Аналитические методы синтеза цифровых следящих систем

Конспект лекций

Лекция 5.

Связь структурной схемы с дифференциальным уравнением.

Аппарат структурных преобразований.

Устойчивость линейных систем.

Связь структурной схемы с ДУ. Построение структурной схемы по ДУ.

1. Построение структурной схемы по дифференциальному уравнению. Структурные схемы строятся с помощью элементарных, типовых звеньев и сумматоров, описывающих преобразование сигналов. Они служат одним из языков описания систем управления. По структурным схемам, как правило, находится эквивалентный оператор системы управления, а затем решаются различные задачи анализа.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ

1. Выразить член со старшей производной из дифференциального уравнения (1.3) и представить полученное соотношение с помощью сумматора, дифференцирующих и усилительных звеньев.

2. Все низшие производные получить как сигналы на соответствующих выходах последовательно соединенных интегрирующих звеньев.

3. Начальные условия (1.4) представить как постоянные во времени воздействия, приложенные на выходах интегрирующих звеньев.

Пример 1.2. Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$5\dddot{x} + t\ddot{x} + t^2 x = \dot{g} + 2g$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$.

☐ Выразим из уравнения член со старшей производной:

$$5\dddot{x} = \dot{g} + 2g - t\ddot{x} - t^2 x.$$

Согласно алгоритму получим структурную схему системы (рис. 1.10).■

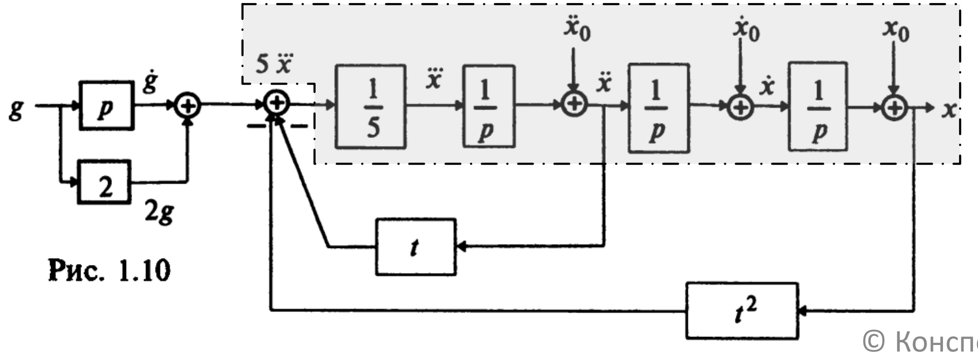


Рис. 1.10

Пример 1.1. Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$4\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 2\dot{g}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

☐ Выразим из уравнения член со старшей производной:

$$4\ddot{x} = 2\dot{g} + 3\dot{x} - x.$$

Изобразим схему получения сигнала $4\ddot{x}$ (рис. 1.9). С помощью усилительного звена с коэффициентом усиления 1/4 получим сигнал $\ddot{x}$. Построим теперь прямую цепь схемы, последовательно преобразовывая сигнал $\ddot{x}$ интегрирующими звеньями. Добавляя на выходах интегрирующих звеньев соответствующие начальные условия, получаем часть прямой цепи схемы, в которой присутствуют выходной сигнал x и его производные $\dot{x}$, $\ddot{x}$. Изображаем сумматор, выходным сигналом которого служит $4\ddot{x}$. На этом сумматоре нужно реализовать равенство $4\ddot{x} = 2\dot{g} + 3\dot{x} - x$.

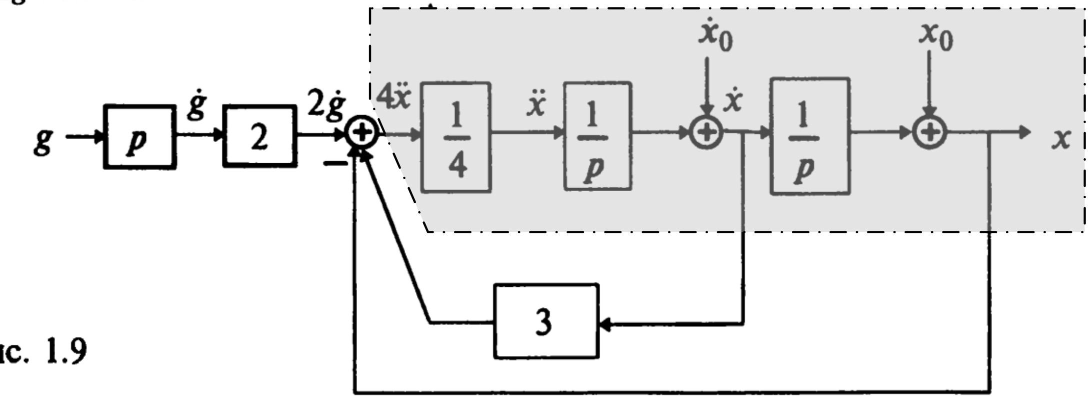


Рис. 1.9

Для этого добавляем к прямой цепи соединение дифференцирующего и усилительного звеньев, которые из входного сигнала g позволяют получить нужный сигнал $2\dot{g}$ на входе сумматора. Сигналы x и $3\dot{x}$ подаем на сумматор с соответствующим знаком, используя обратные связи. Таким образом, получаем структурную схему (рис. 1.9), соответствующую заданному дифференциальному уравнению.■

Пантелеев, А.В.
Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие/А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. — М.: Высш. шк., 2003.—

Связь структурной схемы с ДУ. Составление ДУ по структурной схеме.

