

## Matriz de Hankel

Una matriz infinita es llamada la matriz de Hankel si tiene la forma:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha = (\alpha_j), j \leq 0$  es una secuencia de números complejos. En términos matemáticos, se puede definir como toda una matriz que cumpla

$$\forall \alpha_{i,j} \in H \longrightarrow \alpha_{i,j} = \alpha_{i-1,j+1}$$

(Torrco Ramos, 2017, p.6).

## Mapeo de Hankel

Se toma la señal ruidosa  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  se mapea sobre una matriz  $X$  de tamaño  $L \times K$  de Hankel de la siguiente manera:

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_K] = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_K \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & \cdots & y_N \end{pmatrix}$$

$L$  es conocido como tamaño de la ventana, es un entero tal que  $2 \leq L \leq N$ . La longitud de la ventana  $L$  es el único parámetro en este mapeo. La selección de  $L$  depende del problema en cuestión y en la información preeliminar sobre  $y$ . Es decir, si sabemos que  $y$  tiene un componente periódico con un período entero, entonces para una mejor separabilidad de este componente es aconsejable tomar  $L$  proporcional a su período (Hassani et al., 2009). Los resultados empíricos nos dicen que  $L$  debería ser lo suficientemente grande pero no mayor a  $\frac{N}{2}$ .

## Descomposición de una matriz en valores singulares (SVD)

Parafraseando a (Fallas, 2018) se sigue que dados  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $X \in \text{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$  una descomposición de valores singulares de la matriz  $X$  es una factorización de la forma siguiente:

$$X_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V_{n \times n}^T$$

donde  $U$  es una matriz con columnas ortogonales,  $V$  es una matriz ortogonal y  $\Sigma$  es una matriz diagonal, que consta de  $L$  valores singulares con  $\sigma_1 \geq \sigma_2, \dots \geq \sigma_L$ . En particular, la SVD existe para cualquier matriz.

La descomposición SVD puede ser empleada como una estrategia para reducir la dimensionalidad de un problema dado que permite identificar y ordenar las dimensiones en las que los datos presentan mayor variación.

### Teorema (Descomposición de matrices en valores singulares)

Sea  $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  una matriz de rango  $r$ .

1. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , entonces existen matrices ortogonales  $U \in M_m(\mathbb{R})$  y  $V \in M_n(\mathbb{R})$ , y una matriz  $S \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  de rango  $r$  tales que  $M = U.S.V^t$ .
2. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , entonces existen matrices unitarias  $U \in M_m(\mathbb{C})$  y  $V \in M_n(\mathbb{C})$ , y una matriz  $S \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  de rango  $r$  tales que  $M = U.S.\overline{V}^t$ .

En ambos casos

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$  son los valores singulares de  $M$ .

### Teorema de Eckart-Young- Mirsky

Con base en lo establecido por (Golub et al., 1987) el teorema en cuestión es una construcción que da solución al problema de hallar aproximaciones a  $X$  que tengan un rango no mayor

a un  $r$ , siendo  $r$  un entero fijo. En otras palabras, que sea una norma matricial unitaria invariante que satisfaga

$$\| U^T X V \| = \| X \|$$

para todas las matrices unitarias  $U$  y  $V$ . Luego, se busca una aproximación  $\tilde{X}$  a  $X$  que satisfaga

$$\text{rang}(\tilde{X}) \leq r$$

$$\| \tilde{X} - X \| = \inf_{\text{rang}(\tilde{X}) \leq r} \| \tilde{X} - X \|$$

Esta solución constructiva está dada para la norma de Frobenius. Posteriormente, Mirsky demuestra que dicha construcción resuelve el problema para una norma arbitraria. La construcción es lo que ya hemos estudiado como descomposición de matrices en valores singulares.

### Rango de frecuencias

El teorema de Eckart-Young-Mirsky establece que es posible determinar un rango  $r$  más cercano al promedio de los  $\sigma_i$ , de manera que los valores singulares  $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_L$  correspondan a las frecuencias más altas de la serie temporal y por ende están asociadas al ruido, por lo que sería suficiente tomar  $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_L = 0$ .

