RETO DE LA MANO

PRESENTADO A: EDDY HERRERA

PRESENTADO POR:

BRAYAN GONZÁLEZ
GERALDINE GÓMEZ
SANTIAGO ROA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ANÁLISIS DE ALGORITMOS
BOGOTÁ
2019

Reto de la mano.

Construir un Interpolar (no necesariamente en forma polinómica) utilizando la menor cantidad de puntos k y reproducir el dibujo completo de la mano (mejor exactitud) con la información dada en el script.

Criterios del concurso:

1. Metodología que explique cómo se seleccionaron k puntos con $k<n$ con n el total de puntos dados (Selección "inteligente de los puntos").

   La metodología para la selección de puntos, se realizó utilizando los siguientes criterios:

   1. Gráficamente con los puntos originales fue posible evidenciar los máximos y mínimos relativos que formaban el contorno de cada dedo, por definición de spline cúbico, estos puntos son necesarios para poder desarrollar el polinomio interpolante ya que definen la suavidad de las diferentes curvas que conforman la mano.
   2. Con el fin de determinar el orden de colocación de puntos, fue necesario determinar los puntos de inicio y final de la mano, que son los puntos que se encuentran en las muñeca.
   3. Posteriormente se verifica la segunda derivada de cada punto perteneciente a los diferentes polinomios interpolantes que conforman el trazador cúbico, con el fin de determinar la concavidad en el punto y así obtener la suavidad que va a dar la forma adecuada de la mano.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \cdots 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & & & \cdots 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3(f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]) \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nuestras derivadas como se pueden observar se denotan como la respuesta de los coeficientes multiplicados por la matriz de derivadas parciales.

Para ejemplificar el proceso se tomarán los siguientes puntos:

No.	x	y
1	14.65	14.7
2	15.2	11.0
3	17.0	8.20
4	17.52	6.70

A continuación se reemplazaran los puntos en el spline cúbico en el programa de r, obteniendo los siguientes resultados:

```
        [,1]      [,2]      [,3]
   14.700000 11.000000  8.200000
b  -7.508940 -5.163939 -2.013337
    0.000000  4.263638 -2.513303
d   2.584023 -1.254989  1.611092
```

Respecto a la anterior matriz es posible observar el cambio en la concavidad de las curvas en el parámetro **d,** ya que se presenta un cambio de signo, indicando si es cóncavo o convexo, y **b** muestra el signo de la pendiente que en este caso es negativa para todos los puntos que se tomaron, en caso contrario se notaría el cambio de signo de las diferentes pendientes.

2. Algoritmo que se aplicó (justificación) , por ejemplo, interpolación polinómica y como soluciono el sistema.

Algoritmo de Splines:

Este algoritmo permite usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar una interpolación más cercana a la figura deseada, en este caso la de la mano, en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos y con esto poder dibujar las curvas suaves que componen la figura con mayor precisión. Así pues, una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo, unidos entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad.

Además, dadas las condiciones del problema, específicamente que no se poseen los valores exactos de las derivadas de los extremos o bien una aproximación precisa de ellos, es posible clasificarlo como frontera libre, con lo que se hace necesario usar un trazador natural que se acerque con gran precisión a la figura, siendo este el trazador cúbico.

Los trazadores cúbicos (cubic splines) naturales se utilizan para crear una función que interpola un conjunto de puntos de datos. Esta función consiste en una unión de polinomios cúbicos, uno para cada intervalo. Es decir, si tenemos n +1 puntos (x_0, y_0) ..., (x_0, y_0) con $x_0 < x_1 < ... < x_n$, se realiza la interpolación de la función f en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ con un polinomio cúbico (en realidad de grado ≤ 3) S_k (x) de tal manera que el polinomio cúbico (o trazador cúbico) $S_i(x)$ en $[x_i, x_{i+1}]$ y el trazador cúbico $S_{i+1}(x)$ en $[x_{i+1,} x_{i+2}]$, coincidan en x_{i+1} y que también sus derivadas primera y segunda coincidan en este punto. Cada trazador cúbico coincide con f en los extremos de cada intervalo.

