

MATEMÁTICA DISCRETA

Ano Letivo 2024/2025 (Versão: 13 de Maio de 2025)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
<https://elearning.ua.pt/>

CAPÍTULO V

ELEMENTOS DE TEORIA DOS GRAFOS

PARTE II

CAMINHOS DE CUSTO MÍNIMO

1. Alguns conceitos métricos
2. Conexidade
3. Grafos particulares
4. Problemas de caminho de custo mínimo em grafos

1. ALGUNS CONCEITOS MÉTRICOS

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio- (v_0, v_k)). O vértice v_0 designa-se por **vértice inicial** do passeio P e v_k designa-se por **vértice final** do passeio P , os vértices v_1, \dots, v_{k-1} designam-se por **vértices intermédios**.

Nota

Num grafo simples, um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices; isto é, basta considerar

$$P = (v_0, v_1, \dots, v_k).$$

Definição

Seja G um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** P em G é um circuito com pelo menos uma aresta onde o vértice inicial e os vértices intermédios são diferentes dois a dois, ou seja:
 1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
 2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
 3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ é um caminho.

Nota

Num grafo simples, um ciclo tem pelo menos três vértices.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ um passeio de G . Então, o **comprimento de P** é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

Exemplos

Uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por **distância** entre vértices de G a função

$$\text{dist}: V \times V \longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \min\{\text{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \emptyset. \end{cases}$$

A maior distância entre os vértices de G denota-se por **diâmetro** de G , isto é, $\text{diam}(G) = \max_{x,y \in V} \text{dist}(x, y)$.

Nota

Tem-se

$$\text{dist}(x, x) = 0, \quad \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z) \geq \text{dist}(x, z),$$

e $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$, para todos os $x, y, z \in V$, com G não orientado.

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- G contém um caminho P tal que $\text{comp}(P) \geq \delta(G)$.
- Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $\text{comp}(C) \geq \delta(G) + 1$.

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G .

Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

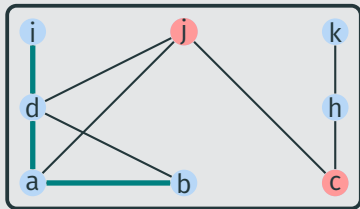
$$\text{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v_k, v_{i_0})$ é um ciclo (note-se que $(v_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v_k)$ tem pelo menos três vértices porque $d(v_k) \geq 2$) de comprimento $d(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$. □

2. CONEXIDADE

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G . O grafo G com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

Exemplo

Grafo conexo

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G . O grafo G com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

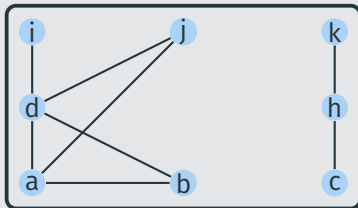
Nota

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo conexo. Então, $\nu(G) \leq \varepsilon(G) + 1$.

Ver exercício 25.

Definição

As **componentes conexas** de um grafo G são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos **maximais** e o número de componentes conexas de G denota-se por $cc(G)$.

Exemplo

$$cc(G) = 2.$$

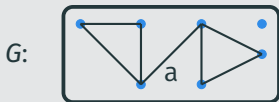
Nota

- Um grafo G é conexo se e só se $cc(G) = 1$.

Definição

Uma aresta a de um grafo G diz-se uma **ponte** (ou uma **aresta de corte**) de G quando os pontos extremos de a são desconexos em $G - a$.

Exemplo



A aresta a é uma ponte de G .

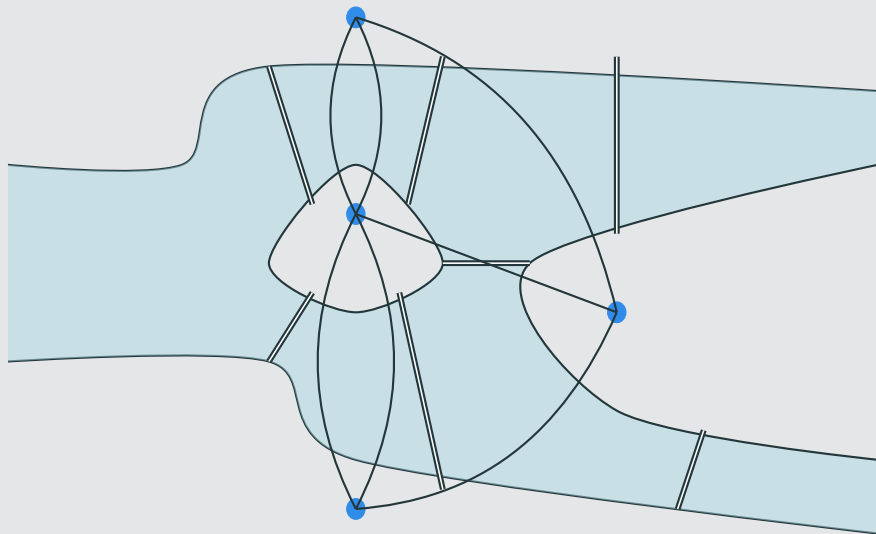
Nota

Portanto, num grafo finito G , uma aresta a de G é uma ponte se e só se $cc(G - a) > cc(G)$, mais concretamente, se e só se $cc(G - a) = cc(G) + 1$.

