

# Аналитические методы синтеза цифровых следящих систем

*Конспект лекций*

## Лекция 6.

Математическая и компьютерная модель заданной части следящей системы - исполнительного электропривода.

Математическая модель двигателя постоянного тока (ДПТ)  
(как элемента заданной части следящей системы).

Математическая модель ДПТ с учетом ограничений по напряжению питания (по скорости), току, по ускорению, по углу, с нелинейностью момента.

Математическая модель редуктора.

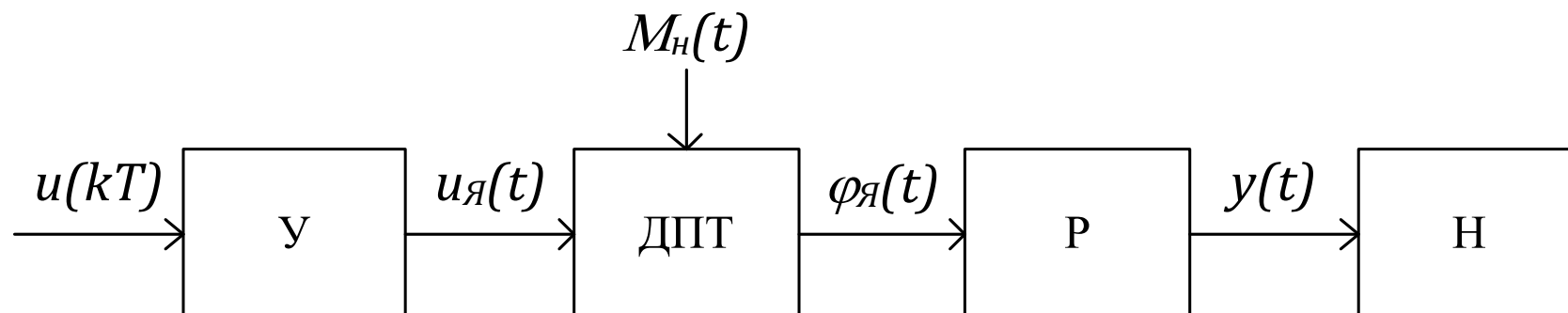
Математическая модель усилителя.

## Структура заданной части следящей системы.

**Электромеханические следящие системы** являются неотъемлемой составной частью современных систем автоматического сопровождения, рулевых устройств систем дистанционного управления, роботов и манипуляторов, а также современных авиационных следящих выводных устройств. **Основное назначение электромеханических следящих систем** – поддержание углового или линейного значения выходной величины, связанного с валом исполнительного двигателя (электропривода), имеющего нагрузку в виде момента, в соответствие с положением входной величины.

**Электромеханические следящие системы**, в большинстве случаев, имеют ограничения на изменение переменных состояния (координат) системы. Эти ограничения вызваны, прежде всего, реальными конструктивными и техническими ограничениями заданной части этих систем. Ограничения по угловому или линейному положению определяются сектором работы следящих систем. Ограничения по скорости вызваны ограниченными мощностями электроприводов или ограниченными мощностями внешних источников питания. Последнее особенно часто встречается при проектировании электромеханических следящих систем на подвижных платформах, где ресурсы энергоснабжения ограничены. Ограничения по ускорению могут быть вызваны как конструктивными ограничениями самих внутренних элементов электроприводов (ротора, подшипников и т.п.), так и кинематического соединения электропривод-нагрузка. Ограничения по ускорению также могут быть вызваны относительным движением объекта управления и подвижной платформы. Другой причиной ограничения управления в системе могут быть все те же ограничения электропитания электроприводов. Ограничения по управлению, прежде всего, вызваны ограничением разрядной сетки вычислителей, вызывающее насыщение переполнением.

**Структура заданной части следящей системы - исполнительного электропривода.**

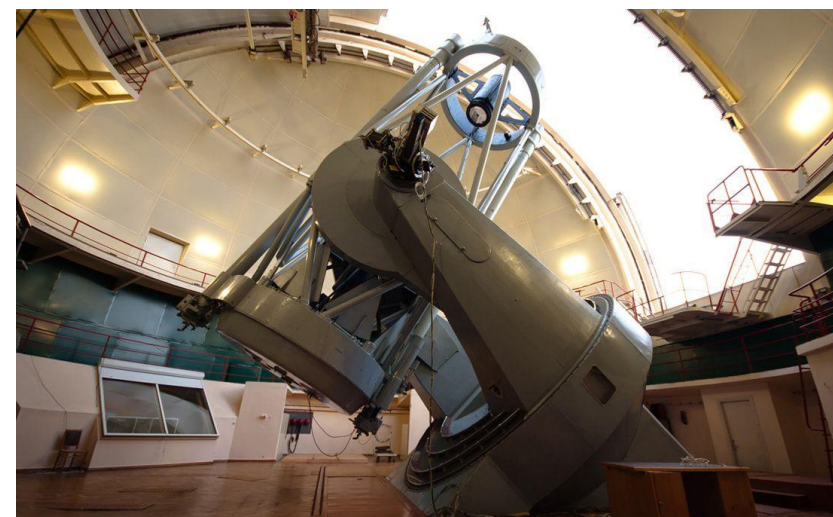
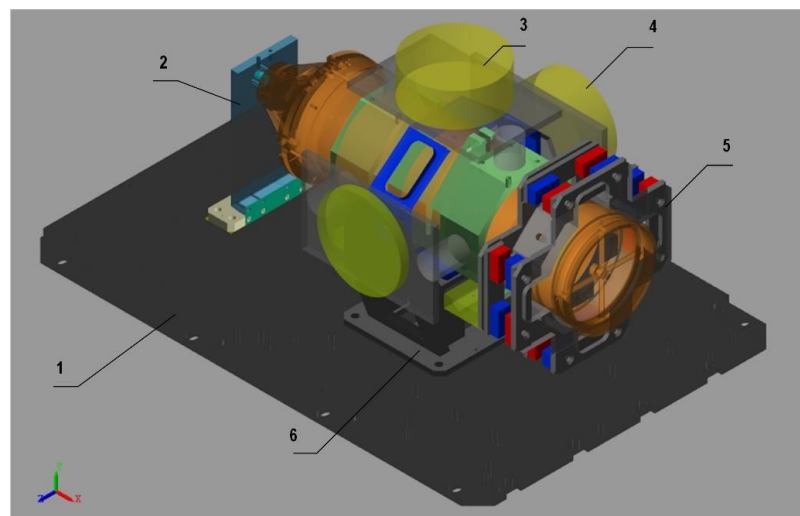


**У – усилитель**

**ДПТ – двигатель постоянного тока**

**P – редуктор**

**H - нагрузка**



## Устройство и принцип действия коллекторного ДПТ с возбуждением от постоянных магнитов.

Статор: постоянные магниты

Магнитное поле, создаваемое статором

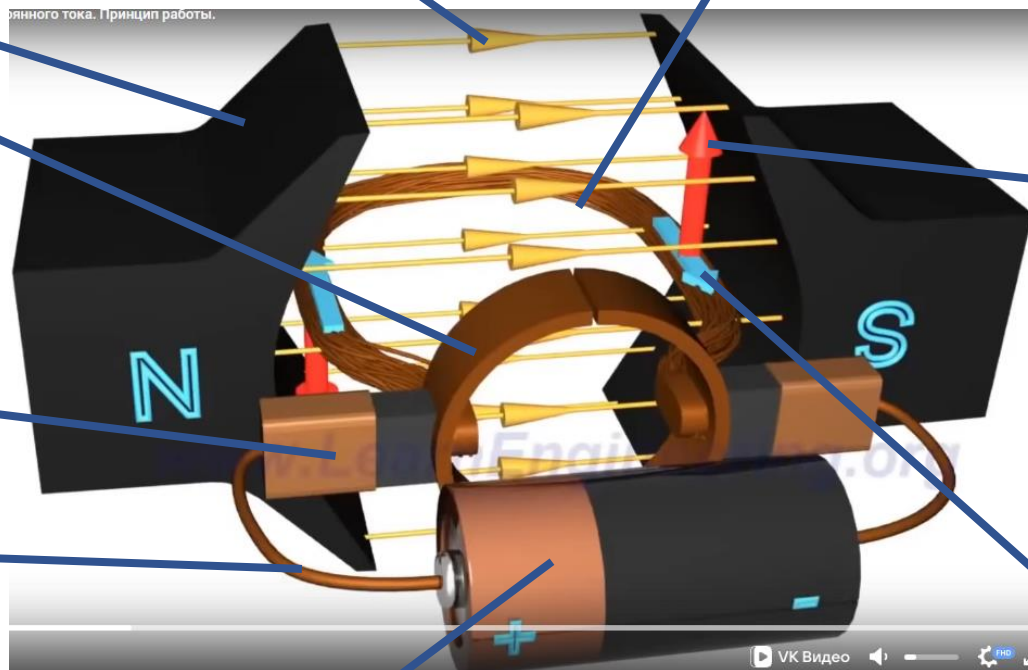
Ротор: якорная обмотка

Ротор: коллектор («клеммы» якорной обмотки)