Implementación:

El proceso de construcción del trazador cúbico consiste en determinar cada polinomio cúbico $S_j(x)$, es decir, buscar sus coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i. A partir de esto se obtiene un sistema de ecuaciones 4n × 4n, donde las incógnitas son todos los coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i, i = 0, 1, ..., n −1. Reduciendo los puntos originales en un alto porcentaje.

Según lo anterior el proceso de implementación del algoritmo y método de solución se realizó de la siguiente forma:

1. Se determinó el trazador cúbico (frontera natural) a partir de los siguientes puntos:

No.	x	y	f'(x,y)	f''(x,y)
1	14.65	14.7	0	0
2	15.2	11.0	-7.358	2.085
3	17.0	8.20	-5.465	-0.705
4	17.52	6.70	0.068	-10.217
5	16.8	6.80	-8.600	-6.323
6	14.4	9.30	5.044	-2.159
7	15.0	6.30	-19.567	18.961
8	14.6	4.60	18.961	41.685
9	13.9	5.40	-1.223	-4.104
10	13.1	8.20	-3.073	6.371
11	13.3	5.80	0.150	-255.465
12	12.9	3.90	-34.369	-162.853
13	11.9	5.70	17.812	12.871
14	11.3	8.20	-8.541	1.933
15	10.6	5.50	0.903	-7.702
16	10.1	4.60	3.036	8.184
17	9.3	5.50	2.609	-12.976
18	10.0	10.7	-13.164	5.697
19	8.6	9.9	30.813	11.281
20	7.0	9.1	-7.559	-3.093
21	6.6	9.7	0.639	-1.218

22	8.10	12.5	-3.834	-1.682
23	10.3	16.8	0	0

2. Se determinó el polinomio interpolador tanto para x como para y para desarrollar la función de Spline Cúbico

$$P(x) = \; sx_0 + sx_1\,(x - x_1) + sx_2(x - x_2)^2 + sx_3(x - x_3)^3$$

$$P(y) = \; sy_0 + sy_1\,(y - y_1) + sy_2(y - y_2)^2 + sy_3(y - y_3)^3$$

3. Se implementa la función de Spline Cúbico para graficar el contorno de la mano con los puntos seleccionados.

3. Validación del resultado:

Es posible validar el resultado a través de la gráfica generada por la función utilizada, teniendo en cuenta los siguientes ítems:

- No existe ningún tipo de alteración o deformación en la gráfica que impidan observar la forma o contorno de la mano.

Productos:

1. Algoritmo, requerimientos, codificación.

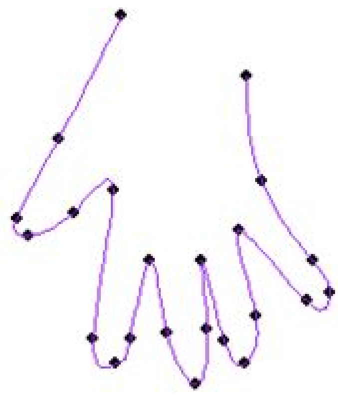
```
cubicSpline<- function(x,y){
  a=rep(y)
  n=length(x)
  h<-(c(x,0)-c(0,x))[2:n]
  alph<-(3/c(1,h,1,1)*(c(a,1,1) - c(1,a,1)) -
        3/c(1,1,h,1)*(c(1,a,1)-c(1,1,a)))[3:n]
  A <- c(1,rep(0,times=n-1))
  for (i in 1:(n-2)){
    A <- rbind(A,c( rep(0,times=i-1) ,
        c(h[i],2*(h[i]+h[i+1]),h[i+1]) ,
        rep(0,times=n-i-2) ) )
  }
  A <- rbind(A,c(rep(0,times=n-1),1))
  b <- c(0,alph,0)
  c <- solve(A, b)
  b <- ((c(a,0) - c(0,a))/c(1,h,1) - c(1,h,1)/3*(c(c,0)
        + 2*c(0,c)))[2:n]
  d <- ((c(c,0) - c(0,c))/(3*c(1,h,1)))[2:n]
  ans = rbind(a[1:n-1],b,c[1:n-1],d)
}

draw<-function(x,y){
  t = 1:length(x)
  sx = cubicSpline(t,x)
  sy = cubicSpline(t,y)
  for (i in 1:(length(t)-1)){
    dat<- data.frame(t=seq(t[i],t[i+1], by=0.1) )
    fx <- function(x) (sx[1,i] + sx[2,i]*(x-t[i])
          + sx[3,i]*(x-t[i])^2 + sx[4,i]*(x-t[i])^3)
    fy <- function(x) (sy[1,i] + sy[2,i]*(x-t[i])
          + sy[3,i]*(x-t[i])^2 + sy[4,i]*(x-t[i])^3)
    dat$y=fy(dat$t)
    dat$x=fx(dat$t)
    points(dat$x,dat$y,type='l', col='purple',lwd=3)
  }
}
```

