

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Distância, Ortogonalidade, Projeção Ortogonal

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

Produto interno em \mathbb{R}^n

Dados os vetores $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- o **produto interno** (ou **produto escalar**) de X e Y é o escalar real

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= X^T Y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \end{aligned}$$

Nota: Pode também utilizar-se a notação $X|Y$ ou $\langle X, Y \rangle$.

- o **comprimento** ou **norma** de X é

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propriedades do produto interno em \mathbb{R}^n

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $X \cdot X \geq 0$;

2. $X \cdot X = 0 \iff X = \mathbf{0}$;

3. $X \cdot Y = Y \cdot X$;

4. i. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$,

ii. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;

5. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;

6. $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade triangular

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|.$$

Teorema (Desigualdade Triangular)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Ângulo entre vetores

Em \mathbb{R}^2 , sejam $X = (\underline{x}, 0)$, $\underline{x} > 0$

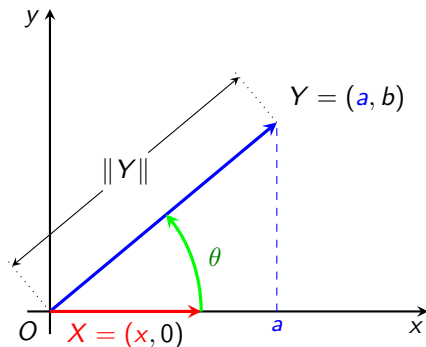
e $Y = (\underline{a}, b) \neq (0, 0)$

vetores não nulos. Temos:

- $X \cdot Y = \underline{x}\underline{a}$ e $\|X\| = x$

- $\frac{X \cdot Y}{\|X\|} = \underline{a} = \|Y\| \cos(\theta)$

Logo, $\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$, $\theta \in [0, \pi]$



Em geral, para $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$, o ângulo entre os vetores X e Y é

$$\theta = \angle(X, Y) = \arccos \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} = \arccos \left(\frac{X}{\|X\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|} \right).$$

Nota: pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $\left| \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \right| \leq 1$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Vetores ortogonais, colineares, com mesmo sentido e unitários

- Dados os vetores $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$
 - ▶ X e Y são **ortogonais ou perpendiculares**, $X \perp Y$,
se $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e. se $X \cdot Y = 0$.
 - ▶ X e Y são **colineares ou paralelos ou têm a mesma direção**,
se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, i.e. se $|X \cdot Y| = \|X\| \|Y\|$.
 - ▶ X e Y **têm o mesmo sentido**,
se $\theta = 0$, i.e. se $X \cdot Y = \|X\| \|Y\|$.
 - ▶ X e Y **têm sentido oposto ou contrário**,
se $\theta = \pi$, i.e. se $X \cdot Y = -\|X\| \|Y\|$.

Por convenção, se $X = 0$ ou $Y = 0$, então X e Y são colineares e ortogonais.

- Um vetor **unitário** é um vetor de norma igual a 1.

Se $X \neq 0$, o vetor

$$U = \frac{1}{\|X\|} X$$

é um vetor unitário com a mesma direção e sentido de X .

Conjunto ortogonal e ortonormado em \mathbb{R}^n

Um conjunto $\{X_1, \dots, X_k\}$ de vetores de \mathbb{R}^n diz-se **ortogonal** se

$$X_i \cdot X_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

e diz-se **ortonormado** (**o.n.**) se é ortogonal e também se verifica

$$X_i \cdot X_i = 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

- Exemplo:**
1. $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$ é ortogonal;
 2. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ é o.n.

Teorema: Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

Corolário: Todo o conjunto o.n. é l.i.

Coordenadas de um vetor de \mathbb{R}^n numa base o.n.

Uma **base ortogonal/o.n.** é uma base que é um conjunto ortogonal/o.n.

Nota: Todo o conjunto o.n. de n vetores de \mathbb{R}^n é uma **base** de \mathbb{R}^n .

Teorema: Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ uma **base o.n.** de \mathbb{R}^n . Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é, $X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$, sendo $a_i = X \cdot X_i$, $i = 1, \dots, n$.

Exemplo: Determinar as coordenadas do vetor $(1, 5)$ na base o.n. de \mathbb{R}^2

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right).$$

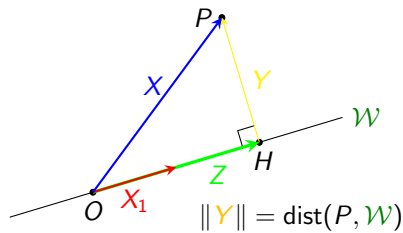
Projeção ortogonal em \mathbb{R}^n

$Y \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n se $Y \cdot Z = 0$ para cada $Z \in \mathcal{W}$.

