Análisis Númerico
Taller 3

Geraldine Gómez[1], Brayan González[2], and Santiago Roa[3]

[1,2,3]Departamento de Ingeniería de Sistemas

2019

En el presente taller se pretende comparar los métodos de Diferencias Divididas y de Lagrange Baricéntrico, respecto a su precisión en el resultado y su eficiencia en diferentes tipos de problemas. Es necesario aclarar que en algunos puntos no podrá realizarce la comparación, siendo estos el primero y el sexto, ya que son cuestiones teoricas de comprobación, verificación y de utilización de métodos específicos.

1. Dados n+1 nodos distintos, demuestre que el polinomio interpolante es único.

   Por medio del método de interpolación polinómica se sabe que al momento de tener ***n+1*** nodos distintos, se pueden obtener varios polinomios de distinto grado, siempre cumpliendo la condición de ser menor a n. Para poder demostrar que este polinomio es único se va a hacer mención del ***teorema de unicidad***, este define una función ***f*** cuyos valores en esos puntos son únicos, entonces ***f(xk) = P(xk)*** es decir, los valores obtenidos en ***f(xk)*** van a ser únicos en el polinomio ***P(xk)***, esto pasa porque el polinomio tiene que pasar por los nodos dados inicialmente en el problema, además el punto obtenido también tiene que estar contenido en la gráfica, esto debe ocurrir independientemente del grado del polinomio, aunque cabe destacar que entre mayor grado del polinomio, mayor será su precisión. Al momento en el que se comprueba que el polinomio pasa por los puntos dados, incluyendo el valor obtenido, por medio del teorema de unicidad se puede concluir que el polinomio interpolante es único.

2. Considere el comportamiento de gases no ideales que se describe a menudo con la ecuación virial de estado a partir de los siguientes datos para el nitrógeno:

Temperatura	100	200	300	400	500	600
B	-160	-35	-4.2	9.0	16.9	21.3

a. Determine un polinomio interpolante para este caso (escriba el polinomio).

Para poder realizar este punto se utilizó el paquete polinomF para generar el polinomio interpolador correspondiente al método de Diferencias Divididas. Sin embargo, al momento de usar la función los coeficientes generados para x fueron demasiados grandes por lo cual se presento la necesidad de reducirlos y ajustarlos.

Teniendo en cuenta lo anterior el polinomio resultante es el siguiente:

$$P(x) = -573{,}9+66{,}3535x-3{,}1834558x^2+0{,}07766667x^3-0{,}0009404167x^4+4{,}483e-5x^5$$

b. Utilizando el resultado anterior calcule el coeficiente virial a 450K.

Se observaron los datos dados y a partir de la aproximación de estos fue posible deducir que el resultado debe oscilar entre 9 y 16.9, siendo el resultado real 13.884.

D. Divididas	Error (%)	N. Op	Resultado Real
-3,375	124,3	15	13.884

A partir de los resultados obtenidos anteriormente, se logra evidenciar que para este caso en específico el método de Diferencias Dividas es bastante inexacto teniendo un error que sobrepasa el 100 %, proporcionando una respuesta nada fiable y muy lejana de valor real.

c. Grafique los puntos y el polinomio que ajusta.

d. Utilice la interpolación de Lagrange y escriba el polinomio interpolante.

Se hizo necesario utilizar el paquete polinomF para generar el polinomio interpolador correspondiente al método de Lagrange. Teniendo como resultado el siguiente polinomio:

$$P(x) = 5e^{-}11x5 - 1e^{-}7x4 + 8e^{-}5x^3 - 0,0323x^2 + 6,7014x - 576,9$$

e. ¿ Cuál es el coeficiente virial a 450K ?, con el método de Lagrange.
Al aplicar el método de Lagrange a partir del algoritmo proporcionado en las librerias de R, se obtienen los siguientes resultados:

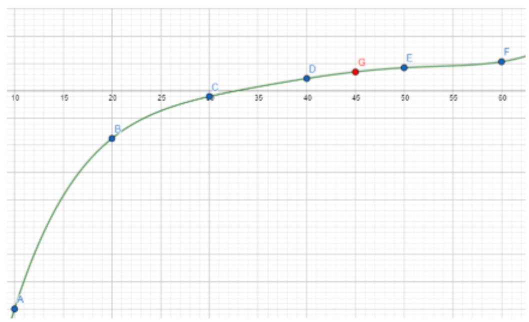

Figura 1: Polinomio Diferencias Divididas

Lagrange	Error (%)	N. Op	Resultado Real
13,884	0,0	49	13.884

Realizando el ánlisis de los resultados obtenidos anteriormente, se puede evidenciar que el método de Lagrange concuerda totalmente en su solución con el resultado real del problema, teniendo un error del 0 %, siendo exacto y fiable. Sin embargo, su eficiencia respecto al método utilizado en el numeral a y b, es reducida ya que se triplican la cantidad de operaciones.

f. Grafique los puntos y el polinomio que ajusta.

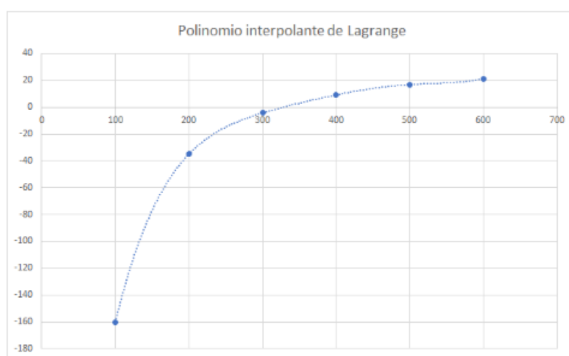

Figura 2: Polinomio Lagrange

3. Sea $f(x) = e^{x}$.

Para lograr la comparación entre los métodos núméricos seleccionados se tomo un partición de ocho puntos en el intervalo [0.1], siendo estos [0,0.125,0.250, 0.375,0.625,0.750,0.875,1], interpolando específicamente el punto x = 0.5

Aplicando los diferentes algoritmos fue posible obtener los siguientes resultados.

