Аналитические методы синтеза цифровых следящих систем

Конспект лекций

Лекция 4.

Математические модели непрерывных сигналов (модели воздействий).

Математическая модель линейных непрерывных систем на основе дифференциальных уравнений, уравнение «вход-выход».

Передаточная функция системы.

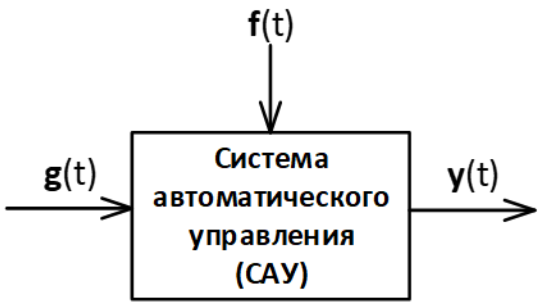
Временные и частотные характеристики линейных непрерывных систем.

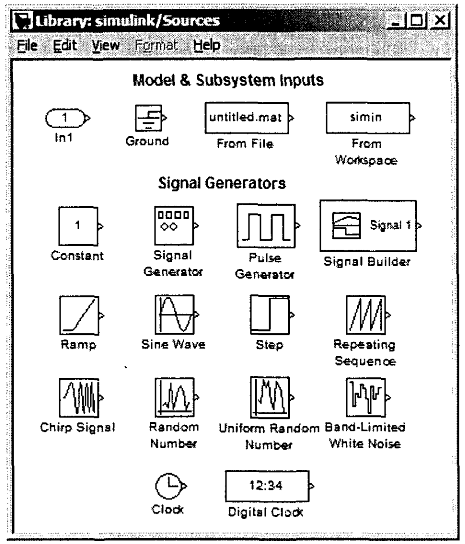
Математические модели непрерывных сигналов

Модели воздействий. Реальные динамические системы подвергаются влиянию воздействий различных видов. Выходная переменная некоторой системы, вызванная некоторым воздействием, называется **реакцией системы на это воздействие**. В случае воздействия произвольного вида определение реакции даже линейной системы затруднительно.
Поэтому анализ линейных динамических систем обычно проводится при простейших видах воздействий. Основанием для такого подхода является свойство суперпозиции линейных систем, а также возможность представления воздействия сложной формы в виде суммы (линейной комбинации) воздействий простейших видов. Наиболее часто употребляемые для исследования динамических систем воздействия называются типовыми воздействиями. Перейдем к рассмотрению их математических моделей.

Воздействия, представляющие собой сигналы, действующие в системах автоматического управления, *во временной области* описываются различными функциями, в том числе обобщенными.
Например, можно выделить следующие типовые воздействия:

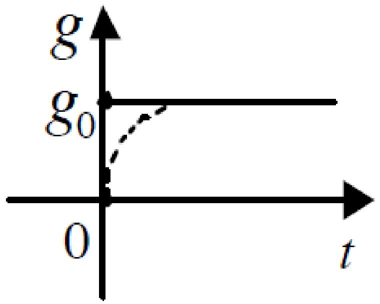
- ступенчатое воздействие;
- «импульсное», «толчковое» воздействие ;
- экспоненциальное воздействие;
- гармоническое воздействие;
- полиномиальное воздействие;
- случайное воздействие.





Математические модели непрерывных сигналов. Ступенчатое воздействие (воздействие типа «скачок»).

График



Математическое описание

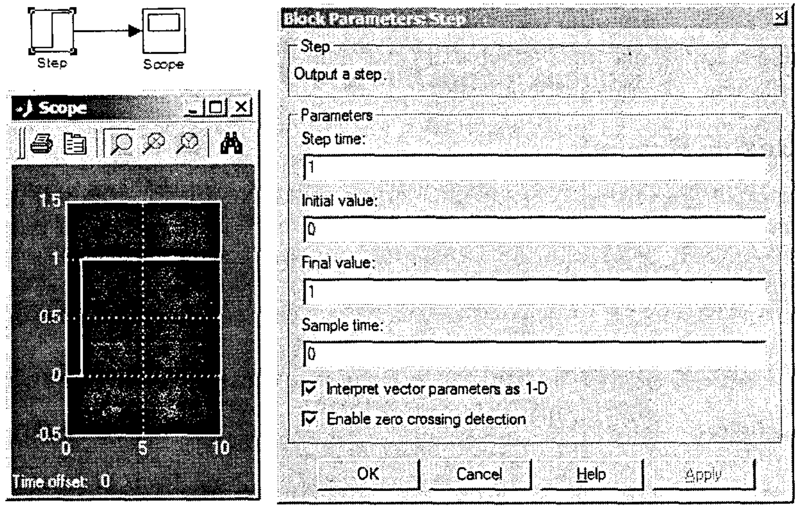
$$g(t) = g_0 1(t)$$

где 1(t) – **ступенчатая единичная функция** или **функция Хэвисайда** определяется соотношением:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(т.е. при всех отрицательных t эта функция равна нулю, а при всех t ≥ 0 она равна единице)

Параметры Matlab и Simulink



Таким образом, (в соответствии с приведенным математическим описанием) ступенчатое воздействие равно нулю при всех значениях t < 0 , а при t = 0 мгновенно принимает значение g0 и затем остается постоянным.

