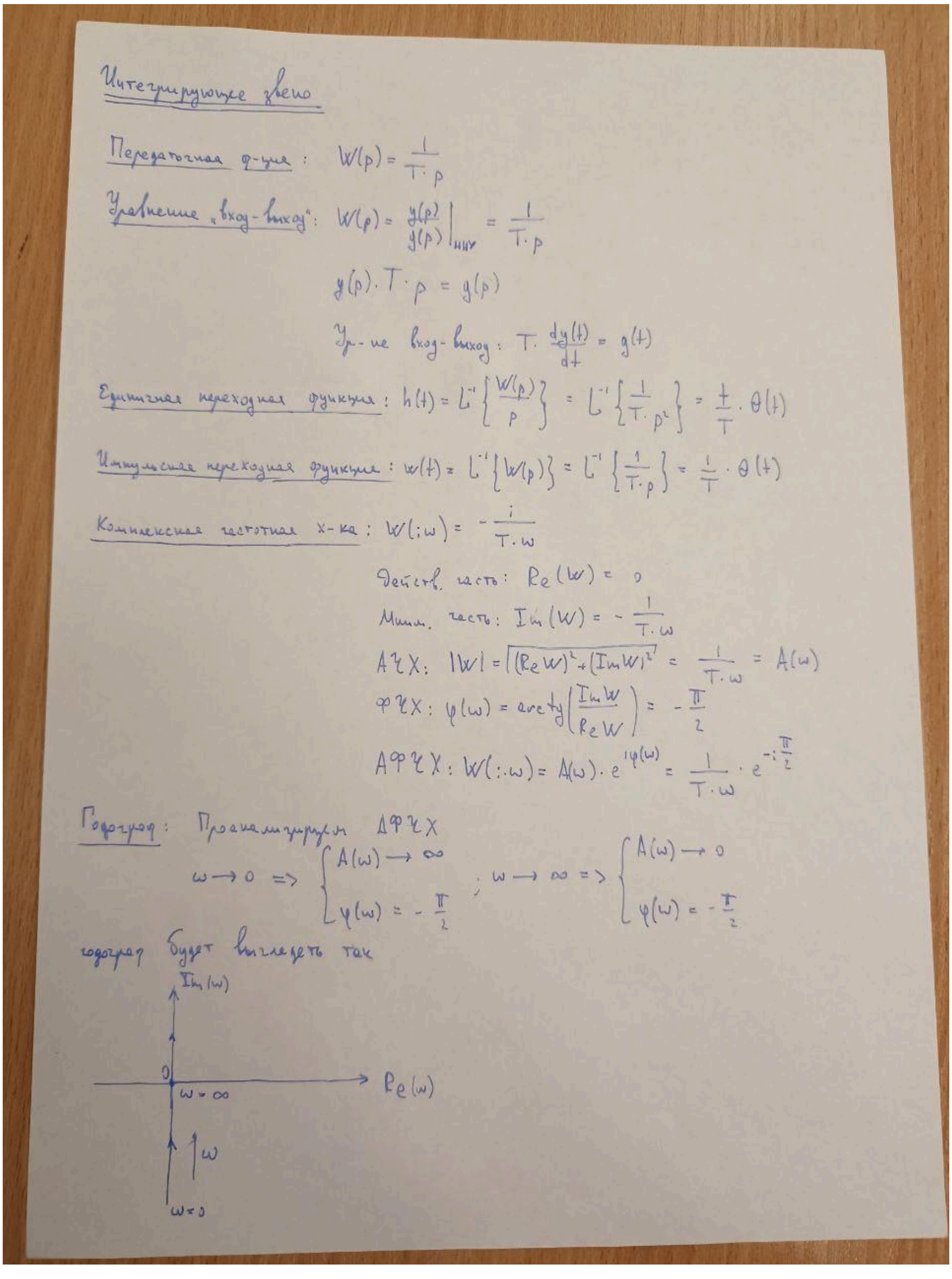
ДЗ №3.1. Определить временные и частотные характеристики типовых динамических звеньев аналитическим способом, а также с использованием Matlab.

<u>Интегрирующее звено</u>

Аналитическое решение



<u>Интегрирующее звено</u>

<u>Передаточная ф-ция</u>: $W(p) = \frac{1}{T \cdot p}$

<u>Уравнение „вход-выход"</u>: $W(p) = \frac{y(p)}{g(p)}\Big|_{ННУ} = \frac{1}{T \cdot p}$

$y(p) \cdot T \cdot p = g(p)$

Ур-ие вход-выход: $T \cdot \frac{dy(t)}{dt} = g(t)$

<u>Единичная переходная функция</u>: $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{T \cdot p^2}\right\} = \frac{t}{T} \cdot \theta(t)$

<u>Импульсная переходная функция</u>: $w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{T \cdot p}\right\} = \frac{1}{T} \cdot \theta(t)$

<u>Комплексная частотная х-ка</u>: $W(i\omega) = -\frac{i}{T \cdot \omega}$

Действ. часть: $Re(W) = 0$

Мним. часть: $Im(W) = -\frac{1}{T \cdot \omega}$

АЧХ: $|W| = \sqrt{(Re\,W)^2 + (Im\,W)^2} = \frac{1}{T \cdot \omega} = A(\omega)$

ФЧХ: $\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{Im\,W}{Re\,W}\right) = -\frac{\pi}{2}$

АФЧХ: $W(i\omega) = A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} = \frac{1}{T \cdot \omega} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

<u>Годограф</u>: Проанализируем АФЧХ

$\omega \to 0 \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) \to \infty \\ \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$; $\omega \to \infty \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) \to 0 \\ \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

годограф будет выглядеть так

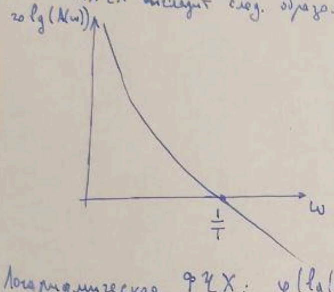
Логарифмическая АЧХ: $20 \cdot \lg\left(\frac{1}{T \cdot \omega}\right)$

