

ДЗ №2.3. Найти операторным методом и проверить с помощью Matlab решение дифференциального уравнения.

Однородное уравнение

Программа

```
%% Однородное уравнение
%% Операторный метод с residue (численный)
% Коэффициенты уравнения:  $3y'' + 24y' + 96y = 0$ 
% Характеристическое уравнение:  $3s^2 + 24s + 96 = 0$ 

% Преобразование Лапласа:
%  $3(s^2Y(s) - sy_0 - y_0') + 24(sY(s) - y_0) + 96Y(s) = 0$ 
%  $\Rightarrow Y(s) = (3s + 24)/(3s^2 + 24s + 96)$ 

num = [3 24]; % Числитель (3s + 24)
den = [3 24 96]; % Знаменатель (3s^2 + 24s + 96)

% Разложение на простые дроби
[r, p, k] = residue(num, den);

% Обратное преобразование Лапласа
t = linspace(0, 5, 100);
y_residue = zeros(size(t));

for i = 1:length(r)
    y_residue = y_residue + r(i)*exp(p(i)*t);
end

figure();
plot(t, y_residue, 'b', Linewidth=2);
hold on;

%Рисуем аналитическое решение, полученное "вручную"
t = linspace(0, 5, 100);
yAnSol = exp(-4*t).*(cos(4*t) + sin(4*t));

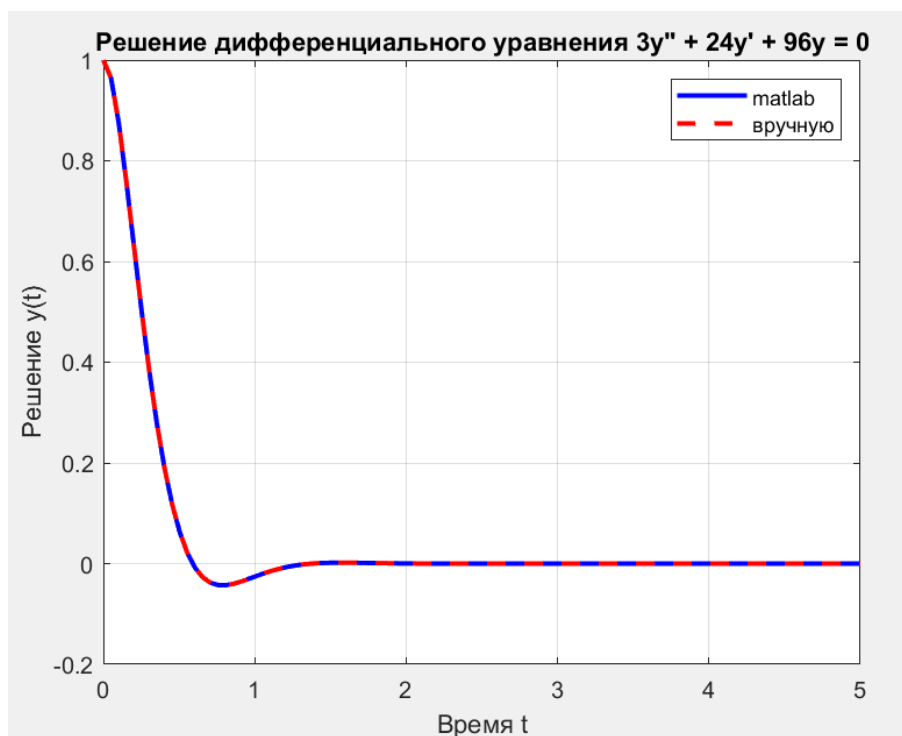
plot(t, yAnSol, 'r--', Linewidth=2)

grid on;
xlabel('Время t');
ylabel('Решение y(t)');
title('Решение дифференциального уравнения  $3y'' + 24y' + 96y = 0$ ');
legend('matlab', 'вручную');
hold off;
```

