado, a força resultante é dada por:

$$F_{res}=A(P_o+\frac{Mg}{A})\cdot\left(\frac{H}{(H-h)}\right)^{\gamma}-(Mg+AP_o)=(Mg+AP_o)\cdot\left(\left(\frac{H}{(H-h)}\right)^{\gamma}-1\right)$$

Aproximação:

$$\frac{H}{H-h}=\frac{1}{1-\frac{h}{H}}$$

Como $H>>h\rightarrow\ \frac{h}{H}<<1$ e vale:

$$\frac{1}{1-\frac{h}{H}}\approx 1+\frac{h}{H}$$

Pelo mesmo motivo também vale que:

$$\left(1+\frac{h}{H}\right)^{\gamma}\approx 1+\gamma\frac{h}{H}$$

Ou seja:

$$\left(\frac{H}{(H-h)}\right)^{\gamma}\approx 1+\gamma\frac{h}{H}$$

Substituindo na fórmula da força resultante:

$$F_{res}=(Mg+AP_o)\cdot\left(1+\gamma\frac{h}{H}-1\right)=\frac{(Mg+AP_o)\gamma}{H}\cdot h$$

Portanto temos que $k=\frac{(Mg+AP_o)\gamma}{H}$ e, assim:

$$w = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{M}} \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(g+\frac{AP_o}{M})\gamma}{H}}}$$

5ª QUESTÃO

Três tetraedros regulares de lado L e massa m são colocados sobre uma mesa plana e horizontal. Cada tetraedro possui um vértice que coincide com um vértice dos demais, formando uma área triangular aberta na mesa que é envolvida por eles. Em seguida, uma esfera, cuja massa vale M e o raio R, é colocada no centro do espaço envolvido pelos poliedros de forma que ela tangencie uma face de cada. Calcule:

a) o coeficiente de atrito mínimo entre os tetraedros e a mesa que mantém o equilíbrio do sistema.

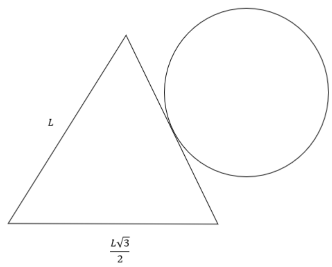
b) as acelerações da esfera e dos tetraedros, sendo μ o coeficiente de atrito entre os tetraedros e a mesa.

Obs: não há atrito entre a esfera e os tetraedros.

Gabarito

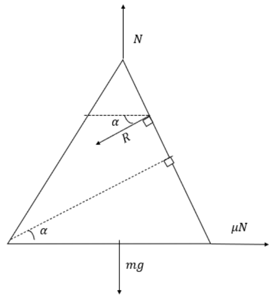
O coeficiente de atrito mínimo é tal que quando o sistema está em equilíbrio a força de atrito estática é máxima, ou seja, é um equilíbrio instável pois caso o coeficiente de atrito seja menor o sistema entra em movimento.

Considerando a simetria do sistema, temos que o ponto de contato entre a esfera e um dos tetraedos está sempre sobre a mediana da face do tetraedro. Tomando a seção transversal do tetraedro que passa pela mediana e pela aresta oposta teremos a seguinte figura:



Podemos analisar as forças que atuam no tetraedro a partir desta seção transversal, uma vez que a força peso do tetraedro* e a força normal de contato entre a esfera e o tetraedro estão neste plano e, portanto, a força de atrito também está. Pois este é um plano de simetria

Sendo assim, é possível analisar o diagrama de corpo livre da seção como se estivéssemos analisando o tetraedro como um todo:



Da geometria da figura, onde N é a normal entre o tetraedro e a mesa, μ_{min} o coeficiente de atrito e R é a normal de contato entre a esfera e o tetraedro, temos:

$$N = Rsen(\alpha) + mg \tag{I}$$

$$Rcos(\alpha) = \mu_{min} N \tag{II}$$

Do equilíbrio da esfera na vertical temos:

$$3 \cdot Rsen(\alpha) = Mg \Rightarrow R = \frac{Mg}{3sen(\alpha)}$$

Conforme a geometria do tetraedro regular, temos que $sen(\alpha) = \frac{1}{3}$ e $cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e portanto:

$$R = Mg$$

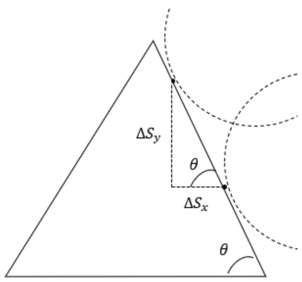
Substituindo em (II):

$$Rcos(\alpha) = Mg\frac{2\sqrt{2}}{3} = \mu_{min}N \Rightarrow N = \frac{Mg}{\mu_{min}}\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Finalmente, substituindo em (I):

$$\frac{Mg}{\mu_{min}}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{Mg}{3} + mg \Rightarrow \boxed{\mu_{min} = \frac{2\sqrt{2}M}{M + 3m}}$$

Observe o seguinte vínculo geométrico, que relaciona as posições de dois pontos de contato da esfera em dois instantes:



Veja que:

$$\frac{\Delta S_y}{\Delta S_x} = tg(\theta) = 2\sqrt{2}$$

Onde ΔS_x é o deslocamento do tetraedro, que ocorre na horizontal e ΔS_y é o deslocamento da esfera, que ocorre na vertical.

Onde $tg(\theta)$ se obtém a partir de um problema clássico de geometria espacial. Portanto temos que:

$$\Delta S_y = 2\sqrt{2}\Delta S_x \Rightarrow a_y = 2\sqrt{2}a_x$$

Estabelecido o vínculo, agora é possível relacionar as forças resultantes na esfera e em um tetraedro qualquer a partir da segunda lei de newton. Para a esfera:

$$F_1 = M \cdot a_y = Mg - 3Rsen(\alpha) \tag{a}$$

Para um tetraedro:

$$F_2 = m \cdot a_x = Rcos(\alpha) - \mu N \tag{b}$$

Onde $N = Rsen(\alpha) + mg$ e portanto no tetraedro temos de (b):

$$R = \frac{3m(a_x + \mu g)}{(2\sqrt{2} - \mu)}$$

E de (a) temos:

$$R = M(g - 2\sqrt{2}a_x)$$

Igualando os $R's$ obtidos:

$$\frac{3m(a_x + \mu g)}{(2\sqrt{2} - \mu)} = M(g - 2\sqrt{2}a_x)$$

$$2\sqrt{2}Mg - 8Ma_x - Mg\mu + 2\sqrt{2}M\mu a_x = 3ma_x + 3m\mu g$$

Portanto:

$$\boxed{a_x = \frac{g(M(2\sqrt{2} - \mu) - 3m\mu)}{(M(8 - 2\sqrt{2}\mu) + 3m)}}$$

$$\boxed{a_y = 2\sqrt{2}a_x = 2\sqrt{2} \cdot \frac{g(M(2\sqrt{2} - \mu) - 3m\mu)}{(M(8 - 2\sqrt{2}\mu) + 3m)}}$$

6ª QUESTÃO

A miragem é um fenômeno óptico comum em dias muitos quentes, podendo ser observado com frequência em desertos ou estradas asfaltadas. Explique o fenômeno tendo em conta que o índice de refração do ar diminui com a temperatura. Se necessário, faça um desenho representando o evento.

Gabarito

O efeito de miragem é um fenômeno óptico com base nos princípios da refração.

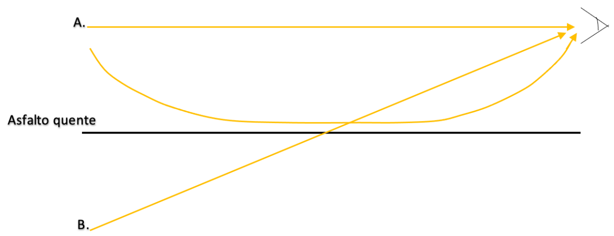
Pela Lei de Snell:

$$n_1.sen\theta_1 = n_2.sen\theta_2$$

O estudo da refração é vinculado ao índice de refração do meio no qual a luz está inserida. O índice de refração, na verdade, varia com a mudança da densidade e essa geralmente varia com a temperatura.

obs: Se a temperatura variar mas a densidade do meio no qual a luz vai refratar não mudar, então o índice permanecerá constante.