2. Составление дифференциального уравнения по структурной схеме. Для записи дифференциального уравнения следует обозначить на схеме все промежуточные сигналы, записать уравнения для каждого звена и для каждого сумматора и из полученной системы дифференциальных и алгебраических уравнений исключить промежуточные переменные кроме входного и выходного сигналов.

Пример 1.4. Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме, изображенной на рис. 1.12.

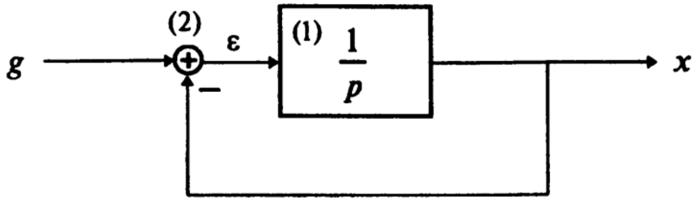


Рис. 1.12

☐ Составим уравнения элементов схемы:

$$1)\ x = \frac{1}{p}\varepsilon; \qquad 2)\ \varepsilon = g - x.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{p}(g - x), \quad p\,x = g - x, \qquad (p+1)\,x = g.$$

Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\dot{x}(t) + x(t) = g(t),$$

Пример 1.5. Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме, представленной на рис. 1.13.

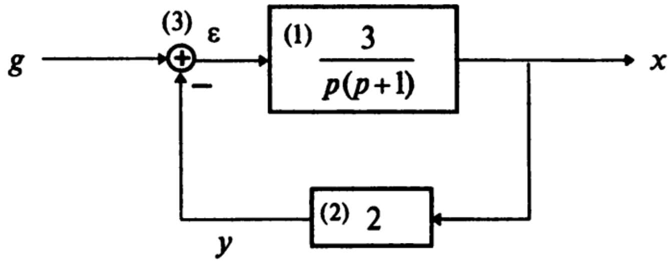


Рис. 1.13

☐ Составим уравнения элементов схемы:

$$1)\quad x = \frac{3}{p(p+1)}\varepsilon; \qquad 2)\quad y = 2x; \qquad 3)\quad \varepsilon = g - y.$$

Отсюда

$$(p^2 + p)\,x = 3(g - y) = 3(g - 2x) = 3g - 6x.$$

Переходя от операторной формы записи дифференциального уравнения к обычной, получаем

$$\ddot{x} + \dot{x} + 6x = 3g. \blacksquare$$

Пантелеев, А.В.
Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие/А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. — М.: Высш. шк., 2003.—

Аппарат структурных преобразований. Последовательное и параллельное соединение

На основе понятия передаточной функции (ПФ) в теории автоматического управления (ТАУ) построен аппарат структурных преобразований, позволяющий находить ПФ замкнутых систем, заданных структурными схемами. Любая структурная схема включает последовательное и параллельно соединенные элементы, а также элементы, соединенные обратной связью.

Последовательное соединение:

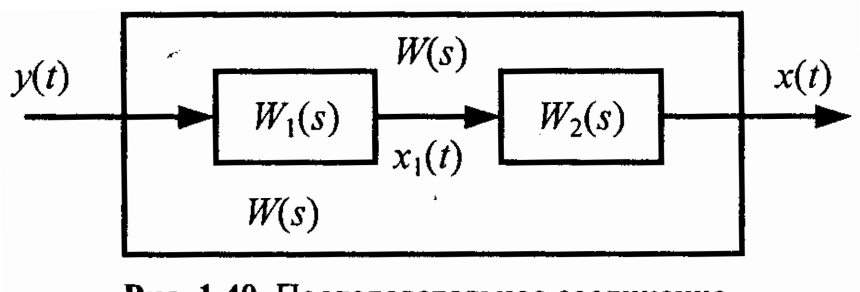


Рис. 1.40. Последовательное соединение

Для него характерны зависимости вида

$$X_1(s) = W_1(s)Y(s);$$

$$X(s) = W_2(s)X_1(s) = W_2(s)W_1(s)Y(s).$$

Отсюда имеем

$$W(s) = W_1(s)W_2(s).$$

Для произвольного случая

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)\ldots W_n(s).$$

Следовательно, ПФ последовательного соединения звеньев равна произведению ПФ отдельных звеньев.

