



Rapport Projet Télécommunications

Partie I

Rivière Alexandre
Lacroix Yann

Département Sciences du Numérique - Première année
2019-2020

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Objectifs de ce projet	4
1.2	Schéma général des chaînes à étudier (canal AWGN)	4
1.2.1	Génération de l'information binaire à transmettre	4
1.2.2	Mapping	4
1.2.3	Suréchantillonnage	4
1.2.4	Filtrage de mise en forme	4
1.2.5	Canal de transmission AWGN	5
1.2.6	Filtrage de réception	5
1.2.7	Echantillonnage	5
1.2.8	Décisions	5
1.2.9	Demapping	5
2	Chaînes à étudier	5
2.1	Première chaîne à étudier : "chaîne de référence"	5
2.1.1	Etude théorique	6
2.1.2	Implantation sous Matlab	9
2.2	Deuxième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de réception	11
2.2.1	Etude théorique	12
2.2.2	Implantation sous Matlab	14
2.3	Troisième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée	17
2.3.1	Etude théorique	17
2.3.2	Implantation sous Matlab	18
2.4	Quatrième chaîne à étudier : impact du choix du mapping	21
2.4.1	Etude théorique	22
2.4.2	Implantation sous Matlab	23
3	Conclusion	26

Table des figures

1	Chaîne de transmission en bande de base	4
2	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$	6
3	Signal en sortie du filtre de réception pour une suite de bits émise égale à 0110100 et $T_s = 10\text{ms}$	7
4	Diagramme de l'oeil avec $T_s = 10\text{ms}$	7
5	Signal en sortie du filtre de mise en forme	9
6	Densité spectrale de puissance du signal de la figure 5	9
7	Signal en sortie du filtre de réception	10
8	Diagramme de l'oeil chaîne de référence	11
9	Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique	11
10	Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception	12
11	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$	12
12	Signal en sortie du filtre de réception pour une suite de bits émise égale à 0110100 et $T_s = 10\text{ms}$	12
13	Diagramme de l'oeil avec $T_s = 10\text{ms}$	13
14	Signal en sortie du filtre de réception	14
15	Diagramme de l'oeil deuxième chaîne	15
16	Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique	15
17	Comparaison de la DSP étudiée avec la DSP de la chaîne de référence	16
18	Comparaison de la DSP des signaux transmis pour un même débit binaire	17
19	Filtre en cosinus surélevé avec différentes valeurs de α	18
20	Signal en sortie du filtre de mise en forme	18

21	Signal en sortie du filtre de réception	19
22	Diagramme de l'oeil troisième chaîne	20
23	Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique	20
24	Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique de la chaîne de référence	21
25	Comparaison de la DSP étudiée avec la DSP de la chaîne de référence	21
26	Diagrammes de l'oeil pour deux canaux de transmission	22
27	Signal en sortie du filtre de mise en forme	23
28	Densité spectrale de puissance du signal de la figure 27	24
29	Comparaison de la DSP étudiée avec la DSP de la chaîne de référence	24
30	Diagramme de l'oeil quatrième chaîne	25
31	Comparaison du TES simulé avec le TES théorique	26
32	Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique	26

1 Introduction

1.1 Objectifs de ce projet

L'objectif de ce projet est triple :

- ★ Nous rendre autonome quant à l'implantation d'une chaîne de transmission en bande de base et comprendre le rôle de ses différents composants.
- ★ Nous permettre d'analyser différentes chaînes de transmission en bande de base pour, d'une part, pouvoir déterminer si chacune d'entre elles est optimisée ou non en terme d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance, et, d'autre part, pour identifier et modifier les éléments dans le cas où la chaîne n'est pas optimisée.
- ★ Nous permettre de comparer différentes chaînes de transmission en bande de base en termes d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.

1.2 Schéma général des chaînes à étudier (canal AWGN)

La figure 1 présente le schéma général des chaînes à étudier.

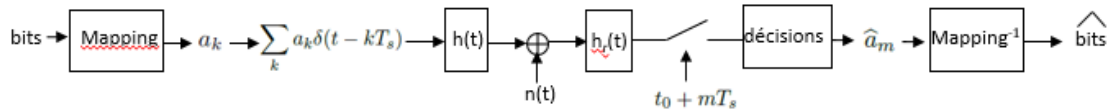


FIGURE 1 – Chaîne de transmission en bande de base

1.2.1 Génération de l'information binaire à transmettre

La génération de l'information binaire à transmettre (bits 0 et 1 équiprobables et indépendants) pourra être réalisée grâce à la fonction *randi* de Matlab.

1.2.2 Mapping

Un mapping devra être réalisé afin de passer de l'information binaire aux symboles a_k . Le mapping est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et implanter.

1.2.3 Suréchantillonnage

La suite d'impulsions de Dirac espacées de la durée symbole T_s et pondérées par les symboles a_k issus du mapping sera générée, en numérique, en insérant $N_s - 1$ zéros entre deux symboles a_k , si N_s représente le nombre d'échantillons utilisés par symbole (ou facteur de suréchantillonnage : $T_s = N_s T_e$, T_e étant la période d'échantillonnage). N_s devra être déterminé pour que le signal numérique généré respecte la condition d'échantillonnage de Shannon.

1.2.4 Filtrage de mise en forme

La réponse impulsionnelle, $h(t)$, du filtre de mise en forme est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ($h = [h(0)h(1)...h(N-1)]$, si N représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : `signal_filtre=filter(h,1,signal_a_filtre)` (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TP de traitement du signal.

1.2.5 Canal de transmission AWGN

Le canal de transmission est supposé à bruit, $n(t)$, additif blanc et Gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence. Pour les simulations, ce bruit sera généré sur la bande F_c (fréquence d'échantillonnage), grâce à la fonction `randn` de matlab, avec plusieurs puissances différentes, notées σ_n^2 : $\text{bruit} = \sigma_n * \text{randn}(1, \text{length}(r))$; si r représente le vecteur d'échantillons de signal à l'entrée du récepteur. On calculera la puissance du bruit σ_n^2 , en fonction des rapports signal à bruit par bit souhaités à l'entrée du récepteur $\frac{E_b}{N_0}$, de la manière suivante (voir démonstration en annexe) :

$$\sigma_n^2 = \frac{P_r N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}},$$

où N_s représente le facteur de suréchantillonnage, M l'ordre de la modulation et P_r la puissance du signal r qui peut être obtenue sous matlab de la manière suivante : $P_r = \text{mean}(\text{abs}(r).^2)$.

1.2.6 Filtrage de réception

La réponse impulsionnelle, $h_r(t)$, du filtre de mise de réception est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ($hr = [hr(0)hr(1)...hr(N-1)]$, si N représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction `filter` de matlab : `signal_filtre=filter(hr,1,signal_a_filtre)` (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction `conv.m`, comme lors des TP de traitement du signal.

1.2.7 Echantillonnage

Le signal filtré devra être échantillonné à $t_0 + mT_s$ pour revenir au rythme symbole. L'instant d'échantillonnage optimal t_0 pourra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

1.2.8 Décisions

Un détecteur à seuil permettra de prendre les décisions sur les symboles à partir du signal échantillonné. Le seuil optimal devra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

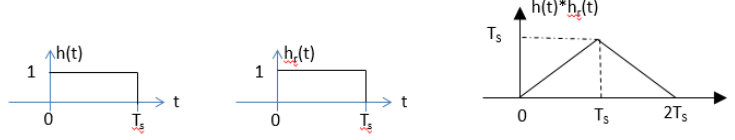
1.2.9 Demapping

Un demapping devra être réalisé en vue de comparer les bits reçus aux bits émis dans l'objectif de calculer le taux d'erreur binaire simulé de la transmission, TEB simulé qui devra être comparé au TEB théorique déterminé dans l'étude théorique de la chaîne en question.

2 Chaînes à étudier

2.1 Première chaîne à étudier : "chaîne de référence"

Pour cette première étude on considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de durée T_s . Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donnée dans la figure 2

FIGURE 2 – Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$

2.1.1 Etude théorique

1. On souhaite calculer la densité spectrale de puissance (DSP) du signal transmis. On a d'après le cours [1] de Nathalie Thomas page 8 :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 0 + 0 \quad (1)$$

En effet, puisque la moyenne de notre signal est nulle, les deux autres termes de la DSP sont également nuls. De plus, $h(t)$ est une porte décalée de $\frac{T_s}{2}$ donc on sait que :

$$|H(f)|^2 = |T_s \sin_c(\pi f T_s) e^{-if \frac{T_s}{2}}|^2 = T_s^2 \sin_c^2(\pi f T_s) \quad (2)$$

Et on connaît également σ_a^2 :

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 1 \quad (3)$$

Donc avec (2) et (3) on peut en déduire que

$$S_x(f) = T_s \sin_c^2(\pi f T_s)$$

2. On rappelle l'expression temporelle critère de Nyquist grâce au cours [1] page 16

$$\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (4)$$

En prenant $t_0 = T_s$ dans (4) on se rend compte que le critère de Nyquist est respecté.