$\omega \longrightarrow 0 : 20 \lg(A(\omega)) \longrightarrow \infty$

$\omega = \frac{1}{T} : 20 \lg(A(\omega)) = 0$

$\omega \longrightarrow \infty : 20 \lg(A(\omega)) \longrightarrow -\infty$

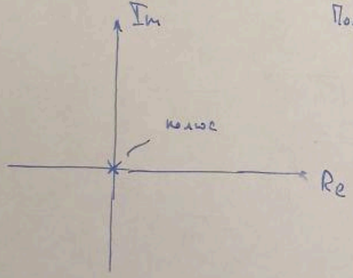
ЛАЧХ выглядит след. образом



Логарифмическая ФЧХ: $\varphi(\lg(\omega)) = -\frac{\pi}{2}$

Карта нулей и полюсов: Нули отсутствуют

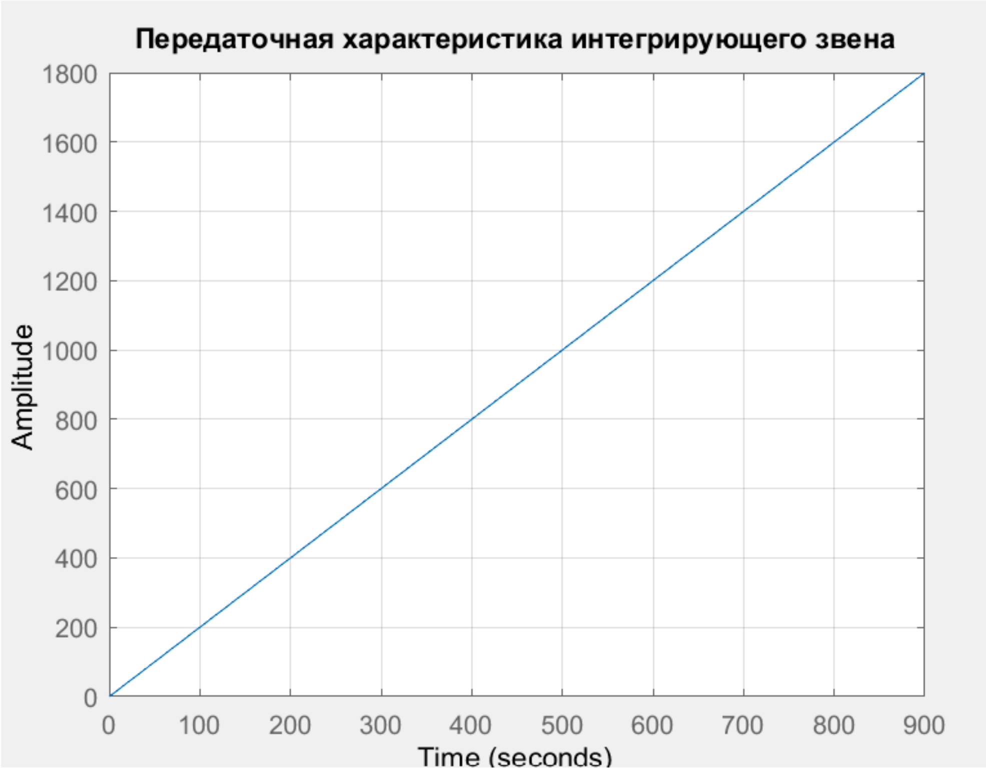
Полюс один – в нуле

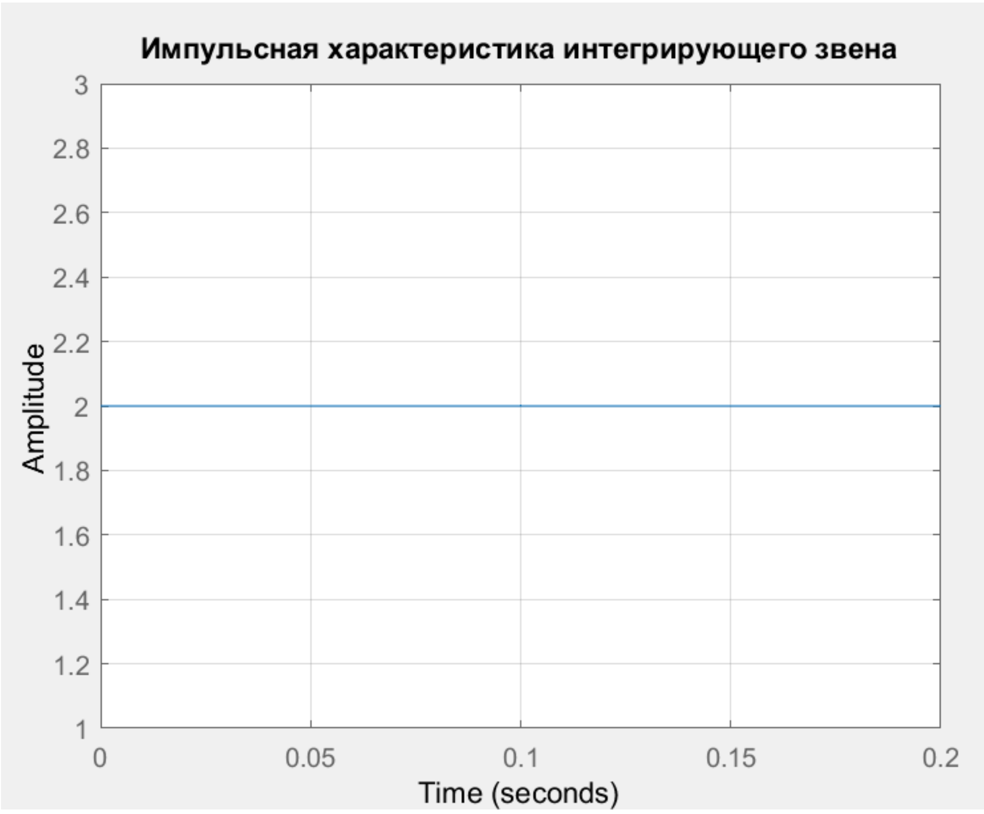


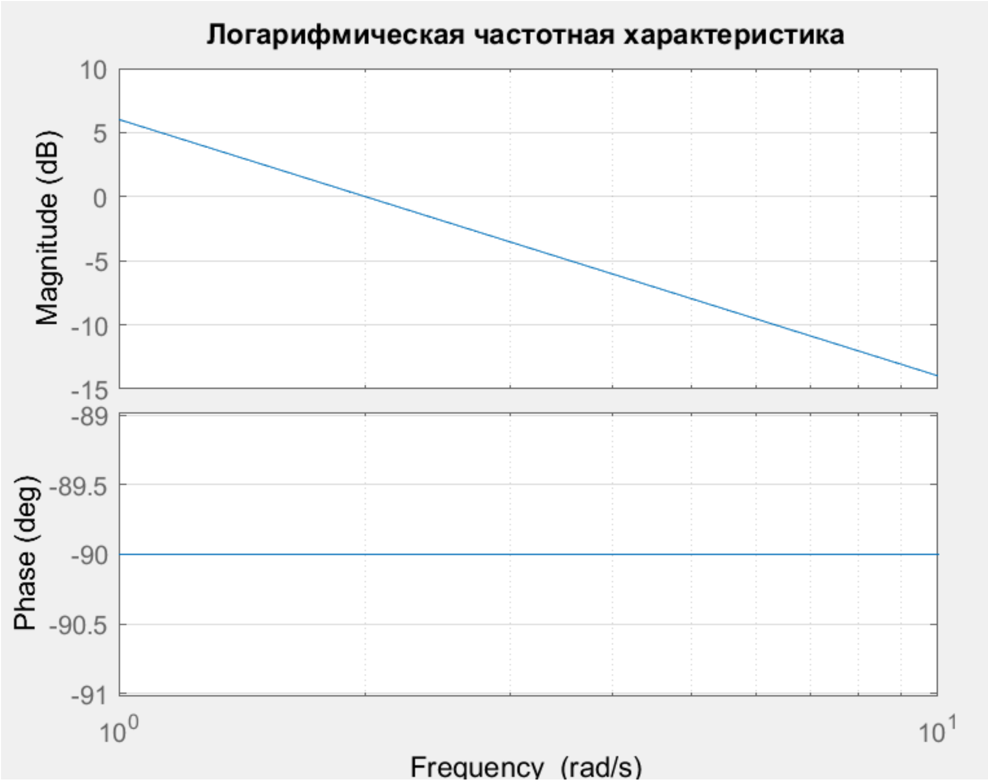
Код программы которая исследует интегрирующее звено

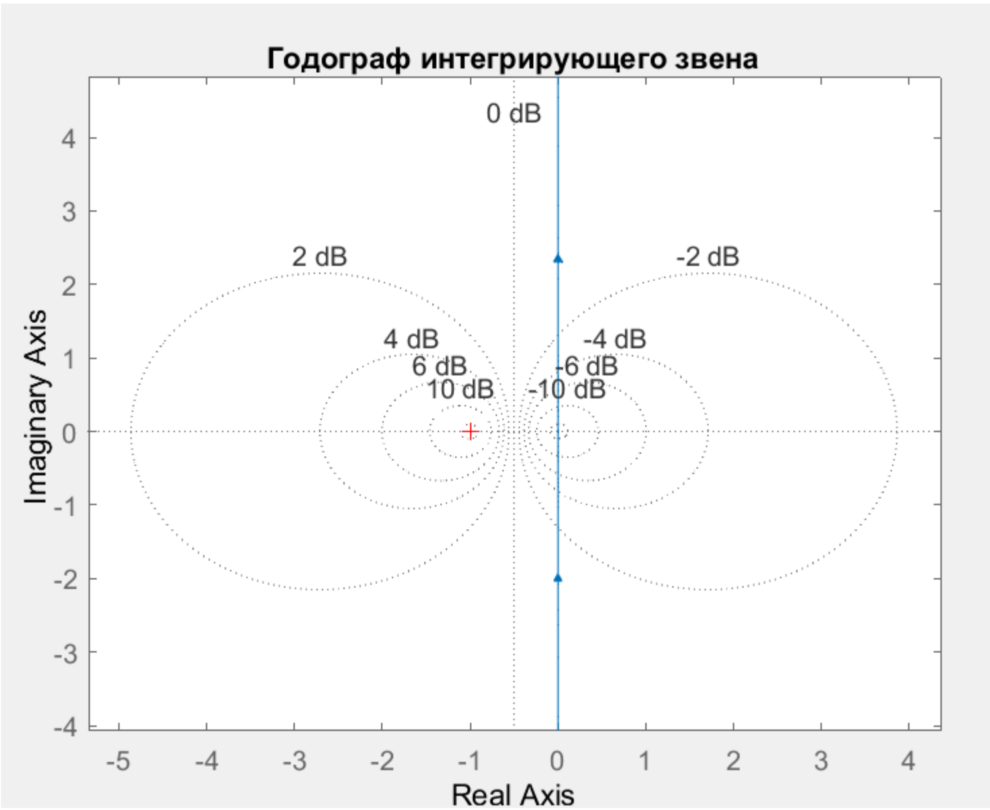
```
clear all;
close all;

integr = tf(1,[0.5 0]);
fig1 = figure();
step(integr);
title("Передаточная характеристика интегрирующего звена")
grid on
fig2 = figure();
impulse(integr);
title("Импульсная характеристика интегрирующего звена")
grid on
fig3 = figure();
bode(integr)
title("Логарифмическая частотная характеристика")
grid on
fig4 = figure;
nyquist(integr)
title("Годограф интегрирующего звена")
grid on
```