Параллельное соединение:

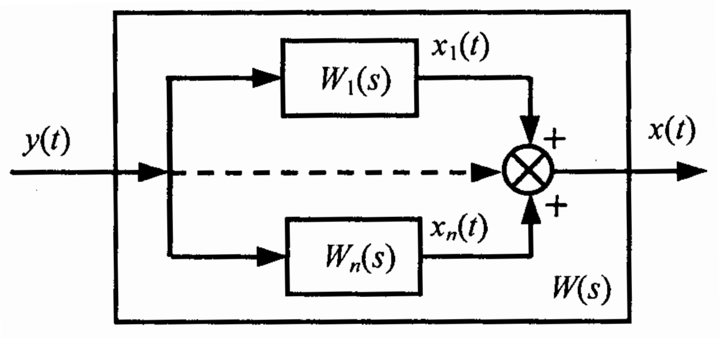


Рис. 1.41. Параллельное соединение

Для параллельного соединения

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t).$$

Тогда

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \ldots + X_n(s),$$

где

$$X_1(s) = W_1(s)Y(s);$$
$$X_2(s) = W_2(s)Y(s);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n(s) = W_n(s)Y(s).$$

Отсюда

$$X(s) = W_1(s)Y(s) + W_2(s)Y(s) + \ldots + W_n(s)Y(s) =$$
$$= (W_1(s) + W_2(s) + \ldots + W_n(s))Y(s),$$

или, что то же самое,

$$X(s) = W(s)Y(s),$$

где

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) + \ldots + W_n(s).$$

Из последнего равенства следует ,что ПФ параллельного соединения звеньев равна сумме ПФ отдельных звеньев.

Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,

Аппарат структурных преобразований. Соединение с обратной связью

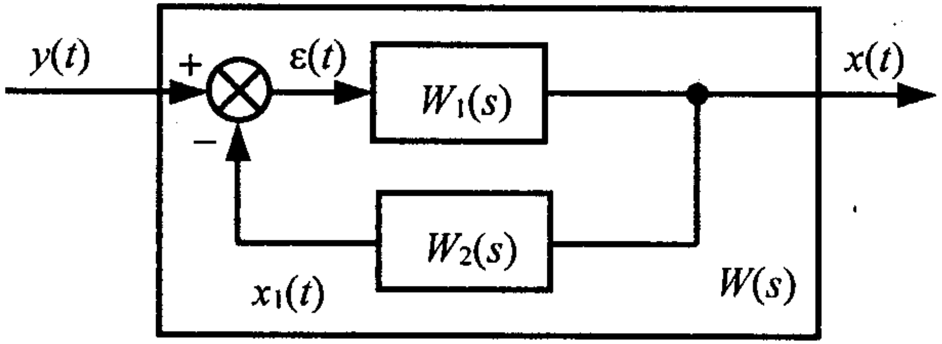


Рис. 1.42. Соединение с обратной связью

На рис. 1.42 представлено соединение с обратной связью. Для такой системы справедливы соотношения:

$$E(s) = Y(s) - X_1(s);$$
$$X(s) = W_1(s)E(s);$$
$$X_1(s) = W_2(s)X(s).$$

$$\frac{X(s)}{W_1(s)} = Y(s) - W_2(s)X(s),$$

$$X(s) = W_1(s)Y(s) - W_1(s)W_2(s)X(s);$$

$$X(s)\left[1 + W_1(s)W_2(s)\right] = W_1(s)Y(s).$$

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

Таким образом, ПФ соединения с обратной связью равна дроби:

- ***числитель*** которой – ПФ прямой цепи $W_1(s)$;

- ***знаменатель***:
- при отрицательной обратной связи (ООС) $1 + W_1(s)W_2(s)$;
- при положительной обратной связи (ПОС) $1 - W_1(s)W_2(s)$.

Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,

Аппарат структурных преобразований. Соединение с обратной связью, ПФ по ошибке

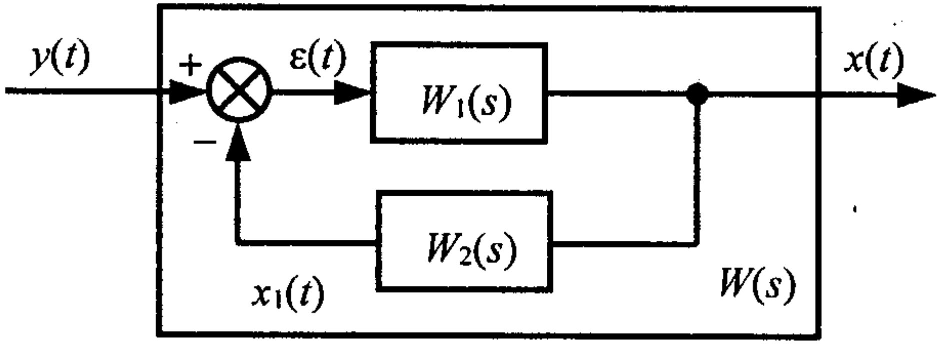


Рис. 1.42. Соединение с обратной связью

Аналогичным образом легко найти так называемую *передаточную функцию ошибки*, определяемую формулой

$$W_\varepsilon(s)=\frac{E(s)}{Y(s)}.$$

$$E(s)=Y(s)-W_2(s)X(s);$$

$$X(s)=W_1(s)E(s).$$

$$E(s)=Y(s)-W_1(s)W_2(s)E(s);$$

$$E(s)\left(1+W_1(s)W_2(s)\right)=Y(s).$$

$$\frac{E(s)}{Y(s)}=\frac{1}{1+W_1(s)W_2(s)}.$$

Таким образом, ПФ по ошибке соединения с обратной связью равна дроби:

- ***числитель*** которой равен $\mathbf{1}$;

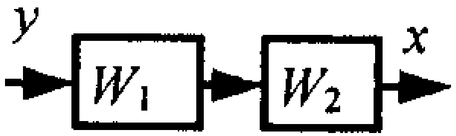
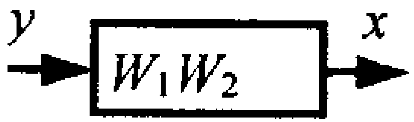
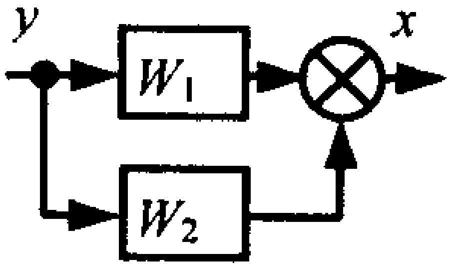
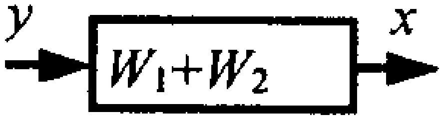
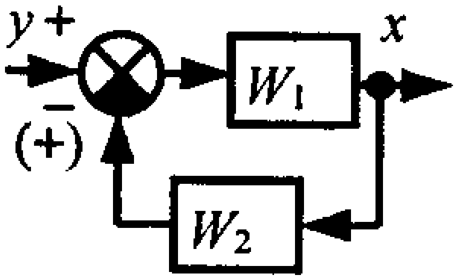
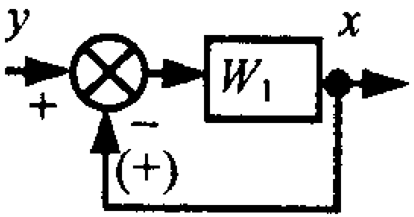
- ***знаменатель***:

• при отрицательной обратной связи (ООС) $\boldsymbol{1-W_1(s)W_2(s)}$;

• при положительной обратной связи (ПОС) $\boldsymbol{1+W_1(s)W_2(s)}$.

Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,

Аппарат структурных преобразований. Эквивалентные структурные преобразования

Преобразования	Исходное	Эквивалент	Исходное	Эквивалент
Последова-тельное включение звеньев			$W_{экв}(s)=\prod_{i=1}^{n}W_i(s)$	
Параллель-ное включе-ние звеньев			$W_{экв}(s)=\sum_{i=1}^{n}W_i(s)$	
Включение обратной связи		$W=\dfrac{W_1}{1\pm W_1W_2}$		$W=\dfrac{W_1}{1\pm W_1}$

Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,

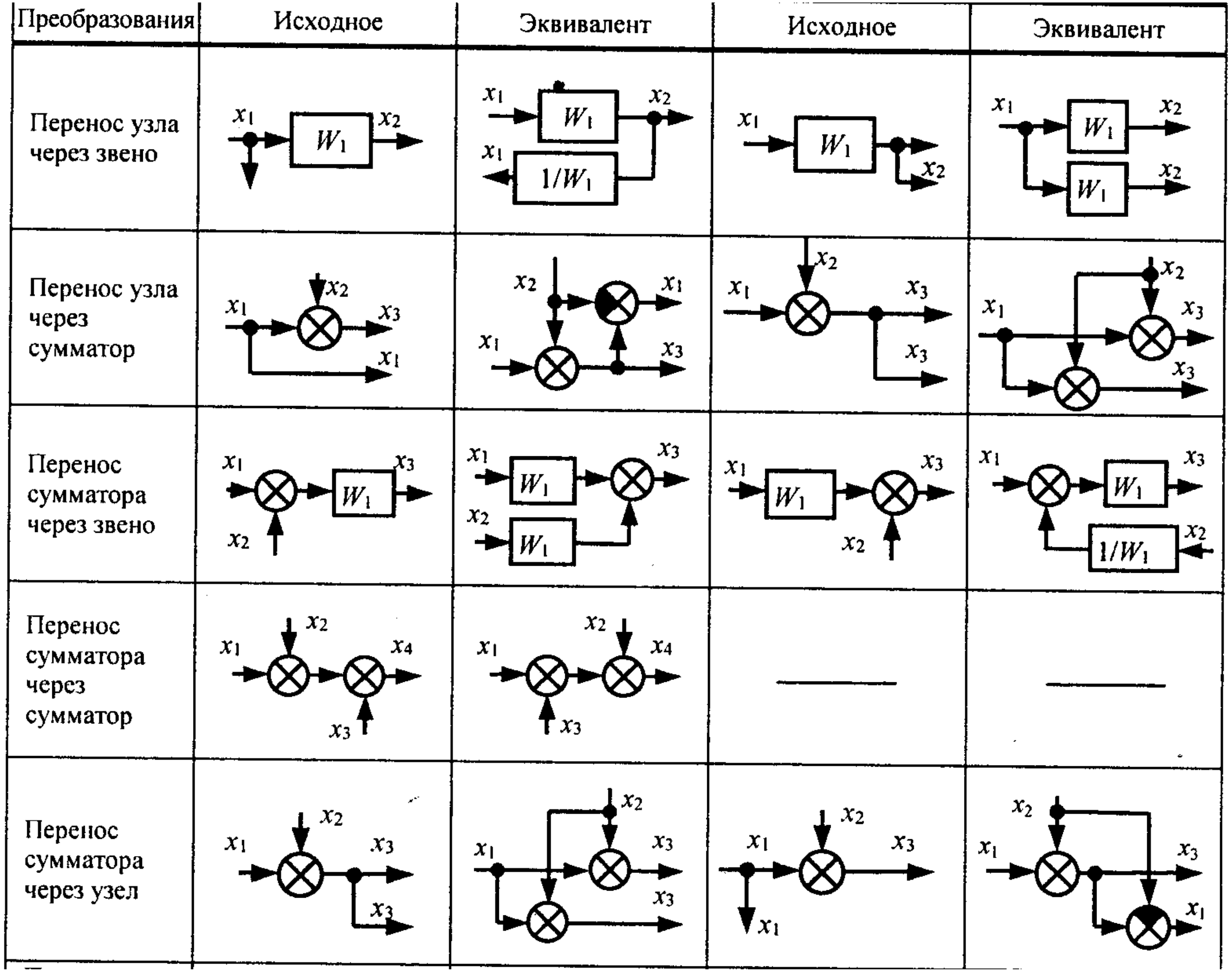
Аппарат структурных преобразований. Эквивалентные структурные преобразования