3. Pour le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour une suite de bits égale à 0110100 voir figure 3.

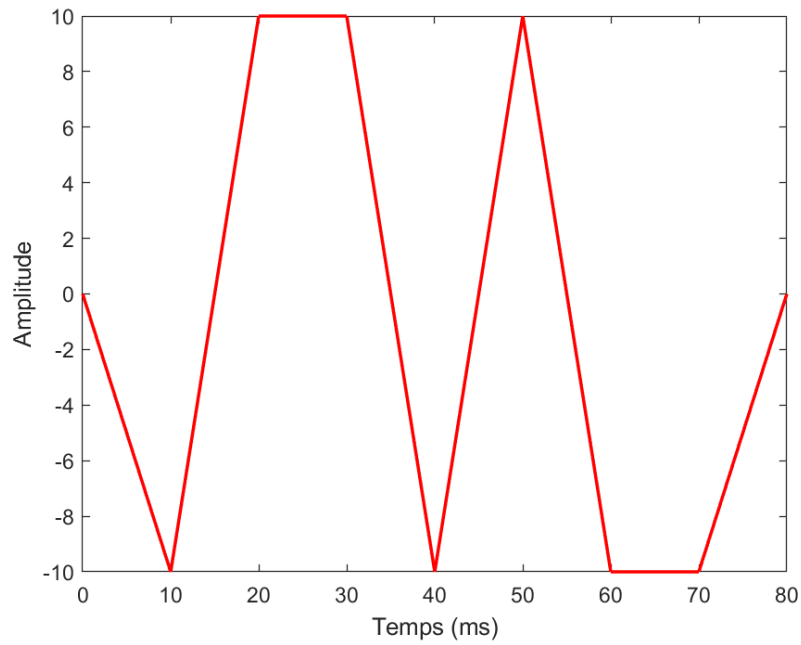
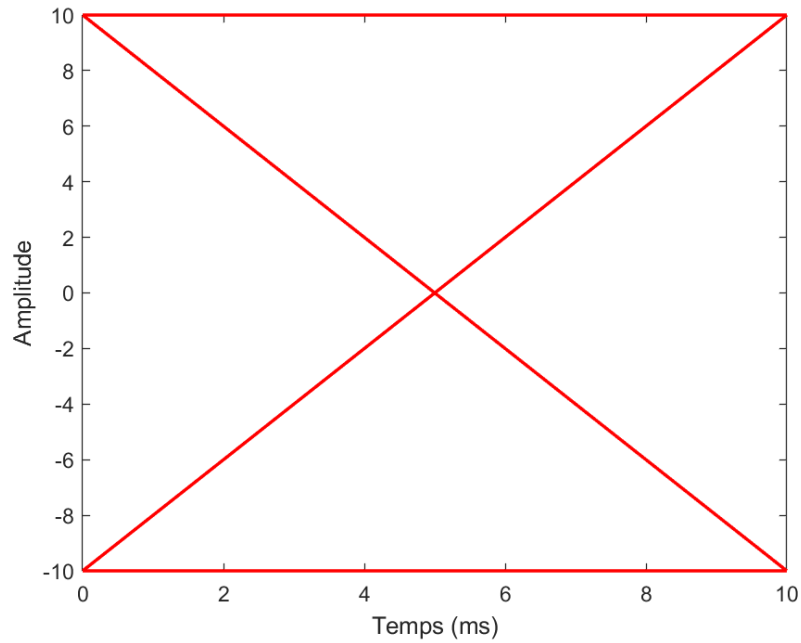
Sur ce schéma on retrouve le fait que cette chaîne puisse respecter le critère de Nyquist : Lors de la prise de décision, un seul symbole intervient. En effet, on peut le vérifier par le calcul, on a page 15 du cours [1] la formule (sans bruit) :

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m - k)T_s)$$

Or si $g(t_0 + mT_s) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^*$ alors :

$$z(mT_s + t_0) = a_m g(t_0)$$

Ce qui traduit l'absence d'interférence symbole.

FIGURE 3 – Signal en sortie du filtre de réception pour une suite de bits émise égale à 0110100 et $T_s = 10\text{ms}$ FIGURE 4 – Diagramme de l'oeil avec $T_s = 10\text{ms}$

4. On a le diagramme de l'oeil suivant (voir figure 4).

On retrouve le fait que cette chaîne puisse respecter le critère de Nyquist avec le diagramme de l'oeil, puisqu'on a un symbole composé de 1 bit et on trouve 1 seule abscisse pour laquelle on croise 2 points en ordonnée, en $x = T_s$, ce que donnait le critère de Nyquist.

5. Puisque le critère de Nyquist est respecté et que le filtre de réception est adapté (En effet, si l'on prend son symétrique et qu'on le rend causal on obtient le filtre d'émission, donc il est adapté) on a la formule page 24 :

$$SNR = \frac{|g(t_0)|^2}{\sigma^2}$$

On a par Wiener-Lee puis par Parseval :

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} S(f) df = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 df$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{2}$$

De plus, le critère de Nyquist est respecté pour $t_0 = T_s$ et $g(T_s) = T_s$. Donc on obtient :

$$SNR_{dB} = \frac{2T_s}{N_0}$$

6. Le seuil optimal à utiliser pour un détecteur à seuil se trouve en 0 car notre signal est à mapping binaire à moyenne nulle avec des symboles $a_k \in \{-1, 1\}$.
7. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, on a, pour une chaîne qui respecte le critère de Nyquist et qui a un seuil de décision en 0, d'après le cours [1] page 28 avec $Q(X) = P(x \geq X)$, :

$$TES_{min} = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma}\right) \quad (5)$$

De plus, nous avons la formule page 29 du cours [1] qui nous donne pour un mapping de Gray (ce qui est à priori notre cas puisque nous avons un mapping à deux symboles) :

$$TEB \approx \frac{TES}{\log_2(M)} \quad (6)$$

Dans notre cas on a $V = 1$ et $g(t_0) = T_s$ ce qui nous donne, avec (5) et (6) :

$$TEB \approx \frac{Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right)}{2}$$

8. On a d'après la question 5 :

$$\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{2}$$

9. On a d'après ce cours [2] :

$$E_b = T_s$$

Et on sait que $E_s = \log_2(M)E_b$ or $M = 2$ donc :

$$E_s = T_s$$

10. Pour la chaîne étudiée on a :

$$TEB = \frac{Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)}{2}$$

2.1.2 Implantation sous Matlab

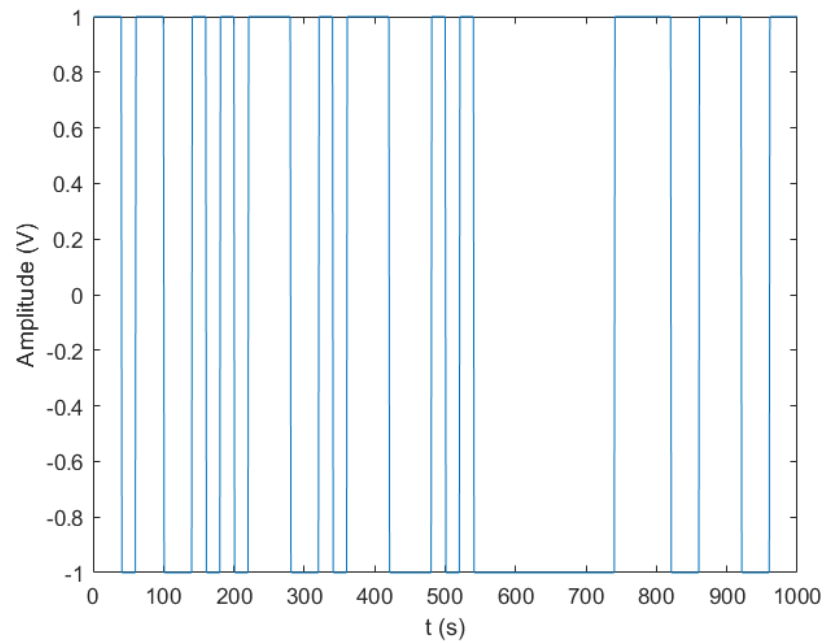


FIGURE 5 – Signal en sortie du filtre de mise en forme

1. On voit d'après la figure 6 que la puissance est centrée autour de 0Hz, ceci s'explique par le fait que le signal généré est de moyenne nulle.

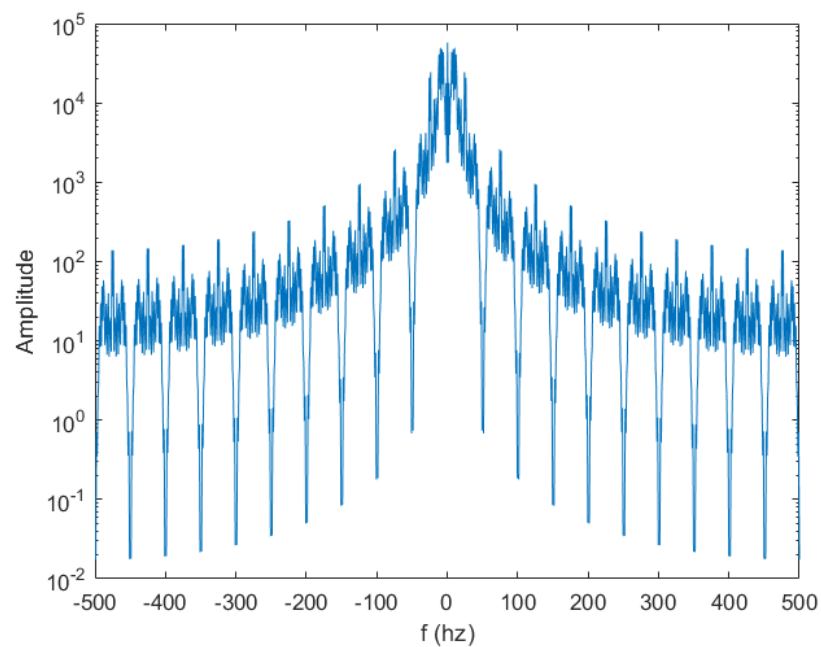


FIGURE 6 – Densité spectrale de puissance du signal de la figure 5

2. Implantation de la chaîne sans bruit :

- (a) La forme du signal de la figure 7 est semblable à ce que nous trouvions lors de l'étude théorique (cf figure 3).

