# CICLO ITA 1 - FÍSICA

**TURMA IME-ITA**

**2022**

**DADOS**

### Constantes

- Aceleração da gravidade $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

**1ª QUESTÃO**

Uma pedra é solta do alto de uma torre de altura $H$. Após se passarem $n$ segundos, outra pedra é arremessada para baixo com uma velocidade $v$. Mostre que as duas pedras chegarão ao solo juntas se:

$$8H(v - gn)^2 = gn^2(2v - gn)^2$$

## Gabarito

a) $8H(v - gn)^2 = gn^2(2v - gn)^2$

Calculando o tempo para a primeira pedra atingir o chão:

$$0 = H - \frac{gt^2}{2} \tag{I}$$

Calculando o tempo para a segunda pedra, lançada $n$ segundos depois, atingir o chão:

$$0 = H - v\,(t - n) - \frac{g(t - n)^2}{2} \tag{II}$$

Como o $t$ tem o mesmo valor, podemos isolar nas duas equações e igualar
Equação I:

$$\frac{gt^2}{2} = H \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Bháskara na equação II:

$$t - n = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot H}}{2 \cdot \frac{g}{2}}$$

Como $t - n > 0$:

$$t - n = -\frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} t = n - \frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}$$

Igualando:

$$n - \frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \sqrt{\frac{2H}{g}} - n + \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}$$

Elevando ao quadrado:

$$\frac{2H}{g}+\frac{v^2}{g^2}-2n\cdot\frac{v}{g}+n^2+2\left(\frac{v}{g}-n\right)\sqrt{\frac{2H}{g}}=\frac{v^2}{g^2}+\frac{2H}{g}$$

Simplificando:

$$\frac{2nv}{g}-n^2=2\left(\frac{v}{g}-n\right)\sqrt{\frac{2H}{g}}n(2v-gn)=2(v-gn)\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Elevando novamente ao quadrado e multiplicando por $g$:

$$\boxed{8H(v-gn)^2=gn^2(2v-gn)^2}$$

**2ª QUESTÃO**

Dois carros, $A$ e $B$, se encontram inicialmente na origem do eixo $x$. Um observador inercial $O$, também localizado na origem, mede o tempo de percurso dos carros e suas velocidades por meio de um relógio pendular de período igual a $2$ s à $20$ °C. O carro $A$ parte primeiro em M.U. na direção positiva do eixo $x$ e sua velocidade medida é de $36$ km/h. Após $30$ min de percurso, a temperatura do ambiente é elevada instantaneamente à $40$ °C, de modo que o relógio sofra uma dilatação também instantânea. Nesse mesmo instante, o carro $B$ parte do eixo $x$ no mesmo sentido de $A$, de tal forma que, sem os devidos conhecimentos de dilatação e não percebendo a variação na velocidade medida de $A$, o tempo de encontro medido pelo observador foi de $2$ h. Calcule o erro na velocidade do carro $B$, medida pelo observador.

### Dados

- $\alpha = 4\times 10^{-5}\,^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$

## Gabarito

a) $erro = 0,01\%$

Podemos descobrir a distância entre $A$ e $B$ no instante em que $B$ começa a se deslocar:

$$\Delta S_A = 36\cdot 0,5 = 18\ km$$

Sendo assim, conseguimos encontrar a velocidade relativa medida entre os carros:

$$v_{rel}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{18\ km}{1,5\ h}=12\ km/h$$

Portanto, a velocidade de $B$ vale:

$$v_B = 12+36 = 48\ km/h$$

No entanto, houve um erro na medição do tempo, que podemos encontrar da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1}{2}t_0\alpha\Delta\theta$$

