第三章

2、

$$E(X) = \theta + 2\theta + 3(1-2\theta) = 3-3\theta$$

$$\overline{X} = 3-3\theta$$

$$\hat{\theta}_{矩} = \frac{3-\overline{X}}{3}$$

设抽到 1 n_1 2 n_2 3 n_3 $N = n_1+n_2+n_3$

$$L(\theta) = \theta^{n_1}\theta^{n_2}(1-2\theta)^{n_3}$$

$$\ln L = n_1\ln\theta + n_2\ln\theta + n_3\ln(1-2\theta)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{n_1}{\theta} + \frac{n_2}{\theta} + \frac{n_3(-2)}{1-2\theta}$$

$$= \frac{n_1+n_2}{\theta} - \frac{2n_3}{1-2\theta}$$

令 $\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{n_1+n_2}{\theta} = \frac{2n_3}{1-2\theta}$$

$$2n_3\theta = n_1+n_2 - 2(n_1+n_2)\theta$$

$$\theta = \frac{n_1+n_2}{2(n_1+n_2+n_3)}$$

$\sqrt{\theta}$ $\quad \frac{\sqrt{t}\,2\theta}{\theta}$

$\overline{X} = 1.8$

$$\hat{\theta}_{矩} = \frac{3-1.8}{3} = 0.4$$

3. (2) $E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx$ $\cancel{= 2\int_0^{+\infty} \theta \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} d\left(\frac{x^2}{\theta}\right)} = \frac{\theta}{2}\int_0^{+\infty}$

$\cancel{= \frac{e^{-2\theta}}{\theta}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx}$ $= \theta\int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} d\left(\frac{x^2}{2\theta}\right)$

$$= \theta\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2\theta t}}{\theta} e^{-t}dt$$

$$= \sqrt{2\theta}\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-t}dt$$

$$= \sqrt{2\theta}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\theta\pi}}{2}$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}\right)$$

$$=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)}{\theta^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$\ln L=\ln\prod_{i=1}^{n}x_i-n\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$=\frac{1}{\theta}\left(-n+\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$

$$\hat{\theta}_{极}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

(4) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}$

$$=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}$$

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$=0$$

$$\theta+1=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

$$\hat{\theta}_{极}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

5. $L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}$

$$=\left(\frac{1}{2\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$$

$$\ln L=n\ln\frac{1}{2\sigma}-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}$$

$$=-n\ln2\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=\frac{-n\cdot2}{2\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma}\left(-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}\right)$$

$$\hat{\sigma}_{极}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$$

6.6 $\theta<X_{(1)}<\cdots X_{(n)}<2\theta$

$$p=\frac{1}{\theta}$$

$$L=\prod_{i=1}^{n}p_i=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n$$

θ越小 L越大

$$\hat{\theta}_{极}=\frac{X_{(n)}}{2}$$

$$E(\hat{\theta}_{极})=\frac{1}{2}E(X_{(n)})=$$

$\cancel{X_{(n)}}$ $F(x)=\frac{x-\theta}{\theta}$

$$f_k(x)=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}F(x)^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x)$$

$$f_n(x)=nF^{n-1}(x)\frac{1}{\theta}$$

$$=n\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}$$

$$=\frac{n}{\theta^n}(x-\theta)^{n-1}$$ 有偏

$$E(\hat{\theta}_{极})=\frac{1}{2}\cdot\theta\left(\frac{n}{n+1}+1\right)\neq\theta$$

$$E(X_n)=\int_{\theta}^{2\theta}xf_n(x)\,dx$$

$$=\int_{\theta}^{2\theta}\frac{n}{\theta^n}x(x-\theta)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{\theta^n}\int_{\theta}^{2\theta}x(x-\theta)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{\theta^n}\cdot\theta^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)$$ 有偏估计

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为取自总体X的一个样本，总体X服从参数为θ（θ>0）的均匀分布 $U(\theta,2\theta)$，求θ的极大似然估计量，讨论其无偏性。