Teorema

Uma aresta \underline{a} de um grafo G é uma ponte se e só se \underline{a} não pertence a nenhum ciclo de G .

Exemplo



Definição

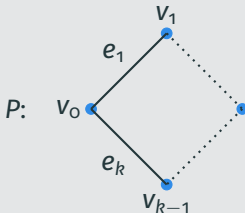
Seja G um grafo finito. Um circuito em G diz-se **circuito de Euler** quando contém todas as arestas de G .

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G têm grau par.

Demonstração.

Suponha que G tem um circuito de Euler, digamos



Se um vértice v aparece n vezes em P , então $d(v) = 2n$ é par (porque todas as arestas são diferentes).

Definição

Seja G um grafo finito. Um circuito em G diz-se **circuito de Euler** quando contém todas as arestas de G .

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G têm grau par.

Demonstração.

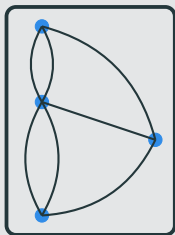
Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja



um trajeto de maior comprimento em G . Logo, P contém todas as arestas com um vértice em v_k . Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de P ; neste caso existe uma aresta $v \text{ --- } v_i$ fora de P com v_i em P . Então,



é um trajeto mais comprido, uma contradição. □

Exemplo

Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, logo, não existe um circuito de Euler.

Definição

Seja G um grafo finito. Um trajeto em G diz-se **trajeto de Euler** quando contém todas as arestas de G .

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um trajeto de Euler se e só o número de vértices de grau ímpar é 0 ou 2.

3. GRAFOS PARTICULARES

Definição

Um grafo simples G diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \emptyset$, ou seja, quando não tem arestas.

Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por K_n e tem-se $\varepsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.
- Cada grafo nulo é simples. De facto, os grafos nulos são, precisamente, os grafos complementares dos grafos completos. Portanto, denotamos o grafo nulo com n vértices por K_n^c .

Exemplos (Grafos completos)


 K_1

 K_2

 K_3

 K_4

 K_5

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se **k -regular** quando todos os seus vértices têm grau k . Um grafo G diz-se **regular** quando G é k -regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n - 1)$ -regular. De facto, um grafo simples G com n vértices é $(n - 1)$ -regular se e só se G é completo.
- Um grafo G é 0-regular se e só se G é um grafo nulo.

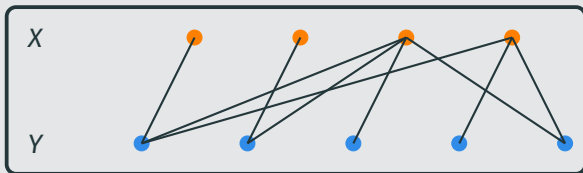
Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$, tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de X , nem entre qualquer par de vértices de Y , ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y .

O par (X, Y) designa-se por **bipartição dos vértices**. Neste caso denota-se G por (X, Y, E, ψ) (ou simplesmente (X, Y, E) se G é simples).

Exemplo



Teorema

Um grafo G é bipartido se e só se G não tem ciclos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com a partição (X, Y)) e seja



um ciclo em G . Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, ..., $v_{k-1} \in Y$ e $v_k \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices em P e, por isso, um número par de arestas.

Teorema

Um grafo G é bipartido se e só se G não tem ciclos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem ciclos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$, onde

$$X = \{x \in V \mid \text{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in V \mid \text{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\}.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam

$$P: \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \\ x \qquad \qquad \qquad x_0 \end{array} \qquad P': \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \\ x_0 \qquad \qquad \qquad x' \end{array}$$

caminhos de menor comprimento (necessariamente par). Portanto,

$$\begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad a \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \\ x_0 \qquad \qquad x' \quad x \qquad \qquad x_0 \end{array}$$

é um passeio fechado de comprimento ímpar, logo existe um ciclo de comprimento ímpar (TPC!!), uma contradição. □

4. PROBLEMAS DE CAMINHO DE CUSTO MÍNIMO EM GRAFOS

File Edit View History Bookmarks Tools Help

OpenStreetMap

https://www.openstreetmap.org/directions?engine=graphhopper_foot&

OpenStreetMap Edit History Export

GPS Traces User Diaries Copyright Help About Log In Sign Up

University of Aveiro, Rua Castro Matoso, Gl
Dragon Stadium, Rua Professor Manuel Ba
Foot (GraphHopper) Go
Reverse Directions

Directions

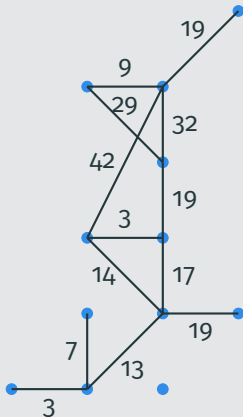
Distance: 75km. Time: 15:01.
Ascend: 733m. Descend: 605m.

