T-4

Дано: $\xi \sim R\{(-1,1)\setminus\{0\}\} + b\{0\} + b\{2\}$

Найти:

а) По выборке объёма n найти оценки параметров сл. величины метод. моментов и методом макс. правдопод.

б) Проверить оценки на несмещ и состоят.

в) Иссл. эти оценки на эффект. с помощью нер-ва К-Р

Решение:

а) $p(x) = a\{(-1,1)\setminus\{0\}\} + \overbrace{b + b}^{2b} =$

$= a\{(-1,1)\setminus\{0\}\} + 2b$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} a\,dx + 2b = ax\Big|_{-1}^{1} + 2b = 2(a+b)$$

$b = \frac{1-2a}{2} = \frac{1}{2} - a$

$a = \theta$

$\Rightarrow p(x,\theta) = \theta\{(-1,1)\setminus\{0\}\} + \left(\frac{1}{2}-\theta\right)\{0\} + \left(\frac{1}{2}-\theta\right)\{2\}, \ \theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{X}_n$ - выборка

Метод моментов (Пирсон)

$$\alpha_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x,\theta)\,dx = \int_{-1}^{1} x\theta\,dx + \overbrace{0\cdot\left(\frac{1}{2}-\theta\right)}^{0} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\theta\right) =$$

$$= \overbrace{\theta \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}}^{0} + 2\left(\frac{1}{2}-\theta\right) = 2\left(\frac{1}{2}-\theta\right) = 1-2\theta$$

$$\alpha_2 = M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x,\theta)\,dx = \int_{-1}^{1} \theta x^2\,dx + 0^2\left(\frac{1}{2}-\theta\right) +$$

$$+2^2\left(\frac{1}{2}-\theta\right) = \theta \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + 4\left(\frac{1}{2}-\theta\right) = \frac{2}{3}\theta + 2 - 4\theta =$$

$$= 2 - \frac{10}{3}\theta$$

$$D[\xi] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - \frac{10}{3}\theta - 1 + 4\theta - 4\theta^2 =$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2$$

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = \overline{x}$$

$$1 - 2\theta = \overline{x} \Rightarrow \tilde{\theta}_1 = \frac{1-\overline{x}}{2} \Rightarrow \boxed{\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\overline{x}}{2}}$$

$$\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2 = \overline{x^2}$$

$$2 - \frac{10}{3}\theta = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2$$ [redacted]

<u>Метод максимального правдоподобия</u>

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$$

Допустим m раз встретилось значение 0 или 2

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) = \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^m \cdot \theta^{n-m}$$ — функция правдо-подобия

$$\ln L(\theta) = (n-m)\ln\theta + m\ln\left(\frac{1}{2} - \theta\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n-m}{\theta} - \frac{m}{\frac{1}{2} - \theta} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \theta\right)(n-m) - m\theta}{\theta\left(\frac{1}{2} - \theta\right)} =$$

$$= \frac{\frac{n}{2} - \frac{m}{2} - n\theta}{\theta\left(\frac{1}{2} - \theta\right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} - \frac{m}{2} - n\theta = 0 \Rightarrow \underline{\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot \overset{\partial}{\overset{\parallel}{\frac{m}{n}}}} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{\partial}{2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{n-m}{\theta} - \frac{m}{\frac{1}{2} - \theta}\right) = \frac{m-n}{\theta^2} - \frac{m}{\left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{4} - \theta + \theta^2\right)$$

$$= \frac{(m-n)\left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2 - m\theta^2}{\underset{0 <}{}\theta^2\left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2} = \frac{\frac{m}{4} - m\theta + \cancel{m\theta^2} - \frac{n}{4} + n\theta - n\theta^2 - \cancel{m\theta^2}}{\ldots} =$$

$$= \frac{m\left(\frac{1}{4} - \theta\right) - n\left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2}{\theta^2\left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Учитывая выражение (1), видно, что (2) < 0

Таким образом выполнены достаточные усл. максимума

Поэтому, $\boxed{\tilde{\theta}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vartheta}$

б) Проверим оценку, полученную ММ на несмещ и сост.