Para efectos del proyecto, el  $r$  se va a considerar como  $r = i - 2$ , donde  $i$  es el menor valor entre 0 y  $L$  que cumple lo siguiente:

$$\| \sum [i, i] - \sum [i + 1, i + 1] \| \leq \frac{|\max \sigma_j - \min \sigma_j|}{L}$$

$$\| \sum [i + 1, i + 1] - \sum [i + 2, i + 2] \| \leq \frac{|\max \sigma_j - \min \sigma_j|}{L}$$

### Promedio de Antidiagonales

De acuerdo con (Hassani et al., 2009) el proceso de promediado diagonal consiste en transformar cada matriz  $X_{ij}$  de la descomposición en una nueva serie de longitud  $N$ . Entonces se va tener una matriz  $Y$  de tamaño  $L \times K$  con elementos  $y_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K$ , donde  $L = \min(L, K), K = \max(L, K)$  y  $N = L + K - 1$ . Haciendo el promedio diagonal se transfiere la matriz  $Y$  a la serie  $y_1, \dots, y_N$  y se establece la señal recuperada  $y_r$  mediante la

fórmula:

$$y_r(i) = \begin{cases} \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i X_r[j, i-j] & \text{si } 0 \leq i < L-1 \\ \frac{1}{L} \sum_{j=0}^L X_r[j, i-j] & \text{si } L-1 \leq i \leq K-1 \\ \frac{1}{N-i} \sum_{j=i-K+1}^{N-K+1} X_r[j, i-j] & \text{si } K-1 < i \end{cases}$$

Lo anterior, corresponde a promediar los elementos sobre las antidiagonales  $i+j = k+1$  de la matriz en este caso  $X_r$ .

Es conveniente representar el paso de promediado diagonal con la ayuda del operador de hankelización. Este operador actúa sobre una matriz de tamaño  $L \times K$  arbitraria  $Y = (y_{ij})$  del siguiente modo: para  $A_s = (l, k) : l+k = s, 1 \leq l \leq L, 1 \leq k \leq K$  y  $i+j = s$  el elemento  $\tilde{y}_{ij}$  de la matriz  $HY$ , donde  $H$  es el operador de hankelización, es:

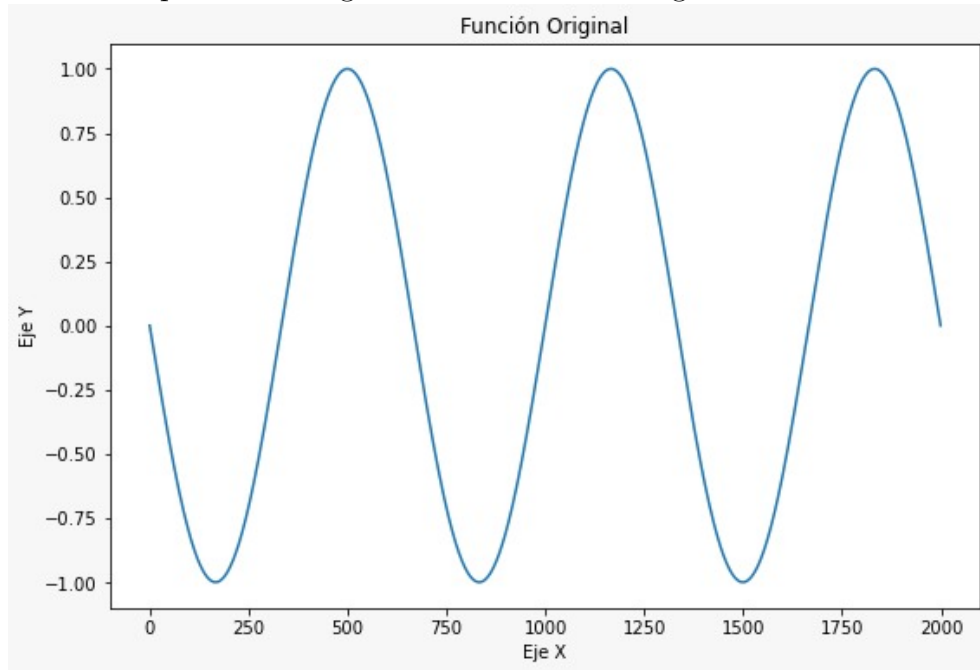
$$\tilde{y}_{ij} = \sum_{(l,k) \in A_s} y_{lk} / |A_s|$$