Teorema: Seja $Y \in \mathbb{R}^n$ e \mathcal{B} uma base de um subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n . Então,
 Y é ortogonal a \mathcal{W} se e só se Y é ortogonal a cada vetor de \mathcal{B} .

A **projeção ortogonal** de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n é o vetor $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X \in \mathcal{W}$ tal que $X = Y + Z$, sendo Y ortogonal a \mathcal{W} .

Exemplo: Sejam $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ uma reta, $\{X_1\}$ base o.n. de \mathcal{W} e $X = \overrightarrow{OP}$. Logo, $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha X_1$ e $Y \cdot X_1 = 0$.
Então, se $X = Y + Z = Y + \alpha X_1$,
 $X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha$.
Portanto, $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1$.

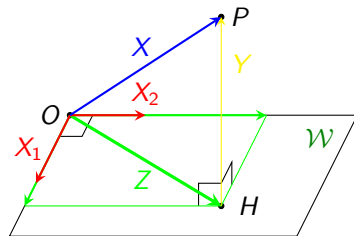


Projeção ortogonal sobre um plano em \mathbb{R}^3

Exemplo: Sejam \mathcal{W} um plano gerado pela **base o.n.** $\{X_1, X_2\}$ e $X = \overrightarrow{OP} = Z + Y$, com $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ e $Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0$. Então, sendo

$$X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \\ X \cdot X_1 = \alpha_1 \text{ e } X \cdot X_2 = \alpha_2.$$

$$\text{Logo, } \text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1)X_1 + (X \cdot X_2)X_2.$$



$$\|Y\| = \text{dist}(P, \mathcal{W})$$

Teorema: A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n é

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1)X_1 + \cdots + (X \cdot X_k)X_k \in \mathcal{W},$$

em que $\{X_1, \dots, X_k\}$ é uma **base o.n.** de \mathcal{W} .

Nota: $Y = X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X$ é ortogonal a todos os vetores de \mathcal{W} .

Método de ortonormalização de Gram-Schmidt (opcional)

Teorema: Todo o subespaço $\mathcal{W} \neq \{0\}$ de \mathbb{R}^n possui uma base o.n.

Ideia da Demonstração:

Dada $\{X_1, \dots, X_m\}$ uma base de \mathcal{W} , sejam $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$, e

$$X'_k = X_k - \sum_{i=1}^{k-1} (X_k \cdot Y_i) Y_i, \quad Y_k = \frac{X'_k}{\|X'_k\|},$$

para $k = 2, \dots, m$. Pode verificar-se que $\mathcal{B} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ é um conjunto o.n., logo l.i. em \mathcal{W} . Sendo $\dim \mathcal{W} = m$, conclui-se que \mathcal{B} é uma base o.n. de \mathcal{W} .

Exemplo:

Determinar uma base o.n. de $\langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, -1, 3), (2, 1, -2, 2) \rangle$.

Produto externo em \mathbb{R}^3

Dados os vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

- o **produto externo** (ou **produto vetorial**) de X e Y é o vetor de \mathbb{R}^3

$$X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nota: Para determinar o produto externo pode utilizar-se COMO AUXILIAR DE CÁLCULO o seguinte “determinante simbólico”

$$X \times Y \longleftrightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} i &= (1, 0, 0) \\ j &= (0, 1, 0) \\ k &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

fazendo o seu desenvolvimento pela primeira linha.

Propriedades do produto externo em \mathbb{R}^3

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e O o vetor nulo de \mathbb{R}^3

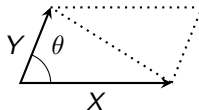
1. $X \times Y = -(Y \times X)$;
2.
 - i. $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$,
 - ii. $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$;
3. $\alpha(X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y)$;
4. $X \times X = O$;
5. $X \times O = O \times X = O$;
6. $X \times Y$ é ortogonal a X e a Y .
7. $\|X \times Y\| = \|X\| \|Y\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre X e Y .

Uma aplicação do produto externo

Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, então

- a **área do paralelogramo** com lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\diamond} = \|X \times Y\|$$



- a **área do triângulo** com dois dos seus lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\triangle} = \frac{\|X \times Y\|}{2}$$

Aplicações do Produto Interno. Relembrar retas em \mathbb{R}^3

Dada uma reta \mathcal{R} em \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto P e tem vetor diretor v , temos

$$X \in \mathcal{R} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v.$$

Uma **equação vetorial** da reta \mathcal{R} é $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a partir da qual se obtêm as **equações paramétricas** de \mathcal{R} :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

sendo $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Eliminando o parâmetro α do anterior sistema, obtém-se um sistema de grau 1 com 3 incógnitas e 2 equações, ditas as **equações cartesianas** de \mathcal{R} .