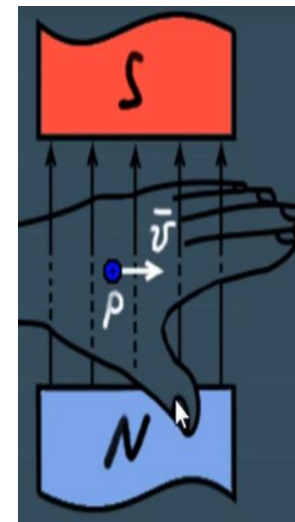
Ротор: коллекторные «щетки»

Ротор: питающие провода якорной обмотки

Ротор: «источник питания» якоря (в общем случае может меняться напряжение питания)



Ротор: сила Лоренца является основой вращения якоря (т.е. ротора). Направление определяется правилом «левой руки».



Ротор: ток (положительный заряд), протекающий в якорной обмотке

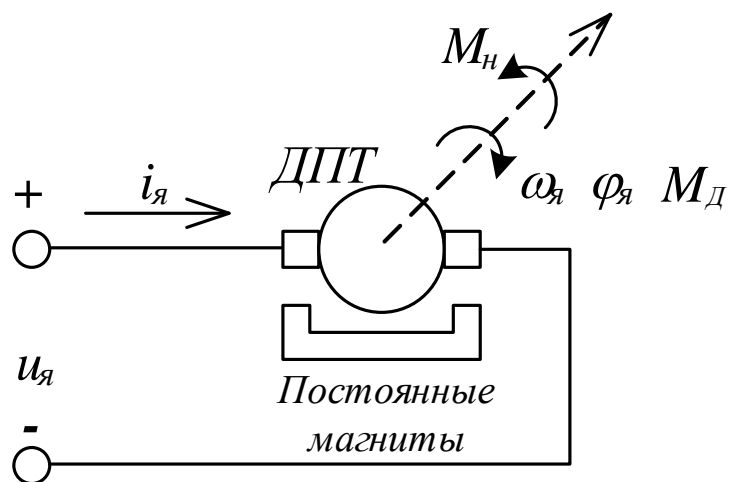
[https://vk.com/video-193996943\\_456239023](https://vk.com/video-193996943_456239023)

<https://youtu.be/7N9CHEF2214>



## Математическая модель ДПТ. Схема включения.

### Схема включения ДПТ с возбуждением от постоянных магнитов



На этом рисунке:

$U_{\text{я}}$  – постоянное напряжение (питания) якорной цепи, [В];

$i_{\text{я}}$  – ток якорной цепи, [А];

$\psi_{\text{я}}$  – угол поворота якоря (ротора) электродвигателя, [радиан];

$\omega_{\text{я}}$  – угловая скорость якоря (ротора) электродвигателя, [радиан / с];

$M_{\text{д}}$  – электромагнитный момент, создаваемый исполнительным электродвигателем, [Н·м];

$M_{\text{н}}$  – момент нагрузки, [Н·м].

Реверсирование (изменение направления вращения) двигателей независимого возбуждения осуществляется изменением полярности напряжения, подводимого к якорю двигателя  $U_{\text{я}}$ .

## Математическая модель ДПТ. Система уравнений.

**Электромеханические процессы в ДПТ при постоянном потоке возбуждения (от постоянных магнитов) с управлением по цепи якоря описываются следующей системой уравнений**

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\Sigma.\text{пр.}} \frac{d^2\psi_{\text{я}}}{dt^2} = M_{\text{Д}} - M_{\text{Н}} \\ M_{\text{Д}} = C_{\text{М}} i_{\text{я}} \\ u_{\text{я}} = R_{\text{я}} i_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + e_{\text{я}}; \\ e_{\text{я}} = C_{\text{е}} \omega_{\text{я}}; \\ \omega_{\text{я}} = \frac{d\psi_{\text{я}}}{dt}, \end{array} \right.$$

Уравнение	Описание
(1)	<b>II закон Ньютона для вращательного движения:</b> Угловое ускорение тела прямо пропорционально суммарному моменту внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела.
(2)	Аналитическая связь момента двигателя и тока якоря через известный (паспортный) параметр двигателя $C_{\text{М}}$ ,
(3)	<b>Второе правило Кирхгофа:</b> алгебраическая сумма напряжений на элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур.
(4)	Аналитическая связь противо-ЭДС и угловой скорости вращения якоря (ротора) через известный (паспортный) параметр двигателя $C_{\text{е}}$ . При вращении якоря, его обмотка пересекает силовые линии магнитного поля, поэтому в ней, по закону электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции, направление которой противоположно приложенному на двигатель напряжению и поэтому она называется – «ПРОТИВО-ЭДС» двигателя.
(5)	Угловая скорость вращения якоря (ротора) двигателя есть первая производная от угла поворота

Где

$J_{\Sigma.\text{пр.}}$  – суммарный момент инерции ротора электродвигателя ( $J_{\text{Д.пр.}}$ ) и механической нагрузки ( $J_{\text{Н.пр.}}$ ), приведенный к валу электродвигателя, [кг·м<sup>2</sup>];

$u_{\text{я}}, I_{\text{я}}, e_{\text{я}}$  – напряжение [В], ток [А] и противоЭДС [В] якоря;

$R_{\text{я}}, L_{\text{я}}$  – активное сопротивление [Ом] и индуктивность [Гн] обмотки якоря;

$M_{\text{Н}} = C_{\text{М}} I_{\text{я}}$  – момент сопротивления нагрузки, [Н·м];

Введем также обозначения  $M_{\text{дин}} = M_{\text{Д}} - M_{\text{Н}}$  – динамический момент ДПТ, [Н·м];

$\xi_{\text{я}}$  – ускорение якоря (вала) электродвигателя, [радиан / с<sup>2</sup>].

$C_{\text{М}}, C_{\text{е}}$  – конструктивные постоянные электродвигателя:

$C_{\text{М}}$  – коэффициент пропорциональности  $C_{\text{е}}$  – коэффициент пропорциональности между током якоря и моментом при между скоростью якоря и противоЭДС, постоянном потоке возбуждения, [Н·м/А] [В·с],

$$C_{\text{М}} = \frac{M_{\text{Д.ном}}}{i_{\text{я.ном}}};$$

$$C_{\text{е}} = \frac{30(u_{\text{я.ном}} - i_{\text{я.ном}} \cdot R_{\text{я}})}{\pi n_{\text{н}}};$$

**Математическая модель ДПТ. Вывод уравнения вход-выход.**

Из третьего уравнения с учетом четвертого и пятого уравнений системы (1.1), получим выражение для тока  $i_{\text{я}}$ :

Система (1.1):

$$i_{\text{я}} = \frac{1}{R_{\text{я}}} u_{\text{я}} - \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} - \frac{C_e}{R_{\text{я}}} \frac{d\psi_{\text{я}}}{dt} \quad (1.7)$$

Подставляем выражение (1.7) в первое уравнение системы (1.1) с учетом второго уравнения, получаем

$$J_{\Sigma.\text{пр.}} \frac{d^2\psi_{\text{я}}}{dt^2} + \frac{C_M C_e}{R_{\text{я}}} \frac{d\psi_{\text{я}}}{dt} + \frac{C_M L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{C_M}{R_{\text{я}}} u_{\text{я}} - M_{\text{Н}} \quad (1.8)$$