Решение вручную:

$$\begin{aligned}
 3y'' + 24y' + 96y &= 0 & y'(0) &= 0 \\
 & & y(0) &= 1 \\
 y(t) &\doteq F(p) \\
 y'(t) &\doteq pF(p) - y(0) = pF(p) - 1 \\
 y''(t) &\doteq p^2 F(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 F(p) - p \\
 3(p^2 F(p) - p) + 24(pF(p) - 1) + 96F(p) &= 0 \\
 3p^2 F - 3p + 24pF - 24 + 96F &= 0 \\
 F(3p^2 + 24p + 96) &= 3p - 24 \Rightarrow F = \frac{3p - 24}{3p^2 + 24p + 96} = \frac{p - 8}{p^2 + 8p + 32} = \frac{(p+4) - 4}{(p+4)^2 + 16} \\
 F &= \frac{p}{(p+4)^2 + 16} + \frac{4}{(p+4)^2 + 16} \doteq e^{-4t} \cos(4t) + e^{-4t} \sin(4t) \\
 y(t) &= e^{-4t} (\cos(4t) + \sin(4t)) \quad \text{— решение полученное операционным методом} \\
 \text{Решение с помощью матлаба: } y(t) &= \frac{e^{-4t}}{2} (2\cos(4t) + 3\sin(4t))
 \end{aligned}$$

Сравнение графиков решения:



Неоднородное уравнение

Программа:

```
%% Неоднородное уравнение
%% Преобразование Лапласа с использованием ilaplace
syms y(t)
syms p F
% Уравнение в пространстве Лапласа
eqn_laplace = p^3*F - p^2*3 - p*5 - (-66) + 7*(p^2*F - p*3 - 5) + 12*(p*F - 3) == 5/(p+3);

% Решаем относительно F
F_sol = solve(eqn_laplace, F);

% Обратное преобразование Лапласа
y_sol_ilaplace = ilaplace(F_sol);

t_vals = linspace(0, 5, 100);
% Преобразуем символьное решение в числовой массив
y_laplace = double(subs(y_sol_ilaplace, t, t_vals));

% Строим графики
figure();
%Рисует график решения, полученного с помощью matlab
plot(t_vals, y_laplace, 'b', 'Linewidth', 2);
hold on;

%Рисуем аналитическое решение, полученное "вручную"
t = linspace(0, 5, 100);
yAnSol = (5/9) + ((148/9) + (5/3)*t).*exp(-3*t) - 14*exp(-4*t);

plot(t, yAnSol, 'r--', Linewidth=2)

xlabel('Время t');
ylabel('Решение y(t)');
title('Решение дифференциального уравнения');
legend('matlab', 'вручную');
hold off;
```

Решение вручную:

$$y''' + 7y'' + 12y' = 5e^{-3t}$$

$$y''(0) = -66$$

$$y'(0) = 5$$

$$y(0) = 3$$

$$e^{-3t} = \frac{1}{p+3}$$

$$y(t) = F(p)$$

$$y'(t) = pF(p) - y(0) = pF(p) - 3$$

$$y''(t) = p^2F(p) - py(0) - y'(0) = p^2F(p) - 3p - 5$$

$$y'''(t) = p^3F(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3F(p) - 3p^2 - 5p + 66$$

$$p^3F - \underline{3p^2} - \underline{5p} + \underline{66} + \underline{7p^2F} - \underline{21p} - \underline{35} + \underline{12pF} - \underline{36} = \frac{5}{p+3}$$

$$F(p^3 + 7p^2 + 12p) = 5 + \frac{5}{p+3} + 26p + 3p^2$$

$$F(p(p^2 + 7p + 12)) = \frac{5p + 15 + 5 + 26p(p+3) + 3p^2(p+3)}{p+3} = \frac{20 + 5p + 26p^2 + 78p + 3p^3 + 9p^2}{p+3}$$

$$F = \frac{3p^3 + 35p^2 + 83p + 20}{p(p^2 + 7p + 12)(p+3)} = \frac{(5 + (3p^2 + 26p + 5)(p+3))}{p(p+3)^2(p+4)}$$

