Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame de Recurso **7 de Fevereiro de 2024**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do exame: 2h30m

---

*(3,5 val.)***1)** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

onde a é um parâmetro real.

(a) Mostre que A é invertível se e só se $a \neq \frac{1}{3}$.

(b) Considere $a = 1$. Justifique que o sistema de equações lineares $AX = b$ é possível e determinado, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine o valor da incógnita w pela regra de Cramer.

(c) Considere $a = 1$. Encontre uma decomposição LU da matriz A.

*(1,5 val.)***2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ invertível e a matriz $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que $2A^T X + C = 0$, onde 0 denota a matriz nula do tipo 3×3.

*(2,5 val.)***3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e $B = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$.

(a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a matriz de mudança da base canónica para a base B e o vetor das coordenadas de $(2,-1,1)$ na base B.

*(2 val.)***4)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$. Mostre que $\lambda = 10$ é o único valor próprio da matriz A. Obtenha o subespaço próprio U_{10} associado ao valor próprio 10 e verifique se A é diagonalizável.

(v.s.f.f)

(1,5 val.) **5)** Mostre que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$ é solução dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2 val.) **6)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, a, 1)$, onde a é um parâmetro real.

a) Determine a de modo que u e v sejam ortogonais.

b) Determine a de modo que a área do paralelogramo definido por u e v seja igual a 2.

(2,5 val.) **7)** Considere a cónica de equação

$$x^2 - 8xy - 5y^2 + 2x - y + 1 = 0.$$

Obtenha uma equação reduzida da cónica e classifique-a.

(2,5 val.) **8)** Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $L(1, 0, 0) = (1, -1, 0, 1)$, $L(0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$ e $L(0, 0, 1) = (0, 1, 2, 3)$.

(a) Determine $L(x, y, z)$.

(b) Verifique se L é injetiva.

(c) Verifique se L é sobrejetiva.

(2 val.) **9)** Justifique as seguintes afirmações (verdadeiras).

a) Considere o espaço vetorial $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ das matrizes do tipo 2×2. O subconjunto

$$S = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \,:\, det(A) = 0\},$$

das matrizes de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ com determinante igual a zero, não é um subespaço de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

b) Seja A uma matriz quadrada do tipo $n \times n$ com valores próprios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Então o determinante de A é $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.