T-3

Дано: Сл. вел. имеет экспоненц. распред.

$p(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\theta > 0$. По выборке объёма

$n = 3$ найдены оценки параметра θ: $\tilde{\theta}_1 = \bar{x}$, $\tilde{\theta}_2 = x_{(2)}$

(второй член вариационного ряда)

а) Проверить оценки на несмещенность. Исправить эти оценки, если необх.

б) Какая из испр. оценок более эффективна

в) Исслед. эти оценки на эффективность с помощью н-ва Крамера - Рао

Решение:

а) $M[\tilde{\theta}_1] = M[\bar{x}] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] =$

$= M[y] = \theta \Rightarrow \tilde{\theta}_1$ - несмещенная

$M[\tilde{\theta}_2]$ - ?

На лекции было выведено, что

$æ = n p(t) C_{n-1}^{k-1} (1 - F(t))^{n-k} (F(t))^{k-1}$

($p(t)$ — $F'(x)$)

где $æ$ - плотность распр. $y_{(k)}$

В нашем случае $k=2$, поэтому

$$\varphi(z) = n \cdot \frac{1}{\theta} \cdot C^{1}_{n-1} \left(1-\left(1-e^{-\frac{z}{\theta}}\right)\right)^{n-2} \cdot \left(1-e^{-\frac{z}{\theta}}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta}\left(\left(e^{-\frac{z}{\theta}(n-1)}\right) - e^{-\frac{z}{\theta}n}\right)$$

Получаем, что

$$M[\hat{\theta}_2] = \int_{-\infty}^{\infty} z\,\varphi(z)\,dz = \int_{0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{\theta} z \cdot \left(e^{-\frac{z}{\theta}(n-1)} - e^{-\frac{z}{\theta}n}\right) dz =$$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta}\int_{0}^{+\infty} \frac{z}{e^{\frac{z}{\theta}n}}\left(e^{\frac{z}{\theta}} - 1\right) dz \;(=)$$

$$\left\{ \text{Делаем замену} \quad t = \frac{z}{\theta}n \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\theta}{n}t; \qquad dt = \frac{n}{\theta}dz \qquad dz = \frac{\theta}{n}dt \right\}$$

$$(=)\; \frac{n(n-1)}{\cancel{\theta}} \cdot \frac{\theta^{\cancel{2}}}{n^{\cancel{2}}} \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{e^{\left(\frac{\theta}{n}t \cdot \frac{n}{\theta}\right)}} \cdot \left(e^{\left(\frac{\theta}{n}t \cdot \frac{1}{\theta}\right)} - 1\right) dt =$$

$$= \frac{\theta(n-1)}{n}\int_{0}^{+\infty} t e^{-t}\left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right) dt =$$

$$= \frac{\theta(n-1)}{n}\left(\underbrace{\int_{0}^{+\infty} t e^{t\left(\frac{1}{n}-1\right)} dt}_{I_1} - \underbrace{\int_{0}^{+\infty} t e^{-t} dt}_{I_2}\right) \;(=)$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} dt = \left| \begin{aligned} u &= t\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ t &= \frac{n}{n-1} u \\ dt &= \frac{n}{(n-1)} du \end{aligned} \right| =$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} u e^{-u} du}_{1} = \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

$$I_2 = 1$$

$$(=) \ \frac{\theta(n-1)}{n}\left(\frac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) = \frac{\theta n}{n-1} - \frac{\theta(n-1)}{n} =$$

$$= \theta\left(\frac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 2n - 1}{n(n-1)}\right) = \theta\left(\frac{2n-1}{n(n-1)}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_2$ – смещенная

Введём $\tilde{\theta}_2' = \frac{n(n-1)}{2n-1} \underset{}{\overset{X_{(2)}}{\overset{\shortparallel}{\tilde{\theta}_2}}}$ – несмещенная

б) $$M[\tilde{\theta}_2^2] = \int_0^{+\infty} \frac{n(n-1)}{\theta} z^2 \left(e^{-\frac{z}{\theta}(n-1)} - e^{-\frac{z}{\theta}n}\right) dz =$$

$$= \left| \begin{aligned} t &= \frac{n}{\theta} z \\ z &= \frac{\theta}{n} t \\ dz &= \frac{\theta}{n} dt \end{aligned} \right| = \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{\theta}} \cdot \frac{\theta^{\cancel{3}\,2}}{n^{\cancel{3}\,2}} \int_0^{+\infty} t^2 \left(e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} - e^{-t}\right) dt =$$

$$= \theta^2 \frac{(n-1)}{n^2} \int_0^{+\infty} t^2 \left(e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} - e^{-t} \right) dt =$$

$$= \theta^2 \frac{(n-1)}{n^2} \Bigg[\underbrace{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_{I_2} \Bigg] =$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)} dt = \left| \begin{aligned} u &= \frac{n-1}{n} t \\ t &= \frac{n}{n-1} u \\ dt &= \frac{n}{n-1} du \end{aligned} \right| = \frac{n^3}{(n-1)^3} \overbrace{\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} dt}^{=2}$$

$$I_2 = 2$$

$$= 2\theta^2 \frac{(n-1)}{n^2} \left[\frac{n^3}{(n-1)^3} - 1 \right] = 2\theta^2 \left(\frac{n}{(n-1)^2} - \frac{(n-1)}{n^2} \right) =$$

$$= 2\theta^2 \left(\frac{n^3 - (n-1)^3}{n^2 (n-1)^2} \right) = 2\theta \left(\frac{3n^2 - 3n + 1}{n^2 (n-1)^2} \right)$$