С другой стороны, из первого уравнения системы (1.1) с учетом второго уравнения, получим выражение для тока в виде:

$$i_{\text{я}} = \frac{J_{\Sigma.\text{пр.}}}{C_M} \frac{d^2\psi_{\text{я}}}{dt^2} + \frac{1}{C_M} M_{\text{Н}} \quad (1.9)$$

Дифференцируя левую и правую части равенства (1.9), получим выражение для производной тока  $di_{\text{я}}/dt$

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{J_{\Sigma.\text{пр.}}}{C_M} \frac{d^3\psi_{\text{я}}}{dt^3} + \frac{1}{C_M} \frac{dM_{\text{Н}}}{dt} \quad (1.10)$$



**Математическая модель ДПТ. Уравнение вход-выход.**

$$\frac{di_{\text{Я}}}{dt} = \frac{J_{\Sigma.\text{пр.}}}{C_M} \frac{d^3\psi_{\text{Я}}}{dt^3} + \frac{1}{C_M} \frac{dM_{\text{Н}}}{dt} \quad (1.10)$$



$$J_{\Sigma.\text{пр.}} \frac{d^2\psi_{\text{Я}}}{dt^2} + \frac{C_M C_e}{R_{\text{Я}}} \frac{d\psi_{\text{Я}}}{dt} + \frac{C_M L_{\text{Я}}}{R_{\text{Я}}} \frac{di_{\text{Я}}}{dt} = \frac{C_M}{R_{\text{Я}}} u_{\text{Я}} - M_{\text{Н}} \quad (1.8)$$



Подставляя выражение для производной тока  $di_{\text{Я}}/dt$  (1.10) в выражение (1.8), получаем решение системы дифференциальных уравнений (1.1)

$$\frac{L_{\text{Я}} J_{\Sigma.\text{пр.}} R_{\text{Я}}}{R_{\text{Я}} C_M C_e} \frac{d^3\psi_{\text{Я}}}{dt^3} + \frac{J_{\Sigma.\text{пр.}} R_{\text{Я}}}{C_M C_e} \frac{d^2\psi_{\text{Я}}}{dt^2} + \frac{d\psi_{\text{Я}}}{dt} = \frac{1}{C_e} u_{\text{Я}} - \frac{R_{\text{Я}}}{C_M C_e} M_{\text{Н}} - \frac{L_{\text{Я}}}{R_{\text{Я}}} \frac{R_{\text{Я}}}{C_M C_e} \frac{dM_{\text{Н}}}{dt} \quad (1.11)$$

Как видно из выражения (1.11), структурная схема ДПТ имеет два входа: по управляющему воздействию  $u_{\text{Я}}$  и возмущающему воздействию  $M_{\text{Н}}$ .

## Математическая модель ДПТ. Структура и ПФ ДПТ по управляющему воздействию и возмущению.

Введя оператор дифференцирования  $p \equiv d/dt$  в выражение (1.11), при  $M_H = 0$  получим операторную передаточную функцию ДПТ по управляющему воздействию  $u_{Я}$

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{Я}(p)}{u_{Я}(p)} = \frac{\frac{1}{C_e}}{\frac{L_{Я} J_{\Sigma.\text{пр.}} R_{Я}}{R_{Я} C_M C_e} p^3 + \frac{J_{\Sigma.\text{пр.}} R_{Я}}{C_M C_e} p^2 + p} \quad (1.12)$$

Проведя ряд преобразований в выражении (1.12), представим передаточную функцию ДПТ следующим образом

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{Я}(p)}{u_{Я}(p)} = \frac{\frac{1/R_{Я}}{(L_{Я}/R_{Я})p + 1} C_M \frac{1}{J_{\Sigma.\text{пр.}}} \frac{1}{p}}{1 + \frac{1/R_{Я}}{(L_{Я}/R_{Я})p + 1} C_M \frac{1}{J_{\Sigma.\text{пр.}}} \frac{1}{p} \cdot C_e} \cdot \frac{1}{p} \quad (1.13)$$

Структурная схема ДПТ, соответствующая выражению (1.13), приведена на рисунке 1.2.

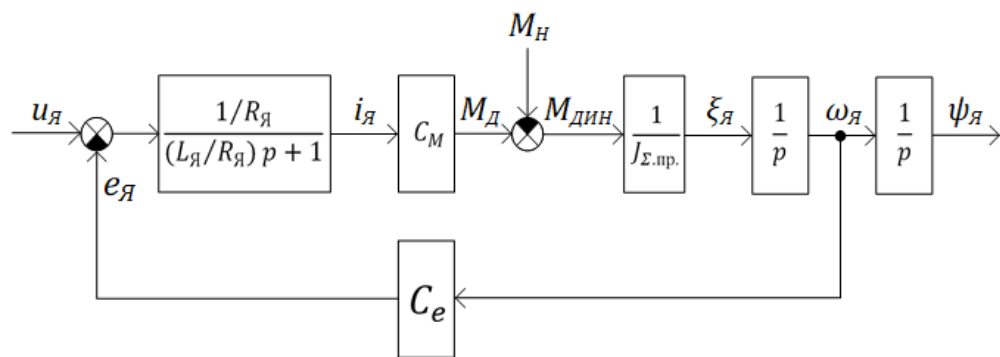


Рисунок 1.2 – Структурная схема ДПТ по управляющему воздействию  $u_{Я}$

При  $u_{Я} = 0$  из выражения (1.11) с учетом оператора дифференцирования  $p \equiv d/dt$  получим операторную передаточную функцию ДПТ по возмущающему воздействию  $M_H$

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{Я}(p)}{M_H(p)} = \frac{-\frac{R_{Я}}{C_M C_e} \left( \frac{L_{Я}}{R_{Я}} p + 1 \right)}{\frac{L_{Я} J_{\Sigma.\text{пр.}} R_{Я}}{R_{Я} C_M C_e} p^3 + \frac{J_{\Sigma.\text{пр.}} R_{Я}}{C_M C_e} p^2 + p} \quad (1.14)$$

Проведя ряд преобразований в выражении (1.12), представим передаточную функцию ДПТ следующим образом

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{Я}(p)}{M_H(p)} = -\frac{\frac{1}{J_{\Sigma.\text{пр.}}} \frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{J_{\Sigma.\text{пр.}}} \frac{1}{p} \cdot \frac{1/R_{Я}}{(L_{Я}/R_{Я})p + 1} C_M C_e} \cdot \frac{1}{p} \quad (1.15)$$

Структурная схема ДПТ, соответствующая выражению (1.15), приведена на рисунке 1.3.

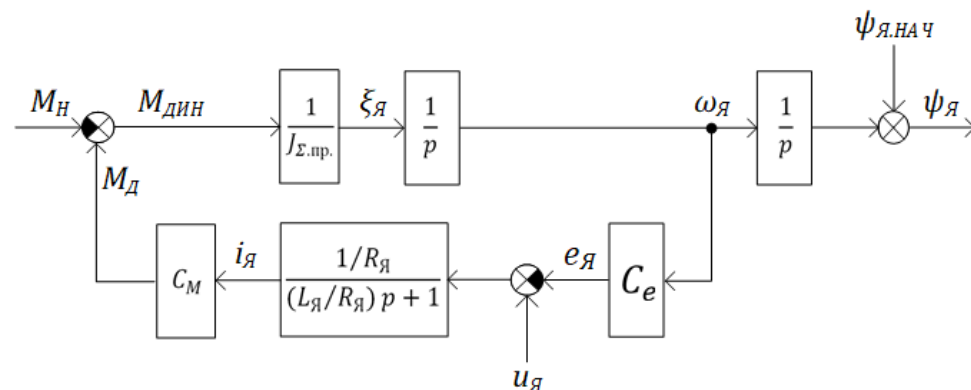


Рисунок 1.3 – Структурная схема ДПТ по возмущающему воздействию  $M_H$

## Математическая модель ДПТ. Полиномиальное представление ПФ ДПТ по управляющему воздействию и возмущению.

Введем обозначения:

- электромеханическая постоянная времени ДПТ, [с]:

$$T_M = \frac{J_{\Sigma, \text{пр.}} R_{\text{я}}}{C_M C_e}, \quad (1.16)$$

- электромагнитная постоянная времени ДПТ, [с]:

$$T_e = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}, \quad (1.17)$$

- коэффициент передачи ДПТ по скорости в установившемся режиме, [1/Вс]:

$$k_e = \frac{1}{C_e}, \quad (1.18)$$

При  $T_M > 4T_e$  ПФ (1.19) и (1.20) по управляющему воздействию может быть представлена в виде последовательно включенных двух аperiodических звеньев первого порядка с постоянными времени  $T_1$  и  $T_2$  и интегратора, где:

$$T_1 T_2 = T_e T_M;$$

$$T_1 + T_2 = T_M.$$

Тогда, операторная передаточная функция ДПТ по управляющему воздействию  $u_{\text{я}}$  (1.11) с учетом введенных обозначений (1.16) – (1.18) примет вид:

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{\text{я}}(p)}{u_{\text{я}}(p)} = \frac{k_e}{T_e T_M p^3 + T_M p^2 + p}. \quad (1.19)$$

С учетом введенных обозначений (1.16) – (1.18) операторная передаточная функция ДПТ по возмущающему воздействию  $M_{\text{с}}$  (1.14) примет вид:

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{\text{я}}(p)}{M_{\text{Н}}(p)} = -\frac{1}{\beta_{\text{ДПТ}}} \cdot \frac{(T_e p + 1)}{T_e T_M p^3 + T_M p^2 + p}, \quad (1.20)$$

где  $\beta_{\text{ДПТ}}$  – жесткость механической характеристики ДПТ, определяемая по формуле

$$\beta_{\text{ДПТ}} = \frac{C_M C_e}{R_{\text{я}}}. \quad (1.21)$$

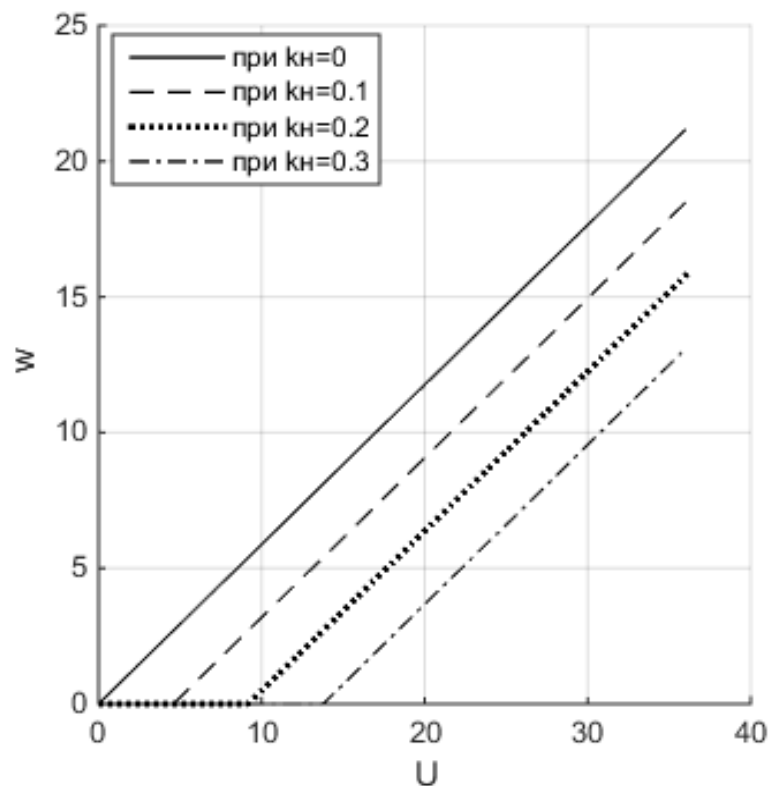
$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{\text{я}}(p)}{u_{\text{я}}(p)} = \frac{k_e}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p}.$$

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\psi_{\text{я}}(p)}{M_{\text{Н}}(p)} = -\frac{1}{\beta_{\text{ДПТ}}} \cdot \frac{(T_e p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p}.$$

## Математическая модель ДПТ. Регулировочная и механическая характеристики ДПТ.

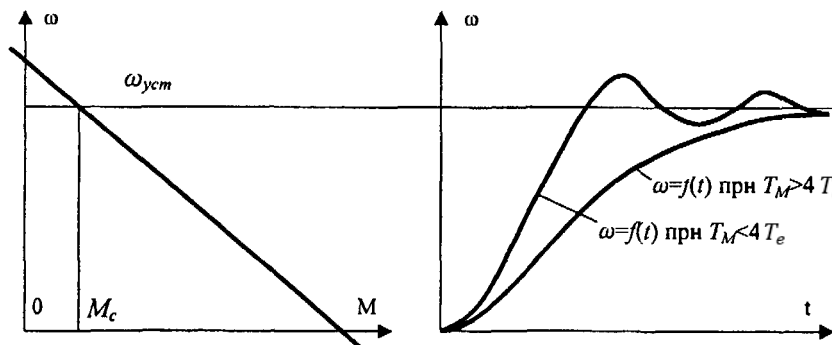
$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\omega_{\text{я}}(p)}{u_{\text{я}}(p)} = \frac{k_e}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

$$W_{\text{ДПТ}}(p) = \frac{\omega_{\text{я}}(p)}{M_{\text{H}}(p)} = -\frac{1}{\beta_{\text{ДПТ}}} \cdot \frac{(T_e p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

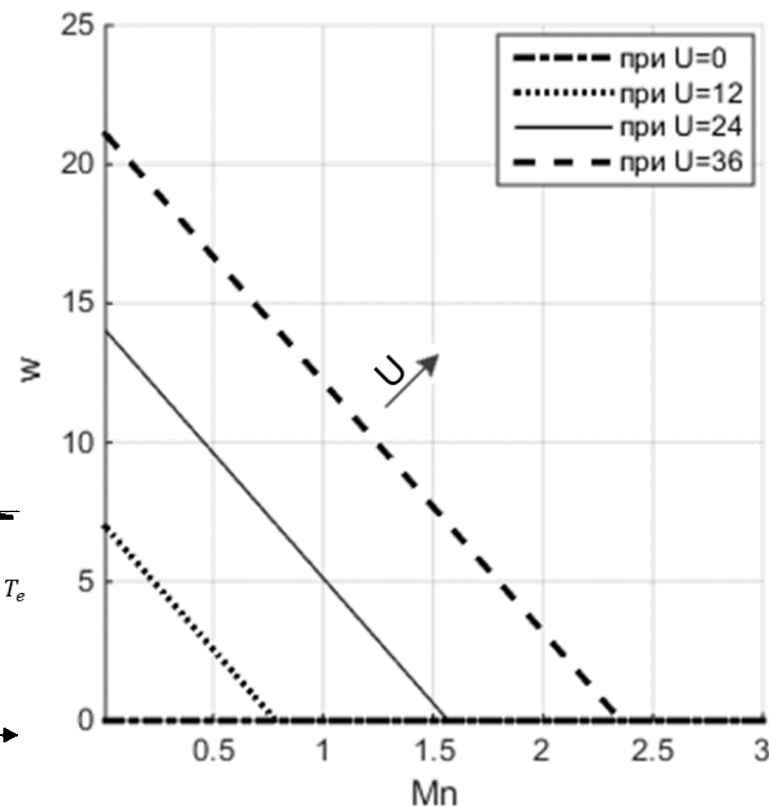


Регулировочная характеристика  
ДПТ без ограничений

### Линейная механическая характеристика и переходная характеристика по скорости ДПТ



$$k_H = \frac{M_H(t)}{M_{\text{Дmax}}}$$



Механическая характеристика  
ДПТ без ограничений

## Математическая модель ДПТ с учетом ограничений

электромеханические следящие системы, в большинстве случаев, имеют ограничения по углу, скорости, ускорению и управлению.