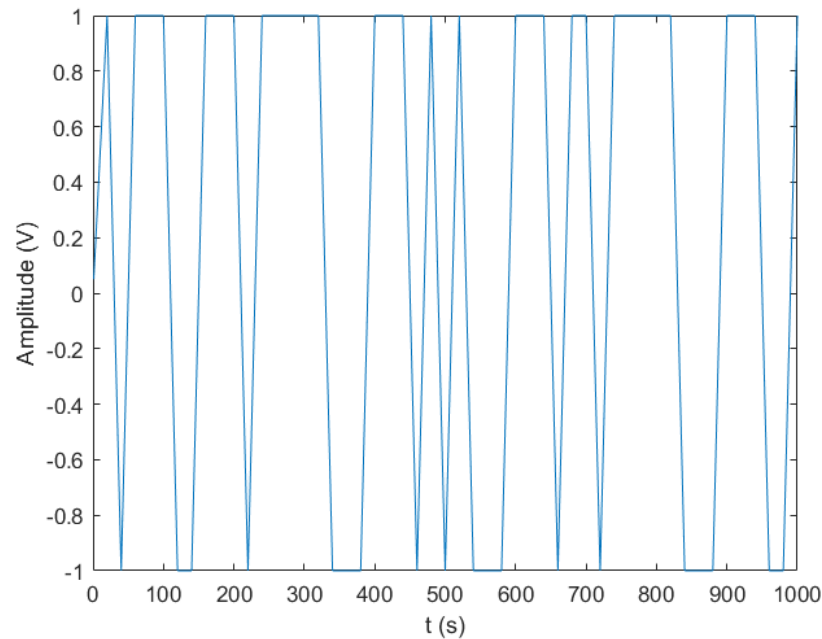


FIGURE 7 – Signal en sortie du filtre de réception

- (b) Nous observons sur la figure 8 que le diagramme de l'oeil expérimental est très semblable à celui trouvé lors de l'étude théorique (cf figure 4). Nous observons néanmoins qu'un trait supplémentaire apparaît sur cette figure, cela est dû au retard qu'engendre le filtre de réception qui est également visible proche de $t = 0$ seconde sur la figure 7.
- (c) Nous observons expérimentalement que le Taux d'Erreur Binaire est bien nul (cf display lors de l'exécution code Matlab).

3. Voir code Matlab.

4. On voit sur la figure 9 que le TEB simulé reste très proche du TEB théorique.

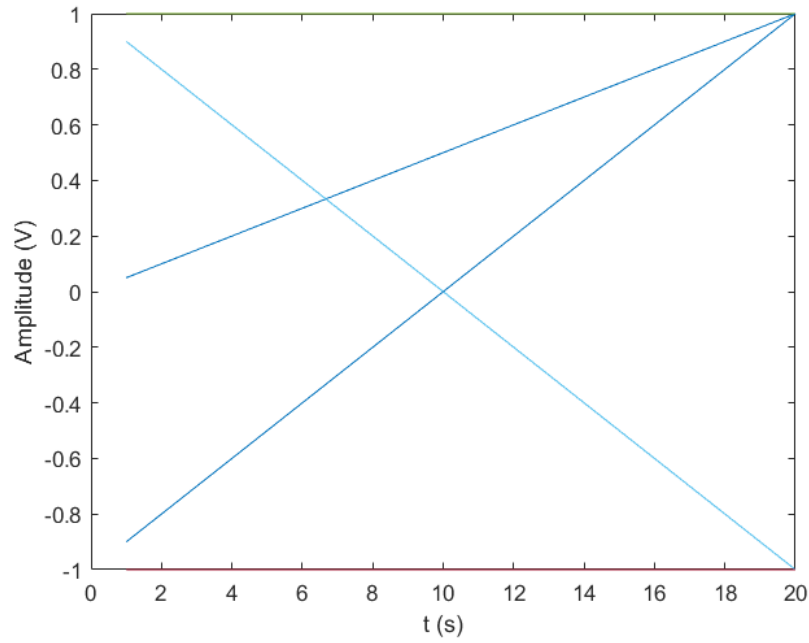


FIGURE 8 – Diagramme de l'oeil chaîne de référence

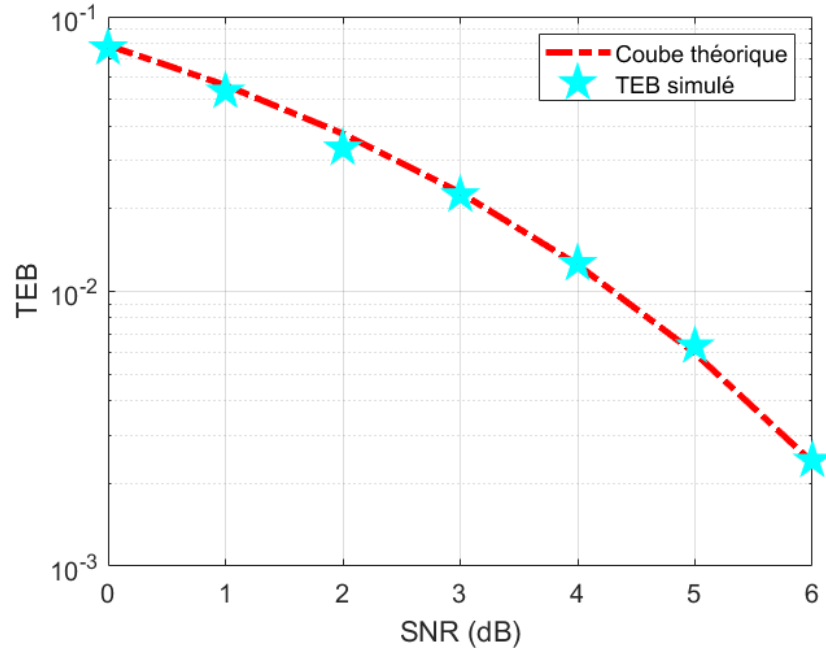


FIGURE 9 – Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique

2.2 Deuxième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de réception

On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception $h(t)$ et $h_r(t)$ données par la figure 10. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 11.

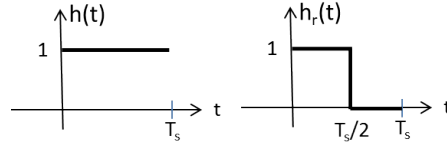
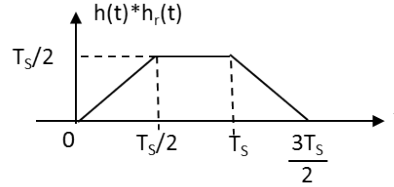
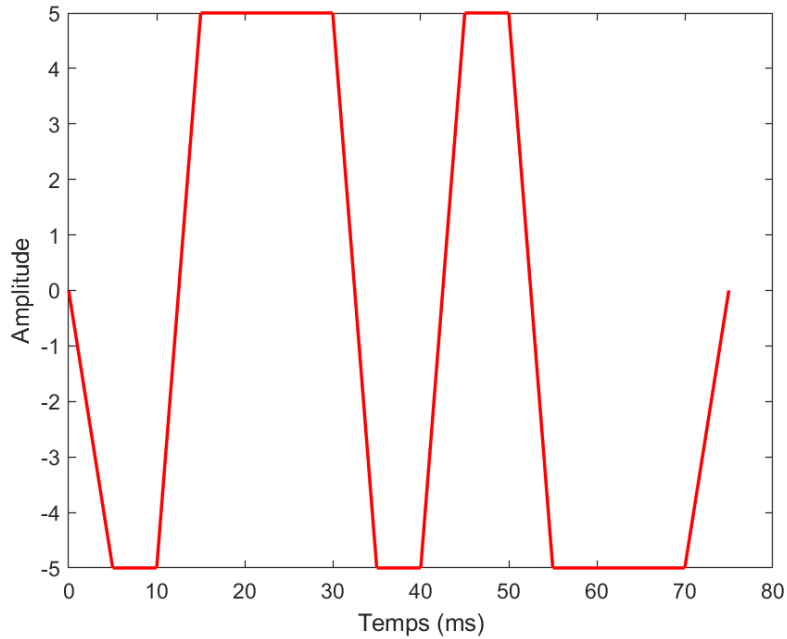


FIGURE 10 – Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception

FIGURE 11 – Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$

2.2.1 Etude théorique

1. On remarque sur la figure 11 que le critère de Nyquist (4) est respecté pour $t_0 \in \{\frac{T_s}{2}, T_s\}$. Donc la chaîne de communication peut parfaitement vérifier le critère de Nyquist.
2. Pour le tracé du signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour une suite de bits 0110100 voir figure 12. On retrouve que le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist avec le même argument que celui développé en 2.1.1.3.

FIGURE 12 – Signal en sortie du filtre de réception pour une suite de bits émise égale à 0110100 et $T_s = 10\text{ms}$

3. Sur le diagramme de l'oeil figure 13 on retrouve également le fait que la chaîne de transmission peut

respecter le critère de Nyquist puisque si l'on prend $t \in \{\frac{T_s}{2}, T_s\}$, on croise 2 points en ordonnée, ce qui atteste l'absence d'interférence intersymbole puisqu'on a un symbole composé de 1 bit.

