Аналитические методы синтеза цифровых следящих систем

Домашние задания

Домашнее задание №3
(по лекции №4).

Исследование временных и частотных характеристик типовых звеньев САУ

ДЗ №3.1. Определить временные и частотные характеристики типовых динамических звеньев (см. таблицу 1) аналитическим способом (вручную!), а также с использованием Matlab.

Заданные типы динамических звеньев:
- **интегрирующее;**
- **инерционное;**
- **колебательное.**

Дано – передаточная функция динамического звена.

Получить – уравнение вход-выход динамического звена.

Определяемые временные характеристики:
- **единичная переходная функция (характеристика);**
- **импульсная (весовая) переходная функция (характеристика).**

Определяемые частотные характеристики:
- **Комплексная частотная характеристика (КЧХ) или амплитудно-фазо-частотная характеристика (АФЧХ);**
- **Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);**
- **Фазочастотная характеристика (ФЧХ);**
- **Годограф;**
- **Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ);**
- **Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ);**
- **Карта «нулей-полюсов».**

Рубрикация отчета следующая:
1) **Решение, сделанное вручную, с записью исходной ПФ и полученного уравнения «вход-выход» динамического звена и выкладок (можно скан рукописного текста).**
2) **Листинг кода построения графиков.**
3) **Скрин окна с графиками.**
4) **Вывод о равенстве решений, сделанных вручную и в Matlab.**

Методические указания.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ САУ

1.1. Цель работы

Исследование влияния параметров типовых звеньев на их временные и частотные характеристики.

1.2. Теоретическое введение

Любую систему автоматического управления можно представить в виде соединения динамических звеньев. Среди них встречается ряд таких звеньев, которые независимо от их назначения, конструкции, схемной реализации и физической природы описываются одними и теми же математическими зависимостями, например укреплённый на пружинах груз и корректирующая *RLC*-цепь. Связь между входными и выходными переменными таких звеньев обычно представляется в виде дифференциальных и (или) алгебраических уравнений вход-выход или передаточных функций.

Чаще всего дифференциальные уравнения динамических звеньев второго порядка имеют вид

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0g(t)+b_1\frac{dg(t)}{dt}, \qquad (1.1)$$

где $g(t)$, $y(t)$ – соответственно входная и выходная переменные рассматриваемого звена.

Дифференциальному уравнению (1.1) соответствует передаточная функция

$$W_{yg}(p)=\left.\frac{y(p)}{g(p)}\right|_{ННУ}=\frac{b_0+b_1p}{a_0+a_1p+a_2p^2}, \qquad (1.2)$$

где p – оператор Лапласа, $g(p)=L\{g(t)\}$, $y(p)=L\{y(t)\}$, L – символ прямого преобразования Лапласа; ННУ – нулевые начальные условия.

Среди всего множества динамических звеньев выделяют звенья с наиболее простыми передаточными функциями, которые называются типовыми динамическими звеньями. Типовые динамические звенья различают по их порядку (степени n полинома знаменателя). К типовым обычно относят динамические звенья нулевого, первого и второго порядка. Их передаточные функции приведены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Параметры типовых звеньев

Типовое звено и его передаточная функция	Варианты заданий										
	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Интегрирующее $W(p)=\frac{1}{Tp}$	T, с	45	14	0,6	35	0,3	76	0,5	25	0,1	20
Инерционное $W(p)=\frac{K}{Tp+1}$	K	1	15	0,5	13,5	4	10	2	14	0,2	5
	T, с	45	14	0.2	35	0,08	76	10	0 1	4	5
Колебательное $W(p)=\frac{K}{T^2p^2+2dTp+1}$	K	25	0,5	2,5	0,3	1,8	9	18	15	27	1
	d	0,7	0,5	0,5	1,0	0,45	0,6	0,1	0,4	0,5	0,7
	T, с	1	6	1,5	12	36	0,2	10	25	19	5

Методические указания.

Характеристики динамических звеньев и систем описывают поведение звеньев и систем при подаче на их входы тех или иных типовых воздействий. Различают временные и частотные характеристики.