donde  $|A_s|$  denota el número de elementos del conjunto  $A_s$

## Representaciones gráficas

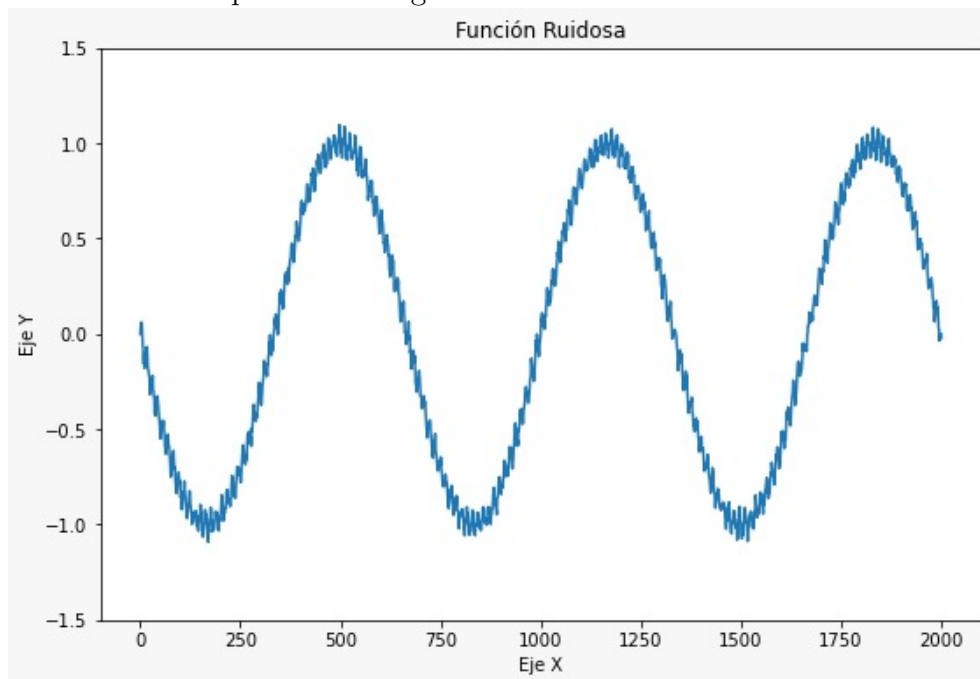
**Figura 1.**

Representación gráfica de la función original sin ruido.