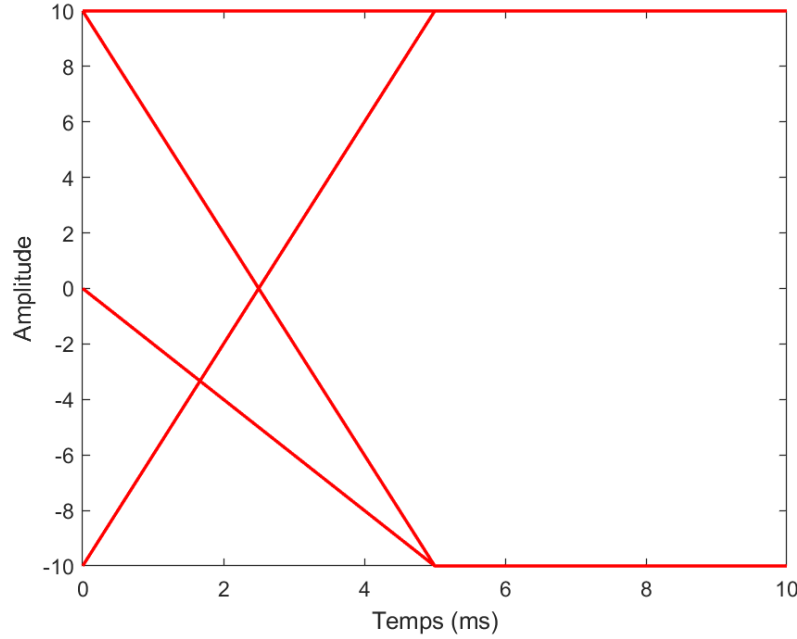


FIGURE 13 – Diagramme de l'oeil avec $T_s = 10\text{ms}$

4. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux, et tout en sachant que le filtre de réception n'est pas adapté (En effet, si l'on prend son symétrique et qu'on le rend causal on n'obtient pas le filtre d'émission, donc il n'est pas adapté) on a donc la formule :

$$SNR_{dB} = \frac{P_s}{P_b}$$

Où P_s est la puissance du signal et P_b la puissance du bruit, bruit que l'on suppose blanc et donc de $DSP = \frac{N_0}{2}$ connue, on a donc par Wiener-Lee puis par Parseval :

$$P_b = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0 T_s}{4}$$

Et on a pour la puissance du signal puisque $t_0 \in \{\frac{T_s}{2}, T_s\}$:

$$P_s = |a_n g(t_0)|^2 = \frac{T_s^2}{4}$$

D'où finalement :

$$SNR_{dB} = \frac{T_s}{N_0}$$

On trouve un SNR deux fois moins important sur cette chaîne comparé à la chaîne de référence qui avait un SNR de $\frac{2T_s}{N_0}$. Cela se traduit par le fait que le taux d'erreur binaire sur cette chaîne sera **plus important** que sur la chaîne de référence.

5. Le seuil optimal à utiliser pour un détecteur à seuil se trouve en 0 car notre signal est à mapping binaire à moyenne nulle avec des symboles $a_k \in \{-1, 1\}$.

6. Dans notre cas, on a $V = 1$ et $g(t_0) = \frac{T_s}{2}$ ce qui nous donne d'après (5) et (6) :

$$TEB \approx \frac{Q(\frac{T_s}{2\sigma})}{2}$$

7. On a d'après la question 4 on a :

$$\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{4}$$

8. D'après [2], nous avons l'énergie par bit :

$$E_b = T_s$$

Et puisque nous avons $E_s = \log_2(M)E_b$ (cf annexe du sujet) avec $\log_2(M) = 1$:

$$E_s = T_s$$

9. A l'aide des questions précédentes, on peut trouver :

$$TEB = \frac{Q(2N_0 E_b^2)}{2}$$

2.2.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation sans bruit :

- (a) La forme du signal de la figure 14 est semblable à ce que nous trouvons de l'étude théorique (cf figure 12).

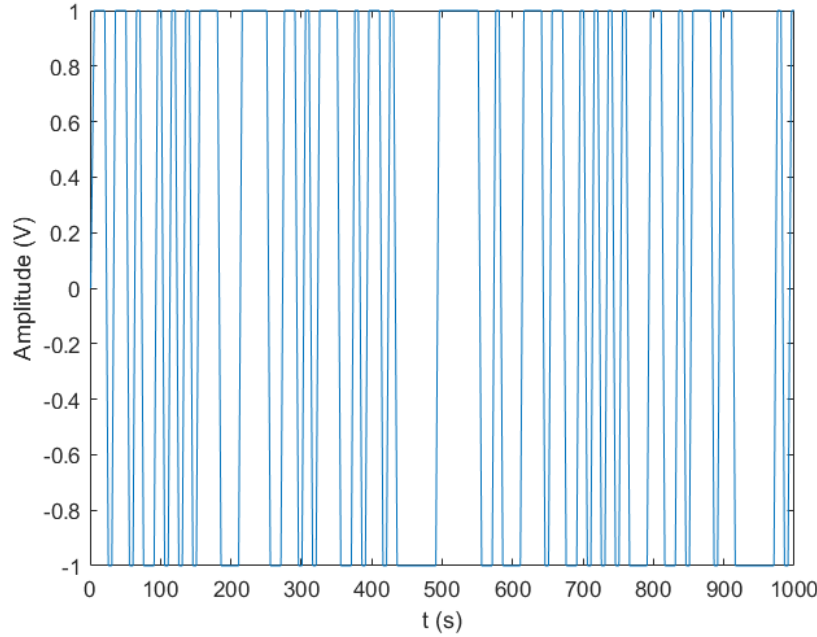


FIGURE 14 – Signal en sortie du filtre de réception

- (b) Nous remarquons sur la figure 15 que le diagramme de l'oeil expérimental est très semblable à celui de l'étude théorique (cf figure 13). Avec les mêmes effets de bords dus au retard engendré par le filtre de réception que nous avons déjà pu expliquer précédemment sur la première chaîne.
- (c) Sans bruit, nous remarquons que le TEB simulé est bien nul (cf code Matlab).

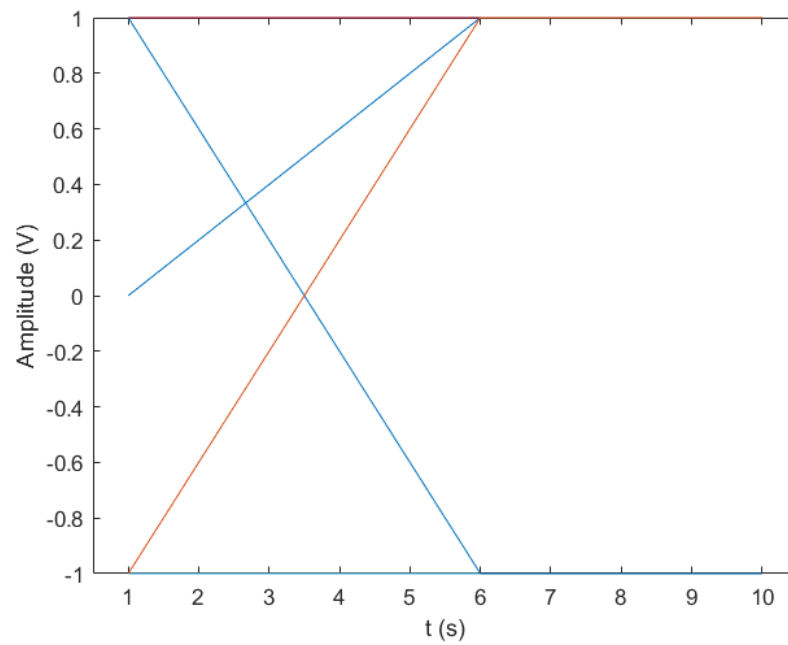


FIGURE 15 – Diagramme de l'oeil deuxième chaîne

2. Voir figure 16.
3. On voit figure 16 que les deux courbes sont proches, signe que la chaîne de transmission est correctement implantée.

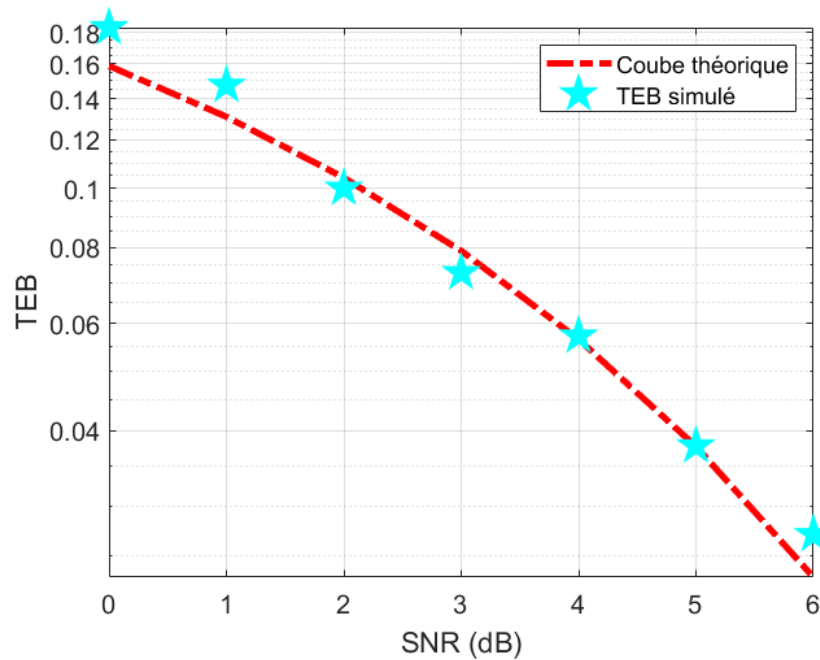


FIGURE 16 – Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique

4. Analyse de la figure 17 : La courbe théorique en rouge est le TEB théorique de la chaîne de référence, et le TEB simulé correspond à la deuxième chaîne. On remarque que le TEB de la deuxième chaîne est **plus élevé** que celui de la chaîne de référence, ce qui est conforme à l'étude théorique ci-dessus. L'élément de la chaîne en cause est le filtre de réception qui **n'est pas adapté** au filtre d'émission.