Onde $\Delta t = t - t_0$, sendo $t_0$ o tempo correto e $t$ o tempo incorreto (1,5 h).
Logo:

$$t = t_0\left(1+\frac{1}{2}\alpha\Delta\theta\right) \Rightarrow\ \Rightarrow t_0 = \frac{t}{1+\frac{1}{2}\alpha\Delta\theta} = \frac{1,5}{1+0,5\cdot 4\cdot 10^{-5}\cdot 20} = \frac{1,5}{1,0004}$$

Portanto, conseguimos encontrar a velocidade real:

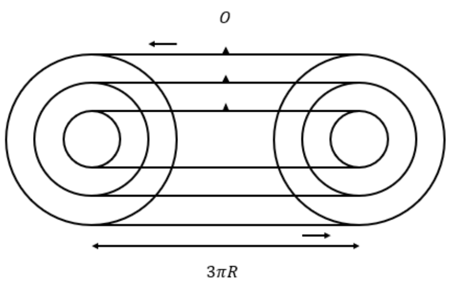
$$v_{rel} = \frac{18\ km}{\frac{1,5}{1,0004}\ h} = 12,0048\ km/h v_{Breal} = 36 + 12,0048 = 48,0048\ km/h$$

Logo, chegamos ao erro na aferição da velocidade:

$$erro = \frac{v_{B,real} - v_B}{v_{B,real}} = \frac{0,0048}{48,0048} \Rightarrow \boxed{erro = 0,01\%}$$

## 3ª QUESTÃO

Dois eixos iguais são construídos em forma de três cilindros concêntricos cujos raios valem respectivamente $R$, $2R$ e $3R$ e a distância entre os centros vale $L = 3\pi R$. Ambos os eixos giram com mesmo período de rotação $T$ e três correias são presas nos eixos como mostra a figura. Em cada correia há uma marca, que no instante $t = 0$, está alinhada com a referência $O$. Supondo que as correias giram sem escorregar nos eixos, qual o menor tempo para que as três marcas estejam alinhadas novamente com a referência $O$?




## Gabarito

a) $t = 60T$

Vamos calcular a velocidade com as quais as correias se movem:

$$v_1 = \omega\cdot R;\ v_2 = \omega\cdot 2R;\ v_3 = \omega\cdot 3R$$

Substituindo $\omega$ por $\frac{2\pi}{T}$, temos:

$$v_1 = \frac{2\pi}{T}\cdot R;\ v_2 = \frac{2\pi}{T}\cdot 2R;\ v_3 = \frac{2\pi}{T}\cdot 3R$$

Analisando o período que leva para cada correia retornar ao ponto $O$:
Correia 1:

$$\Delta S_1 = 2\pi R + 6\pi R = 8\pi R = v\cdot t_1 \Rightarrow 8\pi R = \frac{2\pi R}{T}\cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 4T$$

Correia 2:

$$\Delta S_1 = 2\pi\cdot 2R + 6\pi R = 10\pi R = v\cdot t_2 \Rightarrow 10\pi R = \frac{4\pi R}{T}\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{5}{2}T$$

Correia 3:

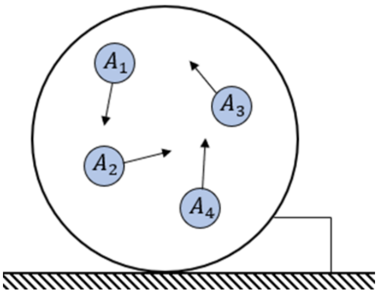
$$\Delta S_1 = 2\pi \cdot 3R + 6\pi R = 12\pi R = v \cdot t_3 \Rightarrow 12\pi R = \frac{6\pi R}{T} \cdot t_3 \Rightarrow t_3 = 2T$$

Sendo assim, o tempo para todas estarem alinhadas em $O$ é o MMC dos tempos $t_1$, $t_2$ e $t_3$.
Logo:

$$\boxed{t = 20T}$$

**4ª QUESTÃO**

Na figura abaixo temos quatro esferas idênticas em um recipiente esférico condutor aterrado por um fio.




Inicialmente, apenas as esferas $A_1$ e $A_3$ encontram-se carregadas, com cargas elétricas iguais a $4$ C e $-5$ C, respectivamente. Durante o movimento aleatório das esferas dentro do recipiente, a esfera $A_1$ choca-se com a esfera $A_2$. Posteriormente, a esfera $A_2$ choca-se simultaneamente com a esfera $A_3$ e $A_4$. Após, a esfera $A_3$ choca-se com a parede do recipiente. Por fim, a esfera $A_4$ choca-se com a parede do recipiente e atinge, depois disso, a esfera $A_1$. Sabendo que durante o movimento das cargas ocorrem apenas os choques citados acima e tais choques não dissipam energia, determine:

a) A carga final da esfera $A_4$.

b) A carga total transferida através do fio durante todo o processo.

## Gabarito

a) $Q_{transf} = 2\ C$

Listando as cargas das esferas:

$$Q_{A_2} = Q_{A_4} = 0\ C;\ Q_{A_1} = 4\ C;\ Q_{A_3} = -5\ C$$

Vamos analisar choque a choque.
Primeiro choque: esferas $A_1$ e $A_2$.

$$Q_{A_1} = Q_{A_2} = \frac{4+0}{2} = 2\ C$$

Segundo choque: esferas $A_2$, $A_3$ e $A_4$.

$$Q_{A_2} = Q_{A_3} = Q_{A_4} = \frac{2 + (-5) + 0}{3} = -1\ C$$

Terceiro e quarto choques: esferas $A_3$ e $A_4$ com a parede do recipiente.

Como o recipiente se encontra aterrado:

$$Q_{A_3} = Q_{A_4} = 0\ C$$

Quinto choque: esferas $A_4$ e $A_1$.

$$Q_{A_1} = Q_{A_4} = \frac{0 + 2}{2} = 1\ C$$

Portanto, temos o item (a):

$$\boxed{Q_{A_4} = 1\ C}$$

Item (b):

As cargas transferidas no aterramento foram as de $A_4$ e $A_3$ nos instantes dos choques com o recipiente.

$$\boxed{Q_{transf} = |(-1) + (-1)| = 2\ C}$$

## 5ª QUESTÃO

Três barras metálicas $A$, $B$ e $C$ são dispostas de modo que $A$ e $B$ possuem o mesmo comprimento $L$ e são articuladas por um pino $P$. A barra $C$ é posta em contato pelas extremidades com as barras $A$ e $B$, de modo que juntas formem um triângulo obtuso de abertura $\theta$. Considerando $\alpha_A$, o coeficiente de dilatação linear da barra $A$, e $\alpha_B$, o coeficiente de dilatação linear da barra $B$, tal que, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_1$, calcule o coeficiente de dilatação linear da barra $C$ de modo que, para qualquer temperatura, o triângulo formado pelas três barras seja semelhante ao inicial.

### Gabarito

a) $\alpha_c = \alpha_1$

Para o triângulo ser semelhante após um $\Delta T$, temos que garantir que o ângulo $\widehat{C}$ permaneça o mesmo.

Usando lei dos cossenos no início:

$$L_{0C}{}^2 = L^2 + L^2 - 2L^2 cos\theta = 2L^2(1 - cos\theta) \qquad \text{(II)}$$

Após $\Delta T$, temos:

$$L_{0C}{}^2(1 + \alpha_c\Delta T)^2 = L^2(1 + \alpha_1\Delta T)^2 + L^2(1 + \alpha_1\Delta T)^2 - 2L^2(1 + \alpha_1\Delta T)^2 cos\theta$$

Logo:

$$L_{0C}{}^2(1 + \alpha_c\Delta T)^2 = 2L^2(1 - cos\theta)(1 + \alpha_1\Delta T)^2 \qquad \text{(II)}$$

