作业 （第二章）

4、设总体服从泊松分布 $P(\lambda)$，$\bar{X}$ 是容量为n的样本均值 求 $E(\bar{X})$ $Var(\bar{X})$

分布列 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\ldots\lambda)$

$$E(\bar{X})=E(X)=\lambda$$

$$Var(\bar{X})=\frac{Var(X)}{n}=\frac{\lambda}{n}$$

对 $f(x)=3e^{-3x}$ $(x>0)$，$X_1,X_2,\ldots,X_7$ 为样本，求：

8. (1) $F(x)=1-e^{-3x}$

$$f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x)\quad ,x\in\mathbb{R}$$

$$f_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$f_n(x)=nF(x)^{n-1}f(x)$$

$$f_4(x)=\frac{7!}{3!3!}(1-e^{-3x})^3(e^{-3x})^3(3e^{-3x})$$

$(a+b)^3=$ ~~...~~ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$=140(e^{-3x}-e^{-6x})^3\cdot 3e^{-3x}$$

$$=420(e^{-4x}-e^{-7x})^3$$

$$=\begin{cases}420(e^{-12x}-3e^{-15x}+3e^{-18x}-e^{-21x}) & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(2) $P(X_{(4)}<\sqrt[3]{0.6})$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{0.6}}f_4(x)dx$$

$$=0.99884$$

扫描全能王 创建

(3) $f_{ij}(y,z)=\dfrac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(y)]^{i-1}[F(z)-F(y)]^{j-i-1}[1-F(z)]^{n-j}f(y)f(z)$

$(y\le z)$

$f_{24}(y,z)=\dfrac{7!}{1!1!(7-4)!}(1-e^{-3y})(e^{-3y}-e^{-3z})(e^{-3z})^3(3e^{-3y})(3e^{-3z})$

$=\cancel{840(1-e^{-3y})}$

$840(e^{-3y}-e^{-3z}-e^{-6y}+e^{-3y-3z})\times 9e^{-12z-3y}$

$=7560(e^{-12z-6y}-e^{-15z-3y}-e^{-12z-9y}+e^{-15z-6y})$

11.

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$P\left(-z_{0.025}<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z_{0.025}\right)=0.95$

$P\left(\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}<\bar{X}<\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)=0.95$

$$\begin{cases}\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}<6.2\\ \mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}>4.2\end{cases}$$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}<2$

$n>\left(\dfrac{\sigma z}{2}\right)^2$

$=\dfrac{\sigma^2 1.96^2}{4}=\dfrac{25\times1.96^2}{4}=24.01$ 门限

至少取 $n=25$

课.18.

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$

由 $\dfrac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{n}+\frac{\beta^2}{m}}}\sim N(0,1)$

$\dfrac{\dfrac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{n}+\frac{\beta^2}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{n-1}{\sigma^2}S_1^2+\frac{m-1}{\sigma^2}S_2^2}{n+m-2}}}=\dfrac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{n}+\frac{\beta^2}{m}}}\sim t(m+n-2)$

$\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_1^2\sim\chi^2(n-1)$

$\dfrac{m-1}{\sigma^2}S_2^2\sim\chi^2(m-1)$

由 χ^2 可加性

$\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_1^2+\dfrac{m-1}{\sigma^2}S_2^2\sim\chi^2(n+m-2)$

(3) 次序统计量 $(X_{(2)}, X_{(4)})$ 的联合密度函数.

9. 设总体 $X \sim N(0,1)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本,试证 $U = n\overline{X}^2 + (n-1)S^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布.

10. 设总体 $X \sim N(25, 2^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 为简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值,求:(1) $\overline{X}$ 的数学期望与方差;(2) $P(|\overline{X} - 25| \leqslant 0.3)$.

11. 从正态总体 $N(4.2, 5^2)$ 中抽取容量为 n 的样本,若要求其样本均值位于区间 $(2.2, 6.2)$ 内的概率不小于 $\geqslant 0.95$ 0.95,则样本容量 n 至少取多大?

12. 设两个总体 X, Y 都服从 $N(20,3)$,今分别从两总体中抽得容量为 10 和 15 的相互独立的样本,求 $P(|\overline{X} - \overline{Y}| > 0.3)$.

13. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+m}$ 为总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的样本. 求常数 a 与 b,使得 $a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b(\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i)^2$ 服从 χ^2 分布,并求自由度.

14. 设总体 $X \sim N(\mu, 4^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, S^2 是样本方差. 已知 $P(S^2 > a) = 0.1$,求 a.

15. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$,总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本,两组样本相互独立,求 $\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2$ 的数学期望.

16. 设总体的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\ (-\infty < x < +\infty)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本,其样本方差为 S^2,求 $E(S^2)$.

17. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}(n \geqslant 2)$ 是总体 X 的一个样本, $\overline{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$,令 $Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$,求 $E(Y)$.

18. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 与总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 分别为 X 与 Y 的样本,两组样本相互独立, α, β 为常数,证明

$$T = \frac{\alpha(\overline{X} - \mu_1) + \beta(\overline{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{n} + \dfrac{\beta^2}{m}}}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right\},$$

取 $t_1=\sum_{i=1}^{n}x_i$，$t_2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，并令

$$g(t_1,t_2,\theta)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(t_2-2\mu t_1)\right\},$$

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1,$$

则由因子分解定理知，$T=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$是参数 $\theta=(\mu,\sigma^2)$ 的充分统计量.

习　题

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自 $(0,\theta)$ 上的均匀分布的样本，$\theta>0$ 未知. 指出下列样本函数中哪些是统计量，哪些不是？为什么？

(1) $T_1=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_6\}$；(2) $T_2=X_6-\theta$；(3) $T_3=X_6-E(X_1)$.

2. 证明：样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$.

3. 设样本的一组观测值是：0.5，1，0.7，0.6，1，1，写出样本均值、样本方差和标准差.

4. 设总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，$\overline{X}$ 是容量为 n 的样本的均值，求 $E(\overline{X})$，$\mathrm{Var}(\overline{X})$.

5. 设总体 X 服从均匀分布 $U(-1,1)$，$\overline{X}$ 是容量为 n 的样本的均值，求 $E(\overline{X})$，$\mathrm{Var}(\overline{X})$.

6. 已知 $X\sim t(n)$，证明：$X^2\sim F(1,n)$.

7. 利用 F 分布的性质，证明：$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$.

8. 设总体 X 的密度函数为 $\boxed{f(x)}=\boxed{3e^{-3x}}$ $(x>0)$，$X_1,X_2,\cdots,X_7$ 为样本，求

(1) 次序统计量 $X_{(4)}$ 的密度函数；

(2) 次序统计量 $X_{(4)}$ 小于 $\sqrt[3]{0.6}$ 的概率；