T-11

$H_0: \xi \sim p_0(x) = 1 \{(0,1)\}$

$H_1: \xi \sim \frac{e}{e-1} e^{-x} \{(0,1)\}$

а) Пост-ть наиболее мощный критерий проверки гипотез по выборке объёма $n=1$, с уровнем знач $\alpha$, найти $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $W$

$n = 1$

$$\ell = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\frac{e}{e-1} e^{-x}}{1} \geqslant c$$

отн. правдоподобия

$$e^{-x} \geqslant B \longrightarrow x \leqslant A$$

$$P(x < A \mid H_0) = \alpha$$

$$\int_0^A p_0(x)\,dx = A = \alpha \Rightarrow G: x < \alpha$$

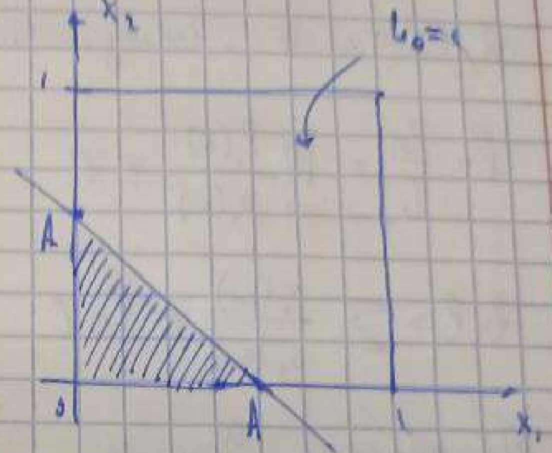
кр. область

$\alpha_1 = \alpha$

$$W = P(x \leqslant A \mid H_1) = \int_0^{\alpha} \frac{e}{e-1} e^{-x}\,dx = \frac{e}{e-1}\left(1 - e^{-\alpha}\right)$$

$$\alpha_2 = 1 - W = 1 - \frac{e}{e-1}\left(1 - e^{-\alpha}\right)$$

5) Пост-ть наиболее мощный критерий проверки гипотез по выборке объёма $n=2$ с уровнем значимости $\alpha$, найти $\alpha_1$, $\alpha_2$, $W$




$n=2$

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\left(\frac{e}{e-1}\right)^2 e^{-x_1} e^{-x_2}}{1 \cdot 1} \geq c$$

$$e^{-(x_1+x_2)} \geq B$$

$$x_1 + x_2 \leq A$$

$$P(x_1 + x_2 \leq A \mid H_0) = \alpha$$

$$\iint\limits_{x_1+x_2 \leq A} 1 \, dx_1 \, dx_2 = \frac{A^2}{2} = \alpha$$

$$A = \sqrt{2\alpha}$$

$$G: x_1 + x_2 \leq \sqrt{2\alpha}$$

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$W = P(x_1 + x_2 \leq A \mid H_1) = \iint\limits_{x_1+x_2 \leq A} \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 e^{-x_1} e^{-x_2} \, dx_1 \, dx_2 =$$

$$= \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \int_0^A dx_1 \int_0^{A-x_1} e^{-x_1} e^{-x_2} \, dx_2 = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \left(1 - e^{-A} - A e^{-A}\right)$$

$$2\alpha < 1 \qquad \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = 1 - W = 1 - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 \left(1 - e^{-A} - A e^{-A}\right)$$

c) Пост-ть наиболее мощный асимпт. критерий проверки гипотез по выборке и с уровнем значимости $\alpha$, найти $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $W$. Исслед. состоят. критерия

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \geq C$$

$$\ln l = \sum \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} \geq \ln C$$

По теореме Фишера $\frac{\sum \eta_i - n M[\eta_i]}{n D\eta_i} \rightsquigarrow N(0,1)$

$$P(\ln l \geq \ln C \mid H_0) \geq C$$

$$\eta = \ln\left(\frac{e}{e-1} e^{-x}\right) = \ln \frac{e}{e-1} - x$$

$$\ln l = \sum \ln \frac{e}{e-1} - \sum x_i \geq \ln C$$

$$G : \sum x_i < A$$

$$P\left(\frac{\sum x_i - n M_x}{\sqrt{n D_x}} < \frac{A - n M_x}{\sqrt{n D_x}} \;\middle|\; H_0\right) = \alpha$$

$$M_x = \frac{1}{2}$$

$$D_x = \frac{1}{12}$$

$$\frac{A - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n\frac{1}{12}}} = u_\alpha$$