Temos que em dias de calor forma-se uma camada de ar quenta próxima ao solo. Consequentemente, o índice de refração do ar irá diminuindo à medida que se aproxima do chão. Assim, os raios de luz que se propagam em direção ao chão, serão constantemente refratados para cima.



O efeito é um desvio do feixe de luz que inicia seu percurso se aproximando do solo e acaba por se afastar. Quem olha o feixe de luz que saiu do ponto A da figura (e que foi refratado à medida que se aproximava do chão) terá a impressão que ele veio do ponto B, pois nosso cérebro pressupõe que a luz caminhe em linha reta. Logo, o observador verá o ponto A diretamente, segundo um raio horizontal, e sua "imagem"(o ponto B) como se houvesse um espelho no chão, correspondente ao raio oblíquo. Daí a nítida impressão que a estrada está molhada, apesar disso ocorrer em dias quentes e ensolarados.

Entendendo um pouco mais...

Por que a densidade está relacionada com o índice de refração?

A luz é uma radiação eletromagnética com campos elétricos e magnéticos. Seu movimento através de uma matéria tem suas interações com ela que dependem da matéria pela qual ela tem que passar. As próprias moléculas estão se movendo com movimento browniano como no líquido ou vibrando em torno de sua posição, uma propriedade relacionada ao seu estado de energia, que depende da temperatura e as interações moleculares com a onda eletromagnética dependem das nuvens de elétrons e seus campos, que ela encontra ao passar por ela. No caso de gases, o espaço vazio aumenta com a temperatura ou, em linguagem leiga, a densidade diminui, de modo que os obstáculos à passagem da luz diminuem significa que o índice de refração do meio diminui.

7ª QUESTÃO

Elétrons (massa m e carga $-e$) são atirados continuamente, a partir do infinito, com velocidade inicial v_0, contra uma esfera metálica isolada que se encontra fixa. A esfera encontra-se inicialmente descarregada e, à medida que os elétrons se chocam, permanecem grudados à esfera, permanecendo em repouso. Sabe-se que, em algum momento, ainda que os elétrons continuem sendo lançados em direção a esfera, sua carga permanece constante. Sabe-se que o raio da esfera vale R, a permissividade elétrica do meio ε e a capacidade térmica da esfera C.

a) Explique por que a carga da esfera, a partir de algum momento, se mantém constante.

b) Calcule a variação de temperatura da esfera.

Gabarito

a) Ao atirarmos elétrons na esfera, esta vai ganhando carga negativa, e é sabido que durante a trajetória deste elétrons ele sofre desaceleração devido a força de repulsão com a esfera. Em algum momento, a carga da esfera será grande o suficiente para que não deixe os próximos elétrons a atingirem, anulando a velocidade deles antes que encontrem com a mesma, devido a força de repulsão eletrostática.

b) Primeiro, vamos encontrar a carga final da esfera, utilizando que o primeiro elétron que não atinge a sua superfície chega próximo da mesma com velocidade zero. Logo, ele sai do infinito com velocidade v_0 e chega na superfície da esfera carregada com carga $-Q$ com velocidade nula. Conservando energia:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kQe}{R}$$

$$Q = \frac{mRv_0^2}{2ke}$$

Sendo assim, temos a carga final da esfera condutora assim como a quantidade de elétrons que atinge a esfera:

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{mRv_0^2}{2ke^2}$$

Sabemos que no final do processo, a energia cinética inicial de todos os elétrons foi conservada na forma de energia potencial e energia térmica, usada para aquecer a esfera. Assim, podemos pensar em conserva a energia:

$$E_{inicial} = n \cdot \frac{mv_0^2}{2}$$

$$E_{final} = \frac{kQ^2}{2R} + C\Delta T$$

Substituindo n e Q, e igualando as energias, temos:

$$\frac{mRv_0^2}{2ke^2}\frac{mv_0^2}{2} = C\Delta T + \frac{k}{2R}\left(\frac{mRv_0^2}{2ke}\right)^2$$