К временным характеристикам относятся:

- переходная функция,
- импульсная переходная функция.

Переходной функцией $h(t)$ динамического звена называется его реакция на ступенчатое единичное воздействие при нулевых начальных условиях.

Другими словами, при $g(p) = 1/p$ и нулевых начальных условиях изображение выхода звена $y(p) = h(p)$. Отсюда и из (1.1) получаем, что отношение $W(p)/p = h(p)$. Следовательно,

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}. \tag{1.3}$$

Здесь L^{-1} – символ обратного преобразования Лапласа.

Для отыскания $h(t)$ по её изображению $h(p)$ можно использовать табл. 1.2 изображений по Лапласу некоторых функций.

Таблица 1.2

Преобразование Лапласа

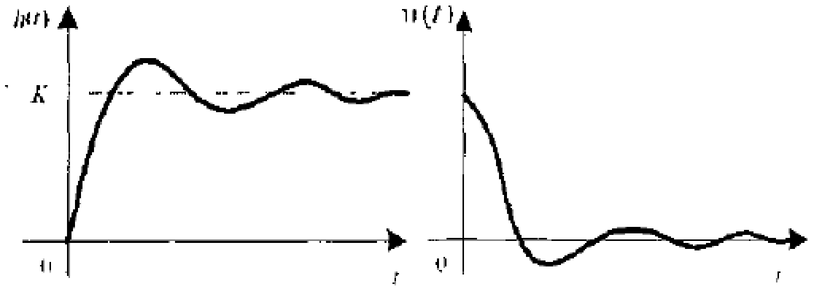
Название функции	Оригинал	Изображение
Единичная импульсная функция	$\delta(t)$	1
Единичная ступенчатая функция	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
Степенная функция	$t^n 1(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-at}1(t)$	$\frac{1}{p+a}$
Смещенная экспонента	$(1-e^{-at})1(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$
Синусоида	$(\sin\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Косинусоида	$(\cos\omega t)1(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Затухающая синусоида	$(e^{-\alpha t}\sin\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Затухающая косинусоида	$(e^{-\alpha t}\cos\omega t)1(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Методические указания

Пример переходной функции некоторого звена приведён на рис. 1.1,*а*.

Импульсной переходной (весовой) функцией $w(t)$ звена называется его реакция на δ-функцию при нулевых начальных условиях (рис. 1.1,*б*). Она может быть вычислена в зависимости от вида заданного описания звена по формулам

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} \quad \text{или} \quad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \qquad (1.4)$$



а *б*

Рис. 1.1. Переходная $h(t)$ и весовая $w(t)$ функции

Рассмотренные выше временные зависимости характеризуют ***переходный процесс*** в звене или системе, и если он затухает, то рассматриваемое звено или система являются устойчивыми. Режим, к которому приходит звено или система по окончании переходного процесса, называется ***установившимся режимом***.

Частотные характеристики описывают реакцию динамических звеньев на гармонические воздействия в установившемся режиме. К таким воздействиям относятся, например, сигналы

$$g(t) = g_m \sin(\omega_g t) \quad \text{или} \quad g(t) = g_m \cos(\omega_g t). \qquad (1.5)$$

При гармонических воздействиях обычно рассматривают реакцию устойчивой системы в установившемся режиме. Эта реакция описывается выражением

$$y_{уст}(t) = y_m \sin(\omega_g t + \varphi), \qquad (1.6)$$

где $y_m = y_m(\omega_g)$ – амплитуда, а $\varphi = \varphi(\omega_g)$ – фаза выходной переменной $y(t)$ в установившемся режиме.

Частотными характеристиками называют зависимости от частоты входного воздействия амплитуды $y_m(\omega_g)$ и фазы $\varphi(\omega_g)$ выходной переменной звена в установившемся режиме при постоянной амплитуде входного воздействия. Различают несколько частотных характеристик.