$$A = n\frac{1}{2} - u_\alpha\sqrt{\frac{n}{12}}$$

$$G: \sum x_i \le A = n\frac{1}{2} + u_\alpha\sqrt{\frac{n}{12}}$$

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$W = P\left(\sum x_i < A \mid H_1\right) \overset{\text{ЦПТ}}{=} P\left(\frac{\sum x_i - nM_x}{\sqrt{nD_x}} < \frac{A - nM_x}{\sqrt{nD_x}} \,\middle|\, H_1\right)$$

$$M_x = \int_0^1 x\frac{e}{e-1}e^{-x}\,dx = \frac{e-2}{e-1}$$

$$M_x^2 = \frac{2e-5}{e-1}$$

$$D_x = \frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}$$

$$W = \int_{-\infty}^{B} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$B = \frac{\frac{n}{2} + u_\alpha\sqrt{\frac{n}{2}} - n\frac{e-2}{e-1}}{\sqrt{n\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}}} = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{e-2}{e-1}\right) + u_\alpha\sqrt{\frac{1}{12}}}{\sqrt{n\frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}}} \longrightarrow +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ состоят

$$\alpha_2 = 1 - W$$

d) Пост-ть критерий по выборке объёма $n$ с критической областью $x_{min} < c$ и уровнем значимости $\alpha$. Найти $\alpha_1$, $\alpha_2$, $W$, исслед. состоят. этого критерия.

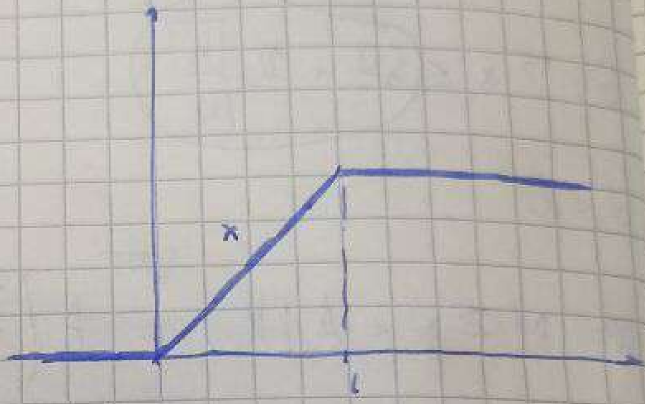
$G: x_{min} \le c$

$P(\vec{x}_n \in G \mid H_0) = \alpha$

$P(x_{min} \le c \mid H_0)$

$H_0: \xi \sim R(0,1)$

$\xi \sim F(x) \qquad \xi_1, \dots, \xi_n$




$\xi_{min} \sim 1 - (1 - F(x))^n$

$P(x_{min} \le c) = 1 - (1 - F_0(c))^n = \alpha$

$(1 - c)^n = 1 - \alpha$

$1 - c = \sqrt[n]{1-\alpha}$

$c = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$

$G: x_{min} \in 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$

$\alpha_1 = \alpha$

$W = P(\vec{x}_n \in G \mid H_0) = P(x_{min} \le c \mid H_1) = 1 - (1 - F_1(c))^n =$

$= 1 - \left(1 - \frac{e}{e-1}\left(1 - e^{1-\sqrt[n]{1-\alpha}}\right)\right)^n$

$H_1: \xi \sim p(x) = \frac{e}{e-1} e^{-x} \quad \{(0,1)\}$

$F_1(x) = \int\limits_0^x \frac{e}{e-1} e^{-t}\, dt = \frac{e}{e-1}\left(1-e^{-x}\right)$

$\alpha_2 = 1 - W$

$W \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ – состоят.

$$e^{1-\sqrt[n]{1-\alpha}} = e^1 \cdot e^{-\sqrt[n]{1-\alpha}} = e^1 e^{-\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)}\right)} = e^1 e^{-\left(1+\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} =$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$W = 1-\left(1-\frac{e}{e-1}\left(1-e^{-\left(\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right)\right)^n =$$

$$= 1-\left(1-\frac{e}{e-1}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 1-e^{-\frac{e}{e-1}\ln(1-\alpha)} = 1-(1-\alpha)^{-\frac{e}{e-1}} \neq 1 \Rightarrow \text{не состоят}$$

$$\cancel{e^{-}\left(1-\frac{e}{e-1}\left(\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n}$$