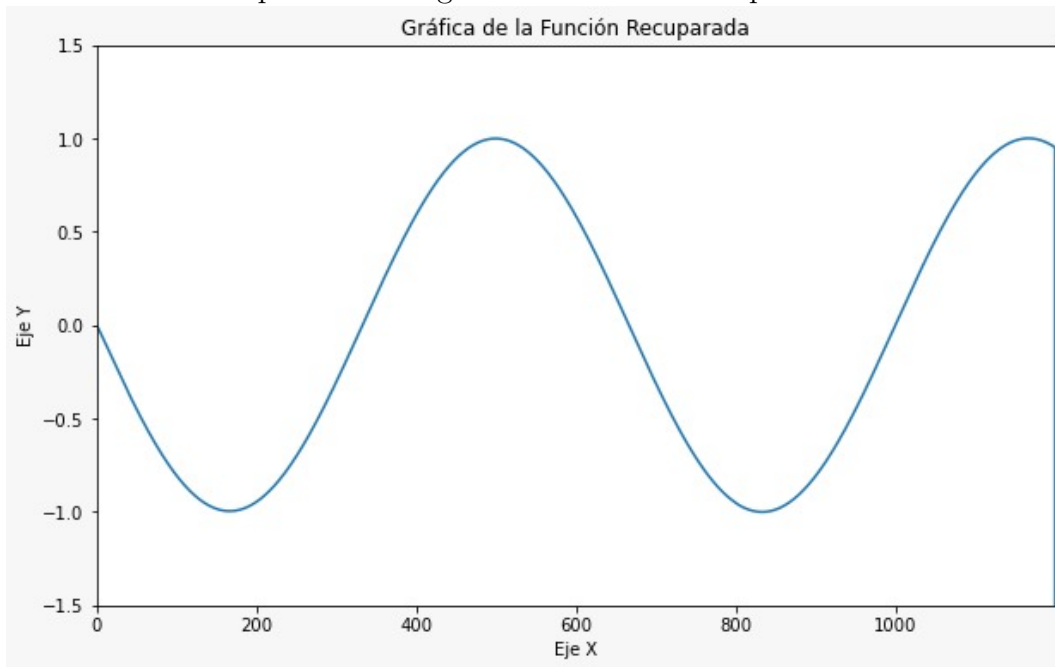


**Figura 2.**

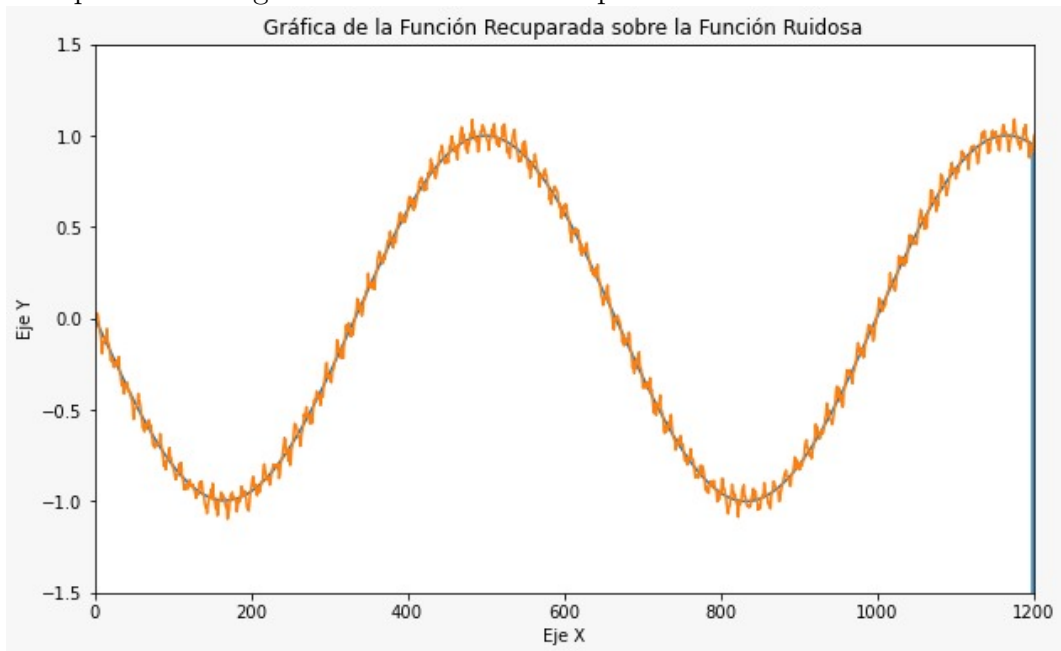
Representación gráfica de la función ruidosa.