2. Codificación, tabla donde está la interpolación en los n-k puntos (no seleccionados), el polinomio o la función interpolante. En un plano los puntos originales, los utilizados y el contorno de la mano original y el interpolado (utilice el grosor mínimo para la curva).

Puntos y Gráfico Originales:

Puntos y Gráfico del interpolador:



3. Calcular la cota de error de su método con los datos experimentales y compárela con la cota teórica.

La cota de error de Spline Cúbico está definida por la siguiente función:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384}$$

Valores Interpolados:

x	y	$f_{(iv)}$ (x,y)
14.65	14.7	0
15.2	11.0	3.12
17.0	8.20	-1.05
17.52	6.70	-15.32
16.8	6.80	-9.48
14.4	9.30	-3.23
15.0	6.30	28.44
14.6	4.60	62.52
13.9	5.40	-6.15
13.1	8.20	9.55
13.3	5.80	-383.19
12.9	3.90	-244.28
11.9	5.70	19.30
11.3	8.20	2.90
10.6	5.50	-11.55
10.1	4.60	12.27
9.3	5.50	-19.46
10.0	10.7	8.54
8.6	9.9	16.92
7.0	9.1	-4.64
6.6	9.7	-1.82
8.10	12.5	-2.52
10.3	16.8	0
Total		**-539.13**

Valores Originales:

x	y	$f_{(iv)}$ (x,y)
14.65	14.7	-520.98
14.71	14.33	-230.041,00
14.6	13.4	1020.51
14.8	12.33	-98.71
15.2	11.0	15.91
15.6	10.5	18.93
15.7	10.22	-3.54
17.0	8.20	24.77
17.6	7.10	27.21

17.52	6.70	48.63
17.3	6.60	-1.78
16.8	6.80	-0.19
15.4	8.30	43.654,00
14.83	8.80	-55.3
14.4	9.30	347.17
14.5	8.80	-377.62
15.0	6.30	14307.85
15.1	5.50	16257.85
15.0	5.00	-3808.31
14.9	4.70	217.67
14.6	4.60	-60.49
14.3	4.50	-3.48
14.0	4.90	52.85
13.9	5.40	43.802,00
13.8	5.80	-1.05
13.5	6.90	-15.32
13.1	8.20	-9.48
13.0	7.60	-3.23
13.3	5.80	28.44
13.2	4.50	62.52
13.1	4.30	-6.15
12.9	3.90	9.55
12.4	4.20	-383.19
11.9	5.70	-244.28
11.7	7.00	19.30
11.6	7.90	2.90
11.3	8.20	-11.55
10.9	7.30	12.27
10.7	6.70	-19.46
10.6	5.50	8.54
10.6	5.10	16.92
10.1	4.60	-4.64
9.7	4.7	-1.82
9.4	5.0	-2.52
9.3	5.5	59.91
9.6	7.2	-238.81
9.9	7.8	175.10
10.1	8.60	7.21
10.2	9.40	-7.54
10.3	10.0	0.34
9.10	10.7	2.20
8.6	9.9	-21.83
7.5	9.0	-1.32

7.0	9.1	-7.48
6.7	9.3	10.28
6.6	9.7	-0.15
7.70	11.7	-15.66
8.00	12.3	16.89
8.10	12.5	-188.20
8.40	13.0	15.97
9.20	13.91	81.37
9.30	14.9	-1013.10
10	16	-394.36
10.2	16.4	70.41
10.3	16.8	70.37
10.0	10.7	60.32
9.50	11.0	0,00
Total		27255.18