Графики


Передаточная характеристика интегрирующего звена
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
Amplitude
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
Time (seconds)


Импульсная характеристика интегрирующего звена
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
Amplitude
0
0.05
0.1
0.15
0.2
Time (seconds)


Логарифмическая частотная характеристика
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)


Годограф интегрирующего звена
Imaginary Axis
Real Axis
0 dB
2 dB
-2 dB
4 dB
-4 dB
6 dB
-6 dB
10 dB
-10 dB

Инерционное звено

Аналитическое решение

Инерционное звено

Передаточная ф-ция: $W(p) = \dfrac{K}{T \cdot p + 1}$

Уравнение „вход-выход": $W(p) = \dfrac{y(p)}{g(p)}\Big|_{ННУ} = \dfrac{K}{T \cdot p + 1}$ $\quad y(p) \cdot T \cdot p + y(p) = K \cdot g(p)$

Ур-ие „вход-выход": $T\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kg(t)$

Единичная переходная функция: $h(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{K}{T \cdot p \cdot (p + \frac{1}{T})}\right\} = \dfrac{K}{T}(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \theta(t$

Импульсная переходная функция: $w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{K}{T \cdot p + 1}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{K}{T \cdot (p + \frac{1}{T})}\right\} =$

$= \dfrac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \partial(t)$

Комплексная частотная х-ка: $W(i \cdot \omega) = \dfrac{K}{T \cdot i \cdot \omega + 1} = \dfrac{K(1 - iT\omega)}{(1 + iT\omega)(1 - iT\omega)} = \dfrac{K(1 - iT\omega)}{1 + T^2\omega^2}$

Действ. часть: $Re(W) = \dfrac{K}{1 + T^2\omega^2}$

Мнимая часть: $Im(W) = -\dfrac{T\omega K}{1 + T^2\omega^2}$

АЧХ: $A(\omega) = |W| = \sqrt{(Re W)^2 + (Im W)^2} =$

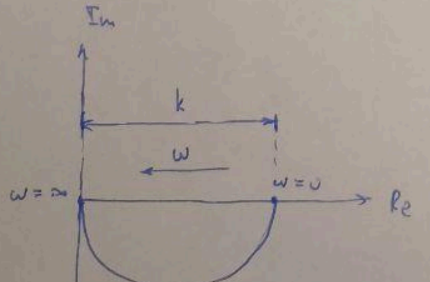
$= \dfrac{k^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} + \dfrac{k^2 T^2 \omega^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} = \dfrac{K}{1 + T^2\omega^2}\sqrt{1 + T^2\omega^2} = \dfrac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$

ФЧХ: $\varphi(\omega) = arctg\left(\dfrac{Im(W)}{Re(W)}\right) = arctg(-T\omega)$

АФЧХ: $W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = \dfrac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \cdot e^{i\,arctg(-T\omega)}$

Годограф: Проанализируем АФЧХ

$\omega \to 0 \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) \to K \\ \varphi(\omega) \to 0 \end{cases}; \quad \omega \to \infty \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) \to 0 \\ \varphi(\omega) \to \frac{\pi}{2} \end{cases}$

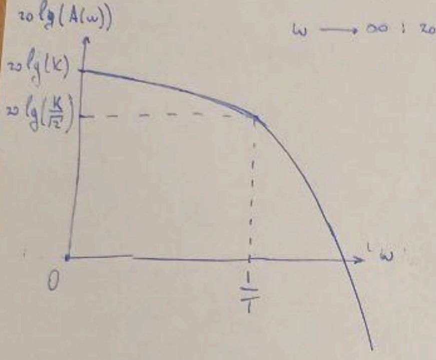


Логарифмическая АЧХ: $20 \cdot \lg\left(\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\right)$

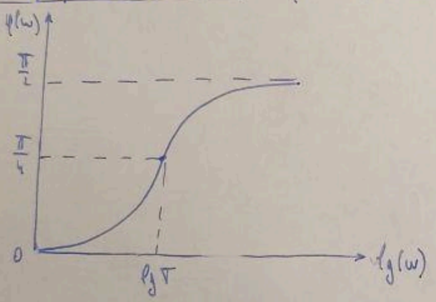
$\omega \longrightarrow 0: 20\lg(A(\omega)) \longrightarrow 20\lg(K)$

$\omega \longrightarrow \frac{1}{T}: 20\lg(A(\omega)) \longrightarrow 20\lg\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right)$

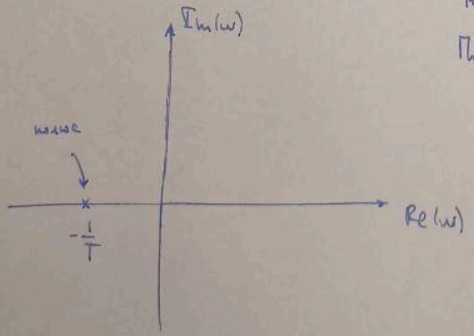
$\omega \longrightarrow \infty: 20\lg(A(\omega)) \longrightarrow -\infty$