**Figura 3.**  
Representación gráfica de la señal recuperada.

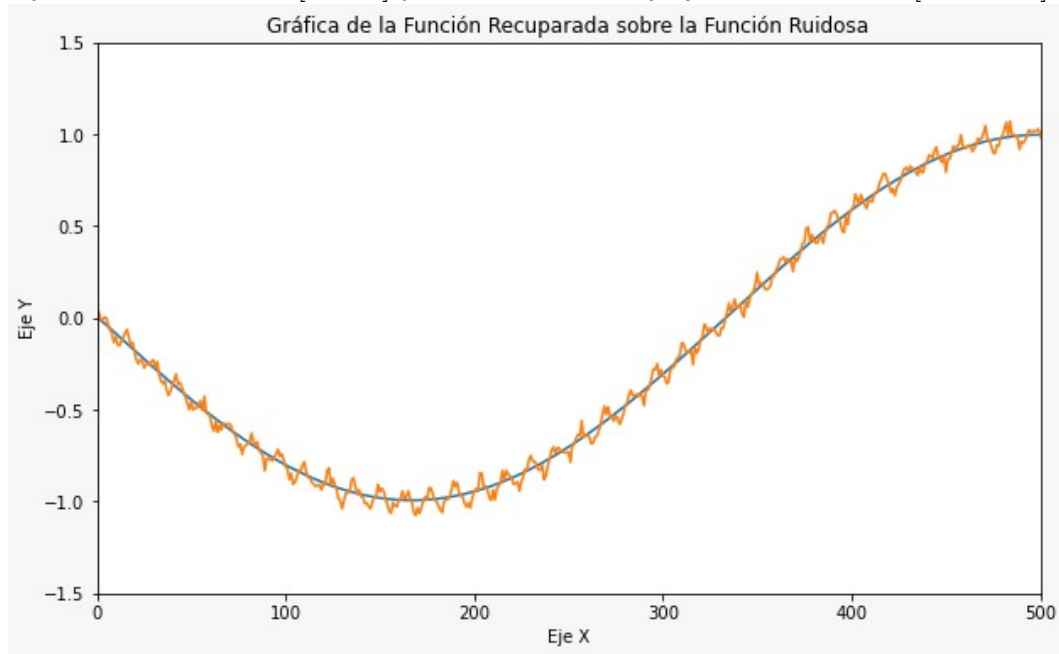


**Figura 4.**  
Representación gráfica de la función recuperada sobre la función ruidosa.



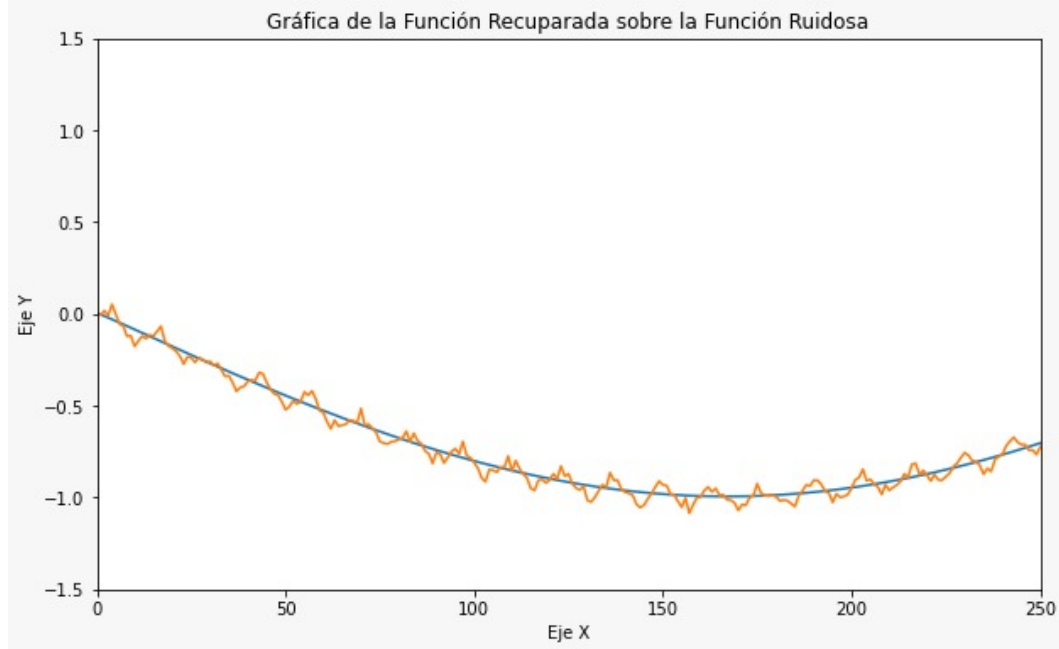
**Figura 5.**

Representación gráfica de la función recuperada sobre la función ruidosa que se mueve en el eje  $x$  en el intervalo  $[0, 500]$  y se mueve en el eje  $y$  en el intervalo  $[-1.5, 1.5]$ .