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}\right)$$

$$=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)}{\theta^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)}$$

$$\ln L=\ln\prod_{i=1}^{n}x_i-n\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$=\frac{1}{\theta}\left(-n+\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$

$$\hat{\theta}_{极}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

(4) $L=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}$

$$=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}$$

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$=0$$

$$\theta+1=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

$$\hat{\theta}_{极}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

5. $L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}$

$$=\left(\frac{1}{2\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$$

$$\ln L=n\ln\frac{1}{2\sigma}-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}$$

$$=-n\ln 2\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=\frac{-n\cdot 2}{2\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma}\left(-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}\right)$$

$$\hat{\sigma}_{极}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$$

6.6 $\theta<X_{(1)}<\dots X_{(n)}<2\theta$

$$p=\frac{1}{\theta}$$

$$L=\prod_{i=1}^{n}p_i=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n$$

当θ越小 L越大

$$\hat{\theta}_{极}=\frac{X_{(n)}}{2}$$

$$E(\hat{\theta}_{极})=\frac{1}{2}E(X_{(n)})=$$

~~$X_{(n)}$~~ $F(x)=\frac{x-\theta}{\theta}$

$$f_k(x)=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}F(x)^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x)$$

$$f_n(x)=nF(x)^{n-1}\frac{1}{\theta}$$

$$=n\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}$$

$$=\frac{n}{\theta^n}(x-\theta)^{n-1}$$

$$E(\hat{\theta}_{极})=\frac{1}{2}\cdot\theta\left(\frac{n}{n+1}+1\right)\neq\theta$$

有偏.

$$E(X_n)=\int_{\theta}^{2\theta}xf_n(x)dx$$

$$=\int_{\theta}^{2\theta}\frac{n}{\theta^n}x(x-\theta)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{\theta^n}\int_{\theta}^{2\theta}x(x-\theta)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{\theta^n}\cdot\theta^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)$$

有偏估计

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体X的一个样本，总体X服从参数为θ $(\theta>0)$的均匀分布 $U(\theta,2\theta)$，求θ的极大似然估计量，讨论其无偏性.

12、设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自对数~~似然~~正态总体

$\ln X \sim N(0, \sigma^2)$ 样本 求 σ^2 极大似然

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\ln^2 x}{2\sigma^2}}$

$L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \sigma^{-n} \cdot e^{\sum_{i=1}^{n} -\frac{\ln^2 X_i}{2\sigma^2}}$

$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln^2 X_i}{2\sigma^2}$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} \ln^2 X_i$

$= \frac{1}{\sigma}(-n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \ln^2 X_i)$

$\hat{\sigma}_{极} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln^2 X_i}{n}}$

$\int_\theta^{2\theta} x(x-\theta)^{n-1} dx$

$= \int_0^\theta (t+\theta) t^{n-1} dt$

$= \int_0^\theta t^n dt + \theta\int_0^\theta t^{n-1} dt$

$= \frac{\theta^{n+1}}{n+1} + \theta \cdot \frac{\theta^n}{n}$

$= \theta^{n+1}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n})$

14. 设总体 X $f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x-\theta}{\alpha}}$ $(x>\theta, \alpha>0)$, $X_1, X_2, \dots X_n$ 为样本

(1) θ 已知，求 α 极大似然，无偏性 $I(\alpha)$ 有效性 (2) α, θ 的极大似然

(1) $L = \frac{1}{\alpha^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i-\theta}{\alpha}}$

$\ln L = -n\ln\alpha - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i-\theta}{\alpha}$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{-n}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}{\alpha^2}$

$= \frac{1}{\alpha}(-n + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta))$

$\hat{\alpha}_{极} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$.

$E(\hat{\alpha}_{极}) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta))$

$= \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) - \theta$

$= E(X) - \theta$

$E(X) = \int_\theta^{+\infty} x f(x) dx = \int_\theta^{+\infty} \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x-\theta}{\alpha}} dx = e^{\frac{\theta}{\alpha}} \int_\theta^{+\infty} \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} dx$

$= \alpha e^{\frac{\theta}{\alpha}} \int_{\frac{\theta}{\alpha}}^{+\infty} t e^{-t} dt$

$\int t e^{-t} = -\int t de^{-t}$

$= -(te^{-t}| - \int e^{-t} dt)$

$-(\frac{\theta}{\alpha}e^{-\frac{\theta}{\alpha}} \quad e^{-t}|_{\frac{\theta}{\alpha}}^{+\infty} \quad - e^{-\frac{\theta}{\alpha}})$