Логарифмическая ФЧХ: $\varphi(\ln(\omega)) = \operatorname{arctg}(-T\omega)$



Карта нулей и полюсов



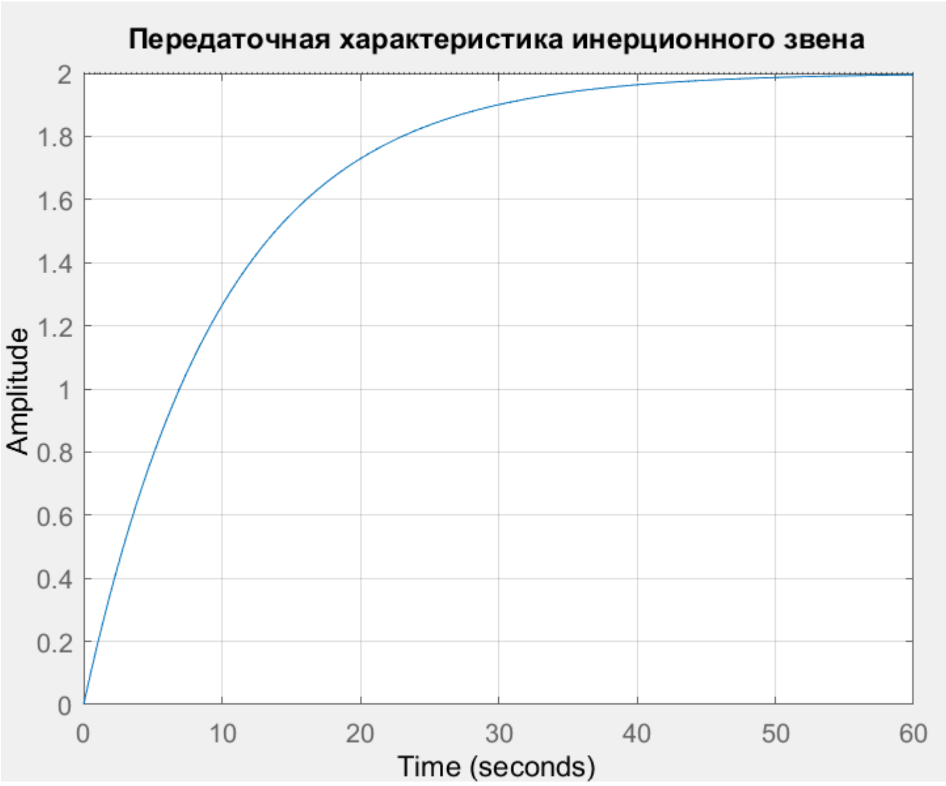
Нули отсутствуют

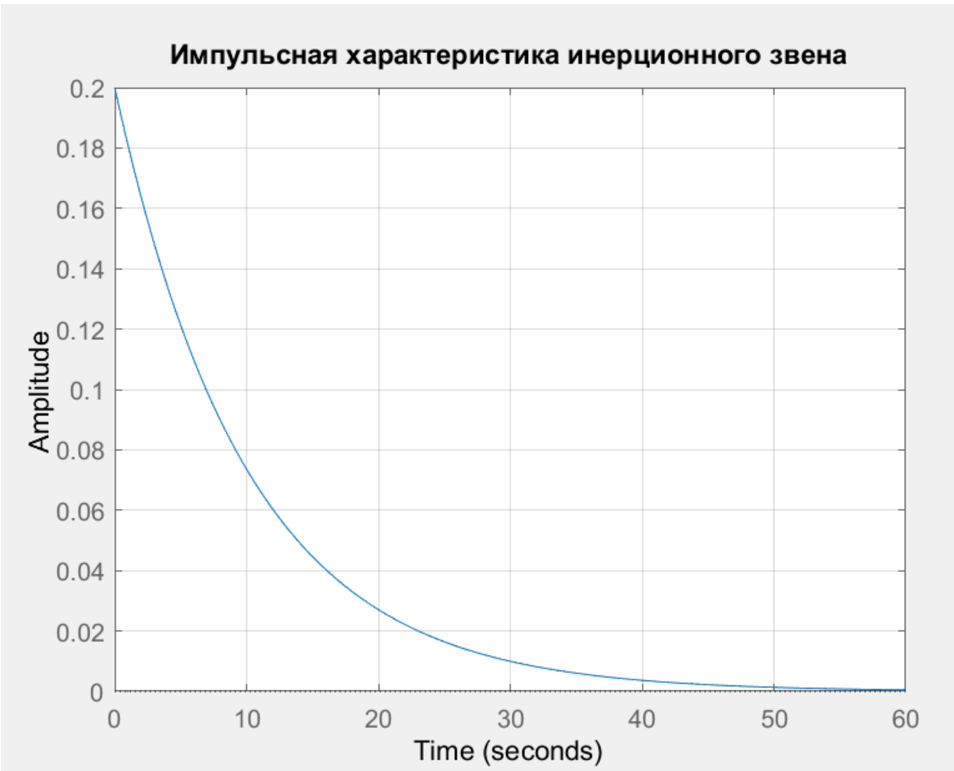
Полюс: $-\frac{1}{T}$

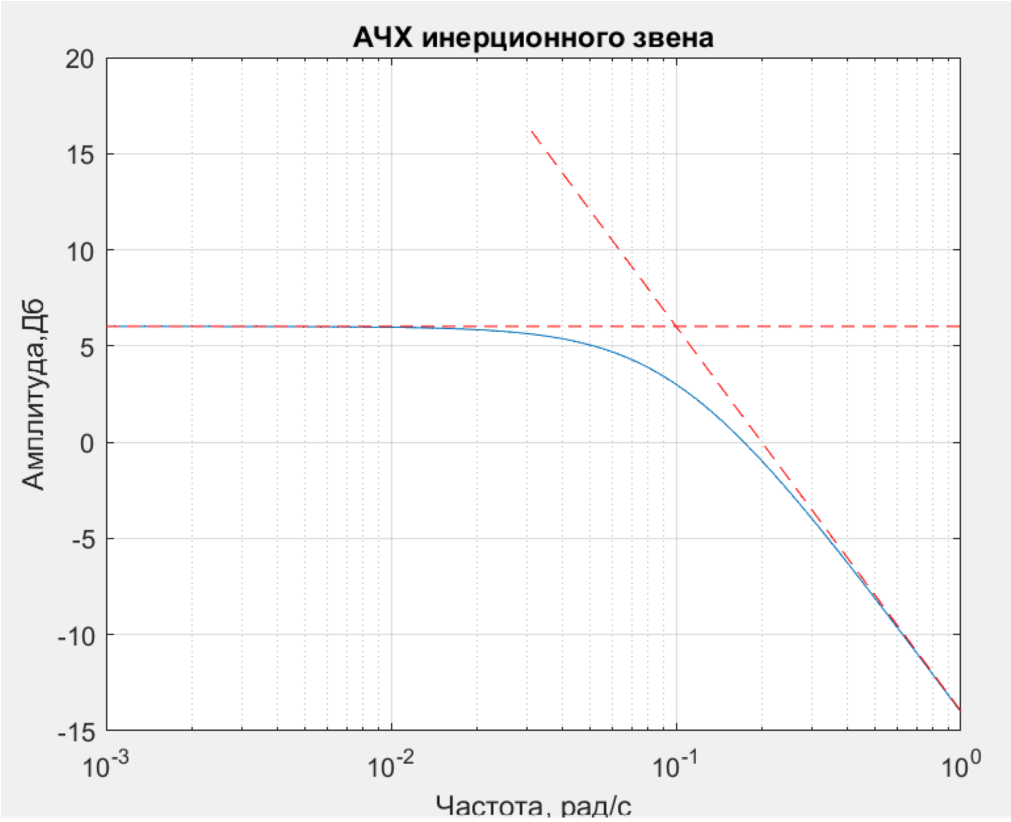
Код программы которая исследует инерционное звено

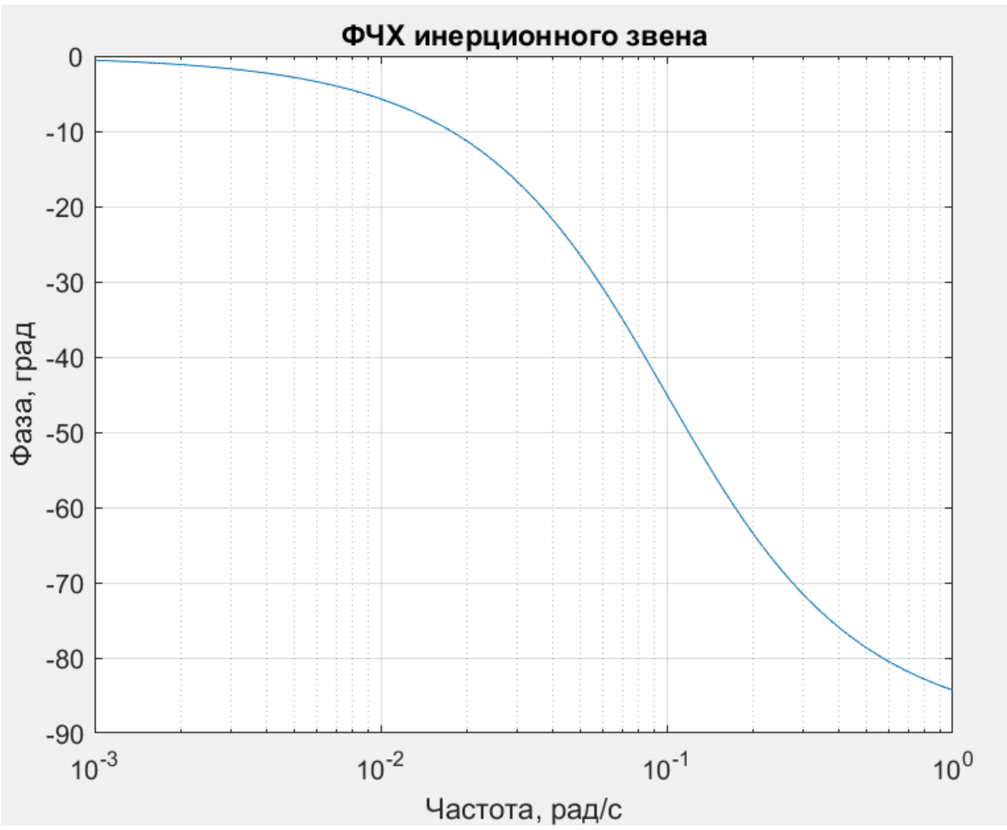
```
clear all;
close all;

K = 2;
T = 10;
inert = tf(K,[T 1]);
fig1 = figure();
step(inert);
title("Передаточная характеристика инерционного звена")
grid on
fig2 = figure();
impulse(inert);
title("Импульсная характеристика инерционного звена")
grid on
[m,wout]=freqs(K,[T 1]);
wout1 = wout(round(length(wout))/2:end);
figure
semilogx(wout,mag2db(abs(m)))
title("АЧХ инерционного звена")
hold on
plot([min(wout) max(wout)],[20*log10(K) 20*log10(K)],'r--');
hold on
semilogx(wout1,20*log10(K)-20*log10(T*wout1),"--r");
ylabel("Амплитуда,Дб")
xlabel("Частота, рад/с")
grid on
figure
semilogx(wout,rad2deg(angle(m)))
title("ФЧХ инерционного звена")
ylabel("Фаза, град")
xlabel("Частота, рад/с")
grid on
fig3 = figure;
nyquist(inert)
title("Годограф инерционного звена")
grid on
```

