

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2024/2025

Folha 1 - Lógica de primeira ordem e demonstração automática

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

- a) $\exists y P(x, y)$
- b) $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\neg(P(x)) \vee Q(y))$
- c) $\exists x (P(y, z) \wedge \forall y (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$;
- d) $P(a, f(a, b))$;
- e) $\exists x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$;
- f) $\forall x ((P(x) \wedge C(x)) \rightarrow \exists y L(x, y))$.

NOTA. x, y, z, a, b são variáveis.

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

- a) Todas as aves têm penas.
- b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.
- c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.
- d) Nenhum número é menor do que zero.
- e) Zero é menor do que qualquer número.
- f) Alguns números primos não são pares.
- g) Todo o número par é número primo.

3. No que se segue, $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$ representam as afirmações « x é uma explicação clara», « x é satisfatória» e « x é uma desculpa», respectivamente. Admita que o universo do discurso para x é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

- a) $\forall x c(x) \rightarrow s(x)$;
- b) $\exists x d(x) \wedge \neg s(x)$;
- c) $\exists x d(x) \wedge \neg c(x)$.

4. Seja Π o conjunto dos subconjuntos de pontos de um certo plano. Tomando Π para universo e utilizando apenas os três predicados

$r(x)$ representa « x é uma recta»,

$c(x)$ representa « x é uma circunferência»,

$i(x, y)$ representa «a intersecção de x e y é não vazia»,

traduza em lógica de predicados cada uma das afirmações seguintes:

- Toda a recta intersecta alguma circunferência.
 - Alguma recta não intersecta alguma circunferência.
 - Nenhuma recta intersecta todas as circunferências.
5. Escreva as seguintes frases usando lógica de primeira ordem, com recurso aos predicados $\text{Casa}(x)$ (« x é uma casa»); $\text{Grande}(x)$ (« x é grande»); $\text{Cara}(x)$ (« x é cara»); $\text{Apartamento}(x)$ (« x é um apartamento»); $\text{PMenor}(x, y)$ («preço de x é menor do que o preço de y »).
- Todas as casas grandes são caras.
 - Qualquer apartamento custa menos do que pelo menos uma casa grande.
6. Usando o predicado $\text{gosta}(x, y)$ (x «gosta de» y), exprima por meio de uma fórmula a afirmação:
- Toda a gente tem alguém que gosta de si;
 - As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias.
 - Formule a negação da proposição indicada na alínea (a) e escreva uma frase em linguagem comum que traduza essa negação.

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte fórmula

$$\forall y \exists x ((q(x) \rightarrow p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x))) .$$

8. Considere a fórmula

$$Q : \quad \forall x \exists y ((t(x) \wedge v(y, x)) \rightarrow \neg p(x, y))$$

para uma interpretação com o domínio \mathbb{N} e onde $t(x)$ representa « $x > 1$ », $v(y, x)$ representa « $y = x + 1$ » e $p(x, y)$ representa « x divide y ».

- Diga, justificando, qual o valor lógico de Q .
 - Qual o valor lógico da fórmula $(t(x) \wedge v(y, x)) \rightarrow \neg p(x, y)$ para a valoração V com $V(x) = 1$ e $V(y) = 2$.
9. Considere um universo X com os objetos A , B e C (isto é, $X = \{A, B, C\}$) e uma linguagem onde α , β e γ são símbolos de constante, f é um símbolo de função com um argumento e R é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

símbolos de constante: $\alpha \mapsto A$, $\beta \mapsto A$ e $\gamma \mapsto B$;

símbolo de função f : $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$.

símbolo de predicado R : $\{(B, A), (C, B), (C, C)\}$.

Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

- a) $R(\alpha, \beta)$;
- b) $\exists x f(x) = \beta$;
- c) $\forall w R(f(w), w)$.

10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja não válida:

- a) $\forall x (P(x, a) \rightarrow \neg Q(x, a))$, onde a denota um símbolo de constante;
- b) $\exists x \exists y ((P(x, y) \wedge \forall z (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$.

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

- a) $(\forall x S(x)) \rightarrow (\exists z P(z))$;
- b) $\neg(\forall x (S(x) \rightarrow P(x)))$;
- c) $\forall x (P(x) \rightarrow (\exists y Q(x, y)))$;
- d) $\exists x (\neg(\exists y P(x, y)) \rightarrow (\exists z (Q(z) \rightarrow R(x))))$;
- e) $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$.

12. Encontre a forma normal (standard) de Skolem das seguintes fórmulas:

- a) $\neg((\forall x P(x)) \rightarrow (\exists y P(y)))$
- b) $\neg((\forall x P(x)) \rightarrow (\exists y \forall z Q(y, z)))$
- c) $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$

13. Mostre que o conjunto

$$S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$$

é inconsistente.

14. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

- a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;
- b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que « a » e « b » denotam símbolos de constantes.

- a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\};$
- b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\};$
- c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\};$
- d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\};$
- e) $\{P(x, x), P(y, f(y))\};$
- f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\};$
- g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}.$

16. Considerando o conjunto de fórmulas bem formadas

$$\{C(x, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, z, f(t)), C(w, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul}))\}$$

indique se é unificável e, no caso afirmativo, determine o unificador mais geral.