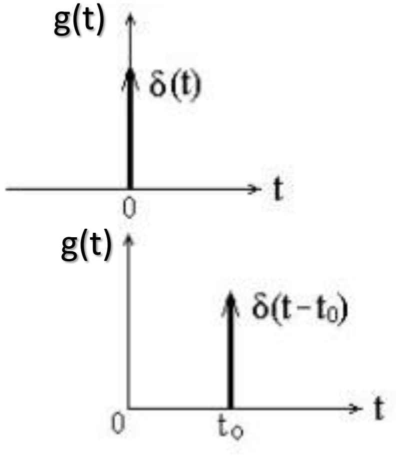
Параметры источника:

- Step time — время появления перепада (скачка);
- Initial value — начальное значение воздействия (до перепада);
- Final value — конечное значение воздействия (после перепада);
- Sample time — эталонное время.

В действительности это невозможно. Поэтому ступенчатое воздействие – это идеализация реальных воздействий, изменяющихся так, как показано на рис. пунктиром. Другими словами, ступенчатое воздействие – это модель реальных воздействий, которые изредка и очень быстро принимают новые постоянные значения. Другое название - воздействие типа «скачок» или просто «скачок».

Математические модели непрерывных сигналов. Воздействие типа «короткий импульс».

График



Математическое описание

$$g(t) = g_0 \delta(t),$$

где $\delta(t)$ – **дельта-функция** (которая была введена физиком П. Дираком и называется также **функция Дирака**) определяется соотношением:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

(т.е. функция не равна нулю только в точке t = 0)

Связь ступенчатой функции и дельта-функции

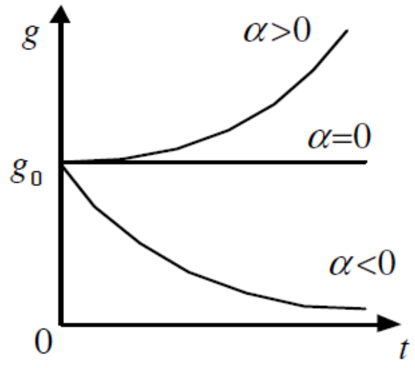
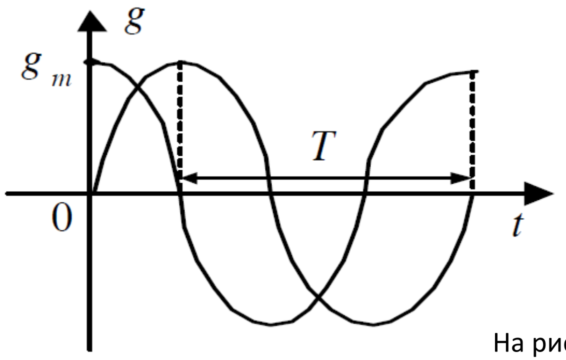
$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$

$$1(t) = \int \delta(t)dt$$

На рис. (слева) приведено условное графическое обозначение обычной дельта-функции $\delta(t)$, а справа - запаздывающей дельта-функции $\delta(t - t1)$, которая не равна нулю лишь в точке t = t1.

Таким образом, описанное воздействие является идеализацией кратких временных внешних воздействий, ударов, порывов ветра и т.п., то есть импульсных воздействий.

Математические модели непрерывных сигналов. Экспоненциальное и гармоническое воздействие.

	Экспоненциальное воздействие	Гармоническое воздействие
График		 На рис. приведены соответствующие графики гармонических воздействий при $\varphi = 0$.
Математическое описание	$g(t) = g_0 e^{\alpha t}$.	$g(t) = g_m \sin(\omega t + \varphi)$ или $g(t) = g_m \cos(\omega t + \varphi)$.