Logo:

$$C\Delta T = \frac{R(mv_0^2)^2}{8ke^2}$$

Nesse caso, vale lembrar que o enunciado deu como informação a permissividade do meio. Então, vamos substituir $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$:

$$\boxed{\Delta T = \frac{\pi\varepsilon_0(mv_0^2)^2}{2Re^2C}}$$

8ª QUESTÃO

Considere um planeta de raio R e suponha que ele gire de modo que o mesmo lado esteja sempre voltado para o Sol. O lado brilhante voltado para o Sol tem uma temperatura uniforme constante T_1, enquanto o lado escuro tem uma temperatura constante T_2. O raio de órbita do planeta é R_o, o sol tem temperatura T_s e o raio do Sol é R_s. Suponha que o espaço sideral tenha temperatura zero e trate todos os objetos como corpos negros ideais. Para manter T_1 e T_2 constantes, o calor deve ser continuamente transferido do lado claro para o lado escuro. Ao visualizar os dois hemisférios como os dois reservatórios de uma máquina térmica de Carnot, o trabalho pode ser realizado a partir dessa diferença de temperatura, que aparece na forma de energia eólica. Para simplificar, assumimos que toda essa energia é imediatamente capturada e armazenada pelos moinhos de vento.

Seja $x = \frac{T_2}{T_1}$, σ a constante de Boltzmann e considere que $R_o \gg R_T$.

a) Encontre a potência solar P que recebe o lado brilhante do planeta.

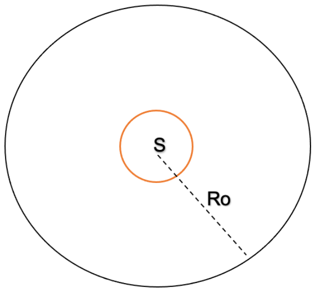
b) Considerando apenas a radiação, calcule a potência líquida da parte escura e da parte clara.

c) Encontre a potência eólica em função de x e P.

Gabarito

Para resolver o problema devemos ficar atentos aos passos e organizar bem, pois o enunciado é grande e pode deixar o leitor confuso. Um desenho ilustrando a situação é fundamental.

Primeiro, sabemos que o planeta vai receber uma parte da potência emitida pelo Sol (devemos considerar a potência efetiva).



A potência total emitida pelo sol é dada pela sua radiação:

$$P_{sol} = \sigma.\epsilon.4\pi.{R_S}^2.T_S^4$$

Porém, o planeta só recebe uma parte dessa potência. A potência do Sol está para a área total da esfera com raio R_o assim como a potência recebida está para a área efetiva do planeta.

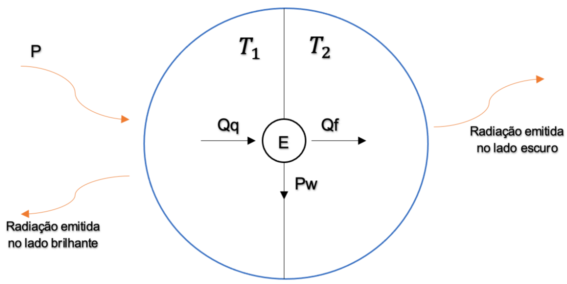
$$\frac{P}{\sigma \cdot 4\pi \cdot R_S \cdot T_s^4} = \frac{\pi R^2}{4\pi R_0^2}$$

Corpo negro: $\epsilon = 1$

$$\boxed{P = \frac{\sigma \cdot \pi \cdot T_S^4 \cdot R_S^2 \cdot R^2}{R_0^2}}$$

Para manter T_1 e T_2 constantes, o calor deve ser continuamente transferido do lado claro para o lado escuro. Ao visualizar os dois hemisférios como os dois reservatórios de uma máquina térmica reversível, o trabalho pode ser realizado a partir dessa diferença de temperatura, que aparece na forma de energia eólica. Para simplificar, assumimos que toda essa energia é imediatamente capturada e armazenada pelos moinhos de vento.