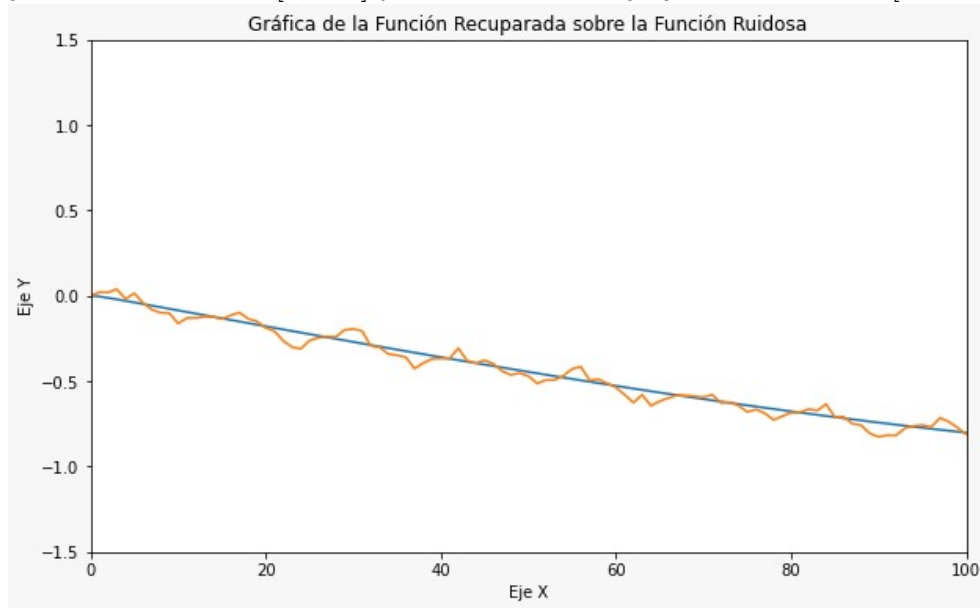
**Figura 6.**

Representación gráfica de la función recuperada sobre la función ruidosa, que se mueve en el eje  $x$  en el intervalo  $[0, 250]$  y se mueve en el eje  $y$  en el intervalo  $[-1.5, 1.5]$ .



**Figura 7.**

Representación gráfica de la función recuperada sobre la función ruidosa, que se mueve en el eje  $x$  en el intervalo  $[0, 100]$  y se mueve en el eje  $y$  en el intervalo  $[-1.5, 1.5]$ .



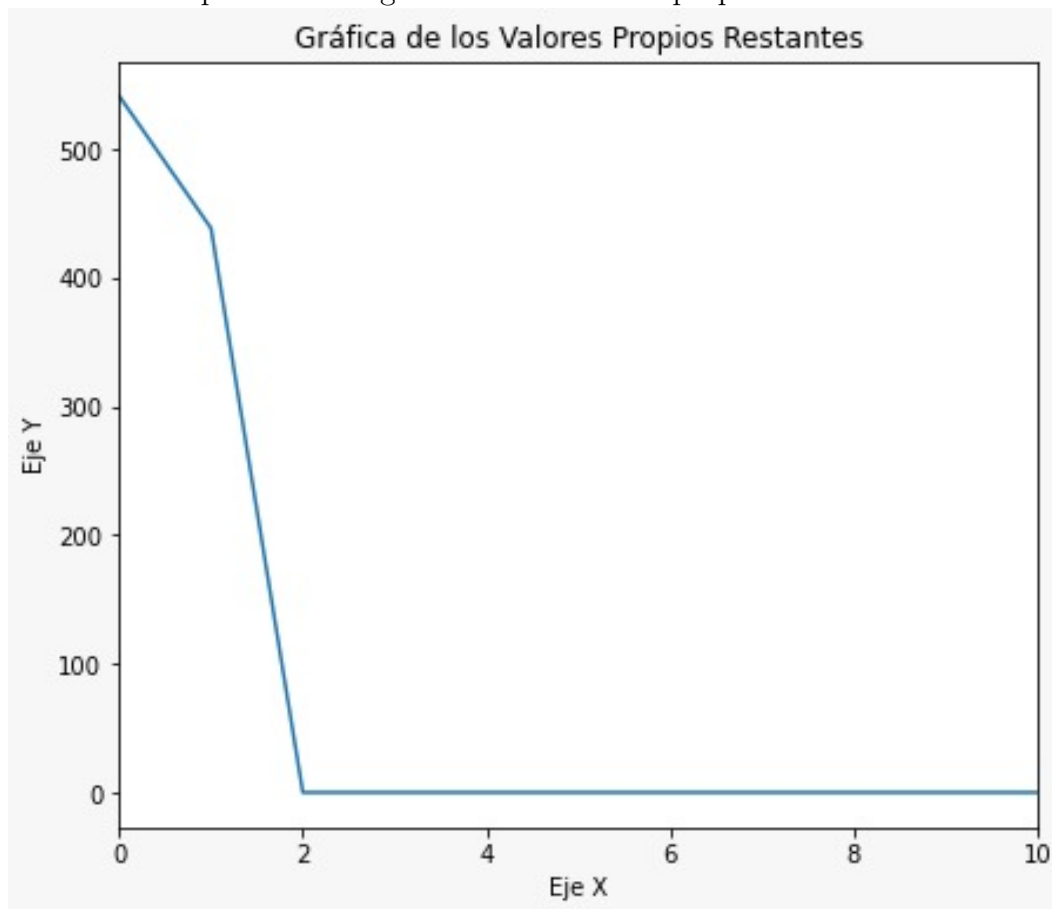
**Figura 8.**

Representación gráfica de todos los valores propios.