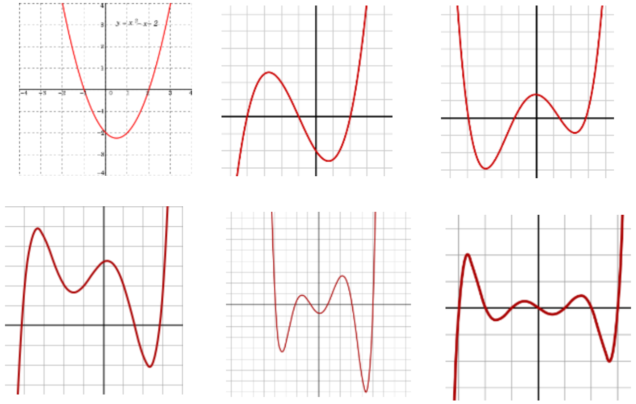
где α – **показатель** (параметр) экспоненциального воздействия.

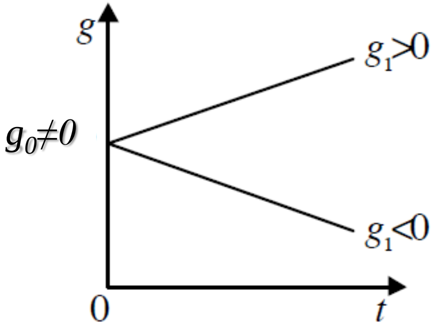
Параметры гармонического воздействия:

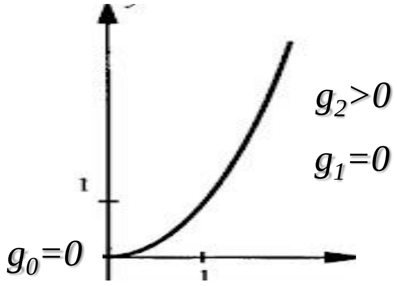
g_m - амплитуда [размерность определяется размерностью сигналов в задаче];
$\omega = 2\pi f$ - круговая частота [радиан / с];
φ - начальная фаза [радиан];
$T = 2\pi\,\omega$ - период колебаний[с];
$f = 1/T$ - число колебаний в секунду [1/с].

Математические модели непрерывных сигналов. Полиномиальное воздействие.

График







Математическое описание

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots g_r t^r ,$$

Параметры полиномиального воздействия:

g_i – коэффициенты полинома;
r – степень полинома;
r+1 - порядок полиномиального воздействия.

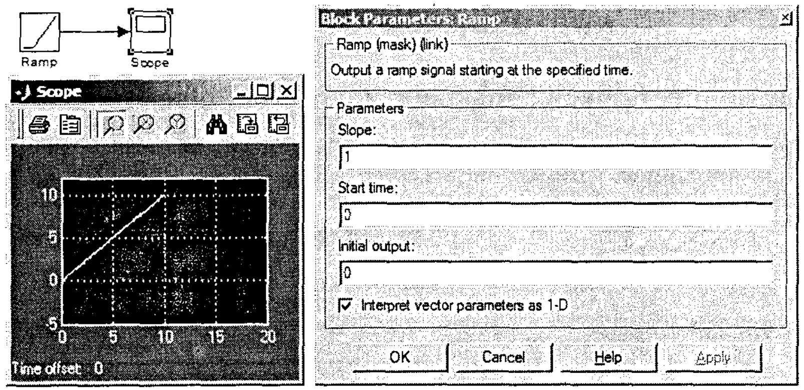
Линейно-нарастающее (линейное) воздействие (r=1):

$$g(t) = g_0 + g_1 t .$$

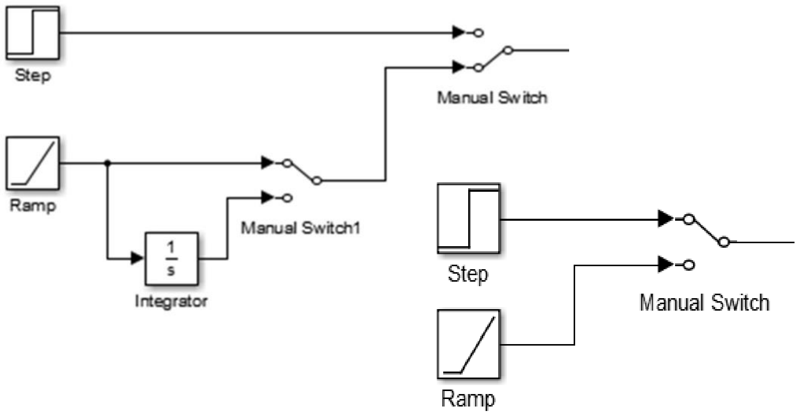
Квадратично-нарастающее (параболическое) воздействие (r=2):

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 .$$

Параметры Matlab и Simulink



- Slope — угловой коэффициент временной зависимости *k*;
- Start time — время, начиная с которого воздействие нарастает;
- Initial value — начальный уровень воздействия *i*.



Математические модели непрерывных систем. Дифференциальные уравнения.