Agora, ilustrando a situação:



A potência líquida é o saldo energético de cada lado.

$$P_{brilhante} = \frac{\sigma \cdot \pi \cdot T_S^4 \cdot R_S^2 \cdot R^2}{R_0^2} - \frac{4 \cdot \sigma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot T_1^4}{2}$$

$$\boxed{P_{brilhante} = \sigma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(\frac{T_S^4 \cdot R_S^2}{R_0^2} - 2T_1^4\right)}$$

$$P_{escuro} = \frac{\sigma \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot T_2^4}{2}$$

$$\boxed{P_{escuro} = \sigma \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot T_2^4}$$

Na máquina térmica, temos que:

$$Q_q = P - Rad_{ladobrilhante}$$

$$Q_f = Rad_{ladoescuro}$$

$$P_w = Q_q - Q_f$$

$$P_w = P - 2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot T_1^4 - 2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot T_2^4$$

$$P_w = P - 2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot (T_1^4 + T_2^4)$$

$$x = \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2 = x \cdot T_1$$

$$P_w = P - 2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot T_1^4(1 + x^4)$$

Como a máquina opera em um ciclo de Carnot, temos que a seguinte relação é válida:

$$\frac{Q_q}{Q_f} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{P - 2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot (T_1^4 + T_2^4)}{2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot T_2^4} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$P = 2\pi \cdot \sigma \cdot R^2(T_1^4 + T_1 \cdot T_2^3)$$

$$P = 2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot T_1^4(1 + x^3)$$

$$T_1^4 = \frac{P}{2\pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot (1 + x^3)}$$

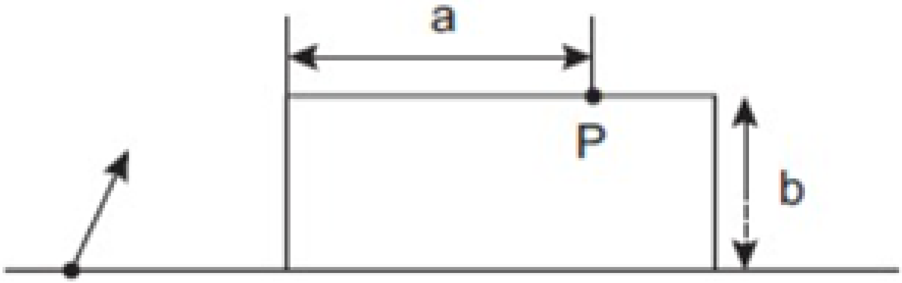
Substituindo em P_w encontramos:

$$P_w = P - \frac{P \cdot (1 + x^4)}{1 + x^3}$$

$$\boxed{P_w = \frac{P \cdot x^3(1-x)}{1+x^3}}$$

9ª QUESTÃO

Um gafanhoto preguiçoso deseja saltar, partindo do solo, visando atingir o ponto P de um batente usando a menor velocidade possível. Em função dos termos a, b e da gravidade g, calcule:



a) a distância inicial entre o gafanhoto e o batente.

b) a velocidade inicial do gafanhoto para que isso seja possível.

Gabarito

Podemos perceber que a velocidade é a mínima possível no ponto de lançamento, quando ela é a mínima possível para ter um alcance a a uma altura b acima do solo.

Sendo assim, temos que o alcance a é **máximo** nessa altura b. Logo:

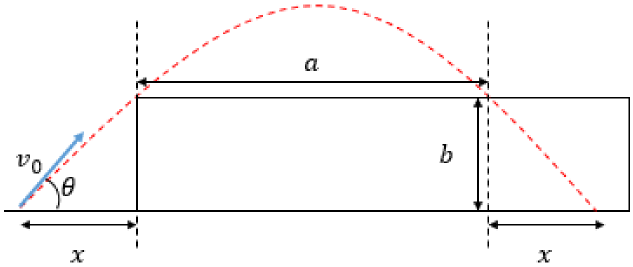
$$\frac{v^2}{g} = a \Rightarrow v^2 = ga$$

Sendo assim, podemos calcular logo a velocidade na posição inicial do lançamento:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgb = \frac{mga}{2} + mgb$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{g(a+2b)}}$$

Para calcular a distância x do gafanhoto ao batente, podemos analisar a simetria do problema:



Podemos perceber que o alcance desse lançamento vale:

$$A = 2x + a = \frac{v_0^2 \cdot 2cos(\theta)sen(\theta)}{g} \tag{I}$$

Se tivermos os ângulos de lançamento, podemos descobrir o valor de x.