Правило эквивалентных переносов узлов (точек ветвления) или точек суммирования. Выходная переменная преобразуемого участка структурной схемы после преобразования должна быть равна выходной переменной этого же участка до преобразования.

Метод последовательных преобразований структурных схем заключается в последовательной замене отдельных фрагментов структурной схемы эквивалентным веном, в соответствии с формулами для передаточных функций простейших соединений.

Получив ПФ эквивалентной САУ в результате преобразований и зная параметры системы, можно перейти к ее дифференциальному уравнению.

Аппарат структурных преобразований передаточных функций оказался весьма эффективным при исследовании линейных стационарных систем, имеющих сложные структурные схемы.



Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,

Аппарат структурных преобразований. Примеры

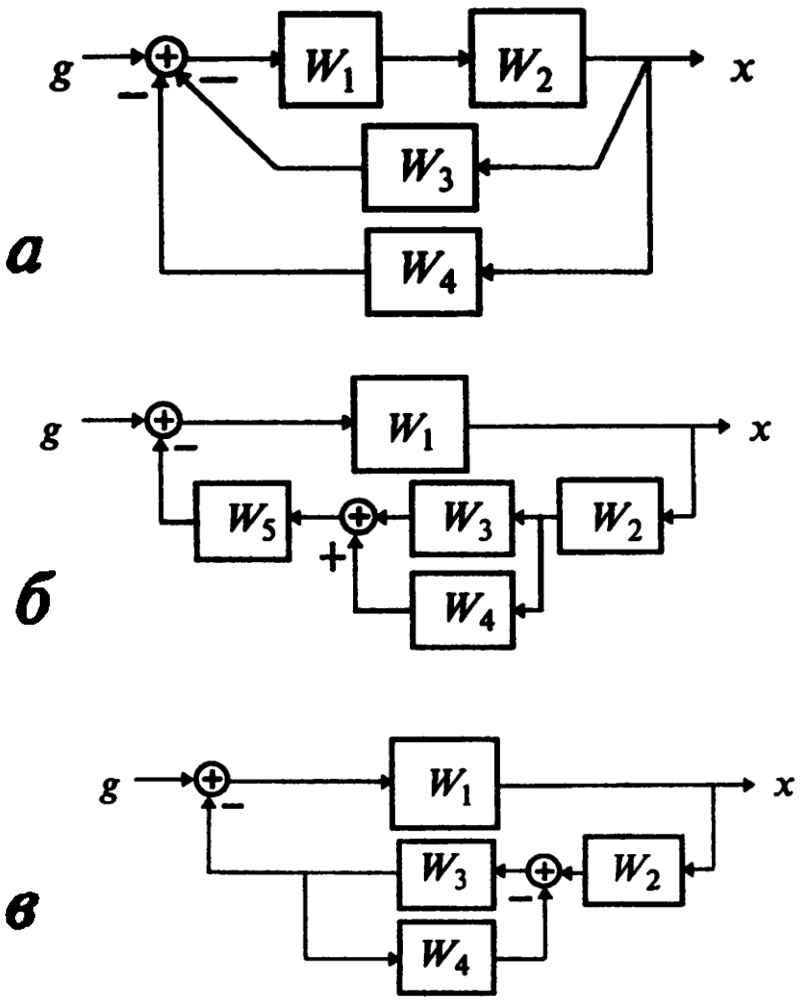


Рис. 3.2

□ На рис. 3.2,*а* звенья 1 и 2 соединены последовательно, а 3 и 4 — параллельно, сама схема является соединением с обратной связью, поэтому