Рассмотрим одномерную линейную непрерывную стационарную систему (динамическое звено)

Непрерывные процессы, протекающие в системах управления, могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями с соответствующими начальными условиями. Тогда, если известен входной сигнал, выходной сигнал определяется в результате решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ).

Модель «вход-выход» - обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt}+a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^m g(t)}{dt}+b_{m-1}\frac{d^{(m-1)}g(t)}{dt}+\cdots+b_1\frac{dg(t)}{dt}+b_0g(t)$$

g(t) –задающее воздействие

y(t) –выходная переменная

$a_i\ (i=\overline{1,n})$ – действительные коэффициенты левой части уравнения

$b_i\ (i=\overline{1,m})$ – действительные коэффициенты правой части уравнения

m – порядок старшей производной входного сигнала

n – **порядок системы, порядок старшей производной выходного сигнала**

$n \geq m$ – **условие физической реализуемости непрерывных систем !**

t – время

t_0 – время начала функционирования системы (на данный момент определяются начальные условия)

Начальные условия:

$y(t_0)=y_0$

$\dot{y}(t_0)=\dot{y}_0$

… … … … … …

$y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)}$

Математические модели непрерывных систем. Решение дифференциальных уравнений.

Требуется по заданному входному сигналу $g(t)$ и начальным условиям найти выходной сигнал $y(t)$.

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме эффектов каждого из воздействий в отдельности. Поэтому выходной сигнал $y(t)$ линейной системы представляется в виде суммы свободного $y_{своб}(\mathrm{t})$ и вынужденного $y_{вын}(\mathrm{t})$ движения в отдельности:

$$y(t) = y_{своб}(\mathrm{t}) + y_{вын}(\mathrm{t})$$

Свободное движение $y_{своб}(\mathrm{t})$ происходит при отсутствии внешнего воздействия ($g(t) \equiv 0$) вследствие ненулевых начальных условий. Оно является решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному уравнению системы с ранее описанными ненулевыми начальными условиями:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

В случае, когда начальные условия нулевые, свободное движение в системе отсутствует, т.е. $y_{своб}(\mathrm{t}) \equiv 0$.

Вынужденное движение $y_{вын}(\mathrm{t})$ происходит вследствие внешнего воздействия $g(t)$ при нулевых начальных условиях (н.н.у.). Оно является решением неоднородного дифференциального уравнения при н.н.у. Вынужденное движение $y_{вын}(\mathrm{t})$ отлично от нуля только после приложения внешнего воздействия.
Подчеркивая эту причинно-следственную связь, вынужденно движение системы при внешнем воздействии, отличном от нуля при $t > t_0$, будем обозначать $y_{вын}(\mathrm{t}) \cdot 1(t - t_0)$, $1(t - t_0)$ - единичная ступенчатая функция.
Выходной сигнал системы будет иметь вид:

$$y(t) = y_{своб}(\mathrm{t}) + y_{вын}(\mathrm{t}) \cdot 1(t - t_0)$$

Здесь функции $y_{своб}(\mathrm{t})$ и $y_{вын}(\mathrm{t})$ являются n раз дифференцируемыми.

Математические модели непрерывных систем. Передаточная функция.

Обыкновенное дифференциальное уравнение в операторном виде:

$$p \equiv \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad A(p)y(t) = \mathrm{B}(p)g(t)$$

Операторы (полиномы):

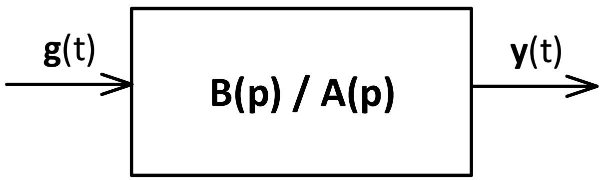
$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_i p^i$$

$A(p)$– дифференциальный оператор левой части ОДУ – ***характеристический полином (собственный оператор) системы***

$B(p)$– дифференциальный оператор правой части ОДУ

p – символ, обозначающий операцию дифференцирования



Передаточная функция:

Отношение изображений (прямых преобразований Лапласа $\mathcal{L}\{\cdot\}$) выходного и входного сигналов *при нулевых начальных условиях (н.н.у. !)*:

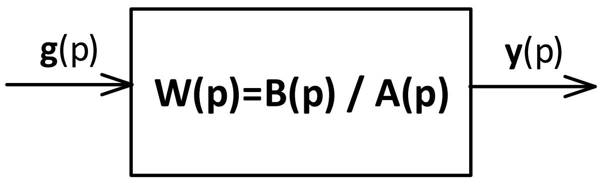
$$W(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = \frac{\mathrm{B}(p)}{A(p)} \qquad y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}, \quad g(p) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Если исключить случай так называемых сокращающихся нулей и полюсов, передаточная функция однозначно соответствует обыкновенному дифференциальному уравнению.

