Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2024/2025

Folha 2 - Princípios de enumeração combinatória

1. A familia Ferreira tem 13 filhos, para além de dois progenitores. Recorrendo ao princípio da gaiola dos pombos responda às seguintes questões:

   a) Quantas pessoas desta família pode garantir que:

      i. Nasceram no mesmo mês?

      ii. Nasceram no mesmo dia da semana?

   b) No próximo sábado, os Ferreira vão dar uma festa para a qual os filhos podem convidar os seus amigos mais próximos. Quantos amigos vão ser convidados por forma a garantir que pelo menos 3 dos convidados são amigos do mesmo filho dos Ferreira?

2. Mostre que num conjunto de cinco números inteiros positivos (arbitrários), existem pelo menos dois com o mesmo valor para o resto da divisão por 4.

3. Mostre que escolhendo cinco números inteiros (distintos) entre 1 e 8, dois deles têm soma igual a 9.

4. Mostre que dados 11 números no intervalo $]0, 1[$, haverá pelo menos dois deles cuja diferença é menor que 0.1.

5. Mostre que num grupo de 20 pessoas escolhidas ao acaso existem pelo menos duas pessoas que têm o mesmo número de amigos dentro do grupo. Note que duas pessoas são consideradas amigas se houver uma relação de amizade recíproca estabelecida entre elas.

6. Considere que $p_1, p_2, \dots, p_n$ são números inteiros positivos.

   a) Mostre que se $p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ objectos são colocados em n caixas, então existe um inteiro i entre 1 e n tal que a i-ésima caixa contém pelo menos p_i objectos.

   b) Fazendo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = r \in \mathbb{N}$ o que se pode afirmar?

7. Durante o mês de Janeiro, o João bebeu 42 cafés. Dado que o João bebe pelo menos um café por dia, mostre que num certo número de dias consecutivos o João bebeu exatamente 17 cafés.

8. Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = 2$ e $|B| = 3$.

   a) Quantas funções podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B? Se $|A|=3$ e $|B| = 2$, qual seria a resposta à pergunta anterior? Indique o princípio combinatório utilizado.

   a) Quantas funções injectivas podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B?

9. Determine o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 e o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 com dígitos distintos.

10. Qual o número de números naturais não superiores a 1000 que não são divisíveis por 4, nem por 6, nem por 9?

11. Num grupo de 50 portugueses, 22 falam inglês, 23 falam espanhol, 17 falam francês, 10 falam inglês e espanhol, 5 falam francês e inglês, 7 falam francês e espanhol e 3 falam as três línguas estrangeiras. Quantas pessoas deste grupo não fala nenhuma língua estrangeira?

12. Num universo de 200 estudantes, 50 estudam Matemática, 140 estudam Economia e 24 estudam ambos os cursos. Dos 200 estudantes, 60 são mulheres, das quais 20 estudam Matemática, 45 estudam Economia e 16 delas estudam ambos os cursos. Determine, para o universo de estudantes considerado, quantos homens é que não estudam nem Matemática nem Economia.

13. Qual é o número de palavras com k carateres que se podem formar considerando um alfabeto de n letras,

    a) sem qualquer restrição.

    b) não podendo existir duas letras consecutivas repetidas.

    c) e que sejam palíndromos (i.e., palavras cujos elementos equidistantes dos extremos são iguais; por exemplo: ana, rever, ertutre).

14. Quantos números entre 1000 e 9999 se podem formar:

    a) contendo o dígito 1.

    b) com todos os dígitos distintos e contendo os dígitos 1 e 2 em posições adjacentes com o 1 a preceder o 2.

    c) com dígitos ímpares a ocupar as posições ímpares (onde a primeira posição corresponde às unidades) e dígitos pares a ocupar posições pares.

Algumas soluções

1 (a) (i) 2; (ii) 3. (b) $2 \times 13 + 1 = 27$.

2 **Obs**: Tenha em conta que existem quatro possibilidades para o resto da divisão por 4.

3 $1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 9$. Escolhendo cinco números entre 1 e 8 vamos obter pelo menos uma destas quatro somas.

4 **Obs**: Considerar a partição do intervalo $]0, 1[$ nos 10 subintervalos $]0, 0.1]$, $]0.1, 0.2]$, $\ldots$, $]0.9, 1[$.

6 (b) Pela alínea anterior podemos afirmar que pelo menos uma das caixas contém r ou mais objetos.

7 Seja a_i o número de cafés que bebeu até ao dia i, para $i = 1, \cdots, 31$. Então $1 \leq a_1 < \cdots < a_{31} = 42$, ou seja, trata-se de uma sequência crescente. Considere-se a sequência (igualmente crescente) $18 \leq a_1 + 17 < \cdots < a_{31} + 17 = 59$. Juntando as duas sequências temos 62 números inteiros positivos entre 1 e 59. Logo, de entre estes números existem pelo menos dois que são iguais e cada um pertence a uma sequência distinta (uma vez que as duas sequências são crescentes). Logo, existem dois índices $1 \leq i < j \leq 31$ tais que $a_j = a_i + 17$. Assim, vem que $a_j - a_i = 17$, ou seja, entre os dias $i + 1$ e j o João bebeu 17 cafés.

8 (a) 9; 8; princípio da multiplicação. (b) 6.

9 Existem 51 pares entre 0 e 100, destes 46 têm algarismos diferentes.

10 611.

11 7.

12 23.

13 (a) n^k (b) $n(n-1)^{k-1}$ (c) $n^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$, onde $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a $\frac{k}{2}$.

14 (a) $9 \times 10^3 - 8 \times 9^3$ (b) $8 \times 7 + 2 \times 7^2$ (c) 500.