Т-7

Дано:

i - число смертей в одном корпусе за год	0	1	2	3	4
число случаев, когда произошло i смертей	109	65	22	3	1

Что сделать: проверить гипотезу о том, что кол-во смертей подчиняется распред. Пуассона $\left(\xi \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mid k = \overline{0,4}\right)$

Решение

	0	1	2	3	4
m_i	109	65	22	3	1
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^4}{24} e^{-\lambda}$
~~np_i~~	~~108,67~~	~~66,29~~	~~20,22~~	~~4,11~~	~~0,63~~

200 - выборка

$65 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 =$

$= 122$ всего смертей

$\alpha = 0{,}05$

$H_0: \xi \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = \overline{0,4}$

λ - среднее число смертей в корпусе

$H_1: \overline{H_0}$

Необходимо найти λ. Это можно сделать с помощью ОМПГ

$$L = \prod_{i=0}^{4} p_i(x)$$

$$L = (e^{-\lambda})^{109} \cdot (\lambda e^{-\lambda})^{65} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}\right)^{22} \cdot \left(\frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda}\right)^{3} \cdot \left(\frac{\lambda^4}{24} e^{-\lambda}\right)^{1} =$$

$$= \frac{\lambda^{122} \cdot e^{-200\lambda}}{2^{22} \cdot 6^{3} \cdot 24} = \frac{\lambda^{122} \cdot e^{-200\lambda}}{C}$$

$$\ln L = 122 \ln \lambda - 200\lambda - \ln C$$

$$(\ln L)'_\lambda = \frac{122}{\lambda} - 200 = 0 \iff \lambda = \frac{122}{200} = 0{,}61$$

$$(\ln L)''_{\lambda\lambda} = -\frac{122}{\lambda^2} < 0 \text{ при } \lambda = 0{,}61$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 0{,}61$ – точка max (по дост. усл)

Можем посчитать np_i и внести их в таблицу

	0	1	2	3	4
np_i	108,67	66,29	20,22	4,11 $<$ 5	0,63 $<$ 5

$np_3 < 5$

$np_4 < 5$ $\Rightarrow$ объединим "3" и "4"

Получим

	0	1	2	3и4
n_i	109	65	22	4
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	$\left(\frac{\lambda^3}{6}+\frac{\lambda^4}{24}\right)e^{-\lambda} = \left(\frac{4\lambda^3+\lambda^4}{24}\right)e^{-\lambda}$

Пересчитаем λ, также пользуясь ОМПГ

$$L = (e^{-\lambda})^{109} \cdot (\lambda \cdot e^{-\lambda})^{65} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}\right)^{22} \cdot \left(\left(\frac{4\lambda^3+\lambda^4}{24}\right) e^{-\lambda}\right)^4 =$$

$$= \frac{e^{-200\lambda} \lambda^{109}}{c} (4\lambda^3+\lambda^4)^4$$

$$\ln L = 109 \ln \lambda - 200\lambda - \ln c + 4 \ln (4\lambda^3+\lambda^4)$$

$$(\ln L)'_\lambda = \frac{109}{\lambda} - 200 + \frac{4}{4\lambda^3+\lambda^4}(12\lambda^2+4\lambda^3) =$$

$$= \frac{109}{\lambda} - 200 + \frac{48+16\lambda}{4\lambda+\lambda^2} = 0$$

$$109(4+\lambda) - 200(4\lambda+\lambda^2) + 48 + 16\lambda = 0$$

$$200\lambda^2 + 675\lambda - 484 = 0$$

Решая квадратное ур-ие, получим $\lambda = 0{,}608$

Можем посчитать np_i

	0	1	2	3и4
np_i	108,88	66,2	20,13	4,7

$$\tilde{\Delta} = \sum \frac{(np_i - m_i)^2}{np_i} = \frac{(108,68 - 109)^2}{108,68} + \frac{(66,2 - 65)^2}{66,2} +$$

$$+ \frac{(20,13 - 22)^2}{20,13} + \frac{(4,7 - 4)^2}{4,7} \approx 0,3$$

$$\text{p-value} = \int_{0,3}^{+\infty} q(t)\,dt \approx 0,86 > \alpha = 0,05 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Нет причин отвергать H_0