$n = deg\{A(p)\}$; $m = deg\{B(p)\}$ – степень полинома знаменателя и числителя ПФ системы

$\mu = n - m$ – ***относительный порядок системы***



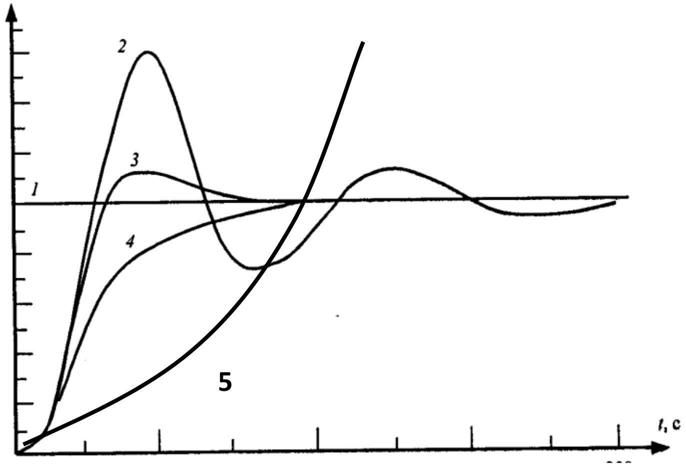
Временные характеристики систем. Единичная переходная характеристика (функция) систем.

Характеристики динамических звеньев и систем описывают поведение звеньев и систем при действии на них тех или иных типовых воздействий. Различают временные и частотные характеристики. К временным характеристикам относятся:
- единичная переходная функция;
- импульсная переходная функция.

Единичной переходной функцией (характеристикой) динамического звена (системы) называется его (её) реакция на ступенчатое единичное воздействие ***1(t)*** при нулевых начальных условиях. Переходная функция обозначается обычно ***h(t)***. Если система имеет больше одного входа или выхода, то ***h(t)*** определяется между каждым входом и каждым выходом в отдельности (при нулевых воздействиях другого выхода).

g(t)=1(t) → **Система автоматического управления (САУ)** → y(t)=h(t)

h(t)=y(t) при g(t)=1(t) !



$$\boldsymbol{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}}$$

$\mathcal{L}^{-1}$-символ обратного преобразования Лапласа

1 – задающее воздействие – единичный «скачок»

Виды переходных характеристик (ПХ) :

2,3,4 – устойчивая система:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) \le N < \infty$$

5 – неустойчивая система.

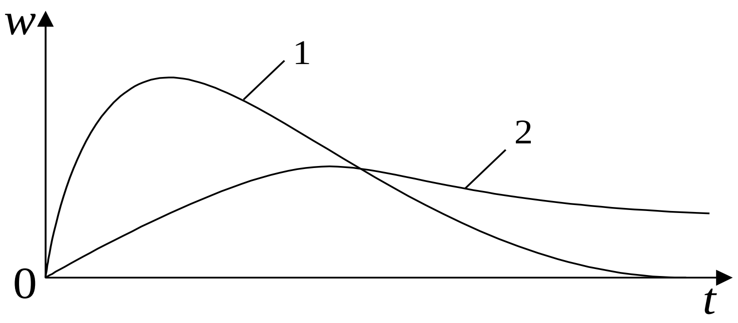
$$\lim_{t\to\infty} h(t) \to \infty$$

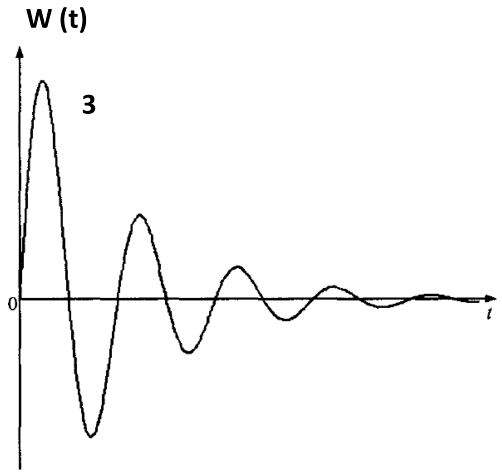
2 – ПХ имеет колебательный характер;
3 – ПХ имеет перерегулирование;
4 – ПХ имеет апериодический характер

Временные характеристики систем. Импульсная переходная характеристика (функции) систем.

Импульсной (весовой) переходной функцией (характеристикой) динамического звена (системы) называется его (её) реакция на дельта-функцию ***δ(t)*** при нулевых начальных условиях. Импульсная функция обозначается обычно ***w(t)***. Импульсная функция характеризует реакцию звеньев или систем на ударные (импульсные) воздействия.

w(t)=y(t) при g(t)= δ(t) !





$$\boldsymbol{w(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{\boldsymbol{W(p)}\}$$

$$\boldsymbol{w(t)} = \frac{d\boldsymbol{h}(t)}{dt} \qquad \boldsymbol{h}(t) = \int \boldsymbol{w}(t)dt$$

Виды импульсных характеристик (ИХ) :

$\mathcal{L}^{-1}$-символ обратного преобразования Лапласа

1,3 – устойчивая система;
2 – неустойчивая система.

1 – апериодический характер;
3 – колебательный характер.

Математические модели непрерывных систем. Преобразование Лапласа.

Непрерывное преобразования Лапласа определяется соотношением:

$$g(p)=\int_0^{\infty} g(t)e^{-pt}dt$$

$g(t)$ - оригинал непрерывного сигнала

$g(p)$ - изображение функции $g(t)1(t)$

Название функции	Оригинал $g(t)$	Изображение $g(p)$
Единичная импульсная функция	$\delta(t)$	1
Единичная ступенчатая функция	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
Степенная функция	$t^n 1(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-at}1(t)$	$\frac{1}{p+a}$
Смещенная экспонента	$\left(1-e^{-at}\right)1(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$
Синусоида	$(\sin\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Косинусоида	$(\cos\omega t)1(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Затухающая синусоида	$(e^{-\alpha t}\sin\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Затухающая косинусоида	$(e^{-\alpha t}\cos\omega t)1(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

$g(t)$	$g(p)$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau p}$
$1(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p}$
$t-\tau$	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$

$g(t)$	$g(p)$
$e^{-\alpha(t-\tau)}$	$\frac{e^{-\tau p}}{p+\alpha}$
$\sin\beta(t-\tau)$	$\frac{\beta e^{-\tau p}}{p^2+\beta^2}$
$\cos\beta(t-\tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2+\beta^2}$
$\frac{\sin\beta(t-\tau)}{e^{\alpha(t-\tau)}}$	$\frac{\beta e^{-\tau p}}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
$\frac{\cos\beta(t-\tau)}{e^{\alpha(t-\tau)}}$	$\frac{(p+\alpha)e^{-\tau p}}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$

Частотные характеристики систем.

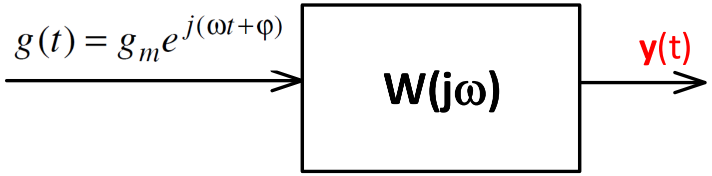
Частотные характеристики описывают реакцию динамических звеньев и систем на колебательные воздействия в установившемся режиме. Поэтому определяются они с помощью гармонических воздействий.

Например, задающее воздействие данного типа имеет вид:

$$g(t) = g_m \sin(\omega t) \quad \text{или} \quad g(t) = g_m \cos(\omega t)$$

или «комплексное воздействие»

$$g(t) = g_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$



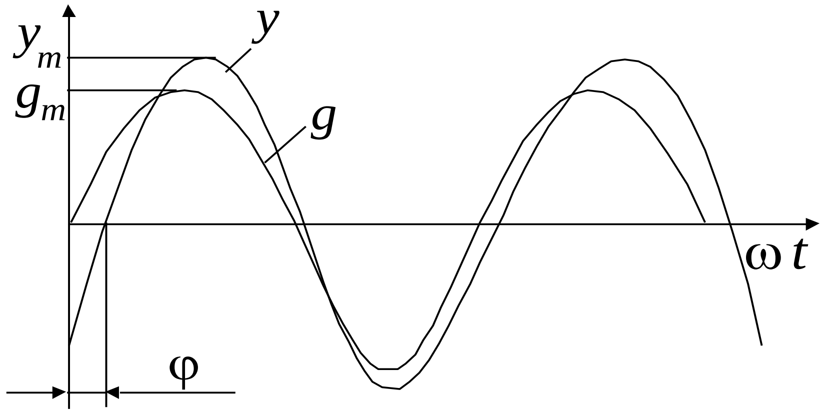
Реакция устойчивой системы в установившемся режиме, т. е. при больших t, описывается выражением:

$$y_{уст}(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$y_m = y(\omega)$ - амплитуда выходной переменной ***y(t)***;

$\varphi = \varphi(\omega)$ - фаза выходной переменной ***y(t)***;

Таким образом, выходная переменная системы ***y(t)*** в этом случае тоже является гармонической той же частоты, что и входное воздействие ***g(t)***, но с некоторым смещением по фазе ***φ(t)*** (обычно меньше нуля). Свойства звеньев и систем в этих случаях описывают с помощью частотных характеристик.