Planos em \mathbb{R}^3 – Equações vetoriais e paramétricas

Dado um plano \mathcal{P} em \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto P e tem vetores diretores u e v (não colineares),

$$X \in \mathcal{P} \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v.$$

Uma **equação vetorial** do plano \mathcal{P} é

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

a partir da qual se obtêm as **equações paramétricas** de \mathcal{P} :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

com $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Planos em \mathbb{R}^3 – Equações cartesianas

Eliminando os parâmetros α e β do anterior sistema, obtém-se uma equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dita equação (cartesiana) geral do plano \mathcal{P} .

Verifica-se que $w = (a, b, c)$ é um vetor não nulo ortogonal a \mathcal{P} . De facto, dois pontos arbitrários deste plano, $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1$, satisfazem

$$ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = 0, 1,$$

donde

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

ou seja, para qualquer vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$ do plano \mathcal{P} , tem-se

$$w \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0.$$

Distâncias

A **distância entre dois pontos** P e Q de \mathbb{R}^n é

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Em particular, para $Q(x_1, \dots, x_n)$ e $P(y_1, \dots, y_n)$, tem-se

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

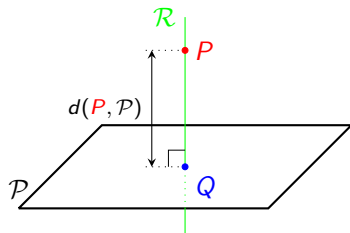
Dados um ponto, reta ou plano \mathcal{F} e um ponto, reta ou plano \mathcal{G} de \mathbb{R}^3 , a **distância entre \mathcal{F} e \mathcal{G}** é

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \min \{ d(P, Q) : P \in \mathcal{F}, Q \in \mathcal{G} \}.$$

Nota: Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, então $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$. Interessa-nos o caso em que \mathcal{F} é um ponto e \mathcal{G} é uma reta ou um plano, respetivamente.

Distância de um ponto a um plano

Dados um plano \mathcal{P} e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, existe uma única reta \mathcal{R} perpendicular ao plano \mathcal{P} e contendo o ponto P .



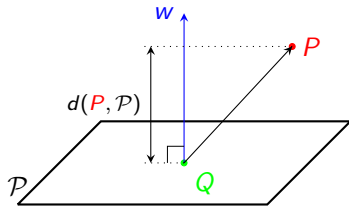
A distância do ponto P ao plano \mathcal{P} é

$$d(P, \mathcal{P}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da reta \mathcal{R} com o plano \mathcal{P} .

Distância de um ponto a um plano (equação geral)

Dados um plano \mathcal{P} e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, sejam $Q \in \mathcal{P}$ e w um vetor não nulo ortogonal ao plano \mathcal{P} .



Então,

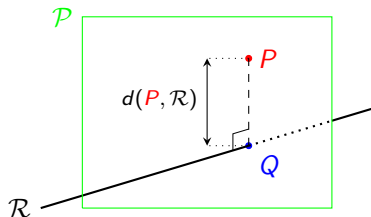
$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot w|}{\|w\|}.$$

Sendo $P(x_0, y_0, z_0)$ e $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral do plano \mathcal{P} , tem-se

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distância de um ponto a uma reta

Dada uma **reta** \mathcal{R} e um **ponto** $P \notin \mathcal{R}$, existe um único **plano** \mathcal{P} perpendicular a \mathcal{R} e que contém P .



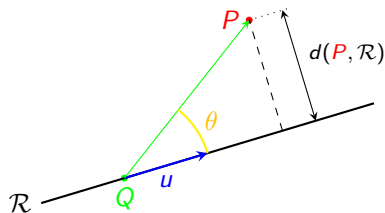
A **distância** do **ponto** P à **reta** \mathcal{R} é

$$d(P, \mathcal{R}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da **reta** \mathcal{R} com o **plano** \mathcal{P} .

Distância de um ponto a uma reta (equação vetorial)

Dada uma **reta** \mathcal{R} que passa pelo **ponto** Q e que tem **vetor diretor** u ,



e um **ponto** $P \notin \mathcal{R}$, tem-se que

$$d(P, \mathcal{R}) = \|\overrightarrow{QP}\| |\sin(\theta)| = \frac{\|u \times \overrightarrow{QP}\|}{\|u\|},$$

sendo θ o ângulo entre os vetores u e \overrightarrow{QP} .

