人(1) 设

$$F(x_1,x_2)=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} 2x_2 e^{-x_1}\,dx_2\,dx_1$$

设随机向量 $X=(X_1,X_2)^T$ 的密度函数为 $f(x_1,x_2)=\begin{cases} 2x_2e^{-x_1} & x_1\geq 0,\ 0\leq x_2\leq 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

(1)求 $F(x_1,x_2)$

$$F(x_1,x_2)=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} 2t_2e^{-t_1}\,dt_2\,dt_1$$

$$= x_2^2 (1-e^{-x_1})$$

求 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$

(2) $f(x_1)=\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2$

$$= x_2^2 e^{-x_1}$$

$f(x_2)=\int_0^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1$

$$= 2x_2(1-e^{-x_1})$$

证明 x_1 x_2 相互独立.

(3) 即 $f(x_1,x_2)=f(x_1)f(x_2)$

3. 求 a^TX_1 的均值和方差:

$E(a^TX_1)$

$=a^TE(X_1)$

$=a^T\mu$

$var(a^TX)$

$=a^TVar(X)a$

$=a^T\Sigma a$

(x3)

$X_1+X_2-X_3+X_4$ 的均值和方差:

$E(X_1+X_2-X_3+X_4)$

$=3\mu$

~~$=(0.5+0.5+0.5+0.5)\times 3\ \Sigma$~~

~~$= 6\Sigma$~~

Cov

$var(X_1+X_2-X_3+X_4)$

$=4\Sigma$

$Cov(X_1+X_2-X_3+X_4,\ 0.5X_1+0.5X_2+0.5X_3+0.5X_4)$

$$=0.5\Sigma+0.5\Sigma-0.5\Sigma+0.5\Sigma=\Sigma$$

单个变量 x,y

$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

对向量 X Y

$$Var(X)=E[(X-EX)(X-EX)^T]$$

$$=\begin{bmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_p) \\ \vdots & & & \vdots \\ Cov(X_p,X_1) & Cov(X_p,X_2) & \cdots & Cov(X_p,X_p)\end{bmatrix}$$

X的方差或协方差阵

$var(X)$ 为 Σ $Cov(X_i,X_j)$ 为 σ_{ij}

$\Sigma=(\sigma_{ij})_{p\times p}$

6. ~~X_1 与 X_2~~

设 $X = (X_1\ X_2\ X_3)^T \sim N_3(\mu, \Sigma)$ $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 问 X_1 和 X_2 是否相互独立

(X_1, X_2) 和 X_3 是否独立?

X_1 和 X_2 不独立.

但 X_1 X_2 分别与 X_3 独立

(X_1, X_2) 与 X_3 独立.

C5

2.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\left(-z_{0.005} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{0.005}\right) = 0.99$$

$$P\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.005} < \mu < \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.005}\right) = 0.99$$

$$\bar{\mu} = 50.38 + \frac{0.62}{\sqrt{10}} \times 2.58 = \overset{50.89}{\cancel{50.8858}}$$

$$\underline{\mu} = 50.38 - \frac{0.62}{\sqrt{10}} \times 2.58 = 49.87$$

$\mu \in [49.87, 50.89]$

4. (1)

$b = E(X) = e^{\mu}$.

(2) -0.693147 0.22314355 -0.22314355 0.693147

$\bar{X} = 0$ $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(3)$\bar{X}$ 与 S 相互独立；

(4)S 为正定阵的充要条件是 $n > p$.

习 题

1. 设随机向量 $X = (X_1, X_2)^T$ 的密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}2x_2e^{-x_1}, & x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $F(x_1,x_2)$；

(2) 求 $f(x_1)$，$f(x_2)$；

(3) 证明 X_1 与 X_2 相互独立.

2. 设随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ 具有均值向量 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$，协差阵 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$. 写出线性组合 $\begin{cases}Z_1 = X_1 - X_2\\ Z_2 = X_1 + X_2\end{cases}$ 或 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} = \boldsymbol{CX}$ 的样本均值向量和协差阵.

3. 设随机向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4$ 具有均值向量 $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，协差阵 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. 求线性组合 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}_1$ 的均值和方差，$\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_4$ 的均值和方差，$\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_4$ 与 $0.5\boldsymbol{X}_1 + 0.5\boldsymbol{X}_2 + 0.5\boldsymbol{X}_3 + 0.5\boldsymbol{X}_4$ 之间的协差阵.

1×3 3×1

4. 设随机向量 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 相互独立，且 $\boldsymbol{X}_1 \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$，$\boldsymbol{X}_2 \sim N_q(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$，问 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}$ 服从什么分布？均值向量和协差阵是什么？

5. 设随机向量 $\boldsymbol{X} \sim N_5(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，问 $\begin{pmatrix}X_2\\ X_5\end{pmatrix}$ 服从什么分布？均值向量和协差阵是什么？

6. 设$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)^{\mathrm{T}}\sim N_3(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，其中$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，问$X_1$与$X_2$是否相互独立？$(X_1,X_2)$和$X_3$是否相互独立？