$$W(s) = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 (W_3 + W_4)}.$$

На рис. 3.2,*б* параллельное соединение звеньев 3 и 4 соединено последовательно со звеньями 2 и 5, поэтому

$$W(s) = \frac{W_1}{1 + W_1 W_5 (W_3 + W_4) W_2}.$$

На рис. 3.2,*в* звенья 3 и 4 образуют соединение с обратной связью:

$$W(s) = \frac{W_1}{1 + \dfrac{W_3 W_2 W_1}{1 + W_3 W_4}} = \frac{W_1 (1 + W_3 W_4)}{1 + W_3 W_4 + W_3 W_2 W_1}. \blacksquare$$

Пантелеев, А.В.
Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие/А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. — М.: Высш. шк., 2003.—

Аппарат структурных преобразований. Нахождение ПФ в системах с несколькими входами

Если в системе несколько входов, передаточная функция по фиксированному входу ищется при нулевых входных сигналах, кроме данного. При этом для удобства рекомендуется перестроить структурную схему.

Пример 3.2. Для системы с двумя входами $g(t)$ и $f(t)$ и одним выходом $x(t)$, заданной структурной схемой, изображенной на рис 3.3,*а*, найти передаточные функции.

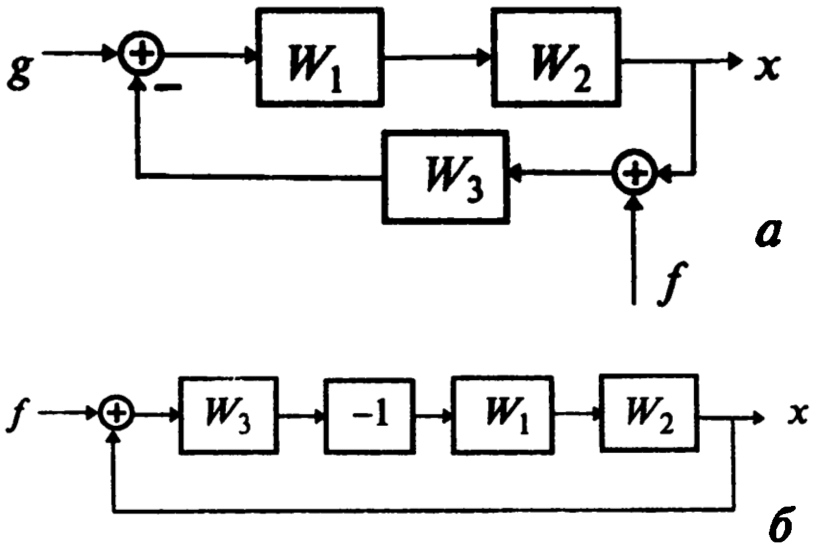


Рис. 3.3

☐ Положим $f(t) \equiv 0$. Тогда передаточная функция по входу $g(t)$ будет

$$W_g(s) = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_3}.$$

Положим $g(t) \equiv 0$ и перестроим схему (рис. 3.3,*б*). Усилительное звено с коэффициентом усиления $K = -1$ введено в силу отрицательной обратной связи на сумматоре в схеме на рис. 3.3,*а*.

В результате имеем

$$W_f(s) = -\frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3}. \blacksquare$$

Пантелеев, А.В.
Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие/А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. — М.: Высш. шк., 2003.—

Устойчивость линейных систем. Понятие положения равновесия

В физическом и математическом смысле понятие устойчивости относится к положению равновесия какой-либо системы: **положение равновесия системы**, это такое ее состояние, в котором она может находиться без движения неограниченно долгое время (хотя бы теоретически!). Можно также сказать, что положение равновесия системы это такое ее состояние, в котором скорости изменения всех ее переменных равны нулю.

Если с помощью какого-либо воздействия вывести систему из положения равновесия, а затем убрать это воздействие, то система будет находиться в свободном состоянии и совершать свободное движение. **Устойчивость рассматриваемого положения равновесия системы определяется характером именно этого свободного движения.**

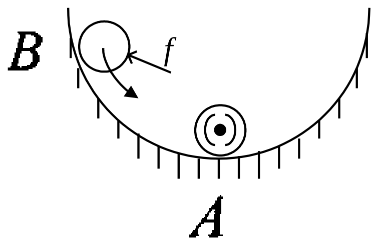
Выход сигнал линейной системы $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}_{\text{своб}}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{y}_{\text{вын}}(\mathrm{t})$

Свободное движение $\boldsymbol{y}_{\text{своб}}(\mathrm{t})$ происходит при отсутствии внешнего воздействия ($\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) \equiv \mathbf{0}$) вследствие ненулевых н.у.