Substituindo I em II e simplificando, chegamos em:

$$
\begin{aligned}
{L_{0C}}^2(1+\alpha_c\Delta T)^2 = {L_{0C}}^2(1+\alpha_1\Delta T)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow (1+\alpha_c\Delta T)^2 = (1+\alpha_1\Delta T)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow 1+\alpha_c\Delta T = 1+\alpha_1\Delta T
\end{aligned}
$$

Sendo assim, chegamos em:

$$\boxed{\alpha_c = \alpha_1}$$

**6ª QUESTÃO**

Um espelho plano, inicialmente posicionado no plano $xz$, translada segundo o vetor velocidade:

$$\vec{V} = (t^3 - 4t + 8,\ 3t,\ t^2)$$

Enquanto isso, uma massa pontual move-se segundo a equação de movimento:

$$\vec{S} = (4t, \frac{5t^2}{2} + 10,\ 3t)$$

Determine:

a) O vetor velocidade da imagem no instante $t > 0$.

b) A posição da imagem no instante $t$.

## Gabarito

a) $\vec{v_{img}} = (4,\ t,\ 3)$

b) $\vec{S_{img}} = \left(4t,\ -t^2 - 10,\ 3t\right)$

Para o primeiro item, podemos calcular a velocidade da imagem lembrando que: as componentes da velocidade do corpo paralelas ao espelho são iguais às componentes da velocidade. Porém, perpendicularmente ao plano do espelho, temos a seguinte relação:

$$v_{img} = 2v_{esp} - v_{obj}$$

Calculando a velocidade da massa pontual:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = (4, 5t, 3)$$

Sendo assim, temos nos eixos $x$ e $z$:

$$
\begin{aligned}
v_{x,img} &= v_{x,obj} = 4 \\
v_{y,img} &= v_{z,obj} = 3 \\
v_{z,img} &= 2v_{y,esp} - v_{y,obj} = 2 \cdot 3t - 5t = t
\end{aligned}
$$

Portanto, temos:

$$\boxed{\vec{v_{img}} = (4,\ t,\ 3)}$$

Para o segundo item, podemos usar a mesma ideia, mas com a posição, lembrando que o espelho inicialmente se encontra na origem.

Posição do espelho

$$y_{esp} = \int 3t\ dt = \frac{3t^2}{2}$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned}
x_{img} &= x_{obj} = 4t \\
y_{img} &= 2y_{esp} - y_{obj} = 2 \cdot \frac{3t^2}{2} - \left(\frac{5t^2}{2} + 10\right) = -t^2 - 10 \\
z_{img} &= z_{obj} = 3t
\end{aligned}$$

Portanto, a posição da imagem é:

$$\boxed{\vec{S_{img}} = \left(4t,\ -t^2 - 10,\ 3t\right)}$$

Outra forma que podemos fazer este item seria usar a velocidade da imagem e adicionar as condições iniciais:

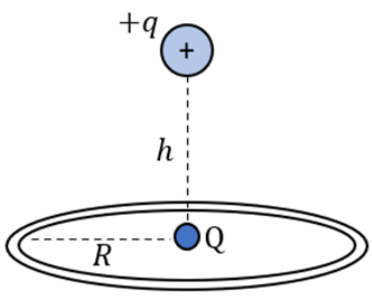
$$\vec{S_{img}} = \int \vec{v_{img}}\ dt \vec{S_{img}} = \left(4t + x_0,\ \frac{t^2}{2} + y_0,\ 3t + z_0\right)$$

Porém, no início $(t = 0)$, temos que $y_{0,img} = -y_{0,obj} = -10$, uma vez que o espelho se encontra na origem, enquanto as coordenadas $xz$ são as mesmas do objeto. Logo:

$$\boxed{\vec{S_{img}} = \left(4t,\ -t^2 - 10,\ 3t\right)}$$

## 7ª QUESTÃO

Uma esfera $A$ carregada com carga elétrica $+q$ encontra-se verticalmente acima do centro de um aro circular fixo com densidade linear uniforme de carga $\lambda$.