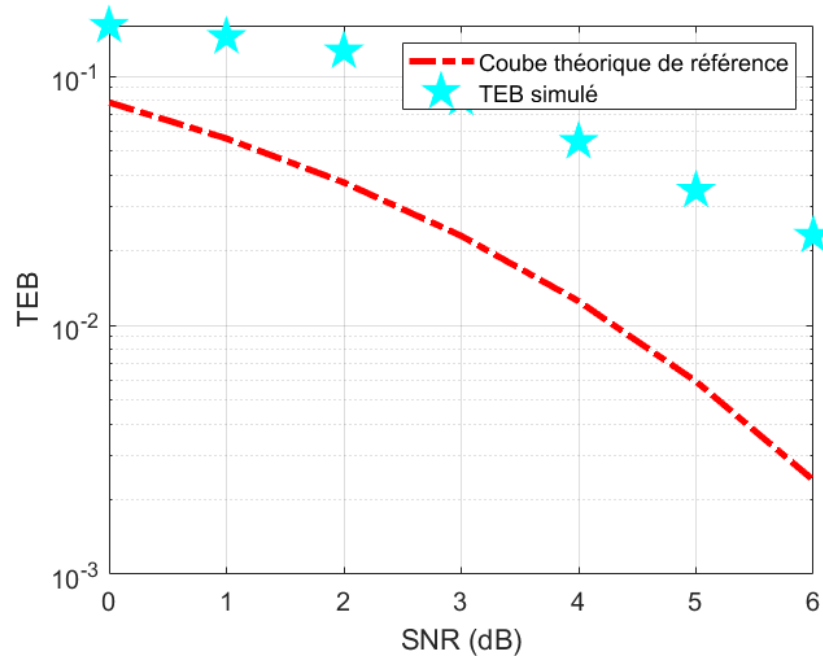


FIGURE 17 – Comparaison de la DSP étudiée avec la DSP de la chaîne de référence

5. Analyse de la figure 18 : Pour un même signal binaire, on voit que la DSP du signal de la chaîne de référence est bien plus importante que la DSP du signal de la chaîne étudiée. Cependant, plus la DSP du signal est basse plus le bruit va affecter le signal. Donc la chaîne de référence est plus efficace spectralement.

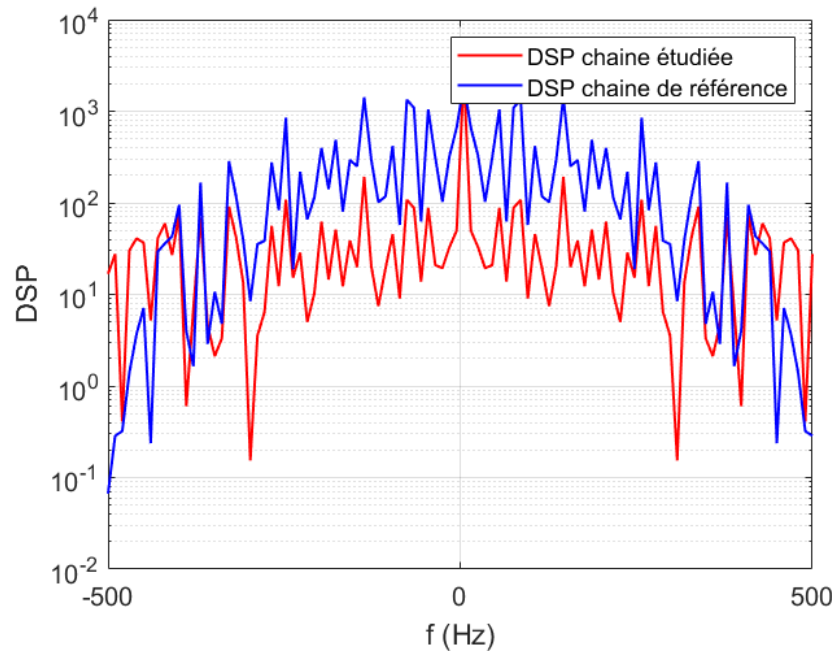


FIGURE 18 – Comparaison de la DSP des signaux transmis pour un même débit binaire

2.3 Troisième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception $h(t)$ et $h_r(t)$ en racine de cosinus surélevé de même roll off $\alpha = 0.5$. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donc un cosinus surélevé de roll off 0.5.

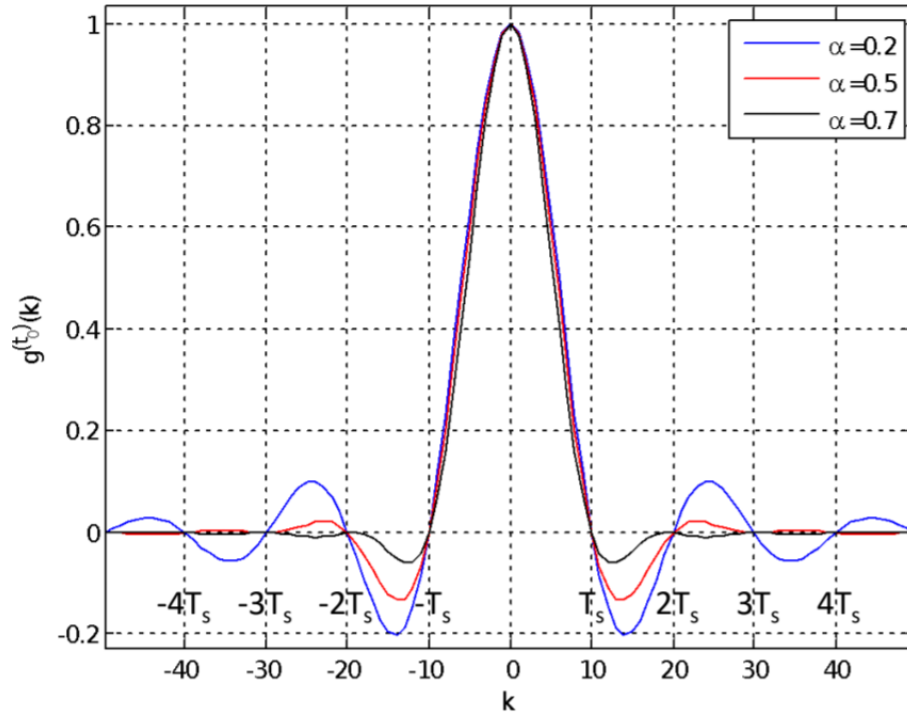
2.3.1 Etude théorique

1. Il faut que le signal respecte le critère de Claude Shannon soit $f_p > \frac{2}{T_s}$ afin d'éviter le phénomène de repliement du spectre et donc une perte d'information.
2. Si l'on reprend la page 19 du cours [1] (cf figure 19) on remarque que le critère de Nyquist (4) est respecté seulement si $t_0 = 0$.
3. Oui cette chaîne de communication vérifie le critère de filtrage adapté, en effet, si l'on prend son symétrique et qu'on le rend causal on obtient le filtre d'émission, donc il est adapté (ce qui est normal puisque la fonction cosinus surélevée est paire).
4. On a d'après le cours [1] page 28 :

$$TES_{min} = Q \left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma} \right)$$

On prend cette formule puisque nous sommes dans un cas binaire $a_k \in \{-1, 1\}$ et que la chaîne peut respecter le critère de Nyquist.

5. On peut transmettre le signal généré dans un canal de transmission idéal à bande limitée de bande $BW = 1500$ Hz si la plage du signal en sortie du filtre de mise en forme est inférieure à BW . Cela signifie que l'on doit avoir $R_s(1 + \alpha) < 2BW$.

FIGURE 19 – Filtre en cosinus surélevé avec différentes valeurs de α

2.3.2 Implantation sous Matlab

1. En sortie du filtre de mise en forme on a (voir figure 20) :

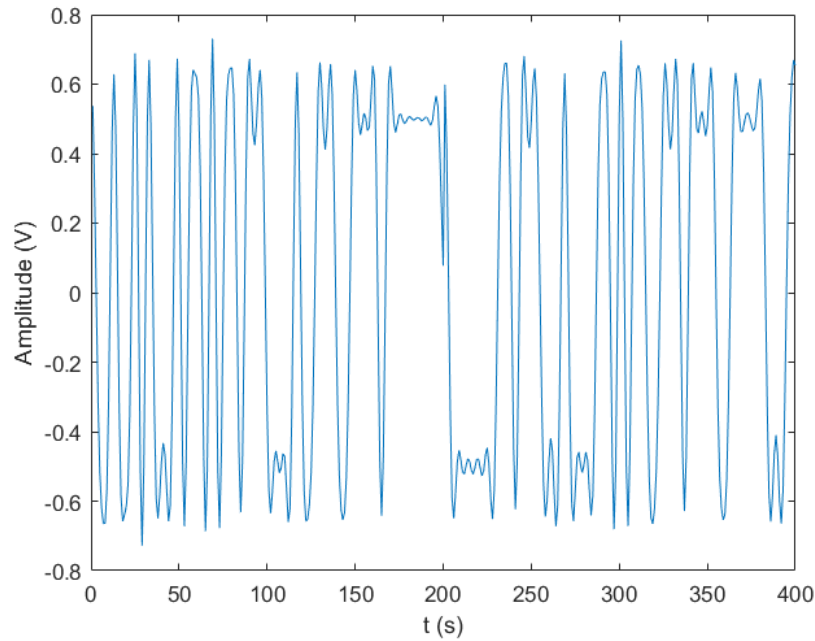


FIGURE 20 – Signal en sortie du filtre de mise en forme

2. (a) Dans cette implantation on a pris $F_e = 12000$ Hz. On a bien $F_e > 2R_s = 6000$ Hz donc le critère

de Shannon est bien respecté.