Ограничения по управляющему напряжению, току и ускорению имеют вид:

$$|u| \leq u_{я.МАХ}; \quad |I_я| < I_{я.МАХ}; \quad |\xi_я| \leq \xi_{я.МАХ}. \quad (5.15)$$

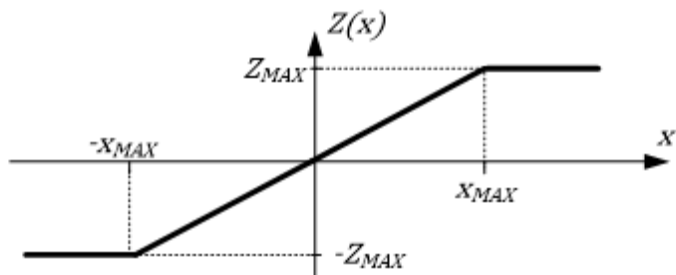


Рис. 5.6 – Нелинейная характеристика с насыщением

Ограничение управления в технически реализуемой системе всегда имеется, т.к. ограничено напряжение питания электродвигателей [92, 24, 149]. Примем это ограничение, равным номинальному напряжению питания ДПТ. Тогда, первое уравнение (5.15) примет вид:

$$\overline{u_я}(u_я) = \begin{cases} u_я, & |u_я| < u_{я.НОМ}; \\ u_{я.НОМ} \cdot \text{sign}(u_я), & |u_я| \geq u_{я.НОМ}. \end{cases} \quad (5.16)$$

С одной стороны, согласно регулировочной характеристике ДПТ, максимальному напряжению управления  $u_{я.МАХ}$  соответствует максимально возможная скорость якоря  $\omega_{я.МАХ}$ . Последняя равна скорости холостого хода ДПТ. С другой стороны, согласно механической характеристике, каждый ДПТ выбирается исходя из параметров номинального режима: номинальная развиваемая скорость  $\omega_{я.НОМ}$  при номинальном моменте нагрузки  $M_{н.НОМ}$ . Номинальная скорость  $\omega_{я.НОМ}$  соответствует номинальному напряжению управления  $u_{я.НОМ}$ . В рассматриваемой системе  $\omega_{я.НОМ}$  соответствует максимально допустимой скорости нагрузки. Поэтому, с некоторым допущением примем, что, ограничив управление величиной  $u_{я.НОМ}$ , можно ограничить установившуюся скорость величиной  $\omega_{я.НОМ}$  при номинальном моменте нагрузки  $M_{н.НОМ}$ . Это допущение будет тем точнее, чем более жесткую механическую характеристику имеет ДПТ. Таким образом, ограничению по скорости также будет соответствовать выражение (5.16).



## Математическая модель ДПТ с учетом ограничений

Помимо ограничений по управляющему напряжению в технической системе всегда существует ограничение по току якоря. В электромеханических системах, например, с программным управлением, ток пуска может превышать номинальный ток в два-три раза [124]. По завершению пуска и установления заданной скорости вращения вала электродвигателя, элементы пуска в электроприводе отключаются и электродвигатель начинает работать в номинальном режиме с номинальным током. Циклограмма работы электродвигателя в составе следящей системы значительно отличается от систем, в которых на длительное время устанавливается режим работы с заданной скоростью. Работа ДПТ следящей системы описывается следующим образом: режим работы длительный, с частыми пусками и реверсами, перемежающийся с частыми изменениями угловой скорости вращения [21, 110, 109]. Закон изменения задающего воздействия в следящих системах является неизвестным и, в некоторых системах, может быть описан статистически. Циклограмма работы электродвигателя таких систем может быть также описана статистически [20] при условии, что устройство управления по положению синтезировано. Так как электропривод часто находится в переходных режимах по скорости, эквивалентных пусковым, то в данной работе принимается, что ток в системе ограничен номинальным током, т.е.  $I_{Я,MAX} = I_{Я,НОМ}$ . Тогда условие ограничения тока якоря примет вид:

$$\bar{I}_Я(I_Я) = \begin{cases} I_Я, & |I_Я| < I_{Я,НОМ}; \\ I_{Я,НОМ} \cdot \text{sign}(I_Я), & |I_Я| \geq I_{Я,НОМ}. \end{cases} \quad (5.17)$$

В системах, в которых момент нагрузки  $M_Н$  равен нулю или пренебрежимо мал, как, например, в моментном электроприводе [92], то ограничением тока можно ограничить ускорение в системе. В этом случае, ток ограничения можно рассчитать по формуле:

$$I_{Я,MAX} = \frac{J_{\Sigma,пр.} \cdot \xi_{Я,MAX}}{C_M}. \quad (5.18)$$

Однако в общем случае, а также в рассматриваемой системе, как следует из первого выражения системы (5.1), ускорение определяется разностью вращающего момента ДПТ и момента нагрузки, не равного нулю, т.е. динамическим моментом  $M_{дин.} = M_д - M_Н$ . Поэтому, выражение для определения максимального ускорения с учетом ограничений на максимальный динамический момент имеет вид:

$$\xi_{Я,MAX} = \frac{M_{дин,MAX}}{J_{\Sigma,пр.}}. \quad (5.19)$$

Тогда условие ограничения ускорения якоря примет вид:

$$\bar{\xi}_Я(\xi_Я) = \begin{cases} \xi_Я, & |\xi_Я| < \xi_{Я,MAX}; \\ \xi_{Я,MAX} \cdot \text{sign}(\xi_Я), & |\xi_Я| \geq \xi_{Я,MAX}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Таким образом, выражения (5.16), (5.17), (5.20) определяют места установки нелинейности с насыщением в линейной модели ДПТ. Структурная схема заданной части следящей системы с учетом ограничений по управлению, скорости, ускорению и току, т.е. с ограничением по  $(\bar{u}, \bar{I}, \bar{\omega}, \bar{\xi})$ , представлена на рис. 5.7.

## Математическая модель ДПТ с учетом ограничений

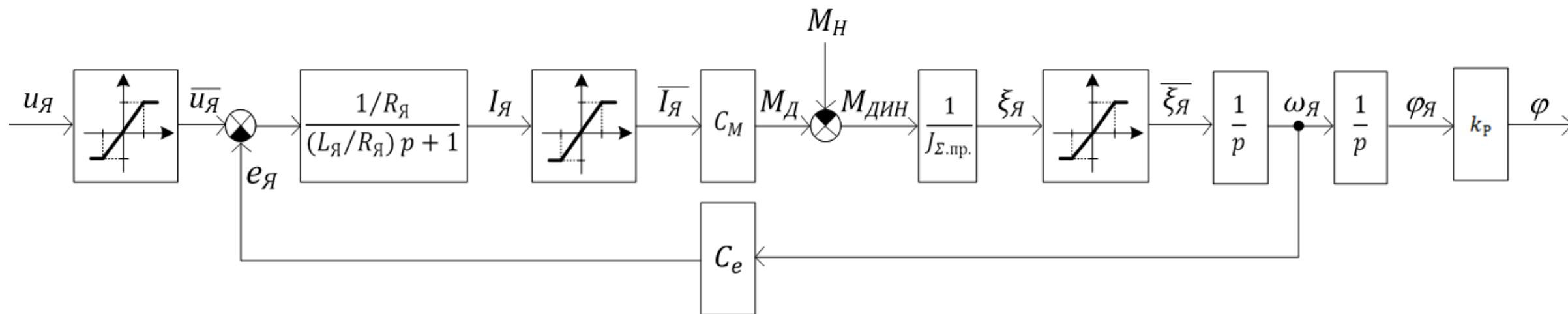
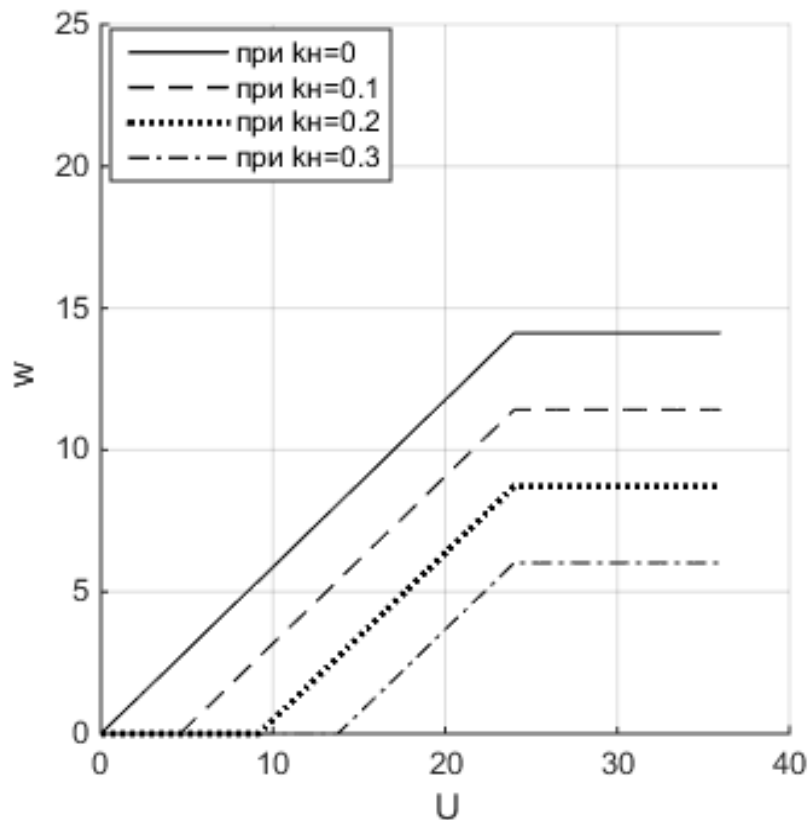