Para calcularlos se necesitan los valores totales de todos las coordenadas respecto a su cuarta derivada, generando el siguiente resultado:

$$\max_{a \leq x \leq b} |27.255{,}18 + 539{,}13| \leq \frac{5(27.255{,}18)}{384}$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |27.764{,}31| \leq 354{,}88$$

4. Tabla donde estén los valores interpolados (tenga en cuenta los que no utilizo), los originales y el error relativo, calcule un error relativo total como la suma de los errores relativos.

$$\varepsilon = \frac{f(x)}{S(x)}$$

$$\varepsilon = \frac{27.255{,}18}{539{,}13}$$

$$\varepsilon = 50{,}55$$

El error relativo es inferior a la cota de error máximo.

5. Cree una función que cuente el número aciertos y el número de diferencias en una cifra entre su función de interpolación y los originales e implementarlo como el ***índice de Jaccard.***

   La función planteada que se encarga del conteo del número de aciertos y desaciertos que tienen los conjuntos de puntos o coordenadas entre ellos, tomó como principio la metodología usada para escoger los puntos del interpolador y hallar la diferencia entre el total de estos puntos y los puntos originales del contorno de la mano.

   Función:

$$P_o \to Puntos\ Originales$$
$$P_m \to Puntos\ interpolador$$
$$P_o \cap P_m \to Aciertos$$
$$P_o \cup P_m \to Total\,puntos$$

$$J(P_o, P_m) = \frac{P_o \cap P_m}{P_o \cup P_m}$$

$$P_o \to 67$$
$$P_m \to 23$$
$$P_o \cap P_m \to 23$$
$$P_o\ P_m \to 44$$

$$J(67{,}23) = \frac{23}{67}$$

$$J(67{,}23) = 0{,}34$$

   Según la definición del índice de Jaccard siempre se toman valores entre 0 y 1, correspondientes a la igualdad total entre ambos conjuntos. Donde 0 indica que no existen elementos en común y 1 que existe igualdad total.

   Respecto a la anterior se podría inferir que se presentan varias coordenadas en común entre ambos conjuntos específicamente de 23 puntos todos pertenecientes al conjunto del interpolador. A pesar de esto, el resultado de la función tiene una clara tendencia a cero, indicando que existen en totalidad 44 coordenadas de diferencia entre ambos conjuntos y una fuerte desigualdad entre ellos.

6. Cree una función que muestre la eficiencia de su método.

   Para verificar la eficiencia de nuestro método se verificó la cantidad de operaciones que se realizaban con diferente cantidad de puntos, en este caso se tomaron los 67 puntos originales y se compara con los 23 puntos escogidos para darle la forma a la mano en cuanto a cantidad de operaciones se refiere.

```
> draw(x2,y2)
Contador de operaciones:  168
Contador de operaciones:  168
> draw2(x,y)
Contador de operaciones:  520
Contador de operaciones:  520
```

como se puede ver al tener 23 puntos se realizan solamente 168 operaciones para poder trazar la mano, en cambio se realizan 520 operaciones entre más nodos halla. Esto se debe a la característica de splines la cual es dividir el total de nodos en diferentes intervalos de puntos que al notar como polinomio su grado máximo va a ser cúbico. evitando así que se haga un polinomio por 67 puntos sino más bien un polinomio por 23 puntos reduciendo considerablemente la complejidad del trazador

Preguntas:

1. ¿El origen se puede modificar?

   El origen que inicial del problema tiene como punto de partida la muñeca, posteriormente el dedo meñique y continúa recorriendo los demás puntos hasta que termina en la parte inferior de la muñeca correspondiente al dedo pulgar.