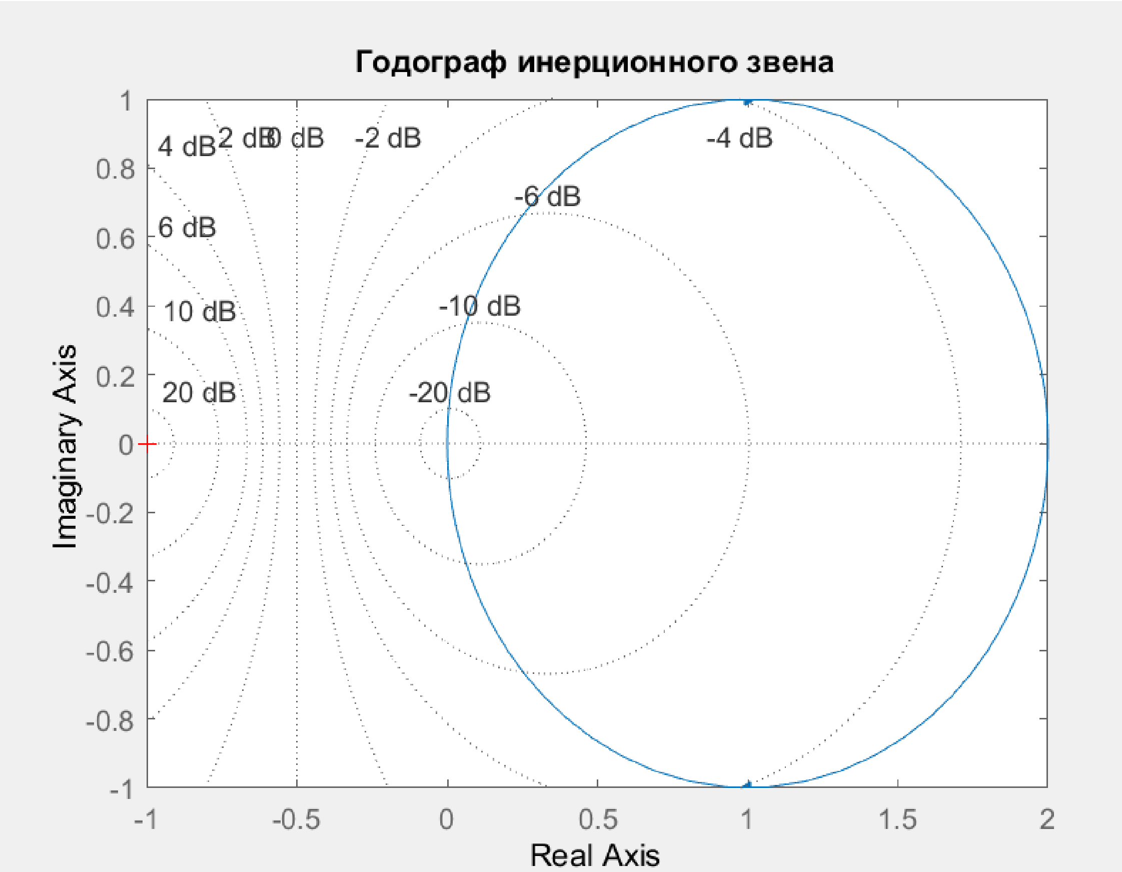
Графики


Передаточная характеристика инерционного звена
Amplitude
Time (seconds)
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60


Импульсная характеристика инерционного звена
Amplitude
Time (seconds)
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
10
20
30
40
50
60


АЧХ инерционного звена
Амплитуда,Дб
Частота, рад/с
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}

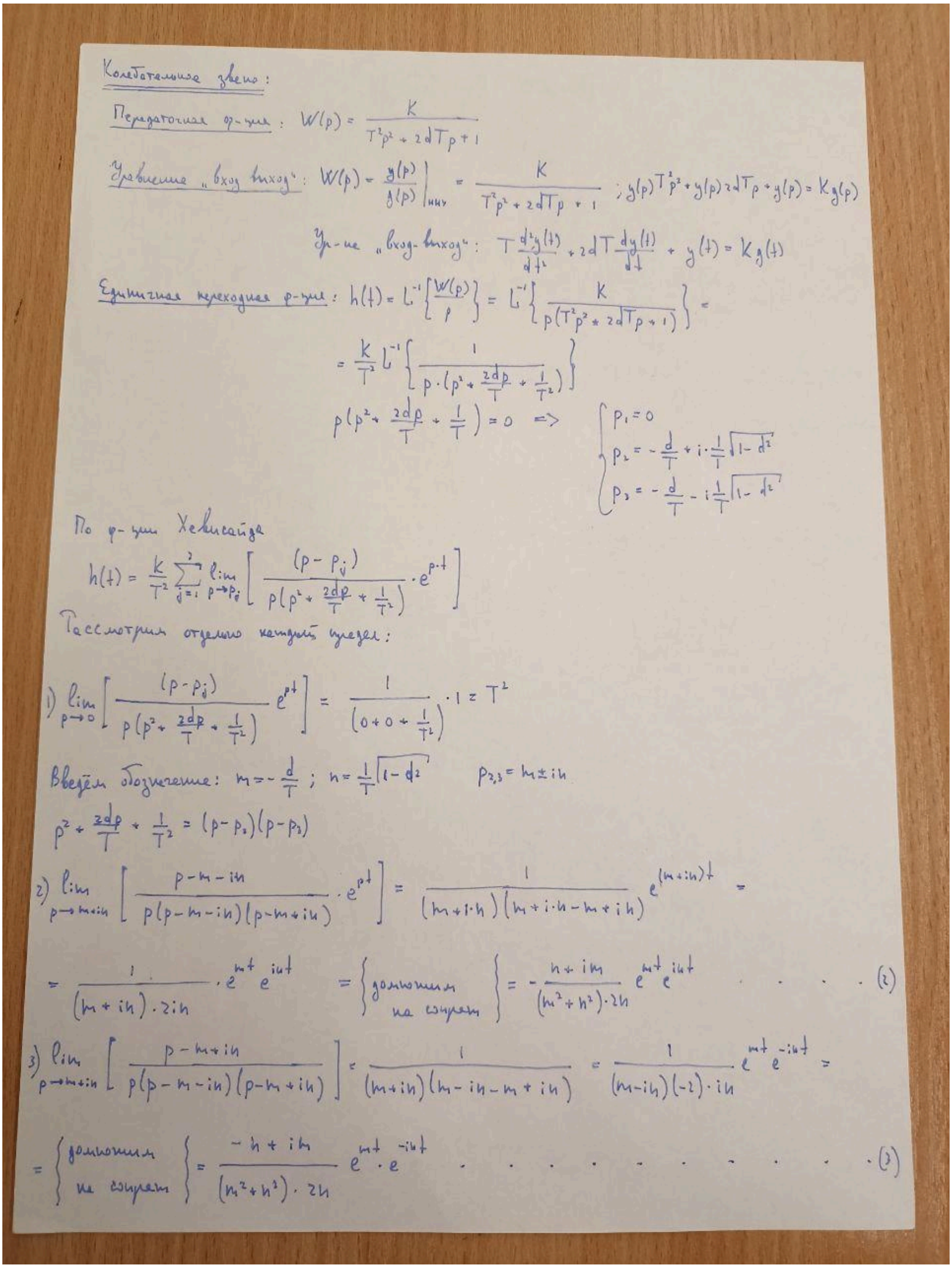

ФЧХ инерционного звена
Фаза, град
Частота, рад/с
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}



Годограф инерционного звена
Imaginary Axis
Real Axis
4 dB
2 dB
0 dB
-2 dB
-4 dB
-6 dB
6 dB
10 dB
-10 dB
20 dB
-20 dB
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Колебательное звено

Аналитическое решение



Колебательное звено:

Передаточная ф-ция: $W(p) = \dfrac{K}{T^2p^2 + 2dTp + 1}$

Уравнение „вход выход“: $W(p) = \dfrac{y(p)}{g(p)}\Big|_{\text{нну}} = \dfrac{K}{T^2p^2 + 2dTp + 1}$; $y(p)T^2p^2 + y(p)2dTp + y(p) = Kg(p)$