D. Divididas	Error (%)	N. Op	Resultado Real
1,648721	0,00001642	81	1,648721271

L.Baricéntrico	Error (%)	N. Op	Resultado Real
1,648722	0,00004423	28	1,648721271

Las respuestas generadas por ambos métodos son bastante cercanas al resultado real de la función, difiriendo en valores mímimos, como es posible denotarlo en el error obtenido entre estos métodos ya que es inferior a 10^-3.

Sin embargo, el error del método de Lagrance Baricéntrico es el menor, acercandose más a la respuesta deseada.

En cuanto a la eficiencia de los diferentes métodos es posible observar que respecto a las operaciones realizadas el método de diferencias dividas es más eficiente, por ende su convergencia es más rápida.

4. Dada una tabla de estadísticas de un curso con la cantidad de estudiantes en cada rango de notas, hallar por medio de interpolación el número de estudiantes que obtuvieron una nota menor o igual a 55.

R. Notas	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
N. Estudiantes	35	48	70	40	22

Para poder resolver este ejercicio se realizo una función que permitia acumular los valores respecto a los puntos medios de los diferentes intervalos y con esto obtener los diferentes conjuntos de puntos para los polinomios interpolantes, teniendo así los siguientes resultados:

D. Divididas	Error (%)	N. Op	Resultado Real
120,00	0,0000	36	120

L. Baricéntrico	Error (%)	N. Op	Resultado Real
120,00	0,0000	10	120

Respecto a la tabla anterior se puede inferir que dada la forma de la función acumulativa generada y la proximidad de los puntos tomados, ambos métodos fueron precisos respecto al resultado real del ejercicio, teniendo un error del 0 %.

En cuanto a la eficiencia de los diferentes métodos es posible observar que respecto a las operaciones realizadas el método de diferencias dividas es más eficiente, por ende su convergencia es más rápida.

5. Utilice el polinomio de Taylor para interpolar:

$$e^x, \qquad x_o = 0, \qquad\qquad \frac{1}{x}$$

Para este ejercicio en particular se comparan también los métodos seleccionados para el respectivo análisis de los diferentes resultados.

Se utilizó el polinomio de Taylor de grado dos para realizar la interpolación, siendo este:

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

a. Interpolación para la función: $e^x, x_0 = 0$.

Para esta interpolación se tomaron los puntos (-3,-2,1,0,1,2,3), y se tiene como valor real el obtenido por la función en $x_0 = 0$ que es equivalente a 1, generandose los siguientes resultados:

D. Divididas	Error (%)	N. Op	Resultado Real
1,06406	6,4060	15	1,00

L.Baricéntrico	Error (%)	N. Op	Resultado Real
1,06407	6,407	49	1,00

P. Taylor	N. Op	Resultado Real
1,00	3	1,00

A partir de las tablas anteriores es posible observar que tanto el método de Lagrange Baricéntrico como el de Diferencias Divididas presentan un alto grado de error, debido a la selección de los diferentes intervalos, también cabe anotar que el la utilización del polinomio de Taylor genera la respuesta más aproximada.

b. Interpolación para:

$$\frac{1}{x}, \qquad\qquad x_o = 0$$

Para esta función no es posible realizar la interpolación a a partir del polinomio de Taylor, debido a la indeterminación de la funcion en $x_0 = 0$, por lo cual se hizo necesario realizar una partición en el intervalo [-1,1] correspondientes a los siguientes valores :

$$(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$$

Así mismo, es necesario aclarar que no fue posible calcular el error de los métodos debido a la indeterminación anteriormente mencionada, además por la naturaleza asintótica de la función. Obteniendo así los siguiente resultados:

D. Divididas	N. Op	L.Baricéntrico	N. Op
16,00	64	16,00	21

Según los resultados anteriores se puede deducir solamente que la convergencia del método de diferencias divididas ocurre con mayor rápidez, infieriendo que es más eficiente en la resolución del problema, aunque no necesariamente más preciso proporcionando el resultado final.

6. Se desea aproximar la función f(x) = tan(x) en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

a. Utilice una interpolación polinómica y escriba el polinomio resultante.

$$F(x) = -0,005859375 + 1,110497 * 10^1 3x + 0,125x^2 - 4,270828 * 10^1 4x^3 + x^4$$
$$+2,12774 * 10^1 5x^5 2,993325 10^1 5x^7 0,625x^8 + 1,169822 * 10^1 5x^9$$

Se definen 10 puntos diferentes dentro del intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se procede a evaluar en la función tan(x) para así obtener el polinomio interpolador respectivamente, siendo estos valores los siguientes:

Punto	Función	Polinomio Interporlador	Error (%)
-1,570796	-1,633124E+22	-1,633124E+22	1,469576E-07
-1,221730	-2,747477	-3,611396	31,444060
-1,221730	-2,747477	-3,611396	31,444060
0,872665	-1,191754	0,418330	64,897960
0,523599	0,577350	0,456850	20,871310
0,174533	0,176327	0,179711	1,918907
0,174533	0,176327	0,177537	0,685981
0,523599	0,577350	0,627163	8,627881
0,872665	1,191754	1,596298	33,945330
1,221730	2,747477	3,745235	36,315410
1,570796	1,633124E+22	1,633124E+22	2,449294E-08