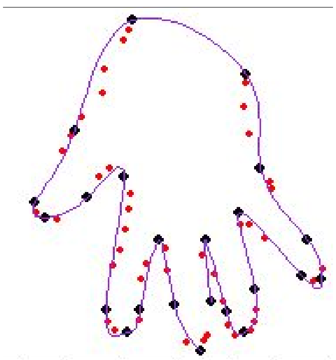
   En los siguientes puntos se modificó el origen para que el punto de partida sea el dedo corazón, a continuación se mostrarà el orden de los puntos y la forma de la mano:

   Puntos:

   x2=c(12.9, 11.9, 11.3, 10.6, 10.1, 9.3, 10.0, 8.6, 7.0, 6.6, 8.10, 10.3, 14.65, 15.2, 17.0, 17.52, 16.8, 14.4, 15.0, 14.6, 13.9, 13.1, 13.3)

   y2=c(3.90, 5.70, 8.20, 5.50, 4.60, 5.50, 10.7, 9.9, 9.1, 9.7, 12.5, 16.8, 14.7, 11.0, 8.20, 6.70, 6.80, 9.30, 6.30, 4.60, 5.40, 8.20, 5.80)

   Contorno de la mano:

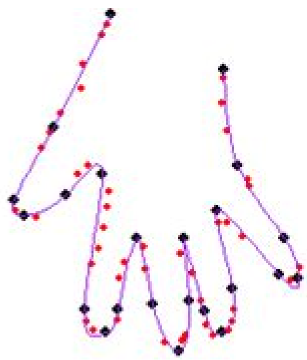


La siguiente secuencia de puntos tiene como origen los puntos correspondientes a la muñeca del dedo pulgar respectivamente, y de terminaciòn la parte de la muñeca donde se encuentra el dedo meñique. A continuación se mostrarà el orden de los puntos y la forma de la mano:

Puntos:

x2=c(10.3, 8.10, 6.6, 7.0, 8.6, 10.0, 9.3, 10.1, 10.6, 11.3, 11.9, 12.9, 13.3, 13.1, 13.9, 14.6, 15.0, 14.4, 16.8, 17.52, 17.0, 15.2, 14.65)
y2=c(16.8, 12.5, 9.7, 9.1, 9.9, 10.7, 5.50, 4.60, 5.50, 8.20, 5.70, 3.90, 5.80, 8.20, 5.40, 4.60, 6.30, 9.30, 6.80, 6.70, 8.20, 11.0, 14.7)

Contorno de la mano:

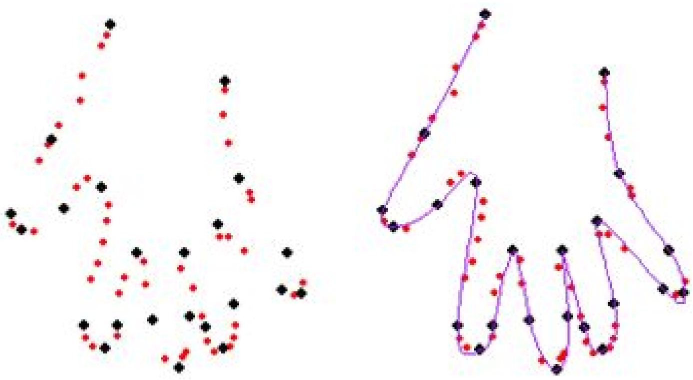


Por medio de estas gráficas es posible observar que no tiene relevancia si el origen se modifica, ya que el contorno de la mano sigue siendo el mismo junto con la suavidad de las curvas que dibujan los diferentes dedos, a pesar del inconveniente presentado en el primer caso, en el cual el origen correspondía al dedo corazón, y donde se visualiza que la mano es cerrada, se debe a que el algoritmo usado, sigue el orden de los puntos, es decir, si empieza en el dedo corazón, al llegar al límite impuesto por la muñeca tiene que seguir graficando la otra mitad de la mano, y para esto debe cerrar esa curva, conectando así los puntos que hacen referencia a la muñeca. Esto quiere decir que sin importar el valor numérico de los puntos de origen no tendrán ninguna incidencia en el diseño de la mano, pero si el orden con el que se pretendan graficar.

2. ¿Si tenemos nueva información, es decir, nodos como podemos implementar esa información en el algoritmo de interpolación?