Ур-ие „вход-выход“: $T\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2dT\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kg(t)$

Единичная переходная ф-ция: $h(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{K}{p(T^2p^2 + 2dTp + 1)}\right\} =$

$$= \frac{K}{T^2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p\cdot(p^2 + \frac{2dp}{T} + \frac{1}{T^2})}\right\}$$

$$p\left(p^2 + \frac{2dp}{T} + \frac{1}{T}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -\frac{d}{T} + i\cdot\frac{1}{T}\sqrt{1-d^2} \\ p_3 = -\frac{d}{T} - i\frac{1}{T}\sqrt{1-d^2} \end{cases}$$

По ф-ции Хевисайда

$$h(t) = \frac{K}{T^2}\sum_{j=1}^{3}\lim_{p\to p_j}\left[\frac{(p-p_j)}{p(p^2 + \frac{2dp}{T} + \frac{1}{T^2})}\cdot e^{p\cdot t}\right]$$

Рассмотрим отдельно каждый предел:

$$1)\ \lim_{p\to 0}\left[\frac{(p-p_j)}{p(p^2 + \frac{2dp}{T} + \frac{1}{T^2})}e^{pt}\right] = \frac{1}{(0 + 0 + \frac{1}{T^2})}\cdot 1 = T^2$$

Введём обозначение: $m = -\dfrac{d}{T}$; $n = \dfrac{1}{T}\sqrt{1-d^2}$ $\quad p_{2,3} = m \pm in$

$$p^2 + \frac{2dp}{T} + \frac{1}{T^2} = (p-p_2)(p-p_3)$$

$$2)\ \lim_{p\to m+in}\left[\frac{p-m-in}{p(p-m-in)(p-m+in)}\cdot e^{pt}\right] = \frac{1}{(m+i\cdot n)(m+i\cdot n-m+in)}e^{(m+in)t} =$$

$$= \frac{1}{(m+in)\cdot 2in}\cdot e^{mt}e^{int} = \left\{\begin{matrix}\text{домножим} \\ \text{на сопрят}\end{matrix}\right\} = -\frac{n+im}{(m^2+n^2)\cdot 2n}e^{mt}e^{int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$3)\ \lim_{p\to m+in}\left[\frac{p-m+in}{p(p-m-in)(p-m+in)}\right] = \frac{1}{(m+in)(m-in-m+in)} = \frac{1}{(m-in)(-2)\cdot in}e^{mt}e^{-int} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{домножим} \\ \text{на сопрят}\end{matrix}\right\} = \frac{-n+im}{(m^2+n^2)\cdot 2n}e^{mt}\cdot e^{-int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$(2)+(3):\ \sum_{j=2}^{3} = \frac{e^{mt}}{2n(m^2+n^2)}\left[(n+im)e^{int}+(n-im)e^{-int}\right] =$$

$$= -\frac{e^{mt}}{2n(m^2+n^2)}\left[n\cdot e^{int}+ime^{int}+ne^{-int}-ime^{-int}\right] =$$

$$= -\frac{e^{mt}}{2n(m^2+n^2)}\left[n\underbrace{(e^{int}+e^{-int})}_{2\cos(nt)}+im\underbrace{(e^{int}-e^{-int})}_{2\sin(nt)}\right] = -\frac{e^{mt}}{m^2+n^2}\left[\cos(nt)-\frac{m}{n}\sin(nt)\right]$$

$$m^2+n^2=\frac{d^2}{T^2}+\frac{1-d^2}{T^2}=\frac{d^2}{T^2} \qquad \frac{m}{n}=-\frac{d}{T}\cdot\frac{T}{\sqrt{1-d^2}}$$

$$h(t)=\frac{K}{T^2}\left[T^2-T^2e^{mt}\left(\cos(nt)+\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\sin(nt)\right)\right]=K\left[1-e^{-\frac{d}{T}t}\left(\cos\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}\cdot t+\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\sin\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t\right)\right]$$

$$\omega_c=\frac{1}{T}\sqrt{1-d^2}$$

$$h(t)=K\left[1-e^{-\frac{d}{T}t}\left(\cos(\omega_c t)+\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\sin(\omega_c t)\right)\right]$$

<u>Импульсная переходная ф-ция:</u> $w(t)=L^{-1}\{W(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{K}{T^2p^2+2dTp+1}\right\}=$

$$=\frac{K}{T^2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+\frac{2dp}{T}+\frac{1}{T^2}}\right\}$$

$$p^2+\frac{2dp}{T}+\frac{1}{T^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} p_2=-\frac{d}{T}+i\frac{1}{T}\sqrt{1-d^2} \\ p_1=-\frac{d}{T}-i\frac{1}{T}\sqrt{1-d^2} \end{cases}$$

Аналогично пред. подпункту ищем по ф-ле Хевисайта. Отсутствует корень 0, поэтому в итоговой ф-ле без 1 в начале в скобках

$$w(t)=\frac{K}{T^2}\sum_{i=1}^{2}\lim_{p\to p_i}\left[\frac{(p-p_i)}{p^2+\frac{2dp}{T}+\frac{1}{T^2}}e^{p_i t}\right]$$

$$w(t)=K\left[-e^{-\frac{d}{T}t}\left(\cos(\omega_c t)+\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\sin(\omega_c t)\right)\right]$$

Комплексная частотная х-ка: $W(i\omega) = \dfrac{K}{T^2(i\omega)^2 + 2dTi\omega + 1} = \dfrac{K}{(1-T^2\omega^2) + 2dTi\omega}$

Домножим на $(1-T^2\omega^2) - 2dTi\omega$

$$Re(W) = \frac{K(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \qquad Im(W) = \frac{-2KdT\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}$$

АЧХ: $A(\omega) = \sqrt{(ImW)^2 + (ReW)^2} = \sqrt{\dfrac{K^2\cdot((1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2)}{((1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2)^2}} = \dfrac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}}$

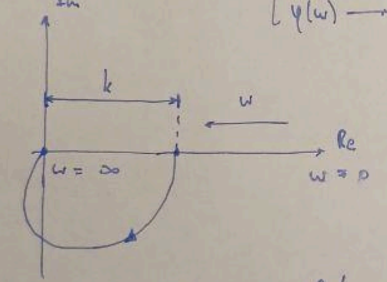
ФЧХ: $\varphi(\omega) = arctg\dfrac{ImW}{ReW} =$

$$= \begin{cases} -arctg\left(\dfrac{2dT\omega}{1-T^2\omega^2}\right), & \text{если } \omega \le \dfrac{1}{T} \\ -\pi - arctg\left(\dfrac{2dT\omega}{1-T^2\omega^2}\right), & \text{если } \omega > \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

АФЧХ: $W(i\omega) = A(\omega)\cdot e^{i\varphi(\omega)}$

Годограф: Проанализируем АФЧХ

$$\omega \to 0 \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) \to K \\ \varphi(\omega) \to 0 \end{cases} ; \quad \omega \to \infty \begin{cases} A(\omega) \to 0 \\ \varphi(\omega) \to \pi \end{cases}$$

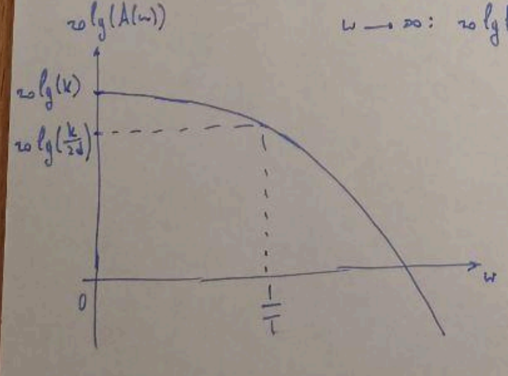


Логарифмическая АЧХ: $20\lg\left(\dfrac{k}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}\right)$

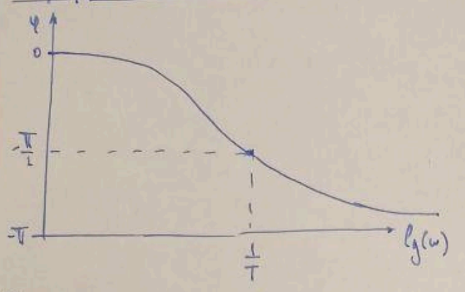
$\omega \to 0: \ 20\lg(A(\omega)) \to 20\lg(K)$