Problema dos mínimos quadrados

- ▶ Em muitas aplicações encontramos sistemas sem solução (impossíveis ou inconsistentes). Ao mesmo tempo gostaríamos de encontrar uma solução. **Como fazer?**
- ▶ Uma situação típica é a chamada **regressão linear**:
dada um conjunto de pontos do plano (que muitas vezes é o resultado de uma série de medidas com alguma incerteza), encontre a reta que “melhor se aproxima” desses pontos.
- ▶ Este é um caso especial de uma classe maior de problemas de modelos lineares, onde pretendemos encontrar a **“melhor aproximação possível”**.
- ▶ Sistemas inconsistentes de equações lineares podem ser pensados como **como problemas de mínimos quadrados**, onde a (s) solução (ões) é (são) a (as) “melhor (es) possível (eis)” em certo sentido.

Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$, onde A é $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Sabemos que o sistema é possível

$$\Leftrightarrow b \in \mathcal{C}(A).$$

Se b não está em $\mathcal{C}(A)$, o que podemos fazer?

Em vez de tentar resolver o problema $Ax = b$, podemos tentar fazer com que o erro $\|b - Ax\|$ seja o menor possível, ou seja, quanto menor for a distância entre b e Ax , dada por $\|b - Ax\|$, melhor é a aproximação.

Isto é chamado **problema de mínimos quadrados** (porque a expressão $\|b - Ax\|^2$ é uma soma de quadrados).

Definição

Seja $A \in m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma **solução dos mínimos quadrados** do sistema $Ax = b$ se

$$\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Nota: Uma vez que $\mathcal{C}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$, \hat{x} é tal que $A\hat{x}$ dá a melhor aproximação de b entre todos os vetores em $\mathcal{C}(A)$.

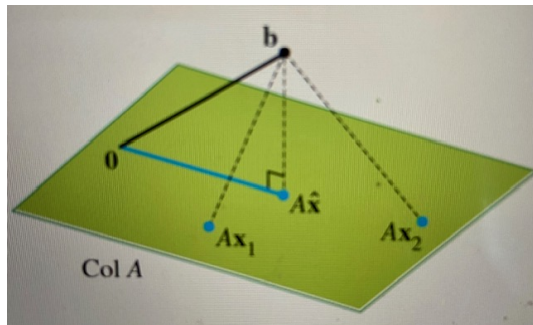


Figure: O vetor b é o mais próximo a $A\hat{x}$ do que a qualquer vetor Ax para qualquer x .

Teorema da melhor aproximação

Seja W um subspaço de \mathbb{R}^n e y qualquer vetor em \mathbb{R}^n . Seja \hat{y} a projeção ortogonal de y em W . Então \hat{y} é o vetor em W mais próximo de y , no sentido que

$$\|y - \hat{y}\| < \|y - v\|,$$

para qualquer v em W distinto de \hat{y} .

- ▶ O vetor \hat{y} é chamado a melhor aproximação para y por elementos de W .
- ▶ A distância de y a v , dada por $\|y - v\|$, é encarada como o erro ao usar v em vez de y .
- ▶ O teorema anterior diz que esse erro é minimizado quando $v = \hat{y}$.

Do Teorema da melhor aproximação, obtemos que a melhor solução dos mínimos quadrados \hat{x} é determinada usando

$$A\hat{x} = \hat{b}$$

onde $\hat{b} := \text{Proj}_W(b)$ com $W := \mathcal{C}(A)$.

Se $\hat{b} \in W = \mathcal{C}(A)$, assim o sistema $A\hat{x} = \hat{b}$ é sempre consistente. Logo, existem sempre soluções dos mínimos quadrados e estas são encontradas ao resolvermos o sistema $A\hat{x} = \hat{b}$.

Assim, podemos escrever a seguinte observação básica:

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$



\hat{x} é uma solução do sistema (possível) $A\hat{x} = \hat{b}$
onde $\hat{b} = \text{Proj}_W(b)$ e $W = \mathcal{C}(A)$.