1. Continue 10m
2. Turn slight right 30m
3. Turn left 70m
4. Turn left 110m
5. Turn right 10m
6. Keep right 140m
7. Turn right 10m
8. Turn left onto Avenida João Jacinto Magalhães 180m
9. At roundabout, take exit 3 onto Avenida de Artur Ravara 400m
10. Continue onto Avenida de Santa Joana 200m
11. At roundabout, take exit 2 onto Avenida 5 de Outubro 100m
12. Turn right onto Rua Passos Manuel 10m
13. Turn left onto Rua Jaime de Moniz 10m

10 km
5 mi

© OpenStreetMap contributors • Make a Donation, Website and API terms

Na linguagem de grafos



- Os vértices representam cruzamentos
- As arestas representam estradas com distância/tempo/preço/ ...

Definição

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma **matriz de custos**

$$W: V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar E .)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ em G , o **custo de P** é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

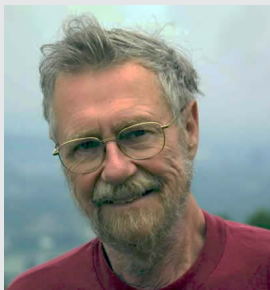
(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

Objetivo

Encontrar o **caminho de menor custo** entre dois vértices.

Considerações iniciais

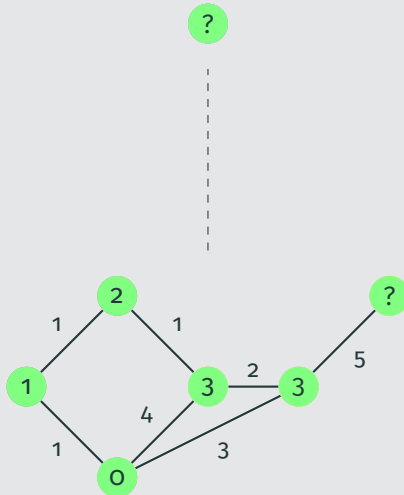
Se $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k)$ é o caminho de menor custo entre v_0 e v_k , então $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ é o caminho de menor custo entre v_0 e v_{k-1} .



Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002), matemático e cientista da computação holandês.

Ver também <https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/welcome.html>.

A ideia



Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

As variáveis

- **start** = vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
 - **marca**(v) = custo do caminho de menor custo entre **start** e v (até ao momento).
 - **ant**(v) = antecessor de $v \neq \text{start}$ no caminho de menor custo entre **start** e v (até ao momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.
- **menor** = vértice de menor custo (no momento).

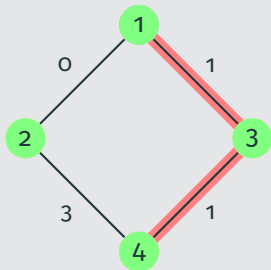
O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
 - Para cada $v \in V$: **marca**(v) = ∞ , **ant**(v) = \emptyset .
 - **marca**(start) = 0.
 - **temp** = $V \setminus \{\text{start}\}$ e **menor** = start.
- Repetir:
 - $c_{\text{aux}} = \infty$.
 - Para todo o v em **temp**:
 - Se **marca**(v) > **marca**(menor) + $W(\text{menor}, v)$, então
$$\begin{aligned}\mathbf{marca}(v) &= \mathbf{marca}(\text{menor}) + W(\text{menor}, v), \\ \mathbf{ant}(v) &= \text{menor}.\end{aligned}$$
 - Se **marca**(v) < c_{aux} então $c_{\text{aux}} = \mathbf{marca}(v)$ e $v_{\text{aux}} = v$ (memorizar menor custo).
 - **temp** = **temp** $\setminus \{v_{\text{aux}}\}$ e **menor** = v_{aux} .

Até que: **menor** = vértice final.

Exemplo

1	2	3	4	menor	temp
(0, -)	(∞ , -)	(∞ , -)	(∞ , -)	1	{2, 3, 4}
	(0, 1)	(1, 1)	(∞ , -)	2	{3, 4}
		(1, 1)	(3, 2)	3	{4}
			(2, 3)	4	\emptyset



- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).