$\omega = \frac{1}{T}: \ 20\lg(A(\omega)) \to 20\lg\left(\frac{K}{2d}\right)$

$\omega \to \infty: \ 20\lg(A(\omega)) \to -\infty$



Логарифмическая ФЧХ:



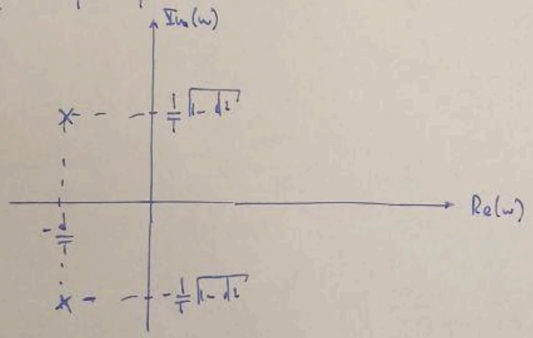
Карта нулей и полюсов:

Нули отсутствуют

Полюсов два и они равны

$$T^2p^2 + 2dTp + 1 = p^2 + \frac{2dp}{T} + \frac{1}{T^2} \qquad p^2 + \frac{2dp}{T} + \frac{1}{T^2} = 0 \Rightarrow$$

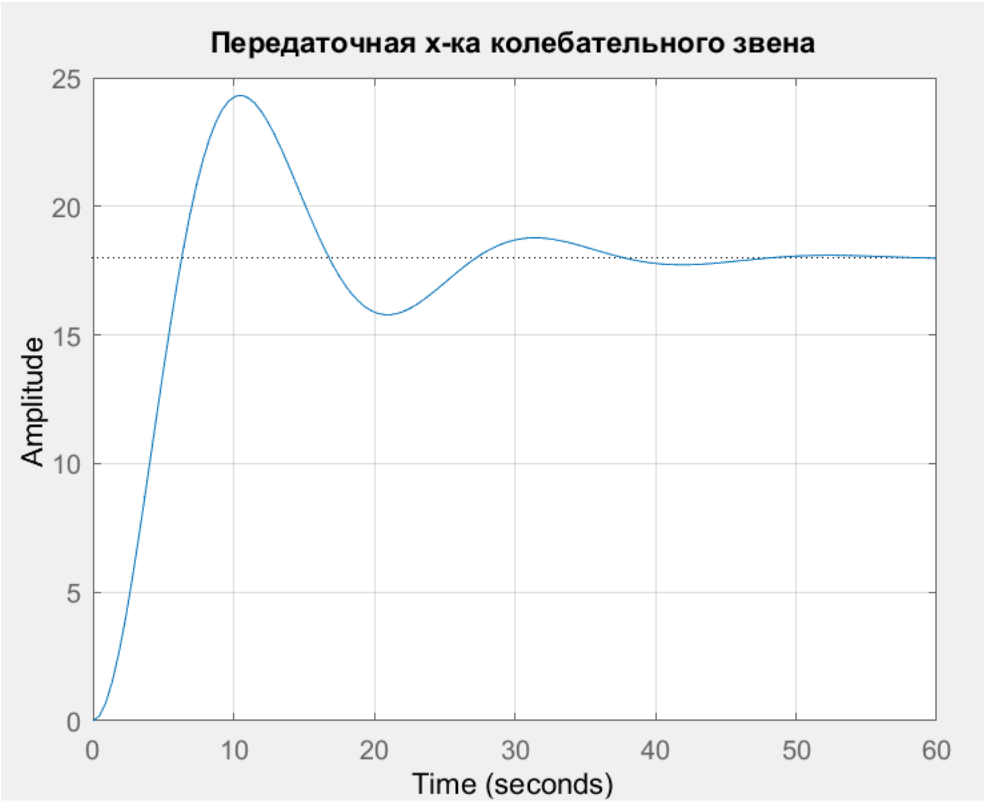
$$\Rightarrow \begin{cases} p_2 = -\frac{d}{T} + i\frac{1}{T}\sqrt{1-d^2} \\ p_1 = -\frac{d}{T} - i\frac{1}{T}\sqrt{1-d^2} \end{cases}$$

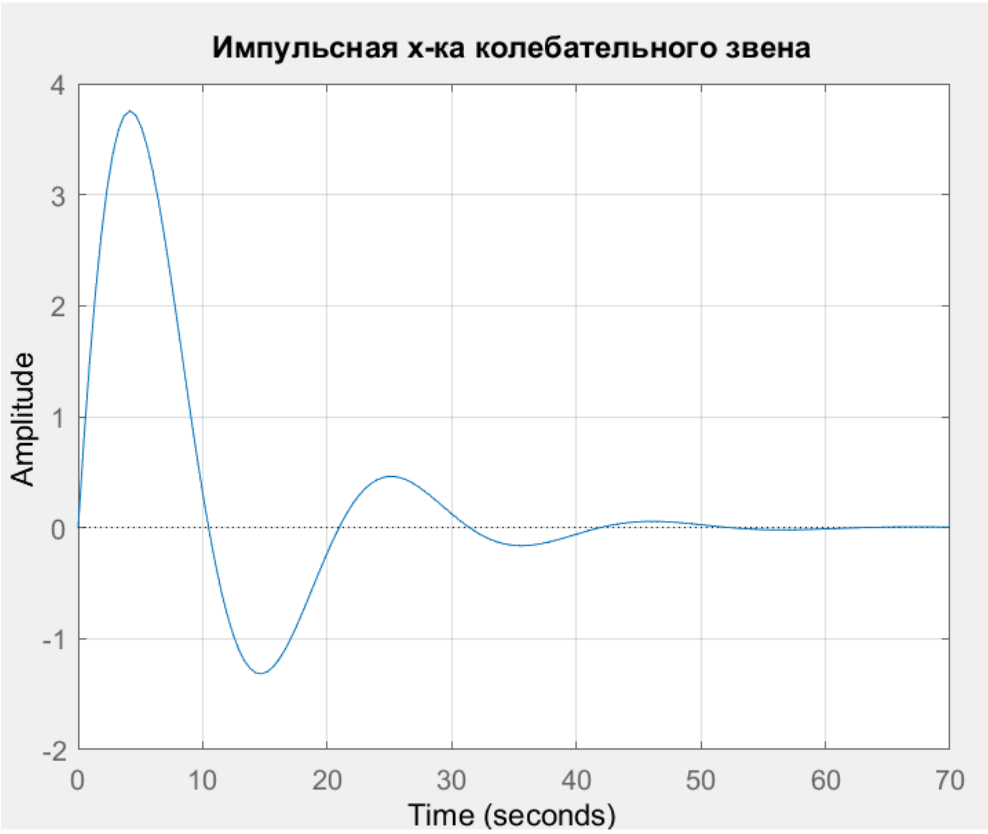


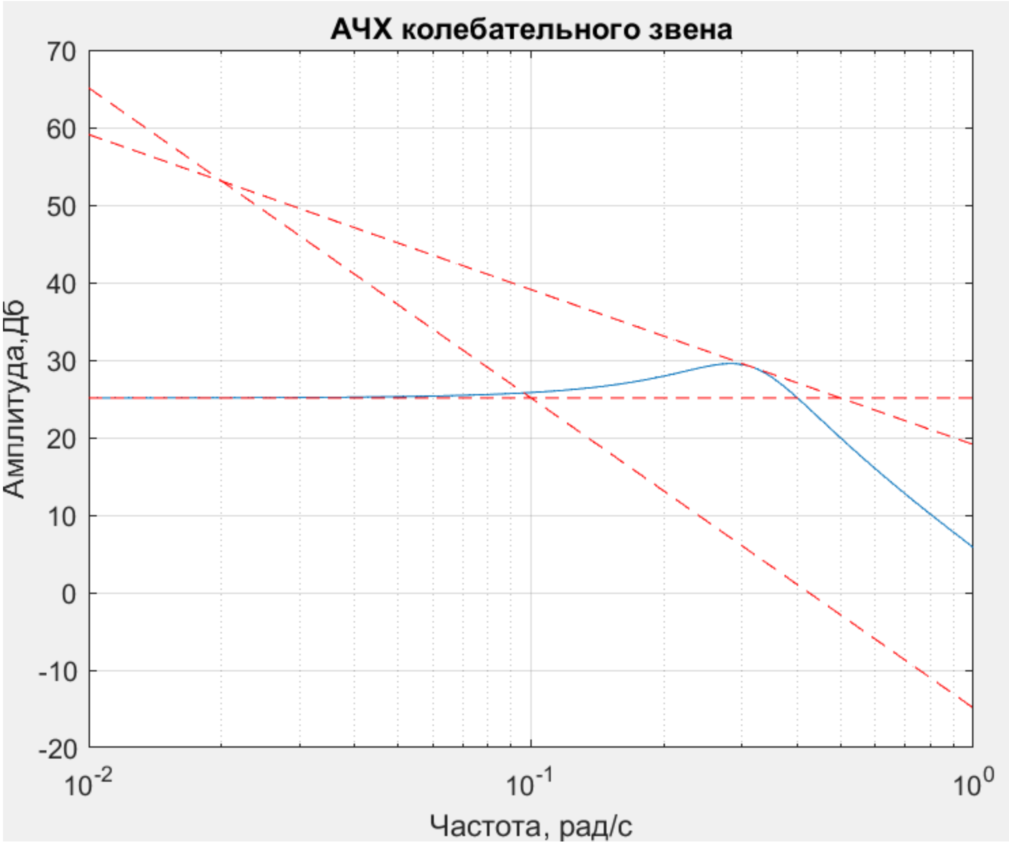
Код программы которая исследует колебательное звено