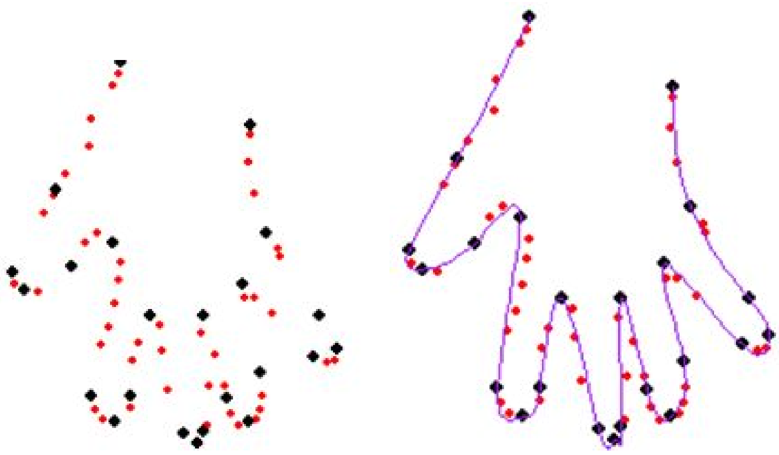
   Para responder a esta pregunta se van a realizar cambios en los diferentes puntos que se obtuvieron, específicamente en los puntos críticos, ya que estos puntos son los que le dan la forma a los diferentes dedos. A continuaciòn se mostrarán los puntos de referencia para observar los cambios que se van a ir mencionando:

   Puntos de referencia:



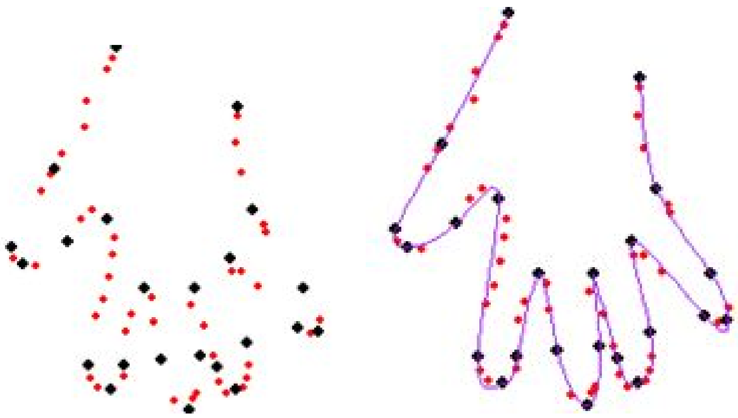
.

En primera instancia se van a modificar dos puntos que dan la forma del dedo corazón, estos puntos son (13.3, 5.80) y (11.9, 5.70) a (13.1, 4.30) y (12.4, 4.20) respectivamente. Lo que se quiso observar es si al acercar los puntos a otros se notaria el cambio al momento de graficarlo o si se preservará la integridad de la mano.



El otro cambio que se realizó, corresponde al dedo meñique, alejando los puntos un poco para poder observar qué cambio se producía, modificándose el punto (17.6, 7.10) por (17.52, 6.70). La gráficas que representan lo anterior son la siguientes:

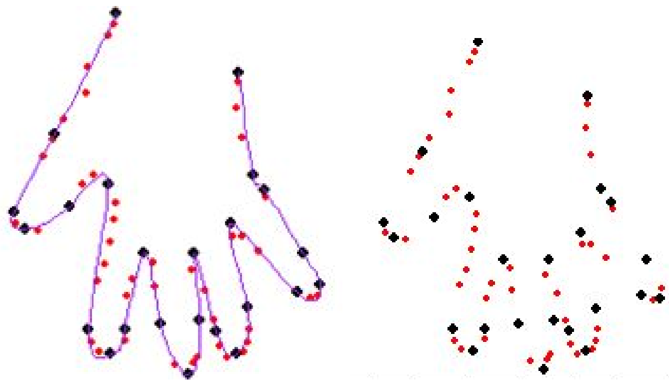
:



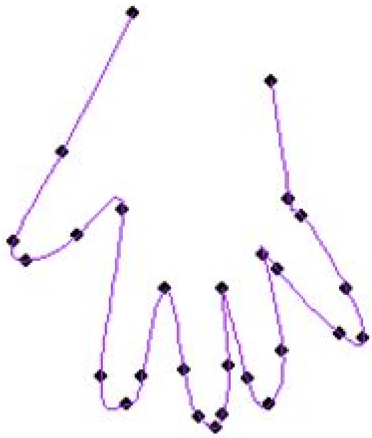
Por medio de las modificaciones realizadas anteriormente y a partir de sus gráficas, se puede inferir que para la mayoría de n+1 nodos que se deseen agregar, el interpolador cúbico continuará suavizando la curva, es decir sin importar cuán alejados están dichos puntos el contorno seguirá siendo el mismo dadas las aproximaciones del método, con la excepción de si estos nodos están demasiado cercanos, ya que tendería a generar líneas rectas y los puntos no se distinguían bien uno del otro, pero aun así su deformación no es tan radical o severa.

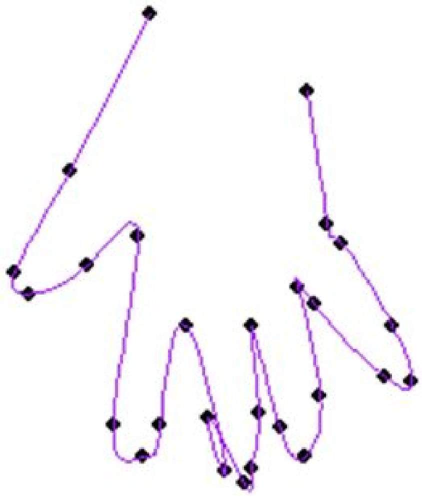
3. ¿Su método es robusto, en el sentido que si se tienen más puntos la exactitud no disminuye?

   Al tener más puntos la matriz por la cual se obtienen los coeficientes se modificaría inmediatamente, teniendo que recalcular el nuevo nodo donde estaría ubicado, es decir, si es un punto crítico lo más probable es que se gene al momento de graficarlo algún tipo de anomalía, esto porque, como se mencionó anteriormente, los puntos podrían quedar muy pegados el uno del otro y esto generaría estas posibles anomalías. Pero al tener más nodos ubicados en sectores donde no hayan puntos críticos no lo va afectar.
   Para mostrar lo mencionado anteriormente se van a agregar puntos y se van a mostrar como quedaría la forma de la mano. En estas gráficas se muestra como queda la mano al agregarle un punto, el punto #3, este con coordenadas (15.6, 10.5).



Para poder tener una respuesta un poco más acertada se van a agregar más puntos. Estos puntos van a demostrar que independientemente de los puntos que se agreguen, la mano no va a presentar ningún problema, obviamente teniendo en cuenta el orden de los puntos, ya que si alguno de estos puntos se llega a poner en desorden al momento de graficarlo la línea va a empezar a mostrar ese trazo mal realizado, a continuación se va a mostrar también un ejemplo con ese error.





En esas gráficas se puede observar que se le agregaron varios puntos en orden y aún así no se presentó ningún problema, pero en la segunda gráfica se agregaron los mismos puntos solamente que uno se puso en una posición incorrecta y por eso que la gráfica sale de esa manera.

4. ¿Si la información adicional o suponga tiene la información de otra mano con más cifras significativas como se comporta su algoritmo? ¿La exactitud decae?

   El método utilizado para la selección de puntos críticos y el trazador de spline cúbico, impiden que la existencia de información adicional o para este caso que los puntos tengan más cifras significativas la reducción de la exactitud, al contrario esta información permitiría que su ubicación tenga mayor precisión en el gráfico, pero siempre preservando algún tipo de estabilidad entre ellos mismos, es decir que no sean tan cercanos o estén muy alejados para que al momento de que se grafique la unión de los puntos no se generen incongruencias. Esto teniendo en cuenta que los puntos deben estar ordenados, esto se refiere que no me vaya a saltar un nodo por error e intente ponerlo al final, ya que esto hará que una el último punto con el que puse, lo que daría un error, como se mencionó en el punto pasado.