Рис. 5.7 – Структурная схема ДПТ с ограничением по управлению, скорости, току, ускорению

**«ПРОТИВО-ЭДС» появляется и нарастает при увеличении скорости вращения якоря двигателя.**

**«ПРОТИВО-ЭДС» уменьшает ток якоря двигателя.**

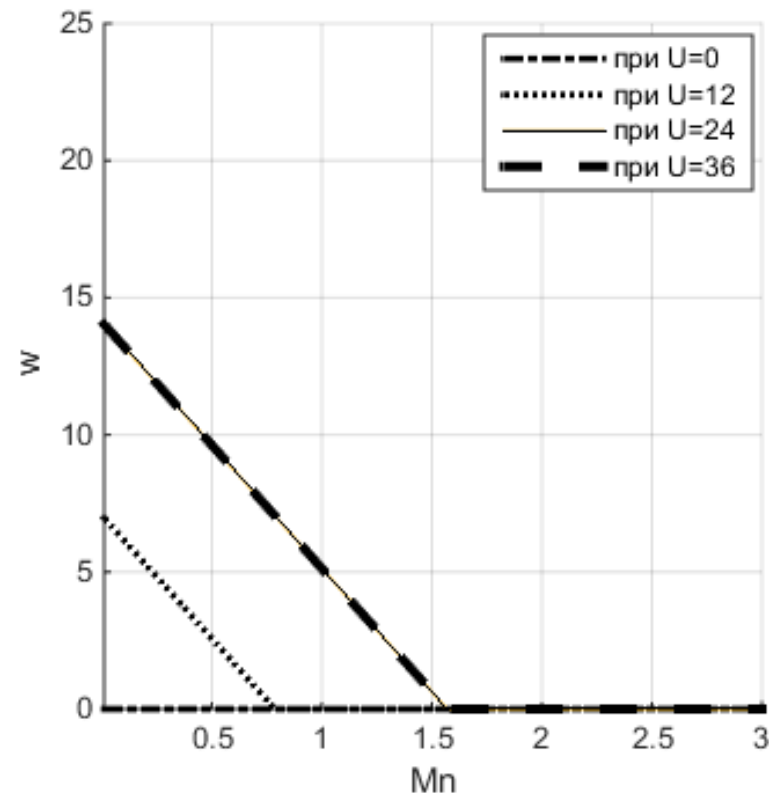
## Математическая модель ДПТ. Регулировочная и механическая характеристики ДПТ.



Регулировочная характеристика  
ДПТ с ограничениями

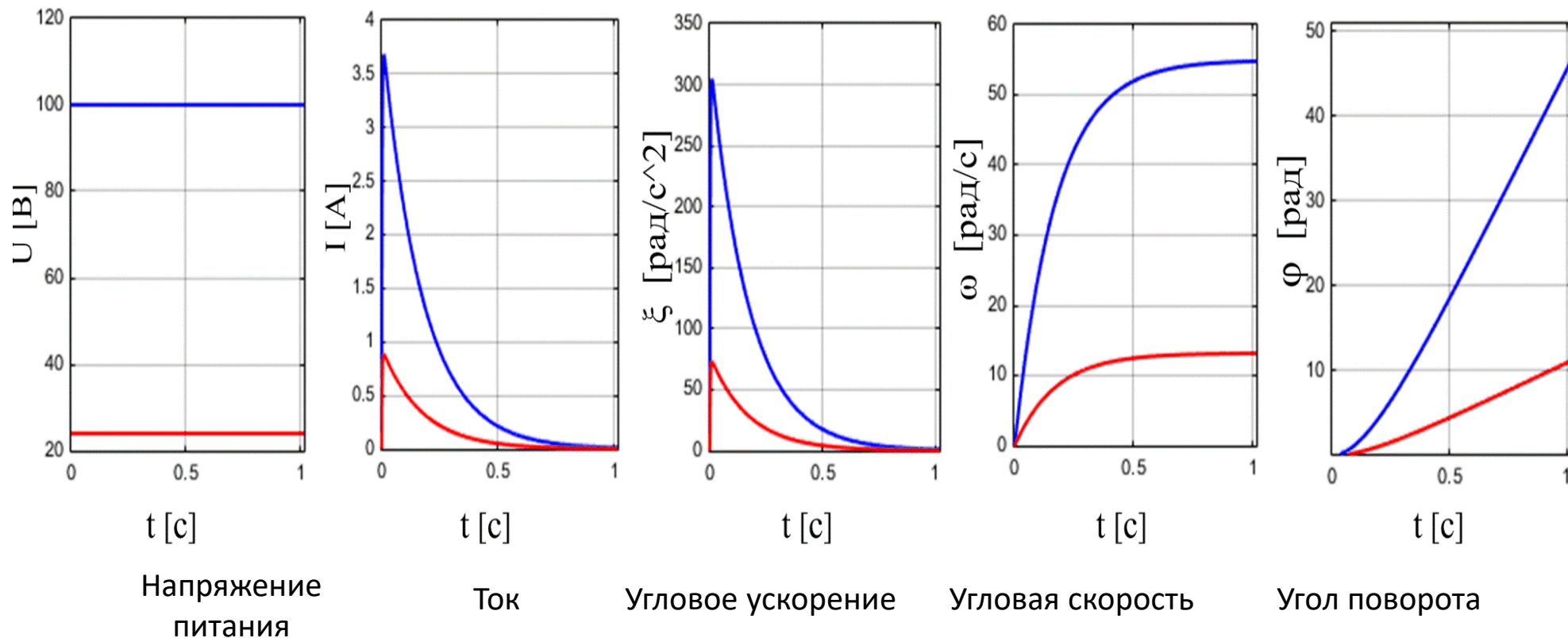
$$U_{max} = 24В$$

$$k_n = \frac{M_H(t)}{M_{Dmax}}$$



Механическая характеристика  
ДПТ с ограничениями

## Математическая модель ДПТ. Результаты моделирования в Matlab/Simulink.



**Графики временных процессов при питании  
 $U = 100\text{В}$  и при ограничении  $U = 24\text{В}$ .**

## Математическая модель ДПТ с учетом ограничений ПО УГЛУ

Как указывалось выше (см. п. 5.1) в реальной системе ограничение по углу обеспечивается установкой конечных выключателей на границах рабочего диапазона. С учетом описанного поведения системы, в модели необходимо выделить две ветви управления, соответствующие положительному и отрицательному направлению вращения вала ИЭП. Тогда, аналитические выражения нелинейности «ограничение по углу» имеют вид:

$$\bar{u}_\gamma(u) = \bar{u}_\gamma^+ + \bar{u}_\gamma^-; \quad (5.21)$$

где  $\bar{u}_+$ ,  $\bar{u}_-$  – напряжения управления ветви положительного и отрицательного направления вращения вала ИЭП соответственно, определяемые выражениями:

$$\bar{u}_\gamma^+(\varphi) = \begin{cases} u_\gamma^+, & 0 \leq \varphi < \varphi_{\max}; \\ 0, & \varphi \geq \varphi_{\max}; \end{cases} \quad (5.22)$$

и

$$\bar{u}_\gamma^-(\varphi) = \begin{cases} u_\gamma^-, & -\varphi_{\max} \leq \varphi < 0; \\ 0, & \varphi \leq -\varphi_{\max}, \end{cases} \quad (5.23)$$

где  $u_\gamma^+$  и  $u_\gamma^-$  – ограниченные напряжения управления ветви положительного и отрицательного направления вращения вала ИЭП соответственно, определяемые выражениями:

$$u_\gamma^+(u_\gamma) = \begin{cases} u_\gamma, & 0 \leq u_\gamma < u_{\gamma.\text{ном}}; \\ u_{\gamma.\text{ном}}, & u_\gamma \geq u_{\gamma.\text{ном}}, \end{cases} \quad (5.24)$$

и

$$u_\gamma^-(u_\gamma) = \begin{cases} u_\gamma, & -u_{\gamma.\text{ном}} \leq u_\gamma < 0; \\ -u_{\gamma.\text{ном}}, & u_\gamma \leq -u_{\gamma.\text{ном}}. \end{cases} \quad (5.25)$$

Отметим, что выражения (5.24) и (5.25) описывают однополярное ограничение, а выражение (5.16) – двуполярное. Выражения (5.22) и (5.23) в модели ДПТ с ограничениями можно реализовать управляемыми ключами.