Sabendo que o raio do aro é $R$ e a distância entre a esfera $A$ e o centro do aro é $h$, determine o valor da carga $Q$ que deve ser fixada no centro do aro a fim de que a esfera $A$ esteja em equilíbrio eletrostático. Desconsidere a gravidade no local.

**Gabarito**

a) $Q = -\frac{2\pi\lambda R h^3}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$

Vamos calcular a força elétrica resultante na carga $+q$.

Pegando um pedaço pequeno do aro $(dl)$ e usando a lei de Coulomb, encontramos uma força de módulo igual a:

$$dF_{el} = \frac{kq(\lambda\, dl)}{D^2}$$

Onde, por Pitágoras, $D$ vale $\sqrt{h^2+R^2}$.

No entanto, percebemos pela simetria que as componentes horizontais da força elétrica se anulam. Sendo assim, podemos calcular a força resultante em $y$ somando todas as forças.

$$F_y = \sum F_{el} \cdot cos(\theta)$$

Nesse caso, conseguimos encontrar o valor para $cos(\theta)$:

$$cos(\theta) = \frac{h}{D} = \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

Portanto, temos:

$$F_y = \sum \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} \cdot \frac{kq\lambda\, dl}{h^2+R^2}$$

$$F_y = \frac{kqh\lambda}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \sum dl$$

Sendo assim, chegamos em:

$$F_y = \frac{kqh\lambda 2\pi R}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como a carga Q precisa anular a força $F_y$, temos que:

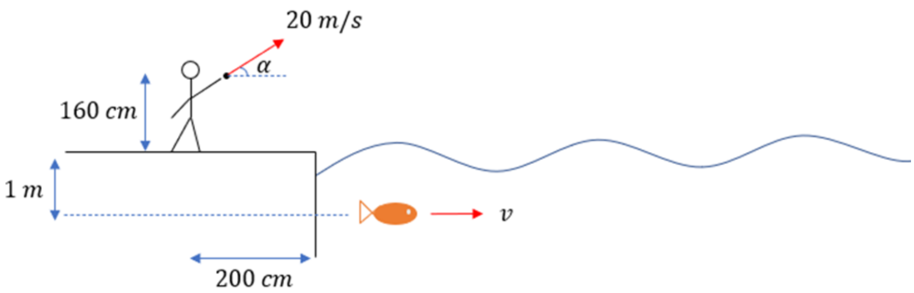
$$\frac{kqh\lambda 2\pi R}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{kQq}{h^2} = 0$$

Portanto:

$$\boxed{Q = -\frac{2\pi\lambda R h^3}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

**8ª QUESTÃO**

Nenan Runes, um famoso pescador que utiliza métodos antigos, está a calcular a velocidade com que precisa jogar sua lança para acertar um peixe. Sabendo que Nenan joga a lança no mesmo instante em que o peixe sai da borda da superfície, e que calculou que a velocidade com que deveria jogar sua lança é de $20\ m/s$, calcule a velocidade do peixe.




### Dados

- $\alpha = 37°$

## Gabarito

a) $v = 15,23\ m/s$

Calculando o tempo de voo da lança:

$$H = H_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

$$-1 = 1,6 + 20 \cdot \frac{3}{5} \cdot t - \frac{10t^2}{2} \Rightarrow 5t^2 - 12t - 2,6 = 0 \therefore t = 2,6\ s$$

Assim, conseguimos encontrar a distância horizontal percorrida pela lança:

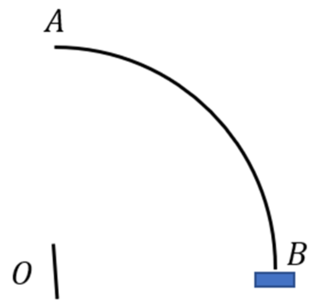
$$\Delta S = v_x \cdot t = 20 \cdot \frac{4}{5} \cdot 2,6 = 41,6\ m$$