Вынужденное движение $\boldsymbol{y}_{\text{вын}}(\mathrm{t})$ происходит вследствие внешнего воздействия $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ при н.н.у.

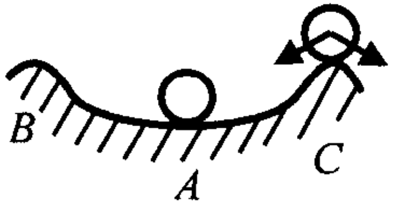
Динамическая система является **устойчивой** (асимптотически устойчивой), если ее свободное движение $\boldsymbol{y}_{\text{своб}}(\mathrm{t})$ ограничено по величине и асимптотически стремится к нулю с ростом времени t.
Положение равновесия $\boldsymbol{y}_{\text{своб}}(\mathrm{t}) = 0$ в этом случае называется устойчивым (асимптотически устойчивым).
Устойчивость (как характеристика системы) является необходимым условием работоспособности САУ!

Устойчивость линейных систем. Понятие устойчивости системы



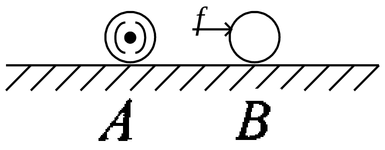
«устойчивая в большом»
«устойчивая в целом»

Если шар возвращается из точки B в положение равновесия (точка A) после снятия силы *f*, то положение равновесия называется **устойчивым**. Соответственно и о системе говорят, что она **устойчивая**. В данном примере, система устойчива и при больших (но конечных!) отклонениях шара, поэтому говорят, что система **«устойчива в большом»** или **«устойчива в целом»**.



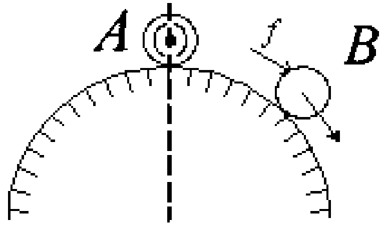
«устойчивая в малом»

В данной системе положение равновесия (точка A) устойчиво лишь в том случае, если отклонение не переходит за точку C. В этом случае говорят система **«устойчива в малом»,** т.е. система устойчива, но в ограниченной области.



«нейтральная»,
«консервативная»

Если шар после снятия силы *f* не возвращается к прежнему положению равновесия (точка A), а остается в новом состоянии (точка B), то такое положение (точка A) называется «**безразличным»**, а соответствующая система – **нейтральной** или **консервативной**. Часто о такой системе говорят: **система находится на границе устойчивости**. Отметим, что точка B также является положением равновесия ,т.е. безразличным положением.



«неустойчивая»

Если шар после снятия силы f удаляется от прежнего положения равновесия (точка A) после прекращения действия отклоняющей силы f, то положение равновесия (точка A) и соответствующая система называются неустойчивыми.

Устойчивость линейных систем. Понятие устойчивости системы

Способы и правила определения свойства устойчивости системы без решения дифференциальных уравнений называются **критериями устойчивости.**

Область в пространстве некоторых параметров, в которой система устойчива, называется **областью устойчивости** данной системы.

Если на систему действуют различные факторы (понижение/повышение температуры, изменение условий сцепления/ветровых нагрузок и т.п.), то параметры системы меняют свои значения и могут выйти из области устойчивости (за границы области устойчивости). Это приводит к потере устойчивости системы. Система сохраняет работоспособность несмотря на влияние действующих внешних факторов, если она спроектирована с некоторым **запасом по устойчивости**. Количественной оценкой запаса устойчивости является показатель системы, который называется **степенью устойчивости**.

Динамические системы обладают **робастной устойчивостью**, если они асимптотически устойчивы в целом (в большом) при любых значениях параметров из известного интервала. Интервальная оценка параметров может быть не только из-за действия внешних факторов, но также по ряду других причин, например, коэффициенты характеристического уравнения реальных систем управления оказываются известными неточно.

Устойчивость линейных систем. Алгебраические критерии устойчивости (краткий обзор)

Для проверки устойчивости линейных динамических систем типа с помощью алгебраических критериев, сначала следует найти **характеристический полином.** В качестве характеристического полинома очень часто берется знаменатель передаточной функции системы в замкнутом состоянии $A(p)$.

$$W(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = \frac{\mathrm{B}(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{(m-1)} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{(n-1)} + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m}(p - p_i^B)}{a_n \prod_{j=1}^{n}(p - p_j^A)}$$

p_i^B – корни (комплексные или действительные) полинома числителя $\mathbf{B}(p)$ передаточной функции системы

p_i^A – корни (комплексные или действительные) полинома числителя $\mathbf{A}(p)$ передаточной функции системы

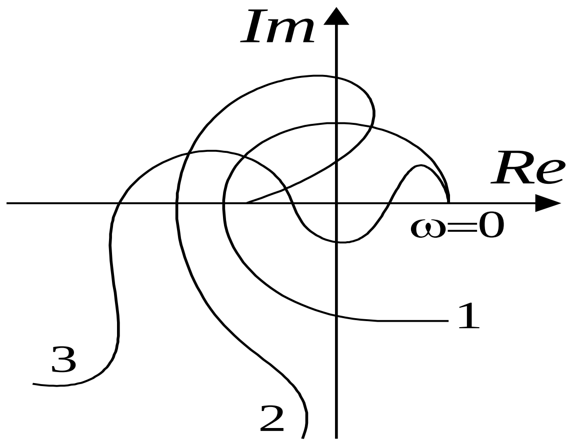
Критерий устойчивости по корням характеристического уравнения. Система является асимптотически устойчивой, если вещественные части всех корней ее характеристического полинома $A(p)$ строго отрицательны. Если данное условие выполняется, то полином системы $A(p)$ является **гурвицевым**.