17. Averigüe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

- a) $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a));$
- b) $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y).$

18. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas:

- a) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, b)$ e $C_2 : P(a) \vee Q(a, b);$
- b) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, x)$ e $C_2 : \neg Q(a, f(a)).$

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

$$\mathbf{F1:} \forall x (G(x) \rightarrow \forall y (P(y) \rightarrow L(x, y)))$$

$$\mathbf{F2:} \exists x G(x)$$

$$\mathbf{F3:} \exists x \forall y (P(y) \rightarrow L(x, y))$$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

20. Considere as seguintes afirmações:

- Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.
- O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
- O João estuda com afinco.

- a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

- b) Prove, usando o princípio da resolução, que o João passa a Matemática Discreta.
21. Considere as seguintes afirmações, no universo dos animais:
- Os animais com pelos são mamíferos.
 - Os ursos são animais com pelos.
 - Os coelhos são mamíferos.
 - O Winnie é um urso.
 - O Bugsbunny é um coelho.
 - O Sylvester é um animal com pelos.
- a) Represente-as em lógica de primeira ordem.
- b) Usando o Princípio de Resolução, responda às seguintes perguntas:
- (i) O Winnie é mamífero?
 - (ii) Quais são os mamíferos?
 - (iii) Quem é que tem pelos?
22. Considere cada um dos símbolos de predicado $SH(x)$, $IH(x)$ e $TSP(x)$ cuja interpretação é a seguinte:
- $SH(x)$ representa « x é um super-herói»;
 - $IH(x)$ representa « x é um infra-herói»;
 - $TSP(x)$ representa « x tem super poderes».
- Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.
- a) Explícite os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os símbolos de predicado acima definidos.
- b) Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.
23. São conhecidos os seguintes factos:
- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
 - Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
 - Para todos e quaisquer x , y e z , se x é mais rápido do que y e y é mais rápido do que z , então x é mais rápido do que z .
 - Roger é um coelho;

- Harry é um cavalo.

a) Usando os predicados

- $\text{Cavalo}(x)$ representa « x é um cavalo»;
- $\text{Galgo}(x)$ representa « x é um galgo»;
- $\text{Coelho}(x)$ representa « x é um coelho»;
- $\text{MaisRápido}(x, y)$ representa « x é mais rápido do que y »;

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

Algumas soluções

1 a) x livre, y ligada

b) x livre e ligada, y livre

c) x ligada, y livre e ligada, z livre

d) a e b livres

e) x ligada

f) x ligada, y ligada.

2 a) $\forall x (\text{ave}(x) \rightarrow \text{tempenas}(x))$

b) $\forall x \forall y ((\text{criança}(x) \wedge \text{pai}(x, y)) \rightarrow \text{maisnovo}(x, y))$

c) $\forall x \text{insecto}(x) \rightarrow \exists y (\text{mamifero}(y) \wedge \text{maisleve}(x, y))$

d) $\forall x (\text{numero}(x) \rightarrow x \geq 0)$

e) $\forall x (\text{numero}(x) \rightarrow 0 < x)$

f) $\exists x (\text{primo}(x) \wedge \neg \text{par}(x))$

g) $\forall x (\text{par}(x) \rightarrow \text{primo}(x))$

3 a) Todas as explicações claras são satisfatórias;

b) Algumas desculpas não são satisfatórias;

c) Há desculpas que não são explicações claras.

4 a) $\forall x (r(x) \rightarrow \exists y (c(y) \wedge i(x, y)))$

b) $\exists x \exists y (r(x) \wedge c(y) \wedge \neg i(x, y))$

c) $\forall x (r(x) \rightarrow \exists y (c(y) \wedge \neg i(x, y)))$

5 a) $\forall x ((\text{Casa}(x) \wedge \text{Grande}(x)) \rightarrow \text{Cara}(x))$

b) $\forall x (\text{Apartamento}(x) \rightarrow \exists y (\text{Casa}(y) \wedge \text{Grande}(y) \wedge \text{PMenor}(x, y)))$

6 a) $\forall x \exists y \text{ gosta}(y, x)$

b) $\forall x ((\forall y \text{ gosta}(y, x)) \rightarrow \text{gosta}(x, x))$

c) $\exists x \forall y \neg \text{gosta}(y, x)$; Existe alguém de quem ninguém gosta.

7 $\exists y \forall x \neg (q(x) \rightarrow p(y))$

8 a) A proposição Q é *Verdadeira*.

b) Valor lógico da proposição: *Verdadeiro*;

9 a) Falsa;

b) Falsa;

c) Verdadeira.

11 a) $\exists x \exists z (\neg S(x) \vee P(z))$ (ou $\exists x (\neg S(x) \vee P(x))$)

b) $\exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$

c) $\forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x, y))$

d) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$

e) $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \vee R(x, y, z)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, z)))$, na forma normal conjuntiva.

12 a) $\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y)) \equiv \forall z \perp$

b) $\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg Q(y, f(x, y)))$ (ou $\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x, f(x)))$)

c) $\forall x ((\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x))))$

14 Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

a) $E\Theta = P(h(a), g(x), f(g(x)))$

b) $E\Theta = F(a, h(a), f(y), h(a))$

15 a) $\{f(x)/y, a/z\}$

b) $\{a/x, f(a)/z\}$

c) Não

d) $\{u/x, g(v, v)/y, v/z\}$

e) Não.

f) Não.

g) $\{f(x)/z, g(w)/y\}$

17 a) $P(a) \vee Q(f(a))$

b) $P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$

18 a) $Q(a, b)$

b) Não existe