$\tilde{\theta} = \frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}$

Несмещ:

$M[\tilde{\theta}] = M[\frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\xi] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\theta) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2\theta = \theta \Rightarrow \tilde{\theta}$ – несмещенная

Состоят:

$D[\tilde{\theta}] = D[\frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}] = \frac{1}{4}D[\bar{x}] = \frac{1}{4n}D[\xi] =$

$= \frac{1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2}{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \tilde{\theta}$ – состоятельная

Проверим оценку, полученную ММП на несмещ и сост

$\tilde{\theta}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vartheta$ $\quad \boxed{D[\vartheta] = \frac{p(1-p)}{n} \quad M[\vartheta] = p}$ $\quad p = \frac{1}{2} - \theta \cdot 2$

$M[\tilde{\theta}_2] = M[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vartheta] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\vartheta] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \theta)\cdot 2 =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2\theta = \theta \Rightarrow \tilde{\theta}_2$ – несмещенная

$$D[\tilde{\theta}_2] = D\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\partial\right] = \frac{1}{4}D[\partial] = \frac{1}{4n}\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(1 - \frac{1}{2} + \theta\right)\cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(\frac{1}{2} + \theta\right) = \frac{\left(\frac{1}{4} - \theta^2\right)}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\tilde{\theta}_2 \text{ – состоятельная}}$

б) Исследуем оценку, полученную $\underline{ММ}$ на эфф. с помощью н-ва К-Р

Н-во К-Р:

1) Модель – регул.

2) $\tilde{g}_n(\vec{X}_n)$ – регул. оценка непр. дифф. ф-ции $g(\theta)$

Тогда $\forall \theta \in \Theta$ $\quad D[\hat{g}] \geq \dfrac{g'^2(\theta)}{nI(\theta)}$

1) Рег. модели:

1.1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} p(x,\theta)\,dx = 0$

$\Downarrow$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,dx - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$ ✓

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\int_{-1}^{1}\theta\,dx + 2\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\right] =$$

$= \frac{\partial}{\partial\theta}(2\theta + 2 - 2\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(2) = 0$ ✓

Т.о. $\frac{\partial}{\partial\theta}\int p\,dx = \int \frac{\partial}{\partial\theta} p\,dx$

1.2) $I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial \ln(p(x,\theta))}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)\,dx =$

$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{\theta^2}\theta\,dx + \frac{\frac{1}{2}-\theta}{(\frac{1}{2}-\theta)^2} + \frac{\frac{1}{2}-\theta}{(\frac{1}{2}-\theta)^2} = \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\frac{1}{2}-\theta} =$

$= \frac{2(\frac{1}{2}-\theta)+2\theta}{\theta(\frac{1}{2}-\theta)} = \frac{1}{\theta(\frac{1}{2}-\theta)} > 0$ ✓, т.к $\theta \in (0, \frac{1}{2})$

$I(\theta)$ - непр на $(0, \frac{1}{2})$

1.3) $p(x,\theta)$ - непр ф-ия по θ (очев) ✓

Т.о. модель — регулярна

2) Регулярность оценки

2.1) Модель - регулярна ✓

2.2) Оценка - несмещ ✓

2.3) $\varphi(\tilde\theta)$ - огр на любом компакте из $(0, \frac{1}{2})$ ✓

Т.о. оценка регулярна

Используем н-во Крамера-Рао

$$\frac{j^2(\theta)}{n I(\theta)} = \frac{\theta(\frac{1}{2}-\theta)}{n}\cdot 1^2 = \frac{\theta(\frac{1}{2}-\theta)}{n}$$

$$\frac{1+\frac{2}{3}\theta - 4\theta^2}{4n} \geq \frac{\theta(\frac{1}{2}-\theta)}{n} \Rightarrow$$ оценка $\tilde{\theta}$ - неэффект

Исследуем оценку, полученную ММП на эфф с помощью н-ва К-Р

$$D[\tilde{\theta}_2] = \frac{\theta(\frac{1}{2}-\theta)}{n}$$ - огр на $\forall$ компакте из $(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\text{Модель - регулярна}\\ \text{Оценка - несмещ}\end{array}\right\}$ доказано ранее

Т.о. можем воспольз. н-вом К-Р для исследования на эффективность

$$D[\tilde{\theta}_2] = \frac{\theta(\frac{1}{2}-\theta)}{n} \Rightarrow$$ оценка $\tilde{\theta}_2$ - эффективная.