Como o peixe começou o movimento $2,0\ m$ à frente, ele percorreu $39,6\ m$ até ser atingido pela lança. Sendo assim, podemos calcular sua velocidade:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{39,6}{2,6} \Rightarrow \boxed{v = 15,23\ m/s}$$

**9ª QUESTÃO**

Localizado no centro de um anteparo circular de raio $R$ e arco $\widehat{AB} = \theta$, está disposto um espelho plano, o qual gira em torno do centro com velocidade angular $\omega$. No instante inicial $t = 0$, um laser muito próximo de $B$ é ativado por um instante em direção ao centro, de modo que todo raio refletido no arco $\widehat{AB}$ retorne pela mesma direção à qual incidiu.



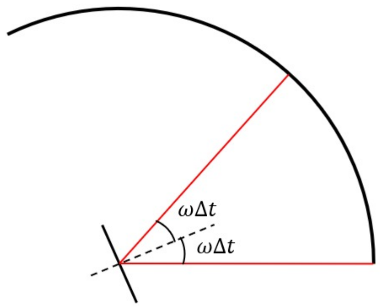

Neste mesmo instante, o espelho inicia seu movimento. Determine os possíveis valores de $\omega$ que permitem o raio emitido atingir um receptor colocado em $A$. Considere que durante a trajetória do raio, o espelho não realiza nenhuma volta completa.

## Gabarito

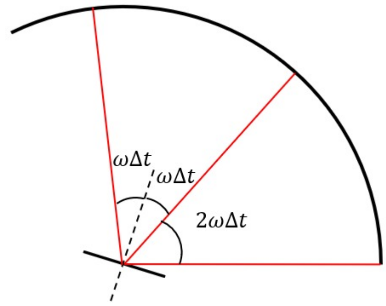
a) $\omega = \dfrac{\theta c}{2nR}$

A principal dificuldade da questão encontra-se na visualização do que está ocorrendo, assim como a determinação dos ângulos de rotação do feixe a cada reflexão. Para facilitarmos a notação ao longo da resolução da questão, chamamos de $\Delta t$ a expressão $\frac{R}{c}$, o tempo para a luz ir do centro à circunferência.

Com isso note que, inicialmente, partindo do ponto inicial até a extremidade, terá se passado $\Delta t$. Deste modo, o espelho rotacionará $\omega\Delta t$, gerando um raio de luz que fará um ângulo de $2\omega\Delta t$ com a horizontal:




No entanto, note agora que, desde a saída do feixe de luz até seu retorno ao espelho central, terá se passado $2\Delta t$, de onde vemos que o espelho rotacionará $2\omega t$, resultando na seguinte configuração:



Com isso, note o seguinte padrão: A cada ida e volta do feixe de luz, o espelho irá rotacionar $2\omega t$, de modo que sua normal fique $\omega t$ à esquerda do feixe incidente. Este último por sua vez, irá rotacionar $2\omega t$ no sentido anti-horário, de onde caímos em uma situação análoga à anterior (normal do espelho $\omega t$ à esquerda indo até $\omega t$ à esquerda, rotacionando o raio de $2\omega t$.

Portanto, vemos que a cada ida e volta, será adicionado o valor de $2\omega t$ no arco percorrido pelo laser, o qual atingirá o anteparo em arcos múltiplos de $2\omega\Delta t$ Portanto, como o laser parte de A e atinge B, sabemos que o ângulo total varrido pelo laser é $\theta$, ou seja:

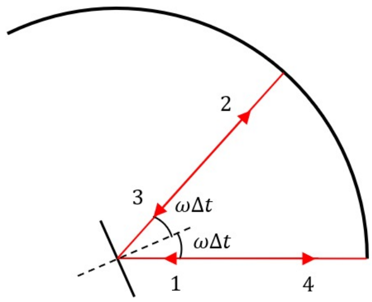
$$n.2\omega\Delta t = \frac{2n\omega R}{c} = \theta$$