Sabemos que no ponto P, a velocidade vale $v = \sqrt{ga}$ e o ângulo com a horizontal vale $45°$ (motivo que garante o alcance máximo). Logo, a componente em x, que é constante, vale:

$$v_0 cos\theta = \sqrt{ga} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{ga}{2}}$$

Como $v_0 = \sqrt{g(a+2b)}$, temos:

$$\sqrt{g(a+2b)} \cdot cos\theta = \sqrt{\frac{ga}{2}}$$

$$cos\theta = \sqrt{\frac{a}{2a+4b}}$$

Além disso, pela relação fundamental:

$$sen\theta = \sqrt{\frac{4b+a}{4b+2a}}$$

Portanto, chegamos ao que queríamos. Substituindo em (I):

$$2x + a = \frac{g(2b+a) \cdot 2\sqrt{\frac{4b+a}{4b+2a}}\sqrt{\frac{a}{4b+2a}}}{g}$$

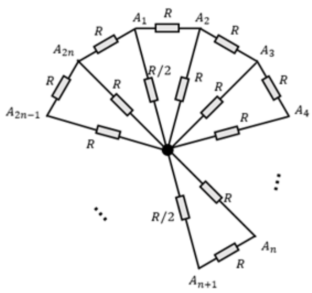
$$2x + a = \sqrt{a(4b+a)}$$

Logo:

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{a(4b+a)} - a}{2}}$$

10ª QUESTÃO

Um polígono regular de $2n$ (n inteiro) lados é formado por arestas cujas resistências valem R. Entre cada vértice e o centro são colocados fios, de modo que $(2n-2)$ desses fios possuam resistência R, enquanto outros 2 fios -- que são colineares e estão entre vértices opostos e o centro - possuam resistência $R/2$.

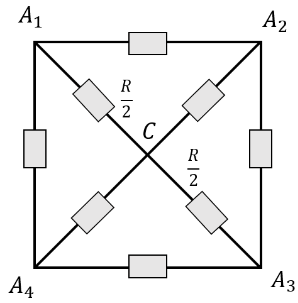


Calcule a resistência equivalente entre o ponto A_1 e o centro para:

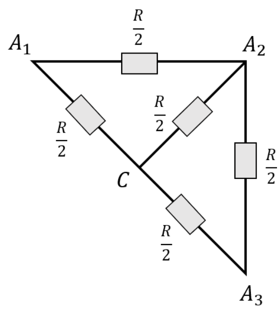
a. o caso em que o polígono possui quatro lados, ou seja, é um quadrado. b. um polígono de 12 lados. c. o caso em que o polígono converge para uma circunferência, ou seja, quando $n \to \infty$.

Gabarito

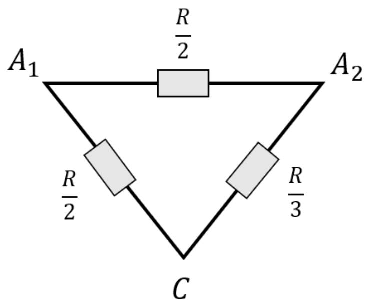
Vamos primeiro desenhar o caso do quadrado:



Vejamos que o eixo que passa pelos pontos A_1 e C é um eixo de simetria que divide a figura em duas regiões equivalentes, portanto podemos rebater a figura dividindo as resistências pela metade:



Agora, para prosseguir com a R_{eq} entre A_1 e C, devemos realizar a R_{eq} em série do caminho A_2A_3C e depois realizar o paralelo com o resistor entre A_2C, resultando no seguinte:

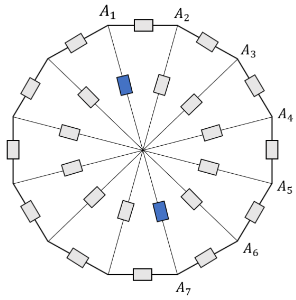


Sendo assim, teremos:

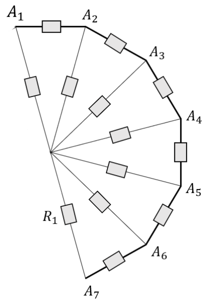
$$R_{eq} = \frac{(\frac{R}{2} + \frac{R}{3}).\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \frac{R}{2}}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{5R}{16}}$$

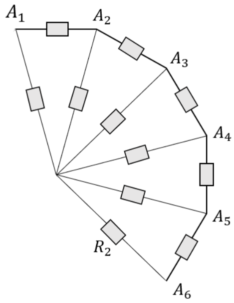
Agora, vejamos o caso do polígono com 12 lados (resistores que valem $\frac{R}{2}$ em azul):



Vamos realizar novamente a partição da figura a partir do eixo de simetria que liga A_1 e o centro (todos resistores valendo $\frac{R}{2}$ e chamando de R_1 o resistor entre o centro e A_7)



Agora, vamos realizar a série do caminho A_6A_7C e depois fazer o paralelo com o resistor entre C e A_6:

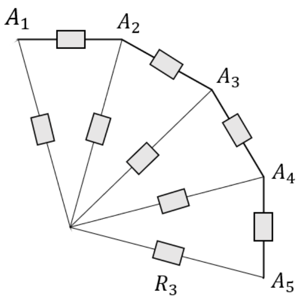


Tendo o valor de R_2 como:

$$R_2 = (R_1 + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 + \frac{R}{2}} + \frac{1}{\frac{R}{2}}$$

Agora, realizando o mesmo procedimento novamente, ficaremos com:



Aonde temos o valor de R_3 como:

$$R_3 = (R_2 + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2 + \frac{R}{2}} + \frac{1}{\frac{R}{2}}$$

Portanto, obtemos o seguinte padrão:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_{n-1} + \frac{R}{2}} + \frac{1}{\frac{R}{2}}$$

Podemos perceber que para o polígono de 12 lados este padrão se manterá até ficarmos com apenas um resistor entre A_1 e o centro, que será o equivalente à R_7.

Vamos então calcular a resistência até R_7, sabendo que partimos de $R_1 = \frac{R}{2}$:

$$R_2 = (\frac{R}{2} + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$R_2 = \frac{R}{3}$$

Para calcular R_3:

$$R_3 = (\frac{R}{3} + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$R_3 = \frac{5R}{16}$$

Para calcular R_4:

$$R_4 = (\frac{5R}{16} + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$R_4 = \frac{13R}{42}$$

Para calcular R_5:

$$R_5 = (\frac{13R}{42} + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$R_5 = \frac{17R}{55}$$

Para calcular R_6:

$$R_6 = (\frac{34R}{110} + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$R_6 = \frac{89R}{288}$$

Por fim, achando R_7:

$$R_7 = (\frac{89R}{288} + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$\boxed{R_7 = \frac{233R}{754}}$$

Agora, se fosse um polígono de infinitos lados, faríamos o procedimento infinitas vezes. E como é um procedimento infinito, usaremos a ideia mais comum de R_{eq} infinita, aonde a resistência equivalente será a mesma para $n = \infty$ ou $n = \infty + 1$. Portanto, escreveremos o mesmo procedimento de antes, porém com $R_n = R_{n-1} = R_{eq}$:

$$R_{eq} = (R_{eq} + \frac{R}{2})//\frac{R}{2}$$

$$R_{eq} = \frac{(R_{eq} + \frac{R}{2})\frac{R}{2}}{R_{eq} + R}$$

$$R_{eq}^2 + \frac{RR_{eq}}{2} - \frac{R^2}{4} = 0$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R}{2}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}$$