$= \alpha e^{\frac{\theta}{\alpha}}$

$\alpha e^{\frac{\theta}{\alpha}}(\frac{\theta}{\alpha}e^{-\frac{\theta}{\alpha}} + e^{-\frac{\theta}{\alpha}})$

$= \alpha + \theta$

$E(\hat{\alpha}_{极}) = \alpha$

无偏

$I(\alpha) = -E(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \alpha^2})$

$\ln f = \ln\frac{1}{\alpha} - \frac{x-\theta}{\alpha}$

$= -\ln\alpha - \frac{x-\theta}{\alpha}$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} - 2\frac{x-\theta}{\alpha^3}$$

$$I(\alpha) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \alpha^2}\right)$$

$$= -E\left(\frac{1}{\alpha^2} - 2\frac{x-\theta}{\alpha^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2E(x-\theta)}{\alpha^3}$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2E(X) - 2\theta}{\alpha^3}$$

$$E(X) = \alpha + \theta$$

$$I(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^3}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}$$

$\cancel{Var(\alpha) = E(X - 1\ E(X^2) - (E(X))^2}$

$$Var(\hat{\alpha}_{极}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} Var\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)$$

$$= \frac{1}{n^2} n Var(X)$$

$$= \frac{1}{n} Var(X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

$$E(X^2) = \int_{\theta}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{\theta}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x-\theta}{\alpha}} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \int_{\theta}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x-\theta}{\alpha}} dx$$

$$= \frac{e^{\frac{\theta}{\alpha}}}{\alpha} \int_{\theta}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\alpha}} dx$$

$$= \alpha^3 \frac{e^{\frac{\theta}{\alpha}}}{\alpha} \int_{\theta}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 e^{-\frac{x}{\alpha}} d\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha^2 e^{\frac{\theta}{\alpha}} \int_{\frac{\theta}{\alpha}}^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

$$\int t^2 e^{-t} = -\int t^2 de^{-t} = -t^2 e^{-t}\Big| + 2\int t e^{-t} dt$$

$$= \frac{\theta^2}{\alpha^2} e^{-\frac{\theta}{\alpha}} + 2 \cdot \frac{\theta}{\alpha} e^{-\frac{\theta}{\alpha}} + 2e^{-\frac{\theta}{\alpha}}$$

$$E(X)^2 = (\alpha + \theta)^2$$

$$E(X^2) = \theta^2 + 2\alpha\theta + 2\alpha^2$$

$$Var(X) = \alpha^2$$

$$Var(\hat{\alpha}_{极}) = \frac{\alpha^2}{n} = \frac{1}{nI(\alpha)}$$

$\hat{\alpha}_{极}$ 是有效估计

12、设 $X_1, X_2, \ldots$

(2)

$$L = \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$$

$$\ln L = -n\ln\alpha - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$$

又
$x>\theta \quad \alpha>0$

θ越大，L越大

$\hat{\theta} = X_{(1)}$

$$\ln L = -n\ln\alpha - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$$

$$\cancel{\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -n}$$

$$\hat{\alpha}_{极} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}).$$

14.

(1) θ;

(2)

则有

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)=k_1\exp\left\{-\frac{1}{2}[A\mu^2-2B\mu+C]\right\}$$
$$=k_1\exp\left\{-\frac{(\mu-B/A)^2}{2/A}-\frac{1}{2}(C-B^2/A)\right\}.$$

注意到 A,B,C 均与 μ 无关，由此容易算得样本的边际密度函数为

$$m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)\mathrm{d}\mu$$
$$=k_1\exp\left\{-\frac{1}{2}(C-B^2/A)\right\}(2\pi/A)^{1/2},$$

应用贝叶斯公式即可得到后验分布的密度函数

$$\pi(\mu|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{h(x_1,x_2,\cdots,x_n,\mu)}{m(x)}$$
$$=(A/2\pi)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2/A}(\mu-B/A)^2\right\}.$$