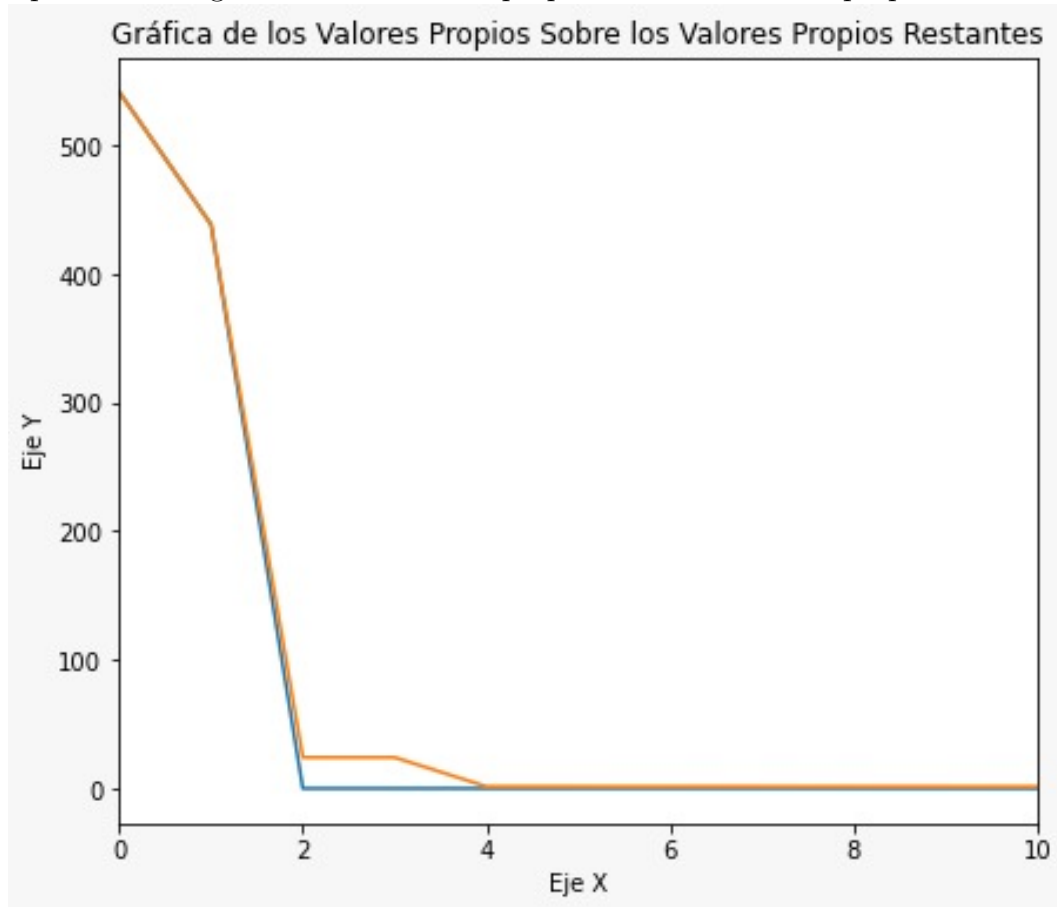


**Figura 9.**  
Representación gráfica de los valores propios restantes.



**Figura 10.**

Representación gráfica de los valores propios sobre los valores propios restantes.



## Referencias bibliográficas

Fallas Monge, J.(2018).*Fundamentos teóricos de la descomposición en valores singulares de una matriz y sus aplicaciones*.[Coloquios de Matemática Aplicada]. Tecnológico de Costa Rica.

Golub, G., Hoffman, A. y Stewart, G. (1987). A Generalization of the Eckart- Young- Mirsky Maxim Approximation Theorem. *Linear Algebra and its applications* 88/89. (pp.317-327).

Hassani, H., Heravi, S., y Zhigljavsky, A. (2009). Forecasting European Industrial Production with Singular Spectrum Analysis. *International Journal of Forecasting*, 25, 103-118.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2008.09.007>

Torrico Ramos, F. (2017). *Valores singulares de Hankel y regresión softmax para diagnóstico severidad de fallos en rodamientos*. [Informe de avance de proyecto para optar al título profesional de ingeniero civil informática] Universidad Católica de Valparaíso.