## Математическая модель ДПТ с учетом ограничений ПО УГЛУ

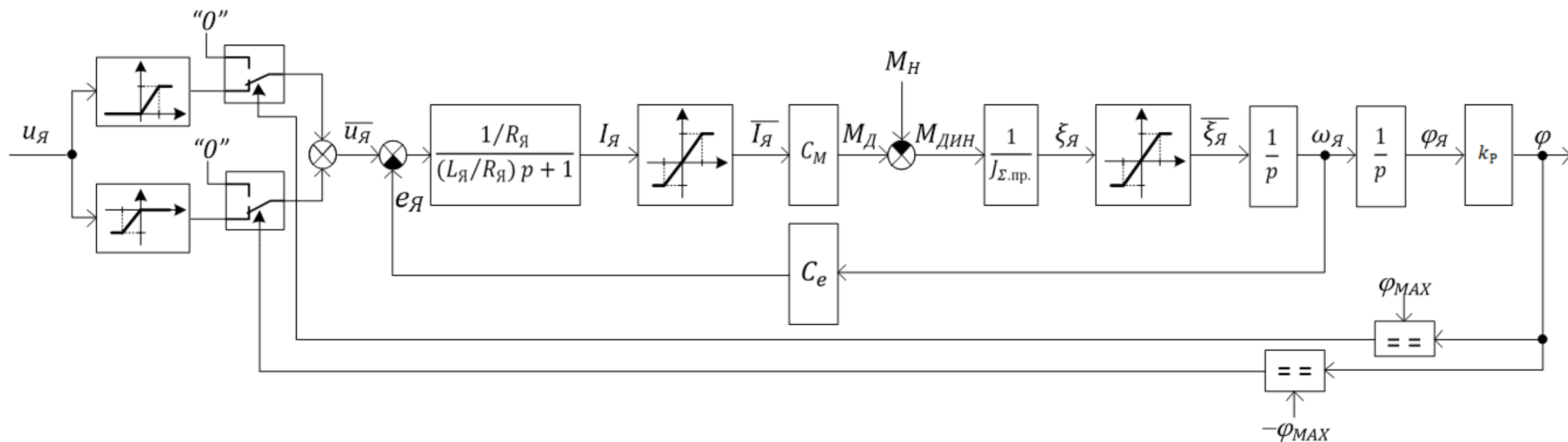
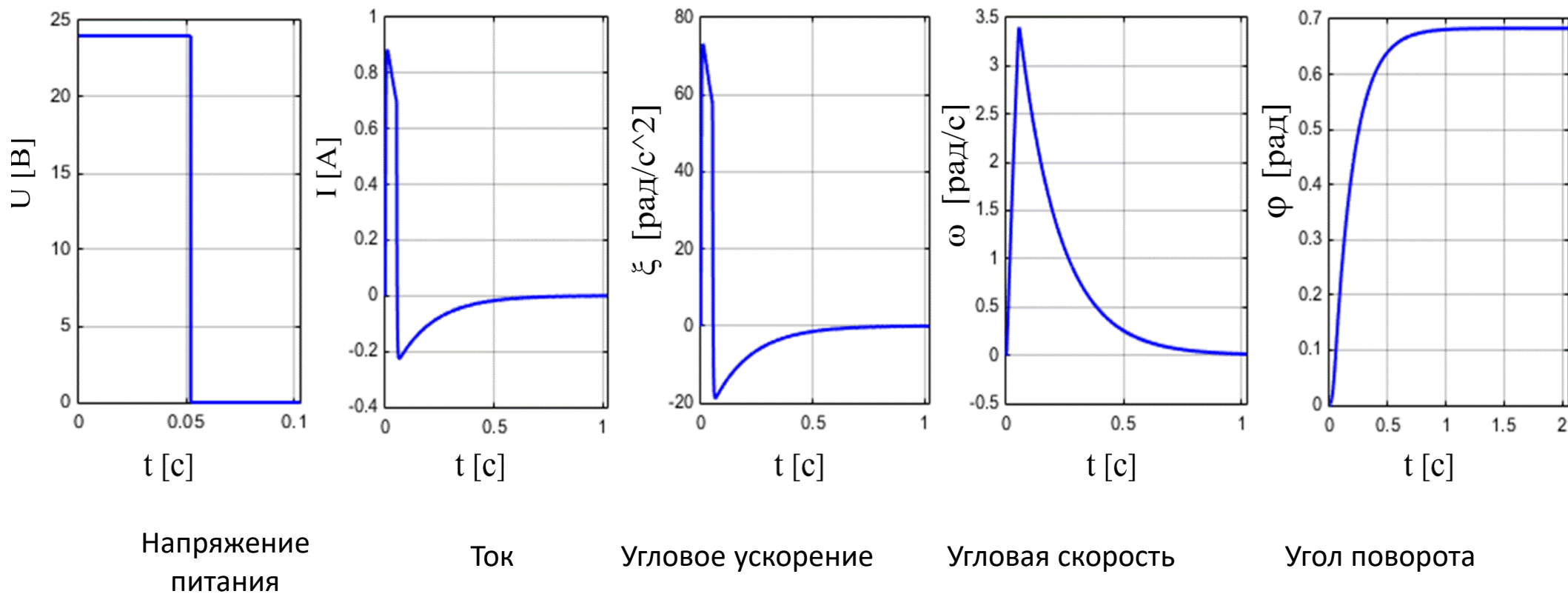


Рис. 5.8 – Структурная схема ДПТ с ограничением по управлению, скорости, току, ускорению, углу

## Математическая модель ДПТ. Результаты моделирования в Matlab/Simulink.



**Графики временных процессов при ограничениях  
 $U = 24\text{В}$  и  $\phi = \pm 1^\circ$ .**

## Математическая модель заданной части следящей системы. Модель редуктора.

В работе рассматривается модель исполнительного электропривода, в состав которого входит редуктор. Пренебрегая нелинейностями, связанными с люфтом и сухим трением, можно считать редуктор линейным безынерционным звеном с передаточной функцией [7, 128, 64]

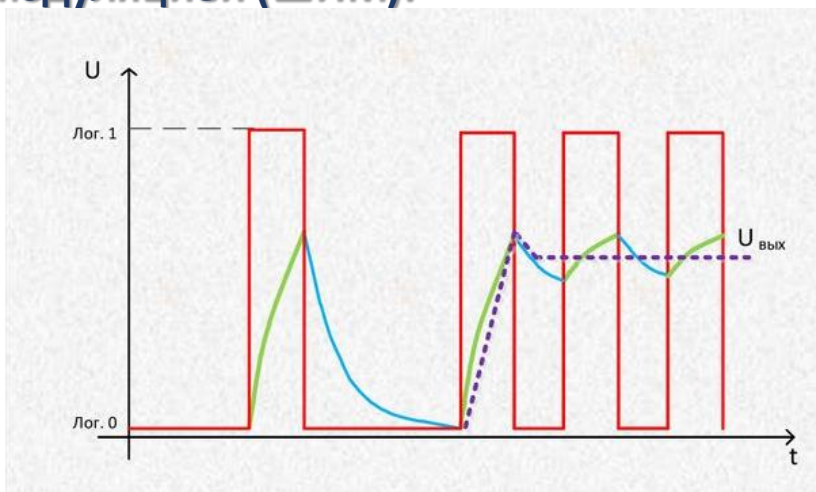
$$W_P(p) = k_P = \frac{1}{i_P}, \quad (5.9)$$

где  $i_P$  – передаточное число редуктора электропривода, являющееся паспортным параметром.