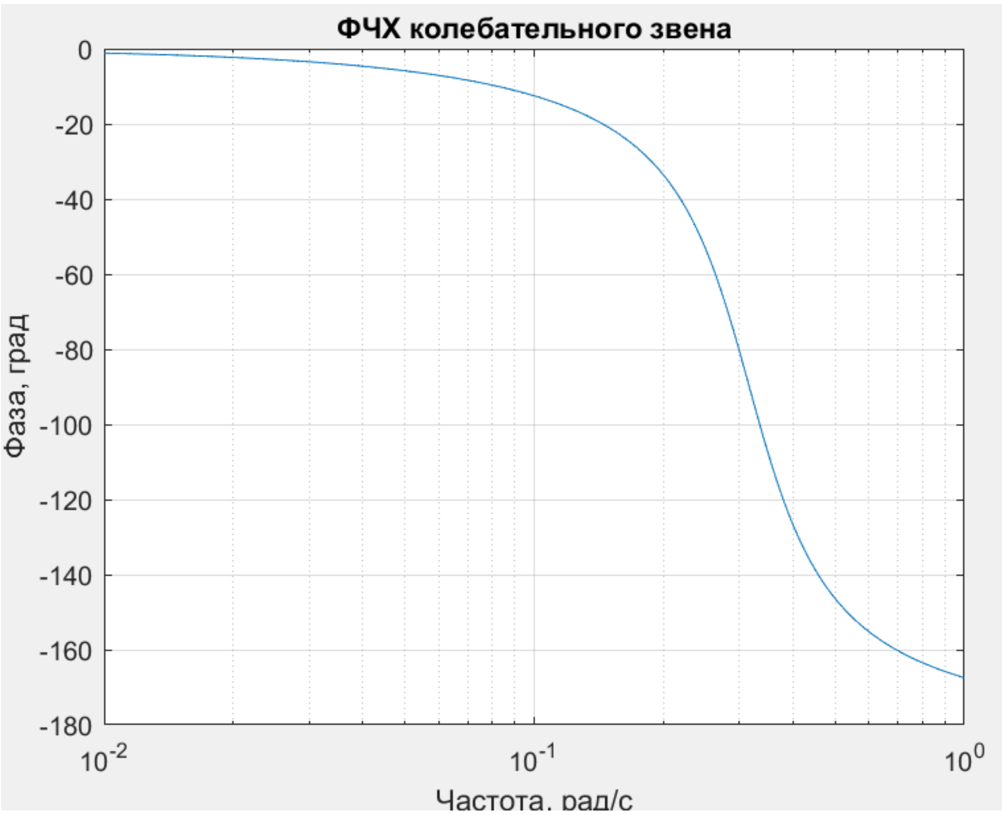
```
clear all;
close all;

K = 18;
d = 0.1;
T = 10;
koleb = tf(K,[T 2*d*T 1]);
[m,wout]=freqs(K,[T 2*d*T 1]);
wout1 = wout(round(length(wout))/2:end);

figure
step(koleb);
title("Передаточная х-ка колебательного звена")
grid on

figure
impulse(koleb);
title("Импульсная х-ка колебательного звена")
grid on

figure
semilogx(wout,mag2db(abs(m)))
title("АЧХ колебательного звена")
hold on
plot([min(wout) max(wout)],[20*log10(K) 20*log10(K)],'r--');
hold on
semilogx(wout,20*log10(K)-20*log10(2*d*T*wout),"--r");
semilogx(wout,20*log10(K)-20*log10(T.^2*wout.^2) ,"--r");
ylabel("Амплитуда,Дб")
xlabel("Частота, рад/с")
grid on
figure
semilogx(wout,rad2deg(angle(m)))
title("ФЧХ колебательного звена")
ylabel("Фаза, град")
xlabel("Частота, рад/с")
grid on
Koeff_tr = evalfr(koleb, 0);
figure
nyquist(koleb)
title("Годограф колебательного звена")
grid on
```

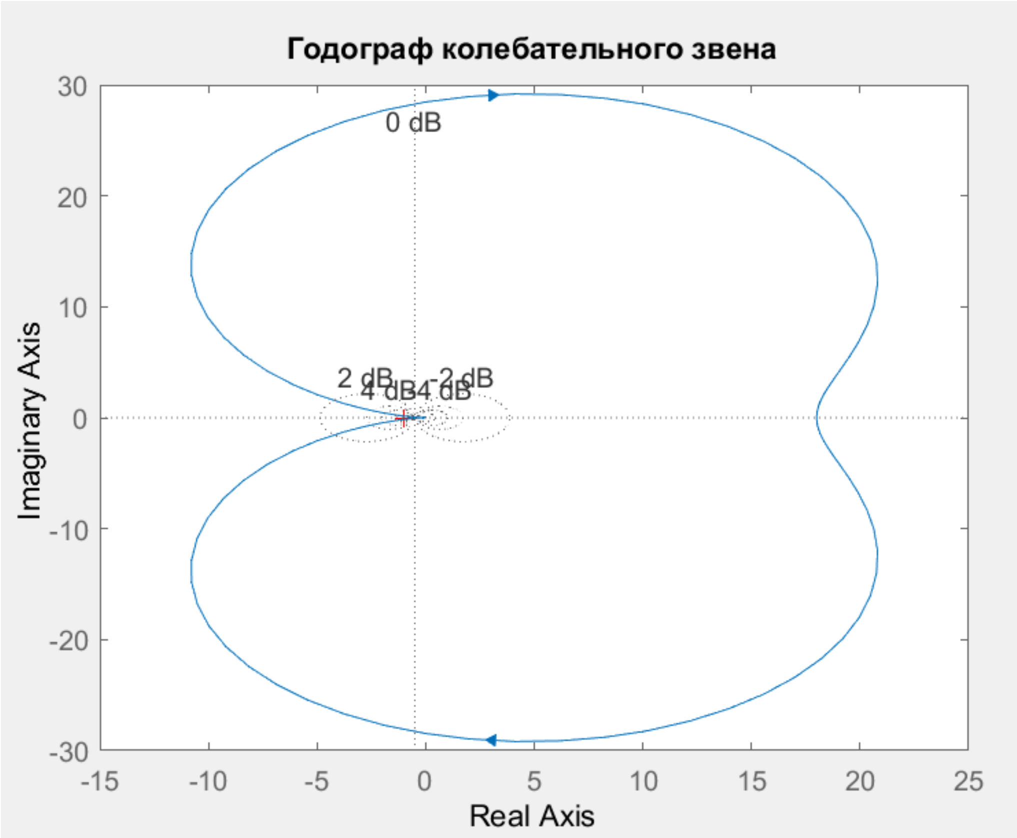
Графики


Передаточная х-ка колебательного звена
Amplitude
Time (seconds)
0
5
10
15
20
25
0
10
20
30
40
50
60


Импульсная х-ка колебательного звена
Amplitude
Time (seconds)
-2
-1
0
1
2
3
4
0
10
20
30
40
50
60
70


АЧХ колебательного звена
Амплитуда,Дб
Частота, рад/с
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}


ФЧХ колебательного звена
Фаза, град
Частота, рад/с
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}



<u>Вывод</u>: графики, полученные аналитическим способом достаточно совпадают с графиками полученными численными методами в среде Matlab.