Необходимое условие устойчивости: для асимптотической устойчивости системы необходимо, чтобы все коэффициенты a_i характеристического полинома $A(p)$ были положительны.

Алгебраические критерии устойчивости

- критерий устойчивости **Гурвица:** если все коэффициенты характеристического полинома и все определители Гурвица (имеется аналитическая форма записи по определённому алгоритму) больше нуля, то система с данным характеристическим полиномом асимптотически устойчива;
- критерий устойчивости **Рауса:** если все коэффициенты характеристического полинома и все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса (имеется аналитическая форма записи по определённому алгоритму) больше нуля, то система с данным характеристическим полиномом асимптотически устойчива;
- критерий устойчивости **Вышнеградского** (для устойчивости системы **третьего порядка** необходимо и достаточно, чтобы при положительных коэффициентах характеристического полинома произведение внутренних коэффициентов было больше произведения крайних).

Устойчивость линейных систем. Частотные критерии устойчивости (краткий обзор)



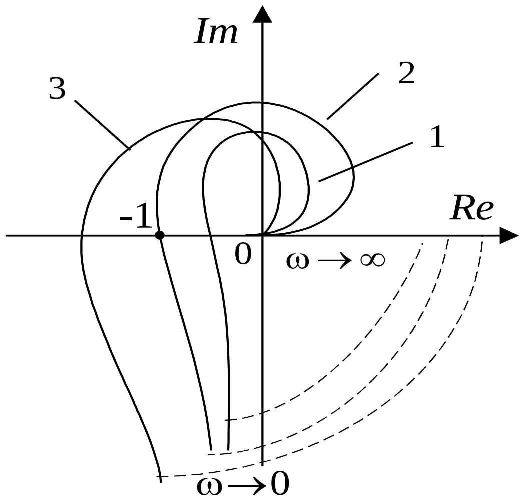
Критерий Михайлова (по годографу): система будет устойчивой, если при изменении частоты от 0 до ∞ выполняются следующие условия:

а) годограф начинается на вещественной, положительной полуоси;

б) годограф последовательно проходит n квадрантов, двигаясь против часовой стрелки при изменении частоты от 0 до ∞, где n – порядок системы.

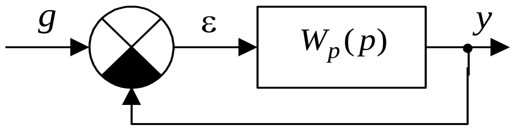
Если условия а) или б) нарушаются, то система неустойчива.

Приведены годографы Михайлова устойчивой системы (кривая 1, порядок системы равен 4) и неустойчивых систем (кривые 2, 3). Кривая 2, годограф системы начинается не на положительной вещественной полуоси. В случае же системы с годографом 3 нарушается последовательность обхода годографом Михайлова квадрантов комплексной плоскости.



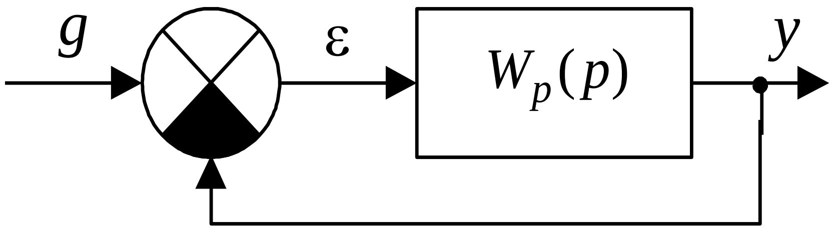
Критерий Найквиста. Если система в разомкнутом состоянии устойчива или нейтральна, то она будет устойчивой в замкнутом состоянии, если годограф Найквиста не охватывает точку (–1,0) на комплексной плоскости. Если он ее охватывает, то система неустойчива. Если он через нее проходит, то система находится на границе устойчивости.

Годограф Найквиста – годограф КЧХ (АФЧХ) разомкнуто системы с единичной обратной связью.



Приведены годографы устойчивой (кривая 1), неустойчивой (кривая 3) и находящейся на границе устойчивости (кривая 2) систем управления.

Устойчивость линейных систем. Запас по фазе и амплитуде (по Найквисту; по ЛАЧХ и ЛФЧХ)



l_0 - запас устойчивости по модулю

φ_0 - запас устойчивости по фазе