При этом уравнение «вход-выход» редуктора имеет вид:

$$\varphi(t) = k_P \cdot \varphi_{Я}(t), \quad (5.10)$$

## Математическая модель заданной части следящей системы. Модель усилителя широтно-импульсной модуляцией (ШИМ).



Используется для формирования постоянного уровня сигнала  $U_{\text{вых}}$  в диапазоне от 0 до уровня лог.1

Основные параметры

- частота сигнала  $f$  (период  $T$ )
- Сквозность  $Q$
- $\tau$  – постоянная времени

Чем выше  $f$ , тем точнее выходной сигнал

### Передаточная функция ШИМ-усилителя.

$$W_y(p) = \frac{k_y}{T_y p + 1} \quad \text{Инерционный усилитель}$$

$k_y$  – коэффициент передачи усилителя;

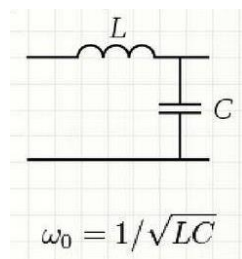
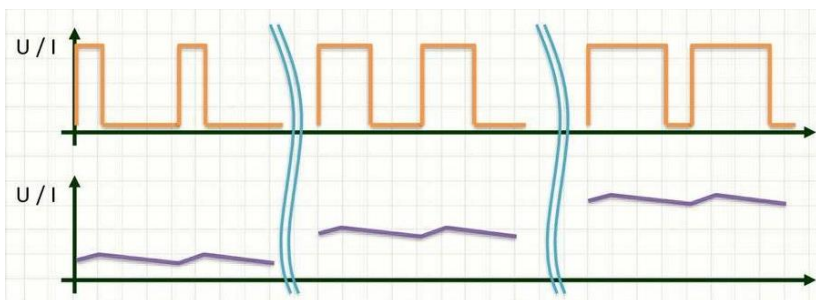
$T_y = 1/f_{\text{шим}}$  – постоянная времени усилителя;

$f_{\text{шим}}$  – частота работы ШИМ-усилителя;

$f_{\text{шим}} > 10 \dots 100 \text{ кГц}$

$T_y < 100 \dots 10 \text{ мкс} \ll \max\{T_{\text{э}}, T_{\text{м}}\}$

$$\tilde{W}_y(p) = k_y \quad \text{Безынерционный усилитель}$$



- Если при помощи ШИМ нужно сформировать ток или напряжение, ШИМ-сигнал подается на RC, а чаще – LC-фильтр, частота среза которого существенно ниже **несущей частоты ШИМ** ( $f = 1/T$ )

## Математическая модель заданной части следящей системы – структура исполнительного электропривода

### Линейная ПФ исполнительного электропривода

Структурная схема ИЭП рассматриваемой электромеханической СС приведена на рис. 5.5.

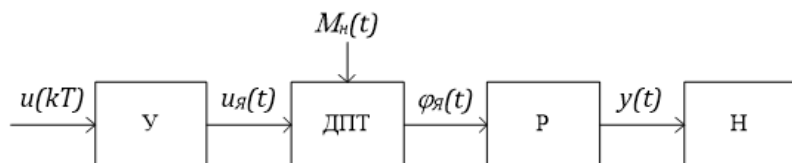


Рис. 5.5 – Структурная схема исполнительного электропривода мехатронной следящей системы

Переходя к обозначениям, примененных в предыдущих главах ( $\varphi(t) \rightarrow y(t)$ ,  $M_H(t) \rightarrow f$ ), получим ПФ ИЭП по управлению и воздействию соответственно:

$$W_{yu}(p) = \frac{u(p)}{y(p)} = \frac{k_y k_e k_p}{T_3 T_M p^3 + T_M p^2 + p}; \quad (5.11)$$

$$W_{yf}(p) = \frac{f(p)}{y(p)} = -\frac{k_e k_p}{\beta_{ДПТ}} \cdot \frac{(T_3 p + 1)}{T_3 T_M p^3 + T_M p^2 + p}. \quad (5.12)$$

При  $T_M > 4T_3$  ПФ (5.11) по управляющему воздействию может быть представлена в виде последовательно включенных интегратора и двух апериодических звеньев первого порядка с постоянными времени  $T_1$  и  $T_2$ :

$$W_{yu}(p) = \frac{u(p)}{y(p)} = \frac{k_y k_e k_p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p}, \quad (5.13)$$

где  $T_1 T_2 = T_3 T_M$  и  $T_1 + T_2 = T_M$ .

### Модель момента нагрузки

Момент нагрузки в выражении (5.1) зависит от угла поворота, угловой скорости вала электродвигателя, а также от времени в связи с изменением характера и величины нагрузки. Наличие той или иной составляющей момента нагрузки зависит от конкретного типа механической части следящих систем. В литературе чаще всего приводятся нелинейные выражения для момента нагрузки. Также нелинейный характер может носить зависимость динамического момента.

При анализе влияния возмущающего воздействия ограничимся рассмотрением только временных зависимостей момента нагрузки, т.е.  $M_H = M_H(t)$ , двух видов: типа «скачок» и линейной.

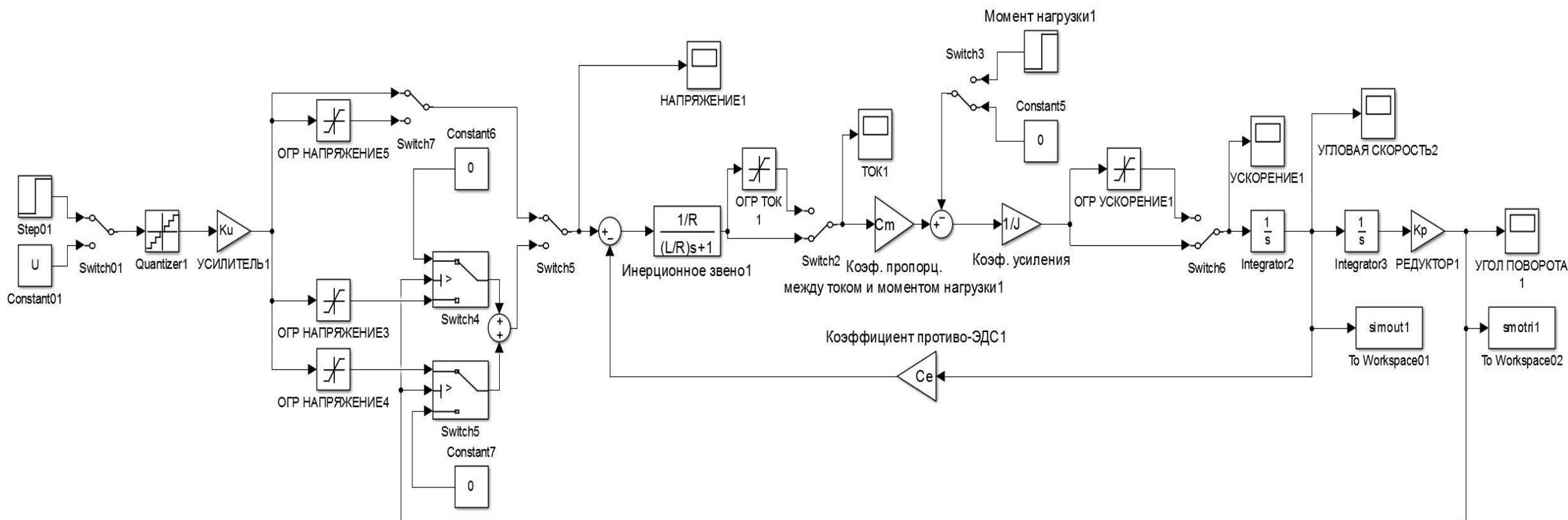
$$\begin{aligned} M_{1H}(t) &= M_0, \quad t \geq t_0 > t_p; \\ M_{2H}(t) &= M_0 + M_1 t, \quad t \geq t_0 > t_p, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $t_0$  – время начала действия возмущающего воздействия.

Зависимости (5.14) позволяют, в частности, определить порядок астатизма синтезированной системы по возмущающему воздействию.



## Компьютерная модель исполнительного электропривода с учетом ограничений в Matlab/Simulink (пример).



**Параметрическая модель Simulink. Параметры модели (численные значения параметров математической модели) задаются в отдельном m-file.**