这说明在样本给定后，μ 的后验分布的密度函数为 $N(B/A,1/A)$，即

$$\mu|x_1,x_2,\cdots,x_n\sim N\left(\frac{n\bar{x}\sigma_0^{-2}+\theta\tau^{-2}}{n\sigma_0^{-2}+\tau^{-2}},\frac{1}{n\sigma_0^{-2}+\tau^{-2}}\right).$$

后验均值即为其贝叶斯估计：

$$\hat{\mu}=\frac{n/\sigma_0^2}{n/\sigma_0^2+1/\tau^2}\bar{x}+\frac{1/\tau^2}{n/\sigma_0^2+1/\tau^2}\theta,$$

它是样本均值 $\bar{x}$ 与先验均值 θ 的加权平均.

习　题

1. 设总体 $X\sim E(\lambda)$，求 λ 的矩估计量. 如果测得容量为 10 的样本观测值分别为

134　106　125　115　130　120　110　108　105　115

求 λ 的矩估计值.

2. 设总体 X 具有分布列

X	1	2	3
P	θ	θ	$1-2\theta$

其中 $\theta>0$ 未知，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量. 并根据取得的样本观测值：1，

1,2,3,1,2,2,3,2,1,求 θ 的矩估计值.

3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的一组样本观测值,按要求对下列各题中总体参数 θ 进行估计:

(1) $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\leq x\leq 1,\theta>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 θ 的矩估计量和极大似然估计量;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0,\end{cases}$ 求 θ 的矩估计量和极大似然估计量;

(3) $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

(4) $f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$,求 θ 的极大似然估计量.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的一个样本,总体 X 服从参数为 p 的几何分布,即

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 p 未知且 $0<p<1$,求 p 的极大似然估计量.

5. 设总体 X 的密度函数为 $f(x;\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}(-\infty<x<+\infty)$,其中 $\sigma>0$ 未知,设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自这个总体的一个样本. 求 σ 的极大似然估计量.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的一个样本,总体 X 服从参数为 $\theta(>0)$ 的均匀分布 $U(\theta,2\theta)$. 求 θ 的极大似然估计量,并讨论其无偏性.

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的一个样本. 已知期望 $E(X)=0$,而方差 $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ 是未知参数. 试确定 k,使 $T=k\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本,$E(X)=\mu$,$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$,$\hat{\sigma}^2=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$,问 k 为何值时 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

9. 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量,且有 $\mathrm{Var}(\hat{\theta})>0$,试证:$\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

10. 设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,在下列 μ 的无偏估计量

中，最有效的是哪一个？

(1) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$；

(2) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$；

(3) $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$.

11. 若$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$是θ的两个相互独立的无偏估计量，且$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=2\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$，问常数$a$和$b$满足什么条件，才能使$a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$是$\theta$的无偏估计量？$a$和$b$取何值时，$\theta$的无偏估计量$a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$最有效？

12. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自对数正态总体$\ln X\sim N(0,\sigma^2)$的样本，试求参数σ^2的极大似然估计，并计算~~C-R下界~~，判断其是否为有效估计.

13. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，μ已知，试证$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\pi/2}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$是$\sigma$的无偏估计，并求$\hat{\sigma}$的有效率$e(\hat{\sigma})$.

14. 总体X的密度函数为$f(x)=\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{x-\theta}{\alpha}\right)(x>\theta,\alpha>0)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本. (1) 若$\theta$已知，求参数$\alpha$的极大似然估计，并判断其无偏性，计算费希尔信息量$I(\alpha)$，判断极大似然估计是否为有效估计；(2) 求参数$\alpha,\theta$的极大似然估计. ?

15. 总体X的密度函数为$p(x\mid\theta)=\frac{2x}{\theta^2}(0<x<\theta<1)$. 取参数$\theta$的先验分布的密度函数为$\pi(\theta)=3\theta^2(0<\theta<1)$，求$\theta$的后验分布的密度函数.

16. 总体X为均匀分布$U(0,\theta)$，样本为$X_1,X_2,\cdots,X_n$. 取参数θ的先验分布为Pareto分布，即密度函数为$\pi(\theta)=\alpha\theta_0^\alpha/\theta^{\alpha+1}(\theta>\theta_0>0,\alpha>0)$. 求$\theta$的后验分布的密度函数.