Таким образом,

$$D[\tilde{\theta}_2] = 2\theta \left(\frac{3n^2 - 3n + 1}{n^2 (n-1)^2} \right) - \theta^2 \left(\frac{(2n-1)^2}{n^2 (n-1)^2} \right) =$$

$$= \theta^2 \left(\frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 (n-1)^2} \right)$$

$$D[\tilde{\theta}'_2] = \frac{n^2 (n-1)^2}{(2n-1)^2} \cdot D[\tilde{\theta}_2] = \theta^2 \left(\frac{2n^2 - 2n + 1}{4n^2 - 4n + 1} \right)$$

Теперь посчитаем $D[\tilde{\theta}_1]$

$$D[\tilde{\theta}_1] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot n D[\xi] = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \left\{\lambda = \frac{1}{\theta}\right\} = \frac{\theta^2}{n}$$

Сравним дисперсии $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2'$

Выборка объёма $n = 3$:

$$D[\tilde{\theta}_1]\Big|_{n=3} = \frac{\theta^2}{3}$$

$$D[\tilde{\theta}_2']\Big|_{n=3} = \frac{13}{25}\theta^2$$

$D[\tilde{\theta}_1] < D[\tilde{\theta}_2'] \Rightarrow \tilde{\theta}_1$ более эффективная

в) Неравенство Крамера-Рао

1) Модель является регулярной

2) Оценка $g(\vec{x}_n)$ - регулярная оценка диф-мой ф-ции $g(\theta)$

Тогда $\forall\theta\in\Theta$ $D[\hat{g}] \geq \dfrac{g'^2(\theta)}{nI(\theta)}$, $n=3$ (в нашем случ.)

План действий:

I) Док-ть, что модель явл. регулярной

II) Док-ть, что оценка явл. регулярной

III) Воспользоваться нер-вом К-Р

IV) Воспользоваться достаточным усл. эффективности оценки

I) Опр: Вер. модель $\xi \sim p(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, $x \in A$

наз-ся регулярной, если

1) $p(x,\theta)$ непр диф-ма по θ на Θ

2) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_A p(x,\theta)\,dx = \int\limits_A \frac{\partial}{\partial\theta} p(x,\theta)\,dx$

3) $I(\theta)$ непр на Θ и $I(\theta) > 0$

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \theta > 0$$

1) Очевидно, что $p(x,\theta)$ - непр диф-ма по θ на $(0,+\infty)$ $+$

2) $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta}\cdot\theta\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\left(e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right)\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\left(e^{-\infty} - e^{0}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}(1) = 0$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}} - \frac{1}{\theta^3}e^{-\frac{x}{\theta}}\right)dx =$$

$$= 0 \Rightarrow (+)$$

3) $I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = \cancel{\int_E \left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}$

$$\ln\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\right) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial \ln p}{\partial\theta}\right)^2 = \left(\frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)^2$$

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p}{\partial\theta}\right)^2\right] = \int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 - \frac{2x}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^2}\right)\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left(\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}\,dt - 2\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt\right) = \frac{1}{\theta^2}(2-2+1) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2}$$

$\frac{1}{\theta^2}$: 1) непр на $(0,+\infty)$

2) > 0 на $(0,+\infty)$ (+)

Из пунктов 1), 2) и 3) => Модель регулярна.

II) Теорема (достаточное усл. регул. оценки)

1) Модель регулярна

2) Оценка $\tilde{g}(\vec{X}_n)$ – несмещ.

3) $D[\tilde{g}(\vec{X}_n)]$ – огр. на $\forall$ компакте из Θ по θ

Тогда $\tilde{g}(\vec{X}_n)$ – регулярна

1) Рассмотрим $\tilde{\theta}_1$:

- Несмещенная
- Модель регулярна (п. I)
- $D[\tilde{\theta}_1] = \dfrac{\theta^2}{n}$ – огр. на $\forall$ компакте на $(0, +\infty)$ по θ

Значит, $\tilde{\theta}_1$ – регулярная оценка

2) Рассмотрим $\tilde{\theta}_2'$

- Несмещенная
- Модель регулярна (п. I)
- $D[\tilde{\theta}_2'] = \theta^2\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{4n^2-4n+1}\right)$ – огр. на $\forall$ компакте на $(0, +\infty)$ по θ

Значит, $\tilde{\theta}_2'$ – регулярная оценка

III) Можем применить н-во Крамера-Рао

$$\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow \mathcal{D}[\tilde{g}(\vec{X}_n)] \geq \frac{g'^2(\theta)}{n I(\theta)}$$

i) Рассм $\tilde{\theta}_1$

$$\forall \theta \in (0, +\infty) \hookrightarrow \mathcal{D}[\tilde{\theta}_1] \geq \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{3}$$

Теорема (достаточное усл. эффективности)

i) Пусть выполнены усл нер-ва Крамера-Рао

2) $\mathcal{D}[\tilde{g}(\vec{X}_n)] = \dfrac{g'^2(\theta)}{n I(\theta)}$

Тогда $\tilde{g}$ - эффективная оценка

$$\mathcal{D}[\tilde{\theta}_1] = \frac{\theta^2}{3} \Rightarrow \tilde{\theta}_1 \text{ - эффективна}$$

Теорема ($\exists!$)

Если эффективная оценка существует, то она единств

По теореме ($\exists!$) $\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_2$ - не эффективная