- (b) A première vue on peut s'étonner d'avoir une amplitude $\in [-1.5, 1.5]$ (figure 21) et nous n'avons pas d'explication pour cela. Cependant, la forme du tracé est conforme à l'étude théorique puisqu'on voit que le signal a pris la forme d'un cosinus surélevé.

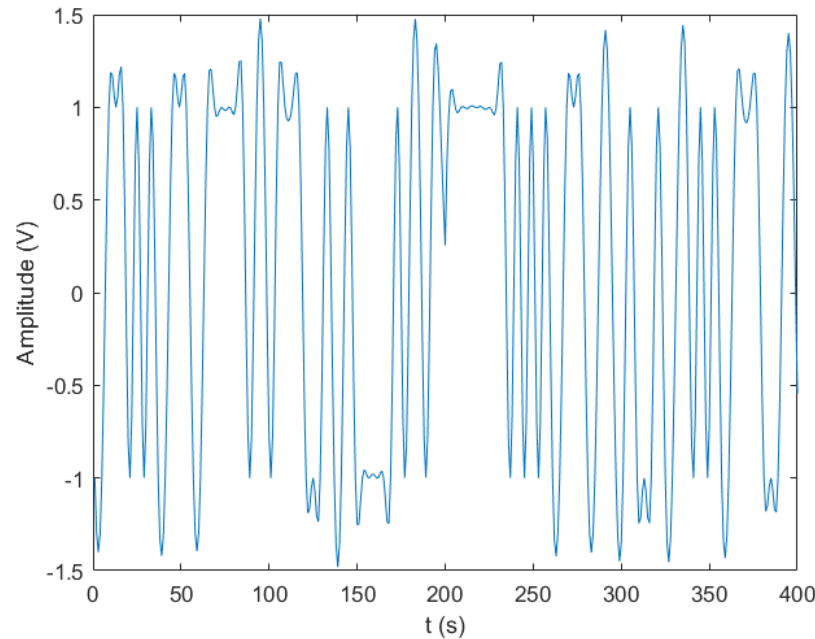


FIGURE 21 – Signal en sortie du filtre de réception

- (c) On remarque à l'aide du diagramme de l'oeil (figure 22) que l'instant optimal pour échantillonner se trouve à l'instant initial $t_0 = 1$.
- (d) On constate effectivement que le TEB est bien nul, voir code Matlab.
3. Voir figure 23.
 4. On voit sur la figure 23 que le TEB simulé reste très proche du TEB théorique, ce qui montre le bon fonctionnement de la chaîne de transmission.
 5. On remarque sur la figure 24 que le TEB obtenu par simulation pour la chaîne de transmission étudiée et le TEB théorique de la chaîne de référence sont très semblables ce qui montre que les deux chaînes sont équivalentes en terme d'efficacité. C'est à priori normal puisque les formules théoriques pour le TEB sont les mêmes pour la chaîne de référence et pour cette chaîne.
 6. Analyse de la figure 25 : Pour un même signal binaire, on voit que la DSP du signal de la chaîne de référence est bien plus importante que la DSP du signal de la chaîne étudiée. Cependant, plus la DSP du signal est basse plus le bruit va affecter le signal. Donc la chaîne de référence est plus efficace spectralement.
 7. Analyse de la figure 26 : Pour un même signal binaire, on voit qu'il est plus facile de trouver un instant optimal d'échantillonnage pour le deuxième signal. En effet, contrairement au premier signal, on voit bien

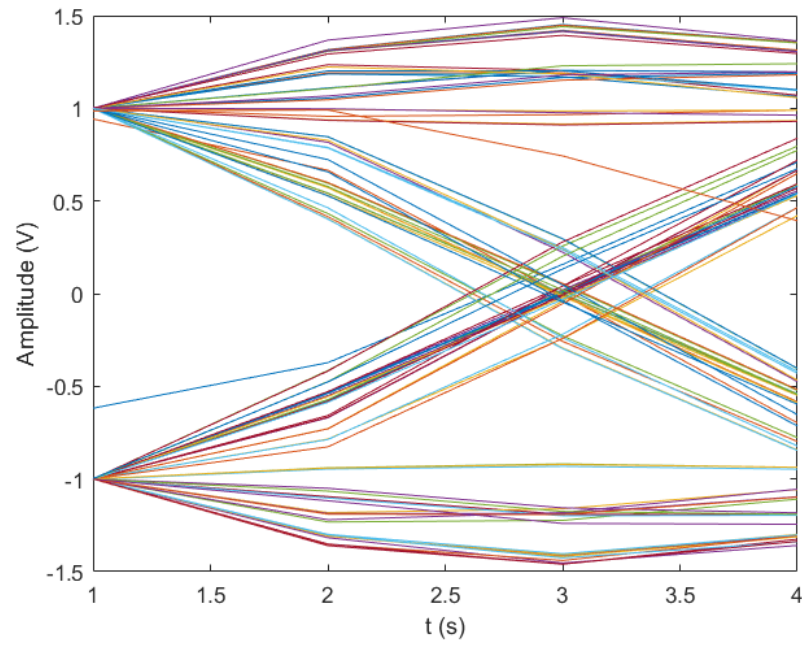


FIGURE 22 – Diagramme de l'oeil troisième chaîne

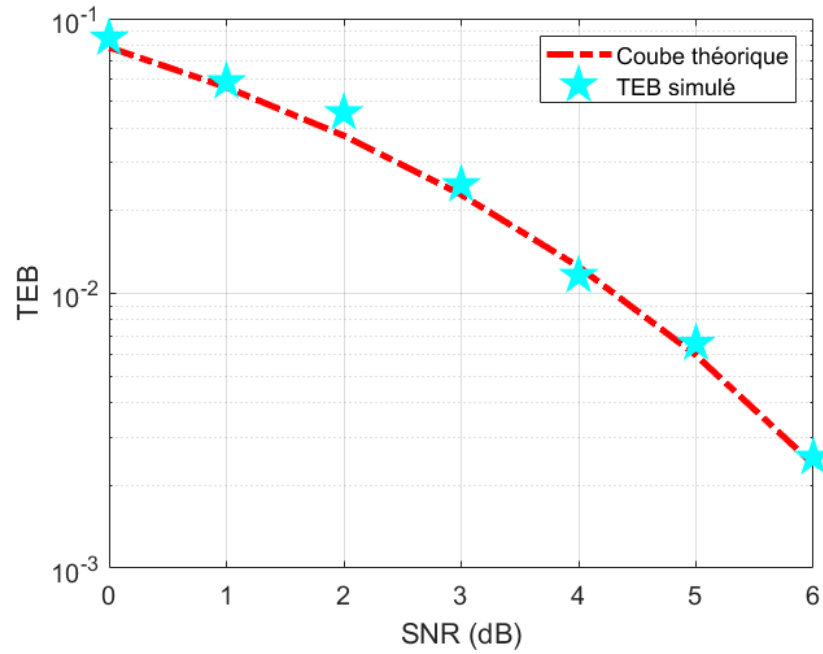


FIGURE 23 – Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique

que les tracés se recoupent en $t = 3s$, il est donc plus simple d'effectuer le retour en bade de base pour le signal b. Cela est conforme avec l'étude théorique car plus la bande du canal de transmission est grande, plus il est simple de transmettre un signal.

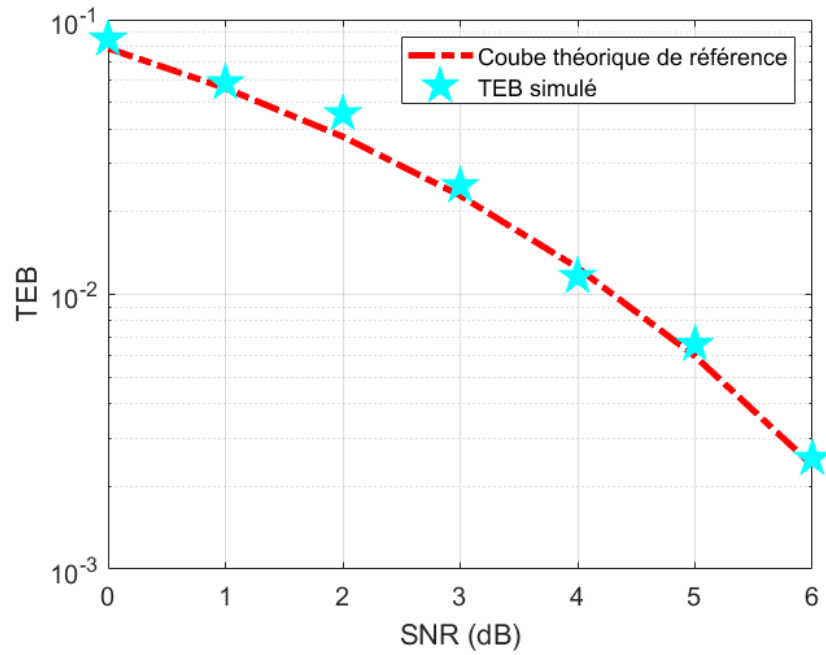


FIGURE 24 – Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique de la chaîne de référence