Частотные характеристики систем.

Частотными характеристиками называют зависимости от частоты входного воздействия амплитуды и фазы выходной переменной звена или системы в установившемся режиме при постоянной амплитуде входного воздействия. Различают несколько частотных характеристик.

Комплексная частотная характеристика (КЧХ), амплитудно-фазо-частотная характеристика (АФЧХ) или комплексный коэффициент передачи – характеристика системы при комплексном воздействии:

$$W(p) \Rightarrow p \equiv j\omega \Rightarrow W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{g(j\omega)} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{(m-1)} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{(n-1)} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = A(\omega)e^{j\varphi(j\omega)}$$

j $(j^2 = -1)$ – комплексная единица

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы - это зависимость отношения амплитуды выходной переменной ***y(t)*** к амплитуде входного воздействия ***g(t)*** от частоты входного воздействия:

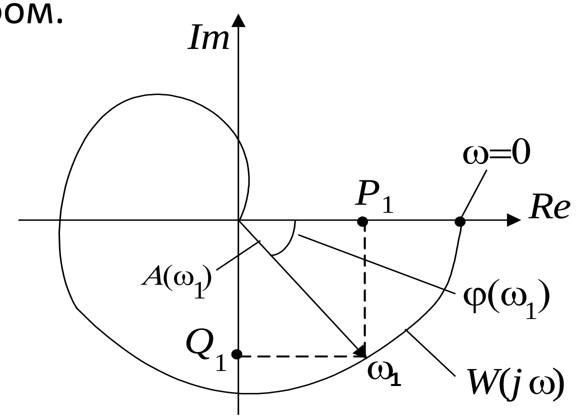
$$A(\omega) = |W(j\omega)|$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) системы - это зависимость фазы φ выходной переменной ***y(t)*** от частоты, точнее это зависимость от частоты входного воздействия ***g(t)*** сдвига по фазе φ выходной переменной по отношению к входному воздействию:

$$\varphi(\omega) = arg\left(W(j\omega)\right)$$

Частотные характеристики систем.

При каждом значении частоты $\boldsymbol{W(j\omega)}$ представляет собой комплексное число. Если на горизонтальной оси комплексной плоскости отложить (в некотором масштабе) вещественную часть этого числа, а по вертикальной – мнимую, то само число $\boldsymbol{W(j\omega)}$ изобразится вектором, проведенным из начала координат в точку, определяемую полученными отрезками на горизонтальной и вертикальной осях. При изменении частоты $\boldsymbol{\omega}$ этот вектор поворачивается и изменяет свою длину, а его конец описывает на плоскости некоторую линию. Эта линия, получающаяся при изменении частоты $\boldsymbol{\omega}$ от $-\infty$ до $+\infty$ или от 0 до $+\infty$, называется ***Годографом*** комплексного коэффициента передачи $\boldsymbol{W(j\omega)}$ или просто – годографом.



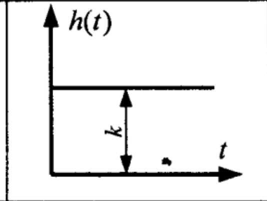
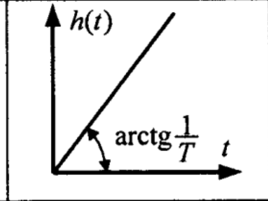
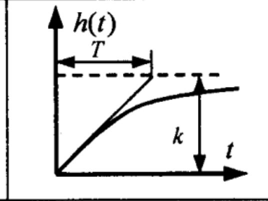
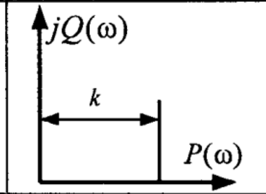
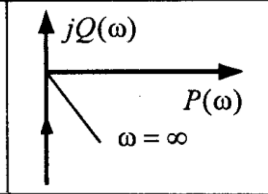
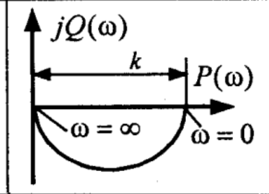
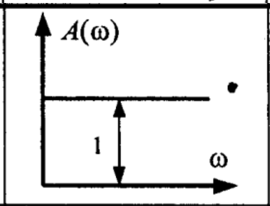
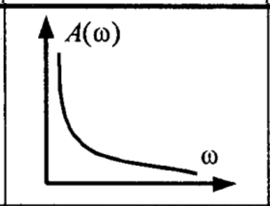
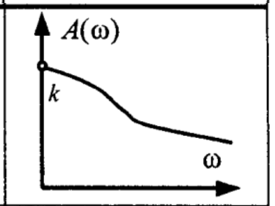
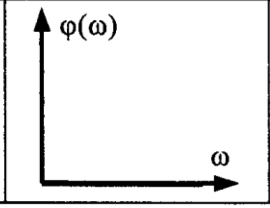
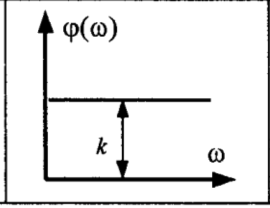
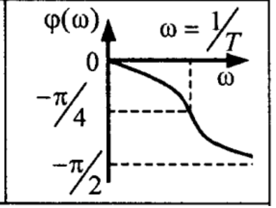
Логарифмической амплитудно-частотная характеристикой (ЛАЧХ) называется характеристика вида и измеряется в дБ:

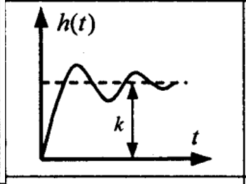
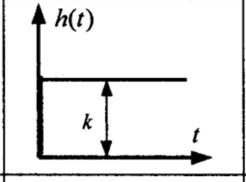
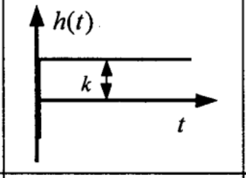
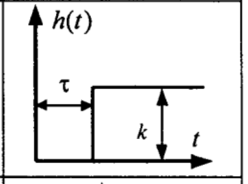
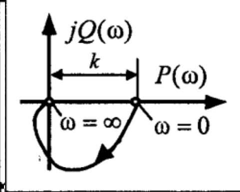
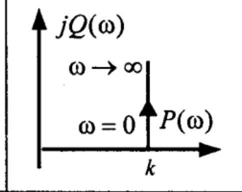
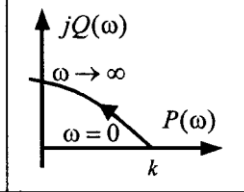
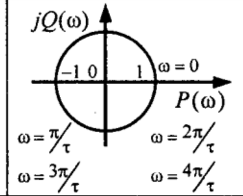
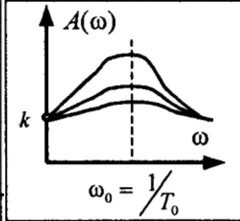
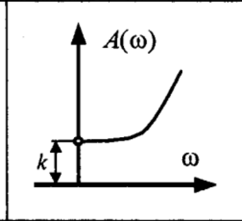
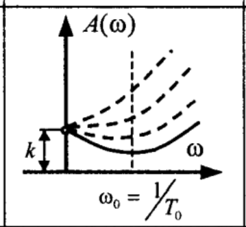
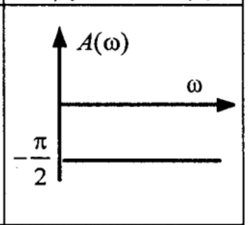
$$\boldsymbol{A_L(\omega) = 20lg(A(\omega))}, \text{[дБ]}$$

Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ) системы отличается от обычной ФЧХ тем, что по оси абсцисс откладывается логарифм частоты:

$$\boldsymbol{\varphi(\omega) = \varphi(lg\omega)}, \text{[радиан]}$$

Характеристики типовых (элементарных) динамических звеньев.

Вид характеристики	Тип звена: Пропорциональное (усилительное, безынерционное)	Интегрирующее	Апериодическое (инерционное)
1	2	3	4
Уравнение	$x(t)=ky(t)$	$T\frac{dx(t)}{dt}=y(t)$	$T\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=y(t)$
Передаточная функция $W(s)$	k	$\frac{1}{Ts}$	$\frac{k}{Ts+1}$
Передаточная характеристика $h(t)$			
КЧХ $W(j\omega)$			
АЧХ $W(\omega)$			
ФЧХ $\varphi(\omega)$			

Вид характеристики	Тип звена: Колебательное	Идеальное дифференцирующее 1-го порядка	Идеальное дифференцирующее 2-го порядка	Запаздывающее
Уравнение	$T_0^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+T\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=ky(t)$	$x(t)=k\left[T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)\right]$	$x(t)=k\left(T_0^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)\right)$	$x(t)=y(t-\tau)$
Передаточная функция $W(s)$	$\frac{k}{T_0^2s^2+Ts+1}$	$k(Ts+1)$	$k\left(T_0^2s^2+Ts+1\right)$	$e^{-s\tau}$
Передаточная характеристика $h(t)$				
КЧХ $W(j\omega)$				
АЧХ $W(\omega)$				
ФЧХ $\varphi(\omega)$