Logo:

$$\boxed{\omega = \frac{\theta c}{2nR}}$$

\ Onde $n \in \mathbb{N}$

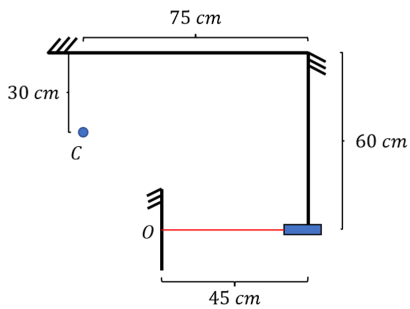
Obs: Veja que, embora o espelho rotacione $2\omega t$ a cada "ciclo"(ida e volta), o raio de luz também gira $2\omega t$, ao invés do dobro. Note que, na verdade, caso o espelho mantivesse sua posição após a primeira reflexão, por exemplo, o raio não refletiria novamente para a direção incidente, mas sim voltaria para a horizontal, percorrendo o caminho 1-2-3-4:




Ou seja, a partir da incidência do feixe \'3\', o raio que será rotacionado pelo giro do espelho será o raio refletido, 4, e não o raio da direção 2. Portanto, vemos que de fato, o raio 4 é rotacionado de $4\omega t$, como esperado pela teoria.

## 10ª QUESTÃO

A figura abaixo mostra 3 espelhos planos, sendo 2 destes fixos, formando entre si um ângulo de $90°$ e o terceiro com livre rotação em torno do ponto $O$:



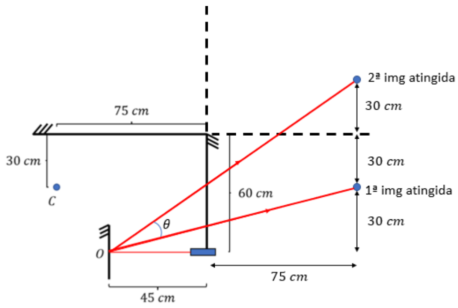

No ponto $C$, colocou-se um cronômetro, o qual inicia sua contagem ao ser atingido pelo laser e a termina após ser atingido pelo laser uma segunda vez. Determine a marcação do cronômetro, sabendo-se que o espelho em $O$ gira no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante e igual a $1°/\text{s}$.

**Gabarito**

a) $t = 11,5\ s$

Podemos sempre trocar múltiplas reflexões por um caminho em linha reta. Sabendo isso, como queremos que o laser atinja o cronômetro em $C$ duas vezes, basta analisarmos as primeiras 2 imagens do ponto $C$ que o laser pode atingir no seu caminho "em linha reta".

Assim, temos a seguinte figura:




O ângulo $\theta$ marcado na figura é o ângulo varrido pelo laser do início da contagem até o final. Calculando o valor de $\theta$ conseguimos encontrar o ângulo que o espelho girou.

O ângulo que o feixe faz para atingir a primeira imagem vale:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{30}{45+75}\right) = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

Nesse caso, como $\tan(\theta)$ é pequeno, podemos aproximar da seguinte maneira:

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{4}\,rad = \frac{1}{4}\cdot\frac{180}{\pi} \approx 14^\circ$$

Para a segunda imagem, temos:

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{3\cdot 30}{45+75}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 37^\circ$$

Portanto, podemos encontrar o valor de $\theta$:

$$\theta = 37 - 14 = 23^\circ$$

Portanto, como sabemos que o ângulo varrido pelo feixe é o dobro do ângulo rotacionado pelo espelho (chamaremos de $\beta$), temos:

$$\beta = \frac{23^\circ}{2} = 11,5^\circ$$

Sendo assim, o tempo medido no cronômetro vale:

$$\boxed{t = 11,5\ s}$$