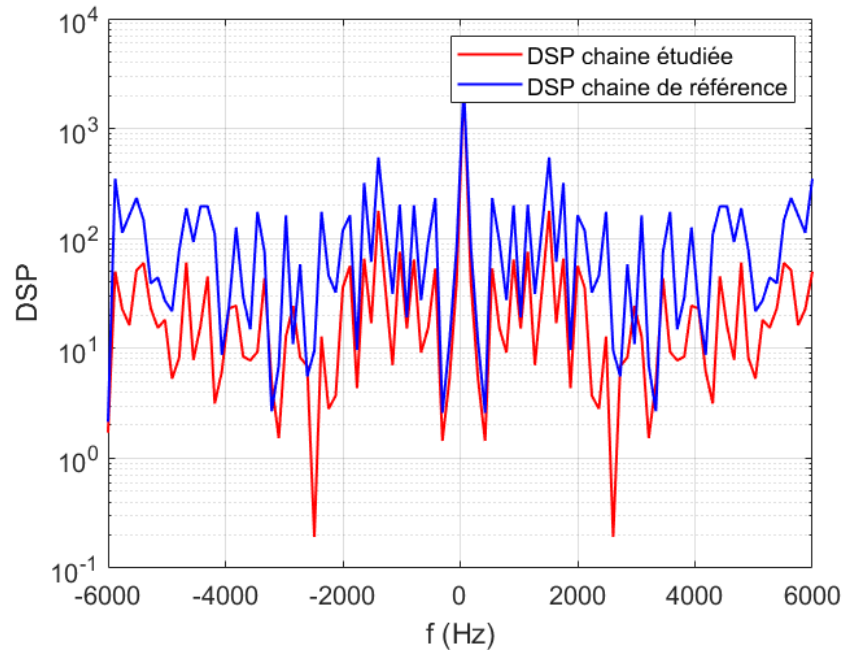


FIGURE 25 – Comparaison de la DSP étudiée avec la DSP de la chaîne de référence

2.4 Quatrième chaîne à étudier : impact du choix du mapping

On considérera un mapping 4-aire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$ rectangulaire de durée T_s .

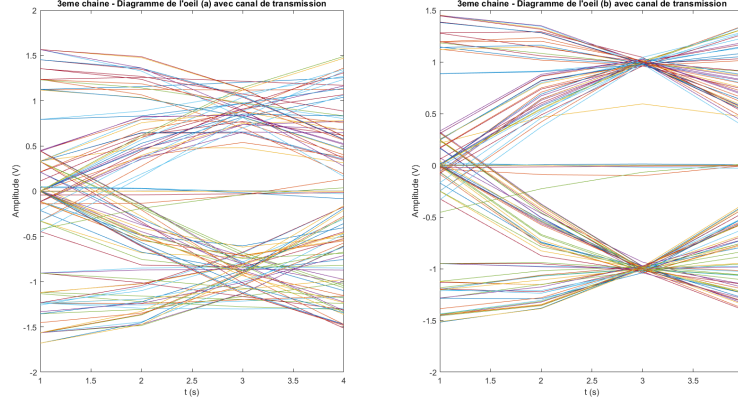


FIGURE 26 – Diagrammes de l'oeil pour deux canaux de transmission

2.4.1 Etude théorique

1. En assumant que les filtres rectangulaires $h(t)$ et $h_r(t)$ sont tels que :

$$\begin{cases} g(t) = T_s \quad \forall t \in [0, T_s] \\ g(t) = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Alors l'instant optimal pour commencer l'échantillonnage est $t_0 = 0$.

2. Si l'on utilise un détecteur à seuil, les seuils optimaux à utiliser sont $\{-2g(t_0), 0, 2g(t_0)\}$ puisqu'on a les symboles $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$, idéalement on veut maximiser la distance entre chaque palier et donc on choisit de prendre "le milieu" entre deux symboles.
3. Si l'on échantillonne aux instants optimaux ainsi qu'un détecteur à seuil comme décrit plus haut, alors :

- (a) La probabilité de détecter en sortie du bloc de décision le symbole -1 alors que l'on a émis -3 est donnée par le cours [1] page 29, on calcule donc :

$$P(\tilde{a}_m = -1 \mid a_m = -3) = P(g(t_0) < w_m < 3g(t_0)) = Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right)$$

Avec $Q(X) = P(x \geq X)$ et en sachant que

$$\tilde{a}_m \iff z_m \in [-2g(t_0), 0] \quad \text{or} \quad z_m = a_m g(t_0) + w_m$$

- (b) On a de la même manière :

$$P(\tilde{a}_m = 1 \mid a_m = -3) = P(3g(t_0) < w_m < 5g(t_0)) = Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right)$$

- (c) Comme précédemment :

$$P(\tilde{a}_m = 3 \mid a_m = -3) = Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right)$$

- (d) Avec $N_0 = 10^{-3} \text{ V}^2 \text{ Hz}^{-1}$ et $E_b = 1 \text{ kbps}$ on a :
 - Probabilité de détecter -1 alors que -3 émis : 10^{-2}
 - Probabilité de détecter $+1$ alors que -3 émis : 10^{-11}
 - Probabilité de détecter $+3$ alors que -3 émis : 10^{-25}

On voit que cette probabilité diminue, ce qui est cohérent avec la question suivante.

- (e) Dans cette partie on utilise le code Gray :

”[Le code de Gray] est un type de codage binaire permettant de ne modifier qu’un seul bit à la fois quand un nombre est augmenté d’une unité.“

Wikipédia [3]

Cette manière d’incrémenter en code binaire permet de réduire de manière significative la probabilité d’erreur de plus d’une unité, comme le démontre la question précédente pour la simple raison que les symboles adjacents ne diffèrent que d’un bit.

- (f) D’après le cours [1] page 29, pour du mapping Gray on a :

$$TEB \approx \frac{TES}{\log_2(M)} \text{ avec } M \text{ le nombre de symboles}$$

2.4.2 Implantation sous Matlab

1. (a) On remarque sur la figure 27 que ce signal est conforme à l’étude théorique précédente puisque le signal possède 4 niveaux (dû aux 4 symboles $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$). De même, sur la figure 28 on remarque que la densité spectrale est centrée en zéro, ce qui est normal puisque c’est un signal à mapping 4-aire à **moyenne nulle**.

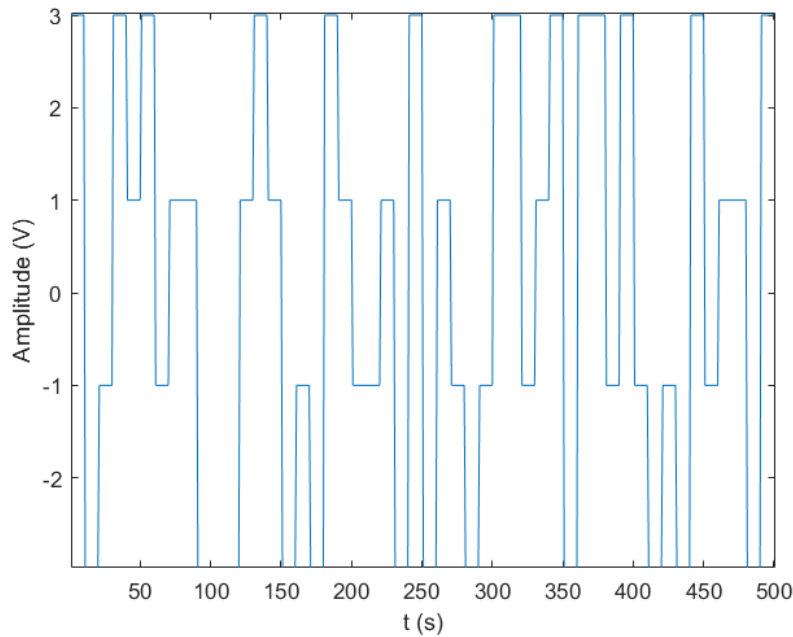


FIGURE 27 – Signal en sortie du filtre de mise en forme

- (b) Sur la figure 29 on constate que spectralement la chaîne de référence est moins efficace que la chaîne étudiée. Cela vient du fait que notre chaîne utilise un mapping 4-aire, ce qui a pour effet d’augmenter σ_a^2 dans (1) et donc d’augmenter la densité spectrale de puissance.
- (c) On remarque à l’aide du diagramme de l’oeil (figure 30) que l’instant optimal pour échantillonner se trouve en $t_0 = T_s = 10 \text{ s}$, et que les seuils optimaux de décision sont sur notre figure en