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется зависимость коэффициента передачи звена от частоты входного воздействия. Обозначается АЧХ обычно символом $A(\omega)$.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) – это зависимость фазы выходной переменной от частоты. Обозначается ФЧХ символом $\varphi(\omega)$.

Частотные характеристики можно определить через передаточную функцию звена, а именно

$$W(j\omega) = W(p)\big|_{p=j\omega} = \mathrm{Re}W(\omega) + j\mathrm{Im}W(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (1.7)$$

Отсюда следует, что АЧХ и ФЧХ можно определить по формулам

$$A(\omega) = |W(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega). \qquad (1.8)$$

Функция $W(j\omega)$ (1.7) называется ***комплексным коэффициентом передачи*** рассматриваемого звена и представляет собой его ***амплитудно-фазочастотную характеристику*** (АФЧХ). Обычно частота изменяется в диапазоне: $0 \le \omega \le \infty$.

Методические указания.

При каждом значении частоты $\omega = \omega_k$ функция $W(j\omega_k)$ представляет собой комплексное число (см. (1.7)). АФЧХ часто отображают на комплексной плоскости. С этой целью на её горизонтальной оси откладывают вещественную часть этого числа – $\mathrm{Re}W(\omega_k)$, а на вертикальной – мнимую $\mathrm{Im}W(\omega_k)$. Тогда само число $W(j\omega_k)$ изобразится вектором, проведённым из начала координат в точку, координаты которой равны отложенным на горизонтальной и вертикальной осях отрезкам. Длина этого вектора, равная модулю $|W(j\omega_k)|$, будет определять $A(\omega_k)$, а $\arg W(j\omega_k)$ – фазу $\varphi(\omega_k)$

При изменении частоты от нуля до ∞ этот вектор поворачивается и изменяет свою длину, а его конец описывает на комплексной плоскости некоторую кривую, которая называется ***годографом комплексного коэффициента передачи***, или просто ***годографом***. Каждая точка годографа соответствует одному значению частоты. Если передаточная функция $W(p)$ содержит только биномы $(Tp+1)^{\pm k}$, где k – натуральные числа, то угол поворота $\varphi(\omega)$ вектора $W(j\omega)$ при $0 \le \omega \le \infty$ определяется степенью k бинома и равен $\varphi_{\text{гдеф}} = \pm k\pi/2$.

На практике часто используются логарифмические частотные характеристики, к которым относятся ***логарифмические*** амплитудно-частотные (ЛАЧХ) и ***логарифмические*** фазочастотные характеристики (ЛФЧХ).

При построении этих характеристик по оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе, а по оси ординат

для ЛАЧХ – значения $20\lg A(\omega)$ в децибелах ($\partial Б$),

для ЛФЧХ – значения $\varphi(\omega)$ в градусах или радианах.

Выражения для ЛАЧХ и ЛФЧХ имеют следующий вид:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega), \qquad \varphi_L(\omega) = \varphi(\omega). \qquad (1.9)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) представляет собой построенную в логарифмическом масштабе зависимость **модуля** комплексного коэффициента передачи (1.8) от частоты. Логарифмический масштаб позволяет компактно изобразить амплитудно-частотную характеристику в широком диапазоне частот.

Единицей измерения по оси абсцисс (оси частот) обычно является декада, которая представляет собой интервал частот, отношение которых равно десяти, а разница в логарифмах этих частот равна единице. Другими словами, по оси абсцисс откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе (рис. 1.2), для чего наносятся отметки, соответствующие $\lg\omega$, а около отметок пишется само значение частоты (обычно кратное десяти) в радианах в секунду (рад/с).