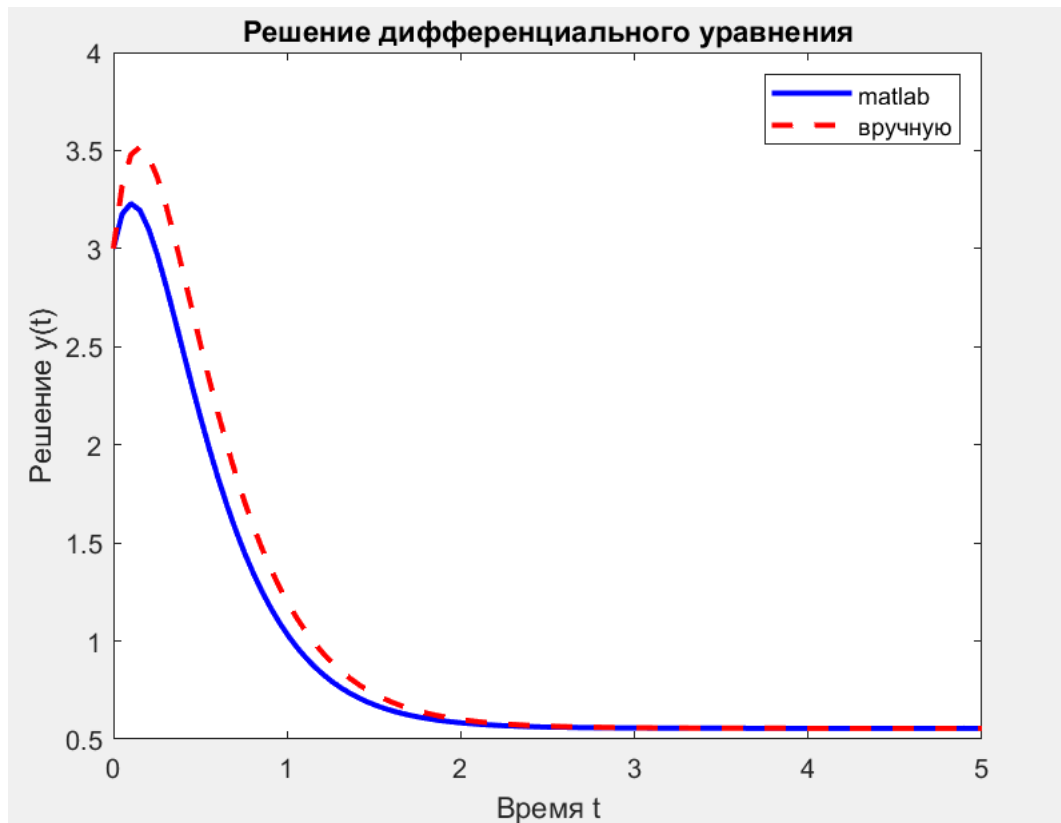
$$F = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{(p+3)^2} + \frac{D}{p+4}$$

Методом неопред. коэф. находим: $A = \frac{5}{3}$, $B = \frac{148}{9}$, $C = -\frac{5}{3}$; $D = -14$

$$F = \frac{\frac{5}{3}}{p} + \frac{\frac{148}{9}}{p+3} + \frac{-\frac{5}{3}}{(p+3)^2} + \frac{-14}{p+4} = \frac{5}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)e^{-3t} - 14e^{-4t} + \frac{148}{9}e^{-3t}$$

$$y(t) = \frac{5}{3} + \left(\frac{148}{9} - \frac{5}{3}\right)e^{-3t} - 14e^{-4t}$$

Сравнение графиков решения:



Вывод: графики решения, полученные с помощью matlab и вручную очень похожи. Тем не менее у графиков решения неоднородного уравнения наблюдаются некоторые расхождения в некоторой окрестности точки $t = 0$.