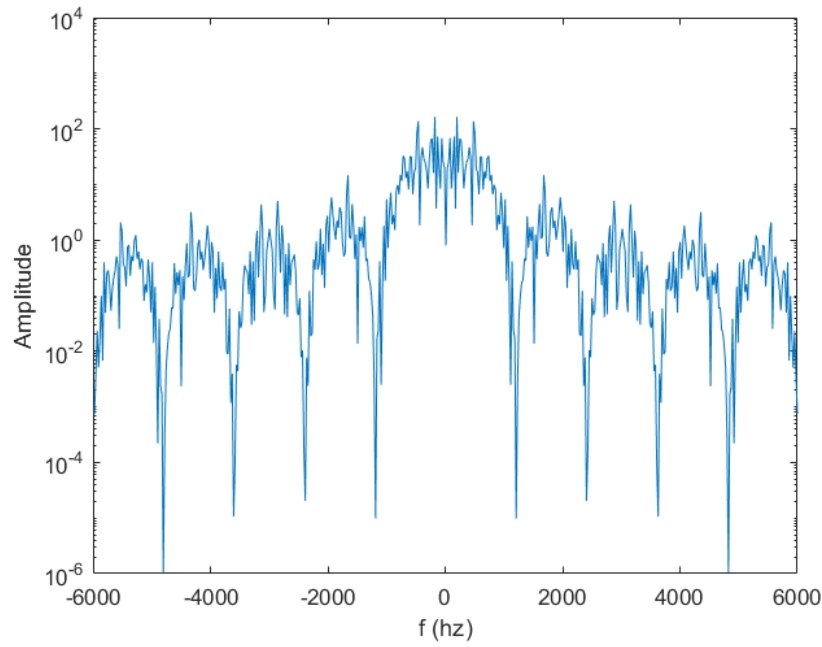


FIGURE 28 – Densité spectrale de puissance du signal de la figure 27

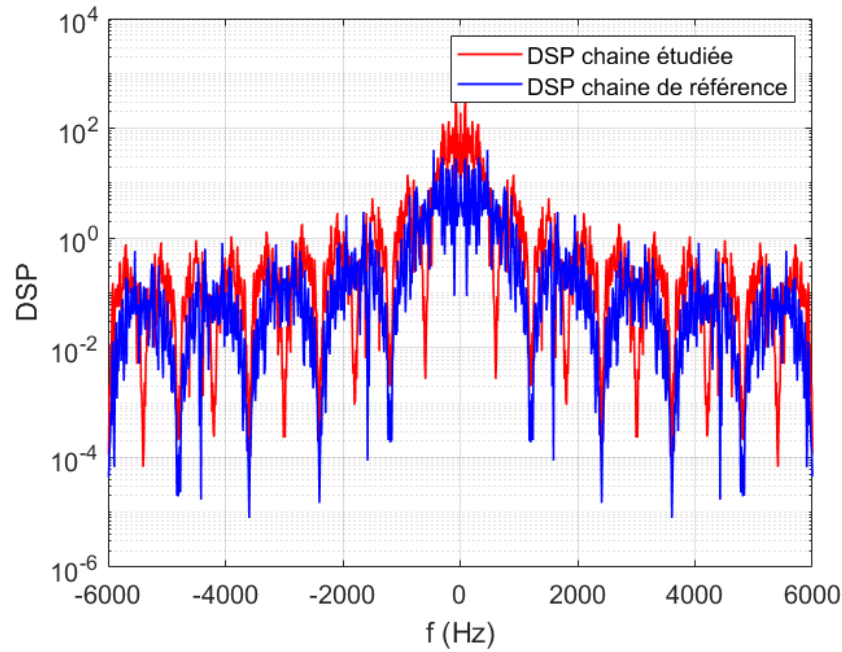


FIGURE 29 – Comparaison de la DSP étudiée avec la DSP de la chaîne de référence

$\{-20, 0, 20\}$. C'est conforme avec l'étude théorique qui donnait $\{-2g(t_0), 0, 2g(t_0)\}$ en prenant $T_s = 10$ puisque $g(t_0) = g(T_s) = T_s$.

(d) Voir Matlab.

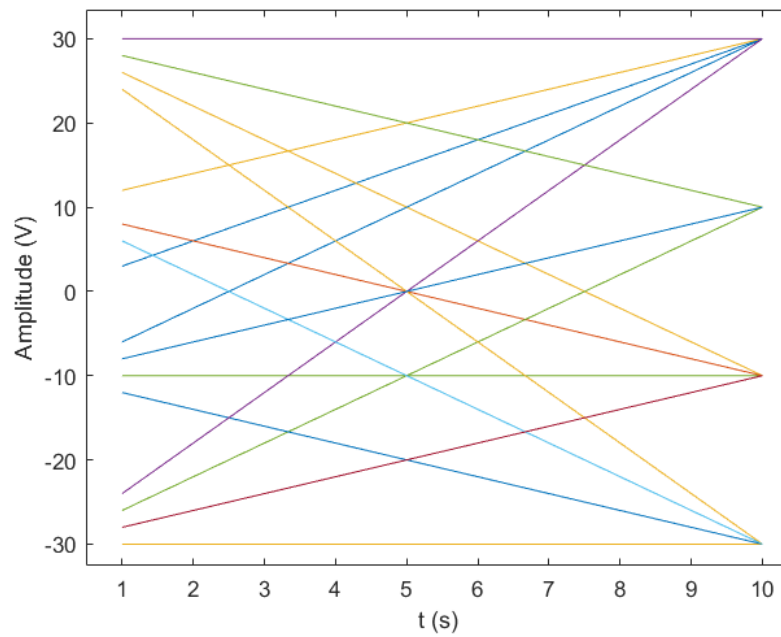


FIGURE 30 – Diagramme de l'oeil quatrième chaîne

2. Voir figure 31.
3. On voit sur la figure 31 que le TES théorique est très inférieur au TES simulé, cela s'explique notamment par l'usage du code Gray dans l'étude théorique, qui permet de réduire de manière significative la probabilité d'erreur de plus d'une unité.
4. Voir figure 32.
5. On voit sur la figure 32 que le TEB théorique est très inférieur au TEB simulé. Cela s'explique de la même manière que pour la question 3.

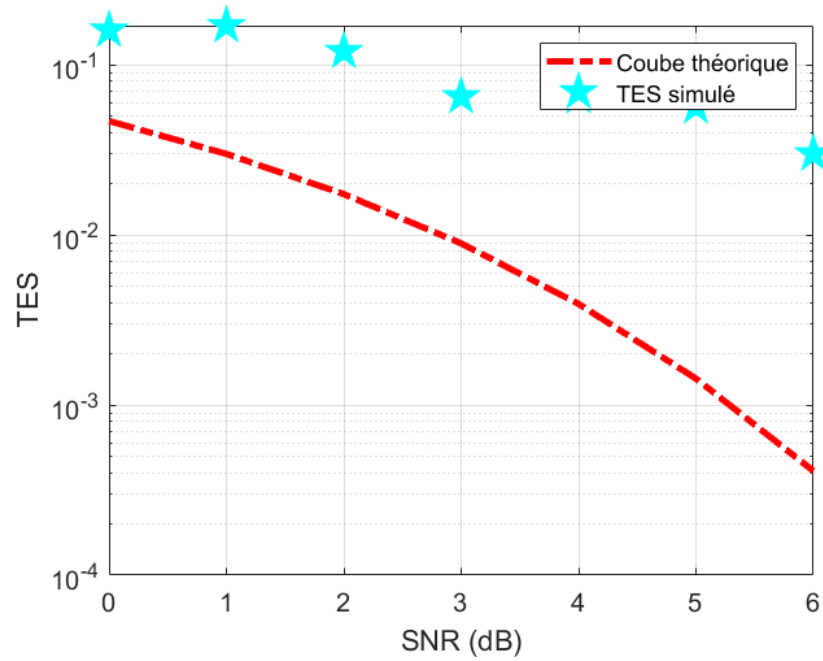


FIGURE 31 – Comparaison du TES simulé avec le TES théorique

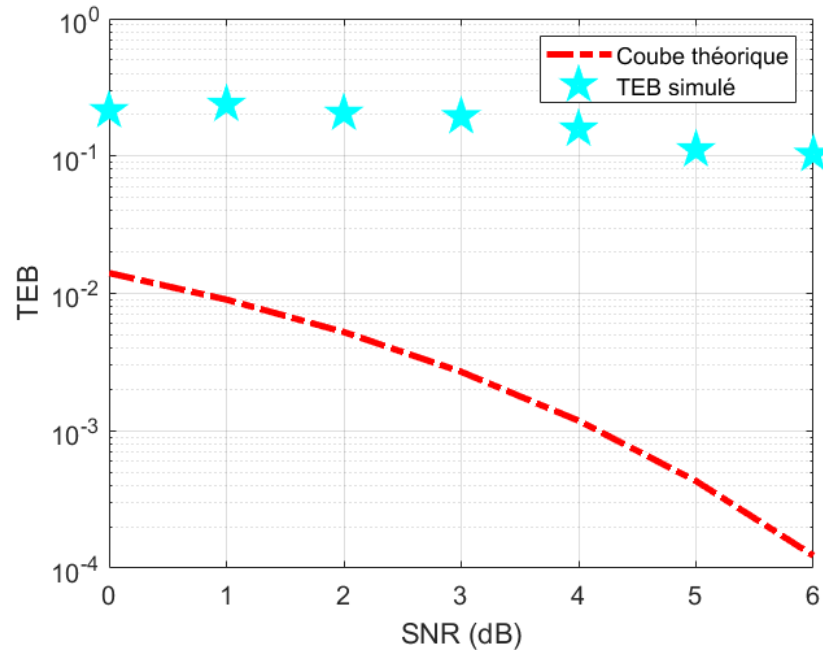


FIGURE 32 – Comparaison du TEB simulé avec le TEB théorique

3 Conclusion

Les différentes chaînes de cette première partie de projet permettent de mettre en lumière, à travers la théorie mais également à travers la pratique, l'impact de différents éléments d'une chaîne de transmission lorsque l'on parle de transmission en bande de base. Notamment :

- **L'impact du choix du filtre de réception**, puisque si le filtre de réception n'est pas adapté au filtre de mise en forme, le **taux d'erreur binaire augmente** et la **DSP du signal transmis diminue**.
- **L'impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée**, en effet, plus la bande du canal de transmission est grande, plus il est simple de récupérer un signal transmis.
- **L'impact du choix du mapping**, puisque en effet, dans l'étude théorique nous utilisons le **code Gray** très apprécié dans des applications comme les télécommunications pour permettre un **taux d'erreur binaire bien inférieur à celui constaté en utilisant le binaire naturel**, comme on peut le voir entre l'étude théorique qui implémente le mapping à l'aide du code Gray et le modèle Matlab qui lui, utilise le binaire naturel.

Références

- [1] Thomas Nathalie. Modulateur/démodulateur bande de base : optimisation conjointe. http://thomas.perso.enseeiht.fr/Telecom_BandeDeBase_Nathalie_Thomas_2019_2020.pdf.
- [2] Thierry Sartenæer. Transmission numérique en bande de base, 2006. https://cours-examens.org/images/Etudes_superieures/Licence_et_master_telecommunication/Telecommunication/Modulation2/Transmissions_numEriques_bande_de_base.pdf, page 16.
- [3] Wikipédia. Code de gray. https://www.wikiwand.com/fr/Code_de_Gray.