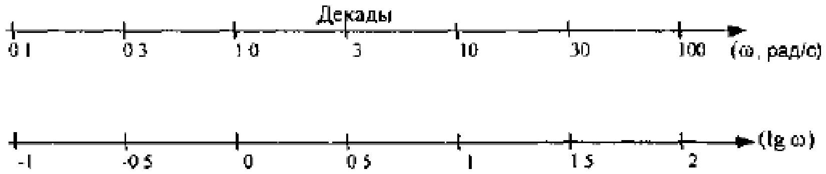


Рис. 1.2. Ось частот в логарифмическом масштабе

По оси ординат в равномерном масштабе откладывается модуль в децибелах ($\partial Б$): $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$. Ось абсцисс должна проходить через точку 0 $\partial Б$, что соответствует величине модуля $A(\omega) = 1$. Поскольку $\lg(\omega)|_{\omega\to 0} = -\infty$, то нулевую частоту на оси частот отложить невозможно. Поэтому ось ординат может пересекать ось абсцисс в произвольной точке (желательно в начале любой декады).

Логарифмическая фазочастотная характеристика представляет собой зависимость аргумента комплексного коэффициента передачи (1.7) от частоты. Строится она ниже ЛАЧХ таким образом, чтобы значения частот на одной и другой характеристиках совпадали. По оси ординат ЛФЧХ откладывается фаза в градусах или радианах.

Методические указания.

При построении логарифмических частотных характеристик удобно использовать асимптоты биномов $(Tp+1)^{\pm k}$ и $(T^2p+2dTp+1)^{\pm k}$. Обычно выделяют следующие асимптоты ЛАЧХ:

- низкочастотная асимптота $L_{НЧ}(\omega)=L(\omega)$, $\omega\to 0$.
- высокочастотная асимптота $L_{ВЧ}(\omega)=L(\omega)$, $\omega\to\infty$.

Асимптоты ЛАЧХ указанных биномов всегда пересекаются на частоте, которая равна $1/T$, называется частотой сопряжения и обозначается $\omega_{сопр}$, т.е $\omega_{сопр}=1/T$.

ЛФЧХ также имеют низкочастотную и высокочастотную асимптоты. Их сопряжение происходит на той же частоте $\omega_{сопр}=1/T$, но с помощью некоторой линии, так как эти асимптоты, как правило, не пересекаются [1. С. 42].

1.3. Порядок выполнения работы

1.3.1. Задание на дом

1. По табл. 1.1 в соответствии с вариантом задания, указанным в табл. 1.3 и совпадающим с номером бригады, выберите параметры заданных типовых звеньев.

2. В соответствии с вариантом задания:

а) получите выражения и постройте графики переходных $h(t)$ и весовых $w(t)$ функций заданных типовых звеньев с указанными параметрами;

б) найдите комплексные коэффициенты передачи $W(j\omega)$ и постройте годографы заданных типовых звеньев с указанными параметрами;

в) постройте асимптотические логарифмические амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики заданных типовых звеньев с указанными параметрами.

1.3.2. Работа в лаборатории

1. Выполните моделирование на персональном компьютере (ПК) временных и частотных характеристик заданных типовых звеньев с помощью пакета Simulink for Windows в системе MATLAB (см. ниже подразд. 1.6). Просмотрите на дисплее «Scope» и зарисуйте характеристики $h(t)$, $w(t)$, ЛАЧХ, ЛФЧХ, а также годографы при заданных значениях коэффициентов усиления K и постоянных времени T и при их изменении на $\pm 50\,\%$ от заданных значений.

2. Объясните полученные характеристики с помощью анализа расчетных соотношений и оцените влияние параметров на динамику и статику звеньев

3. На полученном с помощью ПК графике ЛАЧХ постройте асимптоты с наклонами, определяемыми степенями соответствующих множителей, определите сопрягающие частоты и коэффициент передачи звена. Сравните результаты с заданными в табл. 1.3.

Указания:

- При моделировании звеньев влияние каждого параметра на характеристику исследовать отдельно.
- При моделировании колебательного звена снять характеристики при $d=d_{зад}$, $d=1$, $d=0$.
- При моделировании инерционно-форсирующего (интегро-дифференцирующего) звена (с заданными значениями T_1 и T_2) промоделировать звено, зарисовать и сравнить характеристики при $T_1<T_2$ и при $T_1>T_2$.

1.4. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Передаточные функции, комплексные коэффициенты передачи, аналитические выражения и расчетные кривые временных и частотных характеристик заданных типовых звеньев.

Методические указания.

3. Результаты моделирования на ПК (см. пп.1-3 работы в лаборатории).
4. Выводы по работе.

1.5. Пример вывода аналитических выражений временных и частотных характеристик

Рассмотрим для примера вывод выражений для временных и частотных характеристик инерционного звена

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}. \qquad (1.10)$$

Переходная функция. Подставляя (1.10) в (1.3), получим

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K}{Tp+1}\frac{1}{p}\right\}.$$

Приводя изображение к табличному виду и применяя обратное преобразование Лапласа, найдём искомое выражение

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K}{T}\frac{1}{p(p+1/T)}\right\} = K\left(1-e^{-t/T}\right).$$

Отсюда следует, что переходная функция инерционного звена представляет собой взятую со знаком минус и смещенную вдоль оси ординат убывающую экспоненту (рис. 1.3).

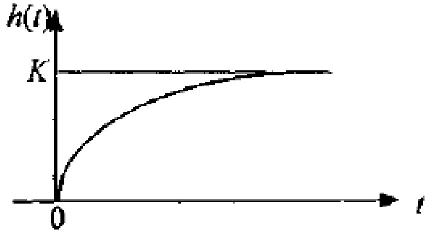


Рис. 1.3. Качественный вид переходной функции инерционного звена

Весовая функция. Выше была получена переходная функция $h(t)$ инерционного звена, поэтому, подставив ее в формулу (1.4), получим

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}.$$

Как видно из рис. 1.4, импульсная переходная (весовая) функция инерционного звена представляет собой убывающую экспоненту.

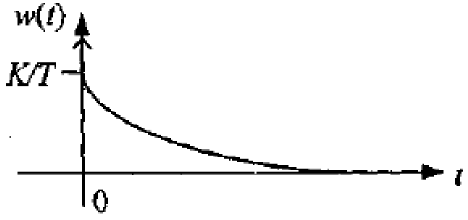


Рис. 1.4. Качественный вид импульсной (весовой) функций инерционного звена

Частотные характеристики. В соответствии с (1.8) и с учетом (1.10) запишем формулы для АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}, \qquad (1.11)$$

$$\varphi(\omega) = -arctg\,\omega T. \qquad (1.12)$$

При изменении частоты в диапазоне $0 \le \omega \le \infty$ выражения (1.11), (1.12) дадут годограф АФХ, качественный вид которого представлен на рис. 1.5.

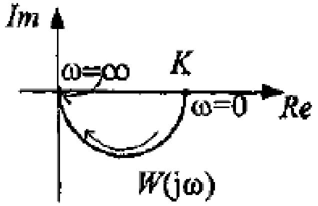


Рис. 1.5. Качественный вид годографа АФХ

Методические указания.

Логарифмируя выражение (1.11), получим

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2}\,. \quad (1.13)$$

Чтобы по выражению (1.13) построить асимптотическую ЛАЧХ, весь частотный диапазон разбивается на два участка:

1. Участок $0 \le \omega \le 1/T$. В этом диапазоне выражению (1.13) соответствует низкочастотная асимптота $L_{НЧ}(\omega) = 20\lg K$.

2. Участок $1/T \le \omega \le \infty$. Пренебрегая единицей в выражении $20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2}$, получим асимптоту $L_{ВЧ} = 20\lg\omega T$. Её наклон к оси частот составляет -20 *дБ/дек*.

Таким образом, асимптотическая ЛАЧХ инерционного звена состоит из двух асимптот, сопрягающихся на частоте $\omega_{сопр} = 1/T$. ЛФЧХ рассматриваемого звена при изменении частоты в диапазоне $0 \le \omega \le \infty$ изменяется от 0 до $-\pi/2$, принимая на частоте сопряжения значение $-\pi/4$. Графики логарифмических асимптотической АЧХ и ФЧХ инерционного звена приведены на рис. 1.6.

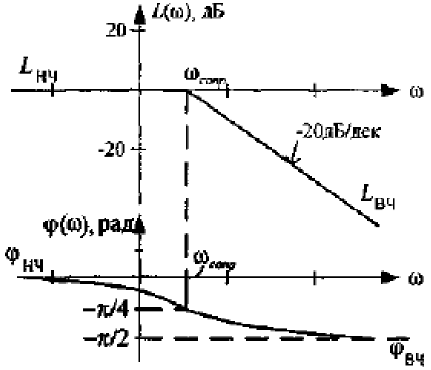


Рис.1.6. Логарифмические характеристики инерционного звена

Отметим, что ***максимальное отклонение*** точной ЛАЧХ $L(\omega)$ (1.13) инерционного звена от асимптотической наблюдается на частоте сопряжения и составляет $20\lg\sqrt{2} = 3\,дБ$.

Поскольку на качество исследования частотных свойств звена или системы погрешность в 3 *дБ* не влияет, то ею обычно пренебрегают. Кстати, точные логарифмические характеристики $L(\omega)$ можно построить в программном пакете MATLAB (см. подразд. 1.6)

В заключение следует отметить, что логарифмические частотные характеристики, отличаясь простотой построения, позволяют охватить большой диапазон частот. Необходимо только иметь в виду, что по оси частот используется логарифмический масштаб: чтобы отметить значение частоты ω на графике, следует вычислить $\lg\omega$ и нанести эту величину в нужной декаде.

1.6. Моделирование звеньев с помощью пакета MATLAB

1. После запуска пакета введите передаточную функцию исследуемого звена. Синтаксис команды:

имя функции = tf([числитель],[знаменатель]).

Например, если $W(p) = 2/(5p+1)$, **sys = tf([2],[5 1])**.

2. Для построения переходной функции используйте команду **step(имя функции)**. Например, **step(sys)**.

3. Для построения импульсной (весовой) функции используйте команду **impulse(имя функции)**.

Например, **impulse (sys)**.

4. Для построения логарифмических частотных характеристик используйте команду **bode(имя функции)**. Например, **bode(sys)** или **bode(sys,{ωmin,ωmax})** с указанием требуемого диапазона частот.

На полученном графике ЛАЧХ рекомендуется построить асимптоты с наклонами, определяемыми степенями соответствующих множителей, определить сопрягающие частоты и коэффициент передачи звена. Полученные результаты целесообразно сравнить с заданными в табл. 1.3.

5. Для построения годографа используйте команду **nyquist(имя функции)**. Например, **nyquist(sys)**. При этом частота будет изменяться от $-\infty$ до $+\infty$.

6. Чтобы построить несколько графиков в одних осях, перечислите имена переменных через запятую. Например, **step(sys1,sys2,sys3)**.

7. Для запуска программы сохраните созданный файл и запустите его через меню редактора **Tools\Run**.

Примечание. Чтобы построить несколько графиков одновременно в разных окнах, перед каждой командой, которая строит график, впишите строчку **figure(номер окна)**. Например, **figure(1)**.

Листинг кода в Matlab для получения характеристик (на примере инерционного звена).

```
clear all;
close all;

y_simv=dsolve('T*Dy+y=K', 'y(0)=0');
K=2; % коэффициент усиления (K>=1) или коэффициент ослабления (0<K<1),безразмерный
T=0.2; % постоянная времени инерциального звена, [c]
t=0:0.05:1
y=K - K*exp(-t/T);
figure ();
plot (t,y,'k'), grid on

% передаточная функция
sys = tf(K,[T 1])

%временные характеристики
figure ();
step (sys);
figure ();
impulse(sys);

% частотные характеристики
figure();
bode(sys);
figure();
nyquist(sys);
figure();
pzmap(sys);
```

Характеристика динамического звена	Функция Matlab
Уравнение «вход-выход»	dsolve()
Передаточная функция	tf()
Переходная функция	step()
Импульсная функция	impulse()
АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ	bode()
Годограф	nyquist()
Карта «нулей-полюсов»	pzmap()