Nota:

- ▶ Assuma-se que o sistema $Ax = b$ é consistente, ou seja, $b \in W = \mathcal{C}(A)$. Então $\hat{b} = \text{Proj}_W(b) = b$. Assim, soluções dos mínimos quadrados são as mesmas soluções usuais do sistema.
- ▶ Suponhamos que as colunas de A são linearmente independentes (por outras palavras, a forma escalonada de A tem pivots em todas as colunas). Então o sistema $A\hat{x} = \hat{b}$ tem uma solução única. Isto significa que $Ax = b$ tem uma única **solução dos mínimos quadrados**.
- ▶ Se A tem colunas linearmente dependentes, segue de um modo semelhante que $Ax = b$ tem um número infinito de soluções dos mínimos quadrados.
- ▶ $\|b - A\hat{x}\| = \|b - \hat{b}\|$ é chamado o **erro dos mínimos quadrados**: dá a mínima distância entre b e vetores da forma Ax .

O método que apresentámos para calcular a solução dos mínimos quadrados é eficiente mas é necessário usar muitos cálculos.

Para calcular $\hat{b} = \text{Proj}_W(b)$ precisamos primeiro de uma base ortogonal para $W = \mathcal{C}(A)$ (ver método Gram-Schmidt).

Depois precisamos de calcular \hat{b} . E finalmente resolver o sistema $A\hat{x} = \hat{b}$.

Existe um método mais simples!

Teorema

Considere o sistema $Ax = b$ onde A é $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ and $b \in \mathbb{R}^m$. Então

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$



$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é a solução (do sistema possível)

$$A^T Ax = A^T b.$$

Nota:

$A^T Ax = A^T b$ são muitas vezes chamadas equações normais para $Ax = b$.

Exemplo 1 Encontre uma solução dos mínimos quadrados do sistema inconsistente $Ax = b$ para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Solução Para usar as equações normais calculemos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Então a equação $A^T A x = A^T b$ fica:

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Operações nas linhas podem ser usadas para resolver este sistema mas como $A^T A$ é invertível e 2×2 , é fácil calcular:

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$$

e, portanto, para resolver $A^T A x = A^T b$, vem

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 84 \\ 168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Em muitas situações $A^T A$ é invertível mas isso nem sempre acontece. Veja-se o próximo exemplo.

Encontre uma solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad A^T b = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada para $A^T A x = A^T b$ é:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral é

$$x_1 = 3 - x_4$$

$$x_2 = -5 + x_4$$

$$x_3 = -2 + x_4$$

e x_4 é livre. A solução geral dos mínimos quadrados de $Ax = b$ é então:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Critério para solução única dos mínimos quadrados

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. A equação $Ax = b$ tem uma única solução dos mínimos quadrados, para cada $b \in \mathbb{R}^n$.
2. As colunas de A são l.i.
3. a matriz $A^T A$ é invertível.

Se o anterior for verdadeiro, a solução dos mínimos quadrados é dada por

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Regressão linear

Exemplo 2: Dado um conjunto de pontos $(2, 1), (2, 2), (-2, 0), (-2, -1)$ em \mathbb{R}^2 será que existe uma reta que contém estes pontos?

A reta será da forma $y = \alpha x + \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Portanto, α e β têm de obedecer as seguintes equações

$$1 = 2\alpha + \beta$$

$$2 = 2\alpha + \beta$$

$$0 = -2\alpha + \beta$$

$$-1 = -2\alpha + \beta$$

o que é impossível!

Queremos determinar a reta "mais próxima" destes pontos. Note-se que facto de o sistema acima ser impossível quer dizer que

$$(1, 2, 0, -1) \notin \langle (2, 2, -2, -2), (1, 1, 1, 1) \rangle.$$

O vetor de $U = \langle (2, 2, -2, -2), (1, 1, 1, 1) \rangle$ mais próximo de $(1, 2, 0, -1)$ é $\text{proj}_U(1, 2, 0, -1)$.

Note-se que

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

é uma base ortonormada de $\langle (2, 2, -2, -2), (1, 1, 1, 1) \rangle$ (verifique!).

Logo,

$$\begin{aligned}\text{proj}_U((1, 2, 0, -1)) &= ((1, 2, 0, -1) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right))\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \\ &\quad + ((1, 2, 0, -1) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right))\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Temos que $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ é o vetor de $\langle (2, 2, -2, -2), (1, 1, 1, 1) \rangle$ mais próximo de $(1, 2, 0, -1)$.

Como $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in \langle (2, 2, -2, -2), (1, 1, 1, 1) \rangle$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= 2\alpha + \beta \\ \frac{3}{2} &= 2\alpha + \beta \\ -\frac{1}{2} &= -2\alpha + \beta \\ -\frac{1}{2} &= -2\alpha + \beta\end{aligned}$$

que tem solução $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

A reta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ é a equação da reta mais próxima dos pontos $(2, 1), (2, 2), (-2, 0), (-2, -1)$.

A Reta:

