16/08/2016

Física II

Horario de consulta: Jueves bloque B

Pruebas: 13 septiembre
25 octubre
29 noviembre

Carga electrica (q) → unidad de medida
Coulomb (C)

Ley de Coulomb → expresión → $F_{21} = k\dfrac{|q_1||q_2|}{r_{21}^2}$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\times10^{9}\left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$$

$\varepsilon_0 \rightarrow 8{,}85\times10^{-12}\left[\dfrac{C^2}{Nm^2}\right]$

vector → $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ → indica la fuerza por cual se realiza
vector unitario → $\vec{r}_{ji}$

Ley de Coulomb vectorialmente → $\vec{F}_{ji} = k\dfrac{q_j q_i(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}$

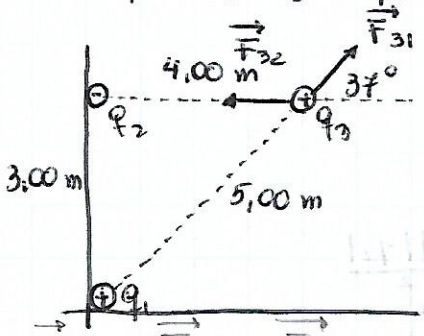
Principio de superposición → $\vec{F}_j = kq_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{q_i(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}}$

$$\vec{F}_j = \vec{F}_{j1} + \vec{F}_{j2} + \ldots + \vec{F}_{jn}$$

Ejemplo

Se tienen tres cargas puntuales ubicadas en los vértices .....

$q_1 = 6\,[nC]$ $\quad q_2 = 2\,[nC]$ y $q_3 = 5\,[nC]$



$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

$$\vec{F}_{31} = \frac{K \cdot q_3 \cdot q_1 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \qquad \vec{r}_1 = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}, \quad \vec{r}_3 = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_{31} = \frac{9\times10^{9} \cdot 5\times10^{-9} \cdot 6\times10^{-9} (4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})}{5^3}$$

$$\vec{F}_{31} = 2{,}16\times10^{-9} (4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})$$

$$\vec{F}_{31} = 8{,}64\times10^{-9}\,\hat{\imath} + 6{,}48\times10^{-9}\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_{32} = \frac{K \cdot q_3 \cdot q_2 (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \qquad \vec{r}_2 = (0\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}), \quad \vec{r}_3 = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

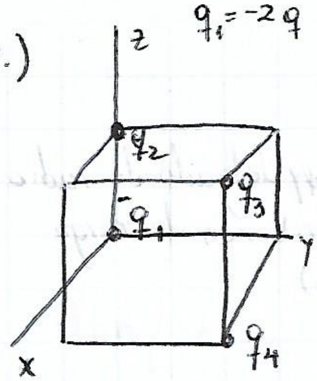
$$\vec{F}_{32} = \frac{9\times10^{9} \cdot 5\times10^{-9} \cdot -2\times10^{-9} (4\hat{\imath})}{64}$$

$$\vec{F}_{32} = -5{,}625\times10^{-9}\,\hat{\imath}$$

$$\vec{F}_3 = 8{,}64\times10^{-9}\,\hat{\imath} + 6{,}48\times10^{-9}\,\hat{\jmath} - 5{,}625\times10^{-9}\,\hat{\imath}$$

$$\vec{F}_3 = 3{,}015\times10^{-9}\,\hat{\imath} + 6{,}48\times10^{-9}\,\hat{\jmath}\ (N)$$

2.) $q_1 = -2q$, $q_2 = q_3 = q_4 = +q$



$$\vec{F_3} = \vec{F_{31}} + \vec{F_{32}} + \vec{F_{34}}$$

$$\vec{F_{31}} = \frac{k \cdot q_3 \cdot {}^-q_1 \, (\vec{r_3} - \vec{r_1})}{|\vec{r_3} - \vec{r_1}|^3} \qquad \begin{array}{l} \vec{r_3} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} \\ \vec{r_1} = 0 \end{array}$$

$$\vec{F_{31}} = \frac{k \cdot q \cdot -2q \, (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})}{|\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}|^3}$$

$$\vec{F_{31}} = \frac{-k \cdot 2q^2 \, (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})}{(\sqrt{3})^3}$$

$$\vec{F_{31}} = -\frac{k \cdot 2q^2}{3\sqrt{3}}\hat{\imath} - \frac{k \cdot 2q^2}{3\sqrt{3}}\hat{\jmath} - \frac{k \cdot 2q^2}{3\sqrt{3}}\hat{k} \ (N)$$

$$\vec{F_{32}} = \frac{k \cdot q_3 \cdot q_2 \, (\vec{r_3} - \vec{r_2})}{|\vec{r_3} - \vec{r_2}|^3} \qquad \begin{array}{l} \vec{r_3} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} \\ \vec{r_2} = \hat{k} \end{array}$$

$$\vec{F_{32}} = \frac{k \cdot q^2 (\hat{\imath} + \hat{\jmath})}{2\sqrt{2}}$$

$$\vec{F_{32}} = \frac{k \cdot q^2}{2\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{k \cdot q^2}{2\sqrt{2}}\hat{\jmath} \ (N)$$

$$\vec{F_{34}} = \frac{k \cdot q_3 \cdot q_4 \, (\vec{r_3} - \vec{r_4})}{|\vec{r_3} - \vec{r_4}|^3} \qquad \begin{array}{l} \vec{r_3} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} \\ \vec{r_4} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} \end{array}$$

$$\vec{F_{34}} = \frac{k \cdot q^2 (\hat{\jmath})}{1}$$

$$\vec{F_{34}} = k \cdot q^2 \, \hat{\jmath} \ (N)$$

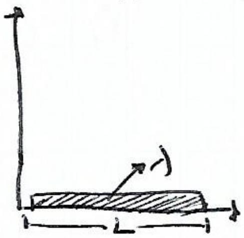
$$\vec{F_3} = -0{,}38\, kq^2 (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) + 0{,}35\, kq^2 (\hat{\imath} + \hat{\jmath}) + k \cdot q^2 (\hat{\jmath})$$

$$\vec{F_3} = [-0{,}03\,\hat{\imath} - 0{,}03\,\hat{\jmath} + 0{,}62\,\hat{k}) \, [N] \, kq^2$$

Determinar la carga electrica si,

lineal (λ)

a.) $\lambda = cte$



$$\boxed{Q = \lambda L}$$

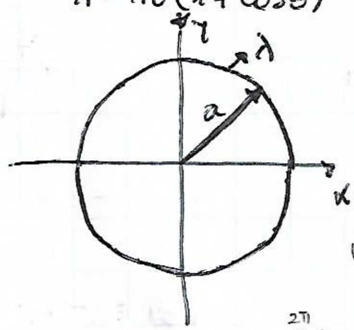
b.) $\lambda = \lambda_0(1+x)$

$$Q = \int_0^L \lambda_0 (1+x) dL$$

$$Q = \lambda_0 \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^L$$

$$Q = \lambda_0 \left(L + \frac{L^2}{2}\right) [C]$$

c.) un anillo muy delgado de radio "a" con una distribución de carga $\lambda = \lambda_0(1+\cos\theta)$



$$\boxed{Q = \int \lambda \, dl}$$

$$dl = a\, d\theta$$

$$Q = \int \lambda_0 (1+\cos\theta)\, a\, d\theta$$

$$Q = \lambda_0 a \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta) d\theta$$

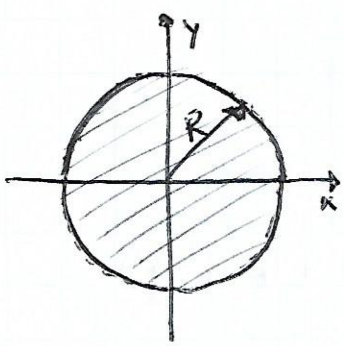
$$Q = a\lambda_0 (\theta + \cancel{\operatorname{sen}\theta})$$

$$Q = a\lambda_0 (2\pi)$$

$$Q = 2\pi a \lambda_0$$

Densidad de carga superficial (σ)

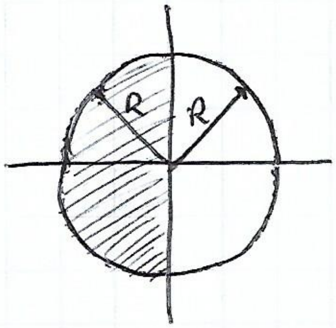
d.) disco σ=constante



$$Q = \sigma S \rightarrow \pi r^2$$

$$Q = \sigma \pi r^2$$

e) disco $\sigma \neq cte$



$$Q = \iint \sigma \, dS$$

$$dS = r \, dr \, d\theta$$

$$Q = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{0}^{r} \sigma \, r \, dr \, d\theta$$

$\sigma = K r^2$

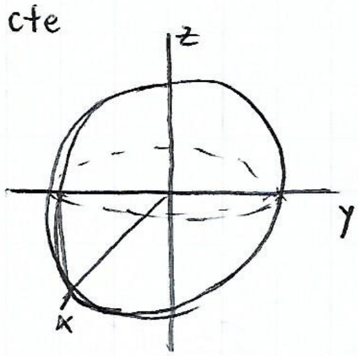
$$Q = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{0}^{a} K r^2 \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$Q = K \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{0}^{a} r^3 \, dr \, d\theta = K \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{a^4}{4} \, d\theta$$

$$Q = \frac{K a^4}{4} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta = \frac{K a^4}{4} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$Q = \frac{K a^4 \pi}{4}$$

f.) $\rho = cte$



$$Q = \rho \cdot v$$

$$Q = \rho \, \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

$$Q = \frac{4\rho\pi r^3}{3}$$

g.) $\rho \neq cte$

$\rho = Ar$

$$Q = \iiint \rho \cdot dv$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} Ar \; r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$Q = A\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^3 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$Q = A\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^4 \operatorname{sen}\theta}{4} \, d\theta \, d\phi$$

$$Q = \frac{AR^4}{4}\int_0^{2\pi} \left. -\cos\theta \right|_0^{\pi} - 2$$

$$Q = \frac{AR^4}{4}\int_0^{2\pi} -(-1 - 1) \, d\phi$$

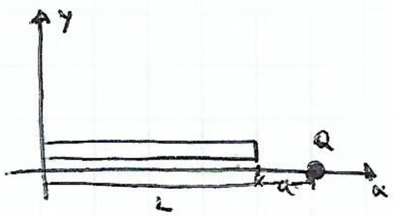
$$Q = \frac{AR^4 2\pi \cdot 2}{4} = A\pi R^4$$

Ley de Coulomb entre una carga continua y una discreta.

$$\vec{F}_q = kq\int_R \frac{dq\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad \Big\} \; dq \begin{cases} \lambda\, dL \\ \sigma\, dS \\ \rho\, dV \end{cases}$$

Ejercicio

Determinar la fuerza en la carga Q debida a la distribución lineal de carga, (con λ=cte).



1.) vectores posición

$\vec{r} = (L+a)\hat{\imath}$

$\vec{r}\,' = x\hat{\imath}$

$(\vec{r}-\vec{r}\,') = (L+a-x)\hat{\imath}$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = (L+a-x)^3$

2.) $dq = \lambda\, dl$, $dl = dx$ $\Big\}$ $dq = \lambda\, dx$

3.) limite

$0 \le x \le L$

4.) $$\vec{F}_q = kQ\int_0^L \frac{\lambda\, dx\,\cancel{(L+a-x)}\,\hat{\imath}}{(L+a-x)^{\cancel{3}2}}$$

$u = L+a-x$

$-du = dx$

$$\vec{F}_q = \lambda k Q \int_0^L \frac{dx\ \hat{\imath}}{\underbrace{(L+a-x)}_{u}{}^2} = \lambda k Q \int_0^L \frac{du}{u^2} = -\lambda k Q\left[-u^{-1}\right]\Big|_0^L = \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right.$$

$$= \frac{\lambda k Q L}{a(L+a)}$$

$\frac{dx}{u} = du$

con respecto al eje y

1. vectores

$\vec{r} = (L+a)\hat{j}$

$\vec{r}' = y\hat{j}$

$(\vec{r}-\vec{r}') = (L+a-y)\hat{j}$

$|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = (L+a-y)^3$

2. dq

$$\left.\begin{aligned} dq &= \lambda\, dl \\ dl &= dy \end{aligned}\right\} \lambda\, dy$$

3. Limite

$0 \leq y \leq L$

4. $$\vec{F}_q = kQ\int_0^L \frac{\lambda\, dy\, \cancel{(L+a-y)}\hat{j}}{(L+a-y)^{\cancel{3}\,2}}$$

$$\vec{F}_q = \lambda kQ\int_0^L \frac{dy}{(L+a-y)^2}\hat{j}$$

$u = L+a-y$

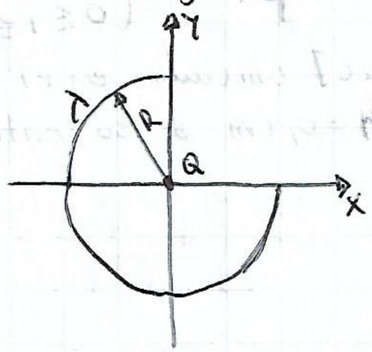
$du = -dy$

$$\vec{F}_q = \lambda kQ\int_0^L \frac{-du}{u^2}$$

$$\vec{F}_q = \lambda kQ\left[\frac{1}{u}\right]\Big|_0^L = \lambda kQ\left[\frac{1}{L+a-L} - \frac{1}{L+a}\right]$$

$$\vec{F}_q = \frac{\lambda kQL}{a(L+a)}(-\hat{j})\,[N]$$

Calcular la fuerza electrica que ejerce un trozo de aro con distribución de carga λ sobre una carga q ubicada en el origen



$$Q = \int \lambda \, dl$$

$$\vec{F}_{q\lambda} = K \cdot Q \int \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

vectores posicion

$\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$

$\vec{r}\,' = R\cos\theta\,\hat{\imath} + R\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = -R\cos\theta\,\hat{\imath} - R\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = R^3$

obtención del dq

Limite

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

$dq = \lambda \, dl$ $R\,d\theta$

$dl = R\,d\theta$

$dq = \lambda R \, d\theta$

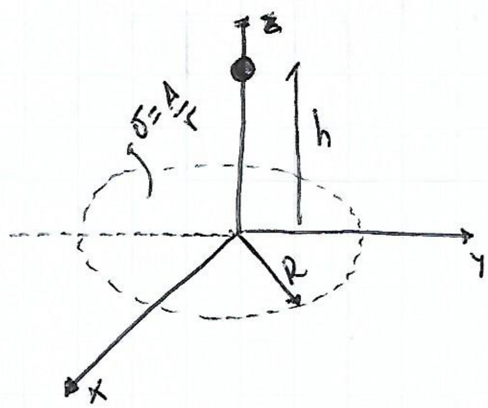
$$\vec{F}_{q\lambda} = K \cdot Q \int \frac{\lambda R d\theta (-R\cos\theta\,\hat{\imath} - R\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath})}{R^3} = -\lambda K Q \int \frac{(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath})}{R} d\theta$$

$$\vec{F}_{q\lambda} = -\frac{K \cdot Q \lambda}{R} \left[\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath} \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -KQ\lambda \left[-1\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} \right]$$

$$\vec{F}_{q\lambda} = \frac{KQ\lambda}{R} (\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \, [N]$$

Calcular la fuerza que ejerce la distribución superficial de carga de la figura de radio $R = 0{,}3\,m$ y $\sigma = \frac{A}{r}$ con $(A = cte)$ $(0 \le r \le R)$

sobre una carga Q puntual $Q = 50\,[\mu C]$ ubicada en el eje del circulo y a una distancia $h = 0{,}4\,m$ de su centro cuando $A = 60\,(\mu C)\,m$



$$\vec{F}_{q\sigma} = kQ \iint \frac{dq\,(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

vectores posición:

$\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + h\hat{k}$

$\vec{r}\,' = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = -r\cos\theta\,\hat{\imath} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + h\hat{k}$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = (r^3 + h^2)^{3/2}$

obt. del dq

$dq = \sigma\,ds$

$ds = r\,dr\,d\theta$

$dq = \frac{A}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r}\,dr\,d\theta$

Limite

$0 \le r \le R$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$\vec{F}_{q\sigma} = kQ \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{A\,dr\,d\theta\,(-r\cos\theta\,\hat{\imath} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + h\hat{k})}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\vec{F}_{q\sigma} = AkQ \left[\cancel{\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-r\cos\theta\,\hat{\imath}\,dr\,d\theta}{(r^2+h^2)^{3/2}}}^{\,0} + \cancel{\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}\,dr\,d\theta}{(r^2+h^2)^{3/2}}}^{\,0} + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{h\hat{k}}{(r^2+h^2)^{3/2}}\,dr\,d\theta \right]$$

$$\vec{F}_{q\sigma} = AkQ \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{h\hat{k}}{(r^2+h^2)^{3/2}}\,dr\,d\theta = 2\pi h \left[\frac{r}{h^2\sqrt{r^2+h^2}} \right]_0^R$$

$$\vec{F}_{q\sigma} = \frac{2\pi h\,R}{h^2\sqrt{R^2+h^2}}\hat{k} = \frac{2\pi R}{h\sqrt{R^2+h^2}}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{F_{Q\sigma}} = \frac{kQA \cdot 2\pi R}{h\sqrt{R^2+h^2}}\,\hat{k}\,(N)$$

$$\overrightarrow{F_{Q\sigma}} = \frac{k\,50\,\mu C \cdot 60\,\mu C \cdot 2\pi \cdot 0{,}3}{0{,}4\sqrt{0{,}3^2+0{,}4^2}}$$

$$\overrightarrow{F_{Q\sigma}} = \frac{16{,}2}{0{,}2} = 81\pi = 254{,}5\,\hat{k}\,(N)$$

Campo eléctrico

Carga de prueba (q) → carga ficticia

Intensidad de campo $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ $\frac{N}{C}$

$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

Cargas puntuales o discretas

$$\vec{E} = \frac{k\,q\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

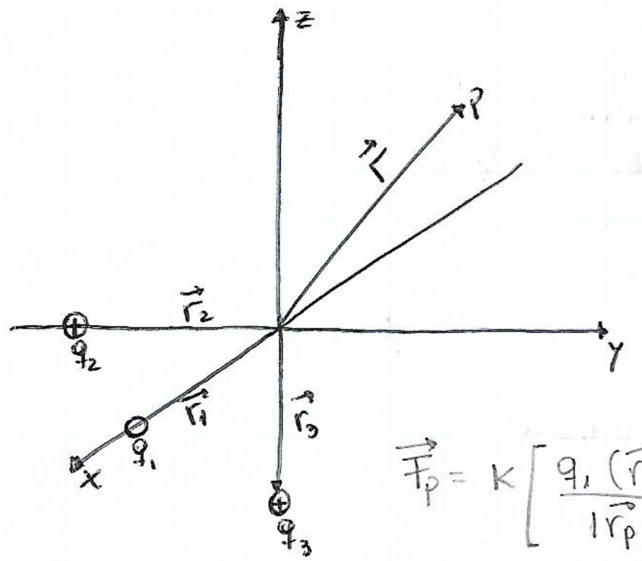
Cargas "n" puntuales

$$\vec{E} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Cargas continuas

$$\vec{E} = k\int_{\Omega}\frac{dq\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\quad\left.\right\}\quad \begin{array}{l} dq = \lambda dl \\ dq = \sigma ds \\ dq = \rho dv \end{array}$$

En la figura, calcule el campo eléctrico en el punto $P(-0{,}3;0{,}3;0{,}4)$ debido a las cargas $q_1 = -2[nC]$; $q_2 = 4[nC]$; $q_3 = 6[nC]$ cuyas posiciones son $P_1(0{,}5;0;0)$; $P_2(0;-0{,}3;0)$ y $P_3(0;0;-0{,}4)$.



$F_{p_1} =$

$$\vec{F_p} = K\left[\frac{q_1(\vec{r_p}-\vec{r_1})}{|\vec{r_p}-\vec{r_1}|^3} + \frac{q_2(\vec{r_p}-\vec{r_2})}{|\vec{r_p}-\vec{r_2}|^3} + \frac{q_3(\vec{r_p}-\vec{r_3})}{|\vec{r_p}-\vec{r_3}|^3}\right]$$

$$\vec{E_p} = K\left[\frac{q_1(-0{,}8;0{,}3;0{,}4)}{|-0{,}8;0{,}3;0{,}4|^3} + \frac{q_2(-0{,}3;0{,}6;0{,}4)}{|-0{,}3;0{,}6;0{,}4|^3} + \frac{q_3(-0{,}3;0{,}3;0{,}8)}{|-0{,}3;0{,}3;0{,}8|^3}\right]$$

$$\vec{E_p} = K\left[\frac{q_1(-0{,}8;0{,}3;0{,}4)}{0{,}94^3} + \frac{q_2(-0{,}3;0{,}6;0{,}4)}{0{,}78^3} + \frac{q_3(-0{,}3;0{,}3;0{,}8)}{0{,}90^3}\right]$$

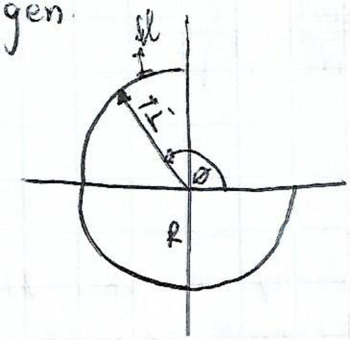
$$\vec{E_p} = 9\left[1{,}92\hat{i} - 0{,}72\hat{j} - 0{,}96\hat{k} - 2{,}52\hat{i} + 5{,}05\hat{j} + 3{,}37\hat{k} - 2{,}46\hat{i} + 2{,}46\hat{j} + 6{,}58\hat{k}\right.$$

$$\vec{E_p} = 9\left[-3{,}06\hat{i} + 6{,}79\hat{j} + 8{,}99\hat{k}\right]$$

$$\vec{E_p} = -27{,}54\hat{i} + 61{,}11\hat{j} + 80{,}91\hat{k}$$

Ejercicio

Si la figura representa una varilla de radio R que tiene densidad de carga $\lambda = A\,\text{sen}\,\phi$, Calcule el campo eléctrico en el origen.



$$\vec{E}_o = K\int \frac{dq\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

vectores posición

$\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$

$\vec{r}\,' = R\cos\phi\,\hat{\imath} + R\,\text{sen}\,\phi\,\hat{\jmath}$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = R^3$

$dq = \lambda\,dl \rightarrow dl = R\,d\phi$

$dq = A\,\text{sen}\,\phi\,R\,d\phi$

Limite $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 2\pi$

$$\vec{E}_o = K\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{A\,\text{sen}\,\phi\,R\,d\phi\,(-R\cos\phi\,\hat{\imath} - R\,\text{sen}\,\phi\,\hat{\jmath})}{R^3}$$

$$\vec{E}_o = \frac{AK}{R}\int \text{sen}\,\phi\,(-\cos\phi\,\hat{\imath} - \text{sen}\,\phi\,\hat{\jmath}) = \frac{-AK}{R}\int \underbrace{\text{sen}\,\phi\cos\phi\,\hat{\imath}}_{\substack{u = \text{sen}\,\phi \\ du = \cos\phi\,d\phi}} + \text{sen}^2\phi\,\hat{\jmath}\,d\phi$$

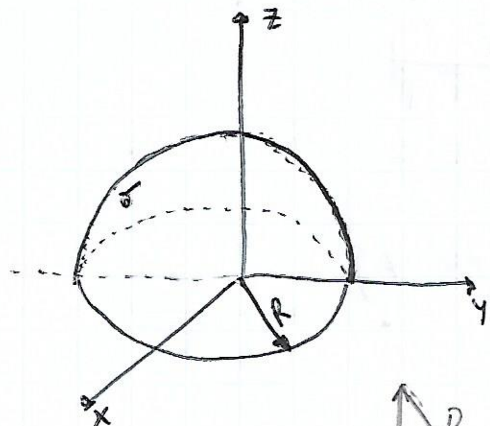
$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{\text{sen}^2\phi}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{1}{2}\hat{\imath}$$

$$\int \text{sen}^2\phi\,d\phi = \int \frac{(1-\cos 2\phi)}{2}d\phi\,\hat{\jmath} = \int \frac{d\phi}{2}\hat{\jmath} - \int \frac{\cos 2\phi}{2}d\phi\,\hat{\jmath}$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4}\cancel{(\text{sen}\,4\pi - \text{sen}\,\pi)}^{0}\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{E}_o = -\frac{KA}{R}\left(-\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{3}{4}\pi\hat{\jmath}\right)\left(\frac{N}{C}\right)$$

Un sistema aislante de la forma de una semiesfera tiene en su superficie una densidad de carga uniforme σ. Determine el campo electrico en el origen del sistema de coordenadas.



$$\vec{E}_{p\sigma} = K \iint \frac{\sigma ds(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

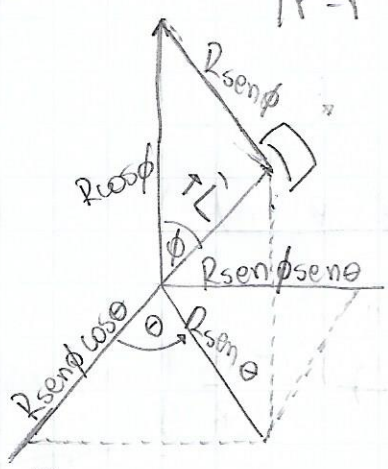
vectores

$\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$

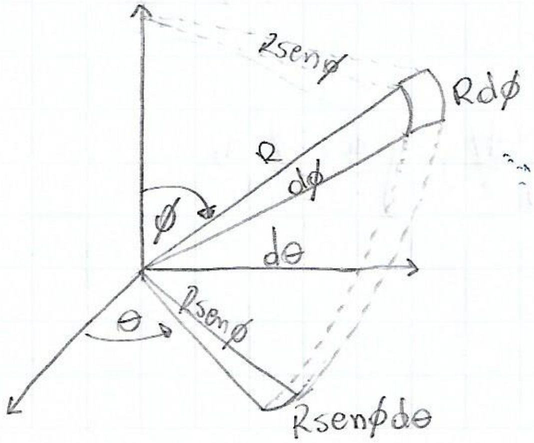
$\vec{r}\,' = R\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\hat{\imath} + R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} + R\cos\phi\,\hat{k}$

$\vec{r}-\vec{r}\,' = -R\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\hat{\imath} - R\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} - R\cos\phi\,\hat{k}$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = R^3$



Determinar el dS



$ds = (Rd\phi)(R\operatorname{sen}\phi\, d\theta)$

$ds = R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$

Limite

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad dq = \sigma\, ds$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ $\qquad = \sigma R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$

$$\vec{E}_{P\sigma} = K\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{R^2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta}{\cancel{R^3}} \cdot \left(-\cancel{R}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\hat{\imath} - \cancel{R}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} - \cancel{R}\cos\theta\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{E}_{P\sigma} = -K\sigma\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cancel{\operatorname{sen}^2\phi\, d\phi \cos\theta\, d\theta\,\hat{\imath}}^{\,0} + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cancel{\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta\, d\theta\,\hat{\jmath}}^{\,0} + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta\,\hat{k}\right]$$

$$1.\ \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$2.\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{2\pi} = -1+1 = 0$$

$$\vec{E}_{P\sigma} = -2\pi K\sigma \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\,\hat{k}$$

$u = \operatorname{sen}\phi$

$du = \cos\phi\, d\phi$

$$\vec{E}_{P\sigma} = -2\pi\sigma \int \underbrace{u\,du}_{\frac{u^2}{2}} = -\sigma K 2\pi \left[\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2}\hat{k}$$

$$\vec{E}_{P\sigma} = -2\pi K\sigma \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \pi/2}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 0}{2}\right]\hat{k}$$

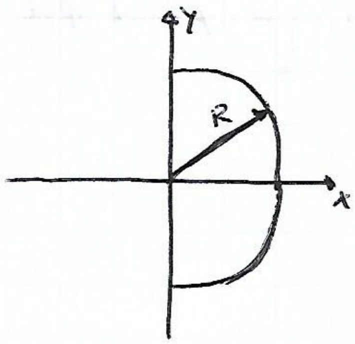
$$\vec{E}_{P\sigma} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}(-\hat{k})\left[\frac{N}{C}\right] = -\pi K\sigma\left[\frac{N}{C}\right] = \pi K\sigma(-\hat{k})\left[\frac{N}{C}\right]$$

Sobre una semicircunferencia se distribuye una densidad de carga lineal $\lambda = \lambda_0 \cos\phi$.

a.) calcular la carga total distribuida sobre la semicircunferencia.

b.) calcular el campo electrico en el origen

c.) en que punto del eje x debe situarse la carga calculada en la letra a.) para que el campo en el origen sea el mismo obtenido en la letra b.)



a.) como $\lambda \neq cte$

$$Q = \int \lambda \, dl$$

$$Q = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \lambda \cos\phi \, R d\phi$$

$$Q = \lambda R \left[\operatorname{sen} \pi/2 - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$Q = \lambda R [1 - (-1)]$$

$$Q = 2\lambda R \, [C]$$

b.) $\vec{E}_0 = k \int \frac{dq \, (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{r}\,' = R\cos\phi \hat{\imath} + R \operatorname{sen}\phi \hat{\jmath}$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = -R\cos\phi \hat{\imath} - R\operatorname{sen}\phi \hat{\jmath}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = R^3$$

$$dq = \lambda dl$$
$$dq = \lambda_0 \cos\phi \, R d\phi$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{E_0} = K \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{R\lambda_0 \cos\phi \, d\phi \, (-R\cos\phi \, \hat{\imath} - R\,\text{sen}\phi \, \hat{\jmath})}{R^3}$$

$$\vec{E_0} = -\frac{K\lambda_0}{R} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} (\cos^2\phi \, \hat{\imath} + \text{sen}\phi \cos\phi \, \hat{\jmath}) \, d\phi$$

$$\vec{E_0} = \frac{-K\lambda_0}{R} \left[\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^2\phi \, \hat{\imath} \, d\phi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} \text{sen}\phi \cos\phi \, \hat{\jmath} \, d\phi \right]$$

$$\vec{E_0} = \frac{-K\lambda_0}{R} \left[\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{d\phi}{2} + \cancel{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{\cos 2\phi}{2}}^{\,0} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} \text{sen}\phi \cos\phi \, d\phi \right]$$

$$\vec{E_0} = \frac{-K\lambda_0}{R} \left[\frac{-\pi}{2} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} \text{sen}\,\phi \cos\phi \, d\phi \right]$$

$$u = \text{sen}\phi$$
$$du = \cos\phi \, d\phi$$

$$\vec{E_0} = \frac{-K\lambda_0}{R} \left[\frac{-\pi}{2} + \cancel{\left. \frac{\text{sen}^2\phi}{2} \right|_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2}}^{\,0} \right]$$

$$\vec{E_0} = \frac{K\lambda_0\pi}{2R} \hat{\imath} \left(\frac{N}{C}\right)$$

c.) $Q = 2\lambda_0 R$

$E_0 = \dfrac{K \lambda_0 \pi}{2R}$

$E = \dfrac{KQ}{x^2} \Rightarrow$ fórmula distancia

$$\frac{K(2\lambda_0 R)}{x^2} = \frac{K\lambda_0 \pi}{2R}$$

$$x^2 = \frac{\cancel{K} 2 \cancel{\lambda_0} R \cdot 2R}{\cancel{K} \cancel{\lambda_0} \pi}$$

$$x^2 = 4R^2/\pi$$

$$x = \sqrt{4R^2}/\sqrt{\pi}$$

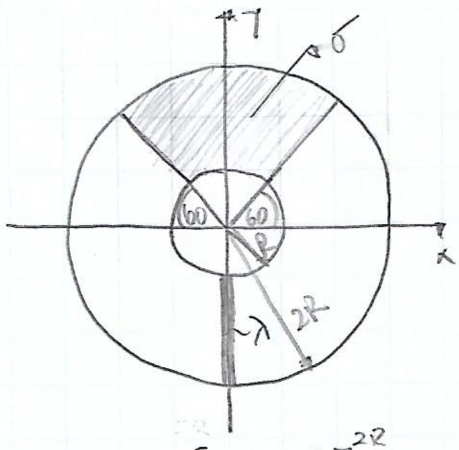
$$x = \frac{2R}{\sqrt{\pi}}$$

La figura muestra un alambre recto de distribución de carga lineal $\lambda = \lambda_0 (1+y)$ y un sector circular de distribución superficial $\sigma = \sigma(1 - \frac{R}{r})$ donde r es la distancia del centro hasta un punto de la distribución.

Determinar

a.) la carga total de ambas distribuciones

b.) el campo eléctrico en el origen.



a) $Q = \int \lambda \, dl$

$$Q = \int_R^{2R} \lambda_0 (1+y)\, dy$$

$$Q = \lambda_0 \int_R^{2R} 1 + y \, dy$$

$$Q = \lambda_0 \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_R^{2R} = \lambda_0 \left[2R - R + \frac{4R^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right] = \lambda_0 \left[R + \frac{3R^2}{2} \right] [C]$$

$$Q = \iint \sigma \, ds$$

$$Q = \int_R^{2R} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sigma_0 \left(1 - \frac{R}{r} \right) r\, dr\, d\theta$$

$$Q = \sigma_0 \int_R^{2R} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cancel{r} - \frac{R}{\cancel{r}} \cancel{r}\, dr\, d\theta = \sigma_0 \int_R^{2R} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} r - R \, dr\, d\theta$$

$$Q = \sigma_0 \left[\int_R^{2R} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} r\, dr\, d\theta - \int_R^{2R} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} R\, dr\, d\theta \right]$$

$$Q = \sigma_0 \left[\frac{\pi}{3} \frac{3R^2}{2} - R^2 \cdot \frac{\pi}{3} \right] = \sigma_0 \left[\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2 \pi}{3} \right] = \frac{\sigma_0 \pi R^2}{6} [C]$$

b.) $\vec{E_0} = \vec{E_\lambda} + \vec{E_\sigma}$

$\vec{E_\lambda} =$

vectores

$\vec{r} = 0$

$\vec{r}' = -y\hat{j}$

$|\vec{r} - \vec{r}'| = y\hat{j}$

$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = y^3$

$dq = \lambda dl$

$dq = \lambda_0(1+y)dy$

limite

$R \leq y \leq 2R$

$$\vec{E_\lambda} = k\int_R^{2R} \frac{\lambda_0(1+y)\,dy\,(y\hat{j})}{y^3}$$

$$\vec{E_\lambda} = k\lambda_0 \int_R^{2R} \frac{y+y^2}{y^3}\,dy = k\lambda_0\int_R^{2R} \frac{1+y}{y^2}\,dy\,\hat{j} = k\lambda_0\left[\int_R^{2R} \frac{1}{y^2}dy + \int_R^{2R}\frac{1}{y}dy\right]$$

$$\vec{E_\lambda} = k\lambda_0\left[\frac{1}{2R} + Ln(2)\right]\hat{j}\left(\frac{N}{C}\right)$$

$\vec{E_\sigma} =$ $\vec{r} = 0$

$\vec{r}' = r\cos\theta\hat{i} + r\,sen\theta\hat{j}$

$$\vec{E_\sigma} = k\iint_{R\ \ \pi/3}^{2R\ \ 2\pi/3} \sigma_0\left(1-\frac{R}{r}\right)\frac{r\,dr\,d\theta\,(-r\cos\theta\hat{i} - r\,sen\theta\hat{j})}{r^3}$$

$$\vec{E_\sigma} = k\sigma_0\iint_{R\ \ \pi/3}^{2R\ \ 2\pi/3}\left[\frac{\left(1-\frac{R}{r}\right)(-\overset{0}{\cancel{\cos\theta}}\hat{i} - \overset{1}{\cancel{sen\theta\hat{j}}})\,dr\,d\theta}{r}\right] = -k\sigma_0\int_R^{2R}\frac{1-R/r}{r}\hat{j}\,dr$$

$$\vec{E_\sigma} = -k\sigma_0\int_R^{2R}\frac{r-R}{r^2}dr\,\hat{j} = -k\sigma_0\,Ln(2) + Rk\sigma_0\int_R^{2R}\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r}$$

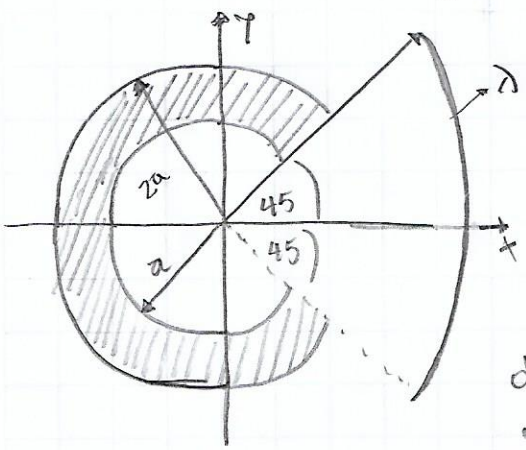
$$\vec{E_\sigma} = -k\sigma_0\left(Ln(2) - \frac{1}{2}\right)\hat{j}\left(\frac{N}{C}\right)$$

Una carga se encuentra uniformente distribuida formando 3/4 de golilla de radio A y 2A siendo su densidad superficial sigma σ. Otra carga esta también uniformente distribuida, formando un 1/4 de anillo de radio 3A y de densidad lineal λ

a.) Calcular el campo electrico resultante en el origen

b.) Determinar la magnitud y signo de la densidad de carga λ para que eh el campo electrico anterior se anule en el origen.

$$\vec{E}_{0\sigma} = k \iint \frac{\sigma ds (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



vectores σ

$\vec{r} = 0$

$\vec{r}' = r\cos\theta\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}$

$(\vec{r} - \vec{r}') = -r\cos\theta\hat{\imath} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}$

$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = r^3$

$dq = \sigma ds \rightarrow rdrd\theta$

$dq = \sigma rdrd\theta$

limite $\rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$

$a \leq r \leq 2a$

$$\vec{E}_\sigma = k \iint \frac{\sigma rdrd\theta(-r\cos\theta\hat{\imath} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath})}{r^3} = -k\sigma \int_a^{2a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{7\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}}{r} drd\theta$$

$$\vec{E}_\sigma = -k\sigma \int_a^{2a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{7\pi/4} \frac{drd\theta}{r}(\underset{A}{\cos\theta\,\hat{\imath}} + \underset{B}{\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}}) =$$

$$(A) = \int_a^{2a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{\cos\theta\,\hat{\imath}}{r}\,dr\,d\theta = \int_a^{2a} \frac{dr}{r}\left(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \int_a^{2a} \frac{dr}{r}\,-\sqrt{2} = -\sqrt{2}\,\mathrm{LN}\,2\,\hat{\imath}$$

$$(B) \int_a^{2a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,dr}{r}\,\hat{\jmath} = \int_a^{2a}\frac{dr}{r}\left(\cancel{-\cos\theta}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 0$$

$$(B) = 0$$

$$\vec{E}_\sigma = K\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{LN}(2)\,\hat{\imath}\left(\frac{N}{C}\right)$$

$$\vec{E}_\lambda = k\int \frac{\lambda\,d\ell\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{E}_\lambda = k\lambda\int \frac{3a\,d\theta\,(-3a\cos\theta\,\hat{\imath} - 3a\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath})}{(3a)^3}$$

$$\vec{E}_\lambda = -k\lambda\int \frac{\cancel{(3a)^2}\,d\theta\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath})}{(3a)^{\cancel{3}}}$$

$$\vec{E}_\lambda = -k\lambda\int \frac{\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}}{3a}$$

$$\vec{E}_\lambda = -k\lambda \int_{\frac{7\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}}{3a}$$

$$\vec{E}_\lambda = \frac{-k\lambda}{3a}\left[\int_{\frac{7\pi}{4}}^{\pi/4} \cos\theta\,\hat{\imath} + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{\pi/4} \overbrace{\cancel{\operatorname{sen}\theta}}^{0}\,\hat{\jmath}\right]$$

$$\vec{E}_\lambda = \frac{-k\lambda}{3a}\left[\sqrt{2}\,\hat{\imath}\right]$$

$$\vec{E}_\lambda = \frac{-\sqrt{2}\,k\lambda}{3a}\,\hat{\imath}\left(\frac{N}{C}\right)$$

$$\vec{E}_0 = k\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}(2)\,\hat{\imath} - \frac{k\lambda\sqrt{2}}{3a}\,\hat{\imath}$$

b.) $k\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}(2)\,\hat{\imath} - \frac{k\lambda\sqrt{2}}{3a}\,\hat{\imath} = 0$

$$\frac{\cancel{k}\lambda\cancel{\sqrt{2}}}{3a} = \cancel{k}\sigma\cancel{\sqrt{2}}\,\mathrm{Ln}(2)$$

$$\lambda = \sigma\,\mathrm{Ln}(2)\,3a$$

Ley de Gauss

Propositos

1. Establecer una relación matemática entre las líneas de fuerza del campo electrico en cada unidad de superficie (flujo electrico) que atraviesa una superficie cerrada y la carga electrica encerrada por dicha superficie.

2. Permite calcular el $\vec{E}_o$ de distribuciones de carga electrica de alta simetría.

Definición conceptual:

El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica encerrada por la superficie dividida por la permitividad del medio vacío ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$)

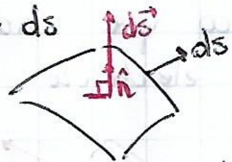
Definición operacional

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Donde $\oint_S$ integral de superficie cerrada "S"

$\vec{E} \cdot d\vec{s}$ producto punto (escalar) ds : elemento infinitesimal de superficie (magnitud)

$d\vec{s} : \hat{n}\, ds$



Qenc: la carga neta, total o encerrada por la superficie "S".

$\Phi_{\vec{E}}$: flujo electrico $\left[\frac{N}{C} m^2\right]$

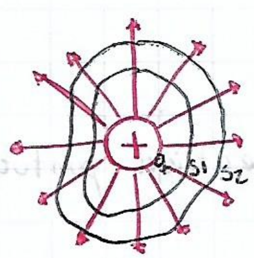
obs: si se quiere calcular

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad \Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

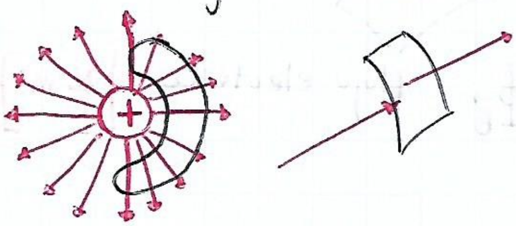
Propiedades

1. El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada que contenga carga eléctrica siempre será igual a Q_{enc}/ε_0 independiente del tamaño y de la forma de la superficie.

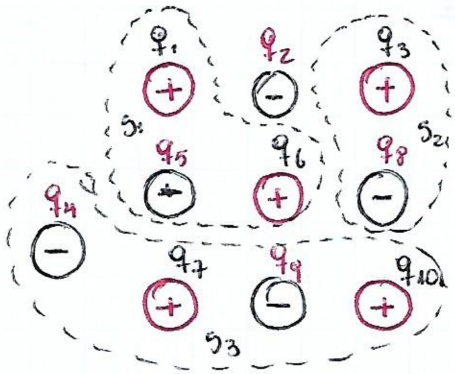


$$\Phi_{\vec{E}/S_1} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_{\vec{E}/S_2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2. El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada que no encierra carga eléctrica es igual a cero.



3. El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada, siempre depende de las cargas eléctricas encierra.



$$\Phi_{S_1} = \frac{q_1 - q_5\, q_6}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{S_2} = \frac{q_3 - q_8}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{S_3} = \frac{-q_4 + q_7 - q_9\, q_{10}}{\varepsilon_0}$$

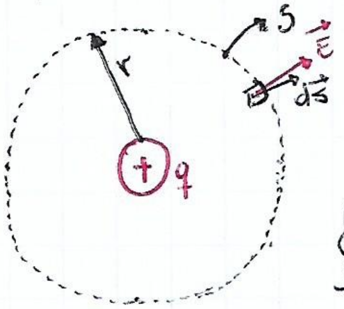
Aplicaciones de la ley de Gauss

1. Campo eléctrico de una carga puntual

Calcular el campo electrico de una carga eléctrica puntual $+q$ por medio de la ley de gauss.

Solución:

Nos damos una superficie "S" de radio "r" hipotética y aplicamos la ley de gauss.



$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$E = cte$ → E esta en magnitud
→ E es radial por la simetria

$$\oint_S E \cdot ds \cdot \cancel{\cos 0^\circ}^{\,1} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S E\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E \oint ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

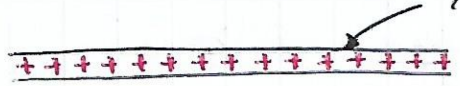
$$E_S = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\left[\frac{N}{C}\right] \rightarrow \text{escalar}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\hat{r} \rightarrow \text{vector} \qquad \approx \qquad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi \varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

2. Campo eléctrico de una distribución lineal,

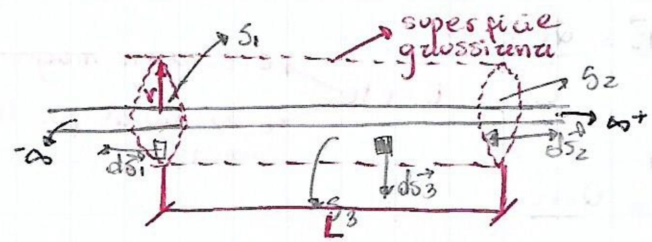
Calcular el campo electrico de una varilla infinito cargado con carga eléctrica por unidad de longitud uniforme (cte). λ

$\lambda = cte.$



Solución

Nos damos una superficie gaussiana "S" de radio "r" y longitud "L" y aplicamos la ley de gauss.



$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s_1} + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s_2} + \oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s_3} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_1} E \cdot ds_1 \cancelto{0}{\cdot \cos 90} + \oint_{S_2} E \cdot ds_2 \cancelto{0}{\cdot \cos 90} + \oint_{S_3} E \cdot ds_3 \cos 0 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_3} E \, ds_3 \cos 0 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

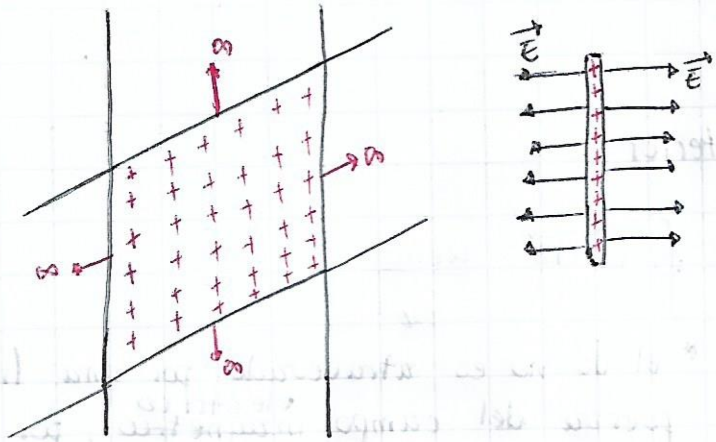
$$E \oint_{S_3} ds_3 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{S_3} = E(2\pi r L) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{enc}}{2\pi r L \varepsilon_0} \qquad \lambda = \frac{Q}{L}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \left[\frac{N}{C}\right]}$$

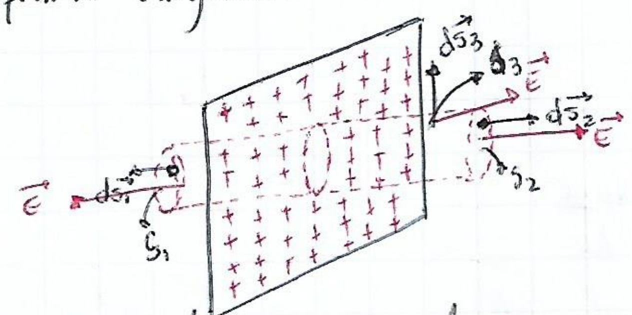
3. Campo eléctrico de un plano cargado infinito.

Calcular el $\vec{E}$ que produce un plano infinito cargado con densidad superficial uniforme σ



Solución

Nos damos una superficie gaussiana "S" que atraviese el plano infinito cargado.



$$\Phi_E = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s_1} + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s_2} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{s_3} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_1} E\, ds_1 \cancel{\cos 0}^{1} + \oint_{S_2} E\, ds_2 \cancel{\cos 0}^{1} + \cancel{\oint E\, ds_3 \cos 90}^{0} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E S_1 + E S_2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(S+S) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E\, 2S = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{Q_{enc}}{2\varepsilon_0 S} \qquad \sigma = \frac{Q_{enc}}{S}$$

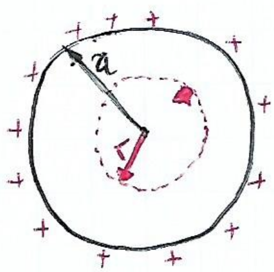
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{N}{C}\right]}$$

4. Campo eléctrico de una esfera conductora

Calcular el campo eléctrico en el interior y exterior de una esfera conductora de radio "a" y carga +Q.

Solución

i.) Calculo del $\vec{E}$ interior:

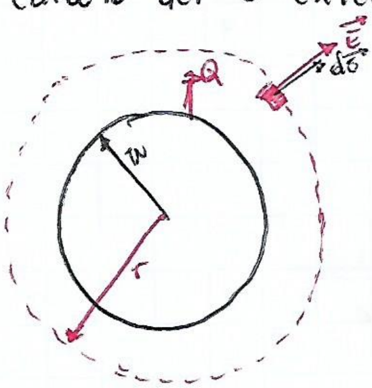


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

* el ds no es atravesado por una linea de fuerza del campo ~~magnetico~~ eléctrico, por lo tanto, no encierra carga eléctrica.

$Q_{enc} = 0 \longrightarrow E_{int} = 0 \left[\frac{N}{C}\right]$

ii) Calculo del $\vec{E}$ exterior



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint E \cdot ds \cos\theta = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

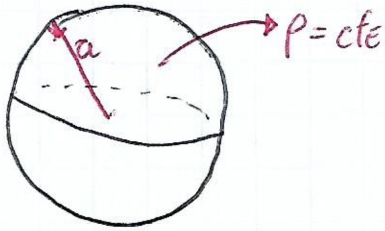
$$E s = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\left[\frac{N}{C}\right]}$ → similar a la carga puntual

5. Sea una esfera de radio "a", con carga "Q" y densidad de carga volumetrica uniforme.

i.) Calcular el campo eléctrico en el interior de la esfera.
ii.) Calcular el campo eléctrico en el exterior de la esfera.
iii.) Con los datos obtenidos en i y ii haga una gráfica del campo eléctrico en función de "r".

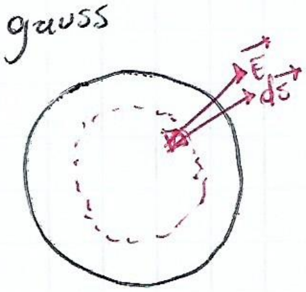


Solución

Como la esfera tiene "ρ" entonces es una esfera aislante.

i.) Cálculo del E_{int}:

Nos damos una superficie S con radio $r < a$ y aplicamos gauss



como $E = cte$ → por estar en magnitud
→ por ser radial

$$ES = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint E\, ds \cos 0^\circ = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

ii. Calculo de la Qenc

$\rho = cte \qquad \rho = \frac{Q}{V}$

$\rho = \frac{Q_{enc}}{V_{enc}}$

$\frac{Q_{enc}}{V_{enc}} = \frac{Q}{V} \qquad Q_{enc} = \left(\frac{V_{enc}}{V}\right) \cdot Q$

$Q_{enc} = \frac{\left(\cancel{4/3 \pi} r^3\right)}{\left(\cancel{4/3 \pi} a^3\right)} \cdot Q$

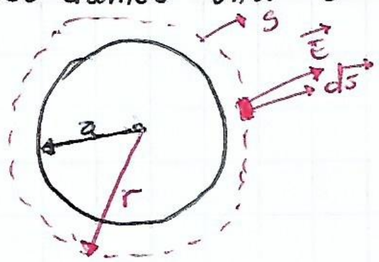
$$\boxed{Q_{enc} = \frac{r^3}{a^3} Q}$$

i2.) $E(4\pi \cancel{r^2}) = \frac{r^{\cancel{3}}}{a^3} Q$

$E = \left(\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 a^3}\right) r \left[\frac{N}{C}\right]$

ii) Cálculo del E_{ext}

Nos damos una S con $r > a$ y aplicamos gauss.



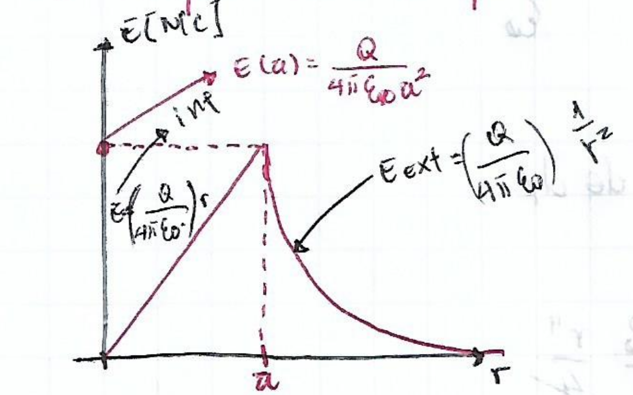
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}$$

iii.) Gráfica de $E = f(r)$:



6. Sea una esfera de radio "a" con densidad de carga
$\rho = \frac{\rho_0 r}{a}$; $0 < r < a$

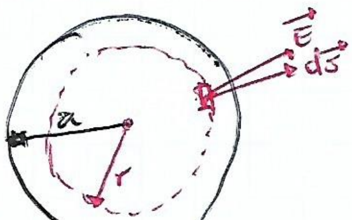
Calcular el campo eléctrico

i.) en el interior

ii.) en el exterior

iii) graficar $E = f(r)$ "tarea"

i.) Calculo del E int.



$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

ii.) Calculo de la Q_{enc}:

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \left(\frac{\rho_0 r'}{a}\right) (r'^2 dr' \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

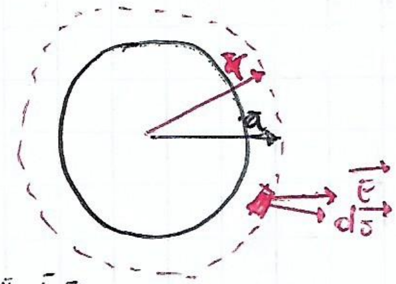
$$Q_{enc} = \frac{\rho_0}{a}(4\pi)\int_0^r r'^3 dr' = \frac{\cancel{4}\pi \rho_0}{a}\frac{r^4}{\cancel{4}}$$

$$Q_{enc} = \frac{\rho_0 \pi r^4}{a} [C]$$

ii.) $E(4\cancel{\pi}\cancel{r^2}) = \frac{\pi \rho_0 r^4}{a \varepsilon_0}$

$$E = \left(\frac{\rho_0}{4 a \varepsilon_0}\right) r^2 \qquad r < a$$

iii.) Calculo del E_{ext}



$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{\rho_0 r}{a} (r^2 dr \, sen\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$Q_{enc} = \frac{4\pi \rho_0}{a} \int r^3 \, dr$$

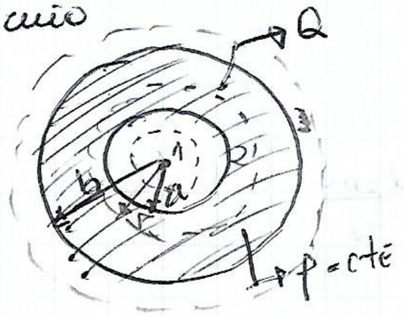
$$Q_{enc} = \frac{\cancel{4}\pi \rho_0}{\cancel{a}} \cdot \frac{a^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{4}}$$

$$\boxed{Q_{enc} = \pi \rho_0 a^3 [C]}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\pi \rho_0 a^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \left(\frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\right) \cdot \frac{1}{r^2} \qquad r > a.$$

7. Sea una esfera maciza no conductora de radio "b" con una cavidad esférica de "a" que tiene una distribución uniforme $\rho = cte$, y su carga total Q. Hallar el campo eléctrico para todos los puntos en el espacio



región 1 sup. gaussiana con $r<a$

$$\vec{E} = \oint_S \vec{E}\, d\vec{s} \rightarrow 0$$

$$\boxed{E_1 = 0 \left[\frac{N}{C}\right]}$$

región 2 nos damos sup. gaussiana con $a<r<b$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{enc} = \frac{Q_T V_{enc}}{V_T}$$

$$\rho = cte \longrightarrow \rho = \rho_{total}$$

$$Q_{enc} = Q \cdot \frac{\cancel{4/3\pi}(r^3 - a^3)}{\cancel{4/3\pi}(b^3 - a^3)}$$

$$Q_{enc} = \frac{Q(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \longrightarrow \oint \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_2 = \frac{Q(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)\varepsilon_0(4\pi r^2)} \left[\frac{N}{C}\right]}$$

region 3 nos damos sup. gaussiana $r<b$

$$Q_{enc} = Q$$

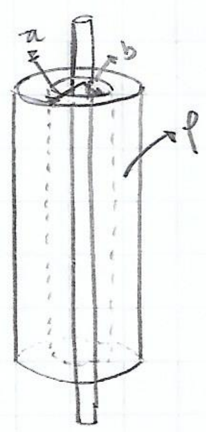
$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_3 = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

Ejercicios

1. Un cilindro no conductor de longitud infinita de radio "a" con una distribución uniforme de densidad de carga "ρ" tiene una cavidad cilíndrica coaxial de radio "b". Hallar la densidad de carga lineal que debe haber en el eje del cilindro para que el campo electrico en el exterior del cilindro sea cero.

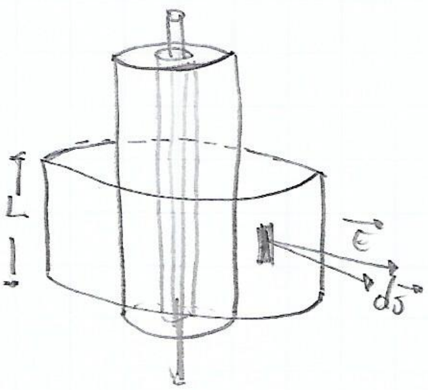


1. Como hay que calcular la densidad de carga lineal para que $\vec{E}$ en el exterior sea cero, debemos darnos una superficie S tal que encierre al cilindro no conductor.

2. Luego en cualquier punto al exterior del cilindro, el campo electrico resultante, debido a la varilla y al cilindro debe ser nulo.

3. Calculo de E_ρ

$E = E_\rho + E_\lambda$



$$\oint \vec{E_\rho} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_\rho \cdot S = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_\rho \cdot (2\pi r L) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

4. Obtener la Q_{enc}

Como el cilindro no conductor tiene una distribución uniforme de carga $\rho = cte$

$$\rho = \frac{Q_{enc}}{V} \qquad Q_{enc} = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi (a^2 - b^2) L$$

$$E_\rho (2\pi r L) = \frac{\rho \cdot \pi (a^2 - b^2) L}{\varepsilon_0}$$

$$E_\rho = \frac{\rho \cdot \cancel{\pi} (a^2 - b^2) \cancel{L}}{2 \cancel{\pi} r \cancel{L} \varepsilon_0}$$

$$E_\rho = \frac{\rho (a^2 - b^2)}{2 r \varepsilon_0}$$

5. Calculo E_λ

Utilizando la misma superficie gaussiana que para el caso de E_ρ

$$\oint \vec{E_\lambda} \cdot d\vec{S} = \oint E_\lambda \, dS \cos(\pi) = -E_\lambda S = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$-E_\lambda = \frac{-\lambda}{2\pi r L} \left[\frac{N}{C}\right]$$

$$-E(2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{-\lambda \cancel{L}}{2\pi r \cancel{L} \varepsilon_0} = \frac{-\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E_\lambda} + \vec{E_\rho} = 0$$

$$\frac{\rho(a^2-b^2)}{2\varepsilon_0 r} - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} = 0$$

$$\frac{\rho(a^2-b^2)}{2\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

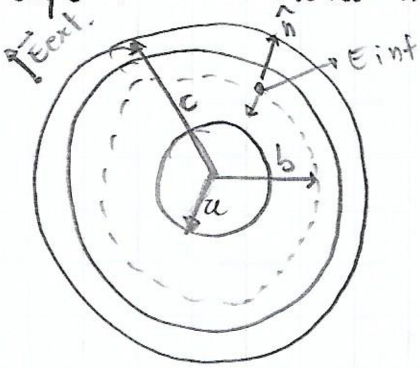
$$\boxed{\lambda = \rho(a^2-b^2)\pi \left[\frac{C}{m}\right]}$$

2. Para la configuración, suponga que $a = 5cm$ $b = 20cm$ $c = 25cm$ suponga tambien que el campo electrico en un punto a 10 cm del centro es de ~~en un punto~~ $3{,}6 \times 10^3$ [N/C] radialmente hacia adentro. En tanto que el campo electrico en un punto a 50 cm del centro es de 2×10^2 [N/C] radialmente hacia afuera. A partir de esta información encuentre.

a.) La carga sobre la espera aislante

b.) La carga sobre una espera conductora hueca

c.) La carga total sobre la superficie int y ext de la espera conductora hueca.



Datos:

$a = 5cm$

$b = 20cm$

$c = 25cm$

$E_{int} = 3{,}6 \times 10^3 \frac{N}{C}$

$E_{ext} = 2 \times 10^2 \frac{N}{C}$

$r_{int} = 10cm$

$r_{ext} = 50cm$

a.) Carga sobre la espera aislante

Se toma una superficie imaginaria que pase por el $\vec{E}$int. ya que así, se tendria el radio r de la superficie gaussiana dada.

$$\oint E_{int} \cdot \hat{n}\, ds_1 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint E\, ds_1 (\cos\pi) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = -E\, S_1\, \varepsilon_0 = E(4\pi r_{int}^2)\varepsilon_0$$

$$Q_{int} = -E(4\pi r_{int}^2)\varepsilon_0$$

$$Q_{int} = -(3{,}6\times10^3)(4\pi)(0{,}1)^2(8{,}85\times10^{-12})$$

$$Q_{int} = -4\times10^{-9}[C]$$

$$\boxed{Q_{int} = -4\,nC}$$

b.) Q sobre la esfera conductora hueca, se toma una superficie gaussiana que pase por $\vec{E}_{ext}$ pues así tendrá el radio ext.

$$\oint E_{ext} \cdot \hat{n} \cdot ds = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{ext}(\cos(0))^2 \cdot ds_2 = \frac{Q_{ext}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{ext_{S_2}} = \frac{Q_{casquete} + Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_c = E_{ext}(4\pi)(r_{ext})^2 \varepsilon_0 - Q_{int}$$

$$Q_c = 2\times10^2\left(\frac{N}{C}\right)(4\pi)(0{,}5\,m)^2 \cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\left(C^2/Nm^2\right) - (-4\cdot10^{-9})c$$

$$Q_c = 9{,}6\cdot10^{-9}[C] \quad Q_c = 9{,}6[nC]$$

c.) Carga total sobre superficies int y ext de la esfera conductora hueca.

$Q\,total = Q_{sup\,int} + Q_{sup\,ext}$

$Q\,total = (-4\,[nC]) + 9{,}6\,(n \cdot C)$

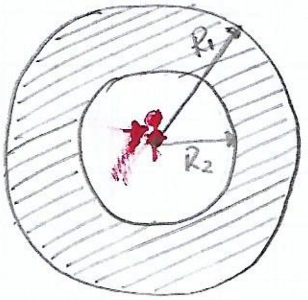
$\boxed{Q\,total = 5{,}6\,(nC)}$

---

8. Una esfera conductora de radio "R_1" tiene una cavidad central de radio "R_2". En el centro de la cavidad hay una carga $+q$. Hallar:

a.) La carga sobre la sup. ext. e int. del conductor

b.) El campo electrico para todos los puntos del espacio.



Solución:

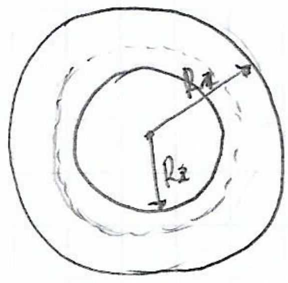
1. La esfera conductora está en estado neutro, por que no dice que esta cargada.

2. La carga positiva puntual $+q$, por inducción, atrae a las cargas negativas del conductor, hacia la superficie interior del mismo.

3. Calculo carga sup. int. y ext.

a₁.) calculo de la carga sobre la sup. int.

nos damos una sup gaussiana con radio $R_2 < r < R_1$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

la superficie S esta ubicada en el interior del conductor y en todo conductor el campo electrico en el interior $\vec{E} = 0$, por lo tanto.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$0 = \frac{+q + q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow +q + q_{int} = 0$$

$$\boxed{q_{int} = -q}$$

a_2.) calculo de la carga sobre la sup. ext.

1. Al ser la esfera conductora neutra $\Rightarrow N^{\circ}(+) = N^{\circ}(-)$
2. Como toda la carga negativa se dirige a la superficie interior por la influencia de la $+q$, entonces, toda la carga positiva se dirigio hacia la sup. exterior del conductor.
3. Como $q_{int} = -q \rightarrow q_{ext} = +q$ para mantenerse neutro.

b.) campo eléctrico

region 1 $r < R_2$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{enc} = +q$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{+q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

region 2 $R_2 < r < R_1$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{enc} = -q$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{-q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

region 3 $R_1 < r$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{enc} = +q$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{+q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Potencial electrico

Introducción

* El potencial eléctrico es lo mismo que:
  * tensión eléctrica.
  * voltaje
* Como el potencial eléctrica se basa en da energía potencial eléctrico, la que "aparece" como consecuencia de existir campo electrico.
  Energía potencial eléctrica por que hay campo eléctrico.
* El campo eléctrico tiene fuerzas conservativas.

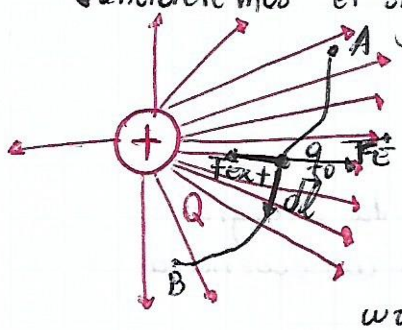
Fuerzas Conservativas.

* Las fuerzas conservativas existen por que hay campos conservativos
* Campo conservativos → es aquel que conserva la energía debido a la posición.

* Cuando se hace trabajo para llevar una carga electrica de un punto a otro en el campo es independiente de la trayectoria por la cual se mueve.

-Deducción del $\vec{E}$ como campo conservativo.

Consideremos el sigte. diagrama



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l}$$ → elemento infinitesimal de trayectoria.

si se esta en presencia de un proceso cuasiestático :

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_E = -q_0 \vec{E}$$

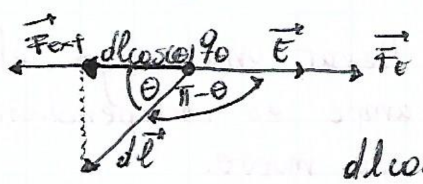
$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B E \cdot dl \cos(\pi - \theta) = +q_0 \int_A^B E \, dl \cos(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = \underbrace{\cancel{\cos(\pi)}}_{-1} \cos(\theta) - \underbrace{\cancel{sen(\pi)}}_{0} sen(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$dl \cos(\theta)$ = la proyección del vector $d\vec{l}$



$dl\cos(\theta) = -dr$ (decremento - disminución)

$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B E\, dr \; ; \quad E = \frac{kQ}{r^2}$$

$$W_{AB} = -kq_0 Q \int_A^B \frac{dr}{r^2} \longrightarrow W_{AB} = -kq_0 Q \left[\frac{-1}{r} \right]_A^B$$

$$W_{AB} = kq_0 Q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

- W_{AB} depende del punto inicial y del punto final
- W_{AB} no depende de la trayectoria.

$$W_{AB} = W_{BA}$$

$\therefore \vec{E}$ es conservativo

- Potenciales de referencia

Usaremos sólo dos potenciales de referencia

1. $V_\infty = 0 [V]$
2. $V_{TIERRA} = 0 [V]$

- Diferencia de Potencial

La diferencia de potencial es el trabajo que realiza una fuerza en un campo conservativo para llevar una carga de q_0 de un punto a otro del $\vec{E}$ dividido por q_0.

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Potencial en un punto

De la expresión $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$
se hace que uno de los puntos
este en el infinito

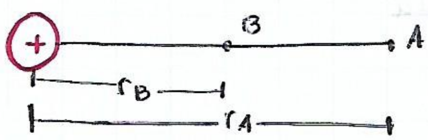
$$A - \infty \rightarrow V_A = 0$$

$$\rightarrow \cancel{V_B} - \cancel{V_A}^{\,0} = -\int_\infty^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

En general: $V_P = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot d\vec{l}$

- Cálculo de Potencial

1. Para dos puntos en las cercanías de una carga



$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

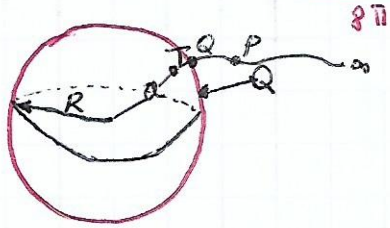
$$\Delta V = -\int_A^B E\,dl\cos(\theta) = -\int_A^B E\,dr \;, \quad E = \frac{kQ}{r^2}$$

$$\Delta V = -kQ\int_A^B r^{-2}\,dr \cdot \frac{1}{r} = -kQ\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \Rightarrow \Delta V = kQ\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Ejercicios

1. Una carga "Q" se distribuye uniformemente en el volumen de una esfera de radio "R" no conductora. Demostrar que el potencial en un punto "T" que esta a una distancia "a" del centro viene dado por

$$V_T = \frac{Q(3R^2 - a^2)}{8\pi \varepsilon_0 R^3} \text{ [V]}$$



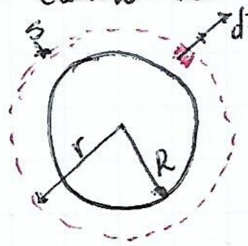
Solución:

$$V_T = V_Q + V_{QT}$$

Cálulo del V_Q

$$V_Q = -\int_{\infty}^{Q} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} \quad (*)$$

i 1.- Cálulo del $\vec{E}_{ext}$



$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \; ; r \geq R$$

i.2. Retomando (*)

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} E\, dl \cos(0°)$$

$$dl = dr \Rightarrow V_Q = -\int_{\infty}^{P} E\, dr'$$

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r'^2}\, dr' = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

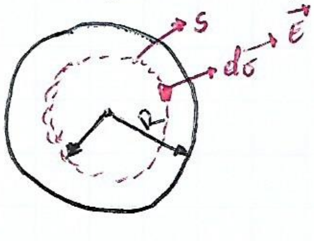
$$V_p = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r} \; ; \; r > R$$

Si $r = R \Rightarrow \boxed{V_Q = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R} \, [V]}$

II Calculo del V_{QT}

$$V_{QT} = -\int_{Q}^{T} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{l}$$

i.1 cálculo del $\vec{E}_{int}$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{enc}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \; (*)$$

a.) Cálculo de la Q_{enc}

$$\rho = cte \longrightarrow \frac{Q_{enc}}{V_{enc}} = \frac{Q}{V}$$

$$Q_{enc} = \left(\frac{V_{enc}}{V}\right) Q \quad ; \quad V = 4/3 \pi r^3$$

$$Q_{enc} = \left(\frac{4/3 \pi r^3}{4/3 \pi R^3}\right) Q = \boxed{Q_{enc} = \left(\frac{r^3}{R^3}\right) Q}$$

b.) Retomando (*)

$$E(4\pi r^2) = \frac{r^3 Q}{R^3 \varepsilon_0}$$

$$E = \frac{r Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \approx \boxed{E = r\left(\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3}\right) \quad ; \quad r < R}$$

¿ 2. Volviendo a V_{QT}

$$V_{QT} = -\int_Q^T E_{int}\, dl \cos(0°)$$

$$V_{QT} = \frac{-Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \int_Q^T r\, dr$$

$$V_{QT} = \frac{-Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_R^a = \frac{-Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3} (a^2 - R^2)$$

$$V_{QT} = \frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3} (R^2 - a^2) \, [V]$$

$\therefore \quad V_T = V_Q + V_{QT}$

$$V_T = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R} + \frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3}(R^2 - a^2)$$

$$V_T = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R}\left[1 + \frac{(R^2 - a^2)}{2R^2}\right]$$

$$V_T = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R}\left[\frac{2R^2 + R^2 - a^2}{2R^2}\right]$$

$$\boxed{V_T = \frac{Q(3R^2 - a^2)}{8\pi \varepsilon_0 R^3}}$$

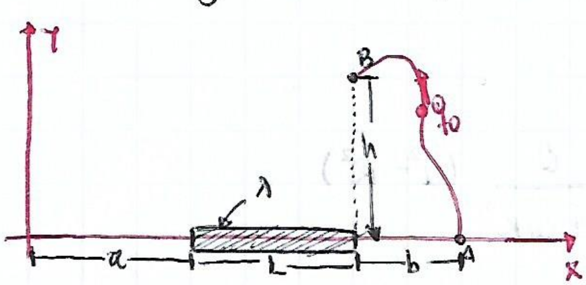
2. Sea una varilla delgada con densidad de carga lineal $\lambda = cte$ según la figura calcular.

a.) El potencial en el origen

b.) El " " " punto "A"

c.) El " " " " "B"

d.) El Trabajo que debe hacer un agente externo para llevar una carga q_0 del punto "A" al punto "B"



Solución:

$$V_P = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

a.) Cálculo del V_0

$$V_0 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\underbrace{\vec{r}}_{\text{punto objeto}} - \underbrace{\vec{r}\,'}_{\text{carga fuente}}|}$$

$\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$ $\qquad dq = \lambda\, dl$ $\qquad a \leq x \leq a+L$

$|\vec{r}\,'' - \vec{r}\,'| = x$ $\qquad dl = dx$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{\lambda\, dx}{x} = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \Big[\ln(x) \Big]_a^{a+L}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) [V]}$$

b.) Cálculo del V_A

$$V_A = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_Q \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$\vec{r} = (a + L + b)\,\hat{\imath}$

$\vec{r}\,' = x\,\hat{\imath}$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = (a + L + b - x)\,\hat{\imath}$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{(a + L + b - x)^2} = a + L + b - x$

$$dq = \lambda \, dl = \lambda \, dx \; ; \quad a \leq x \leq a+L$$

$$V_A = \frac{\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{dx}{(a+L+b-x)}$$

$$u = a+L+b-x$$
$$du = -dx$$

$$V_A = \frac{-\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u}$$

$$V_A = \frac{-\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \ln|u| \Big|_{u_1}^{u_2}$$

$$V_A = \frac{-\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \Big[\ln(a+L+b-x) \Big]_a^{a+L}$$

$$V_A = \frac{-\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \Big[\ln(b) - \ln(L+b) \Big]$$

$$\boxed{V_A = \frac{+\lambda}{4\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{L+b}{b}\right) [V]}$$

c.) Cálulo del po. V_B:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

C.1.) vectores posición

$\vec{r} = (a+L)\hat{\imath} + h\hat{\jmath}$

$\vec{r}' = x\hat{\imath}$

$\vec{r}-\vec{r}' = (a+L-x)\hat{\imath} + h\hat{\jmath}$

$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(a+L+x)^2+h^2}$

C.2.) obtención del dq

$dq = \lambda dL \Rightarrow dq = \lambda dx$

$dL = dx \qquad a \leq x \leq a+L$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+L}\frac{\lambda\, dx}{\sqrt{(a+\cancel{L}-\cancel{x})^2+h^2}} = \qquad u = a+L-x$$

$du = -dx \Rightarrow dx = -du$

- si $x = a \Rightarrow u_1 = a+L-a$

  $u_1 = L$

- si $x = a+L \Rightarrow u_2 = a+L-(a+L)$

  $u_2 = 0$

$$V_B = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{u^2+h^2}}$$

$$\boxed{\text{Por tabla de integración} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = L_N\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}$$

$$V_B = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[L_N\left(u+\sqrt{u^2+h^2}\right)\right]_L^0$$

$$V_B = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[L_N(h) - L_N\left(L+\sqrt{L^2+h^2}\right)\right]$$

$$V_B = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{h}{L+\sqrt{h^2+h^2}}\right)$$

$$\boxed{V_B = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{L+\sqrt{h^2+L^2}}{h}\right)}$$

d.) Cálculo del W_{AB} (Agente externo).

El trabajo realizado para llevar una carga "q_0" desde "A" hasta "B" lo puede realizar:

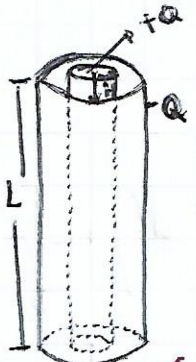
- El campo eléctrico: $W_{AB} = -q_0 \Delta V$
- El agente externo: $W_{AB} = q_0 \Delta V$

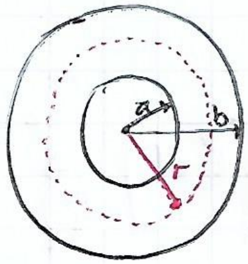
$$W_{AB} = q_0 (V_B - V_A)$$

$$W_{AB} = q_0 \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{L+\sqrt{h^2+L^2}}{h}\right) + \ln\left(\frac{L+b}{b}\right)\right]$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b\left(L+\sqrt{L^2+h^2}\right)}{h(L+b)}\right)}$$

3. Sea un conductor cilíndrico de radio "a" con carga "+q" y de longitud "L", concentrico a él hay un casquete cilíndrico de radio "b" y carga "-q" y de longitud "L". Calcular la diferencia de potencial entre ambos conductores





$$\Delta V = V_a - V_b$$

$$\Delta V = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

nota: vamos de un mayor potencial a un menor.

i Cálculo del $\vec{E}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r L) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r L} \hat{r} \left[\frac{N}{C}\right]}$$

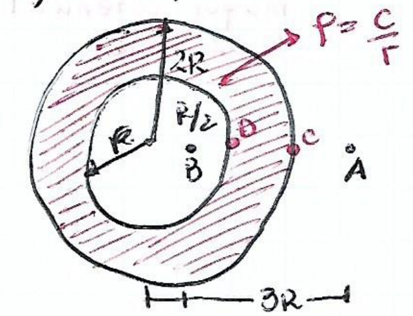
ii Cálculo del ΔV

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_b^a E\, dl \cos(0°)$$

$$\Delta V = -\int_b^a E\, dr = \frac{-Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{-Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \left[\ln|r| \right]_b^a = \frac{-Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \left[\ln|a| - \ln|b| \right]$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \ln\left|\frac{b}{a}\right| [V]}$$

4. Una esfera de densidad volumetrica $\rho = \frac{c}{r}$, donde "c" es una constante y "r" es una distancia entre $R < r < 2R$. Tiene una cavidad según muestra la figura.
Calcular la D.D.P entre un punto "A" que esta a 3R del centro y "B" que se encuentra R/2.



Solución:

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \left(-\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l}\right) + \left(-\int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{l}\right) + \left(\cancel{-\int_D^B \vec{E}\cdot d\vec{l}}\right)$$

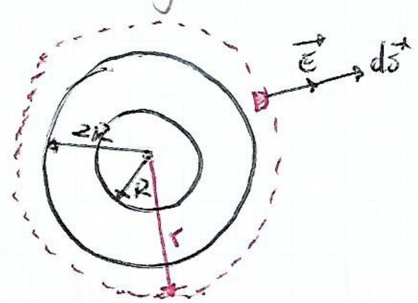
$\cancel{\ }$ 0 — no encierra carga

i cálculo del tramo AC

$$-\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad (\#)$$

i.1 cálculo de $\vec{E}$

gauss con $r > 2R$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad (*)$$

a. cálculo de Qenc

$\rho \neq cte \quad \rho = \frac{dq}{dv}$

$$Q_{enc} = \int_V \rho \, dv = 4\pi \int_R^{2R} \left(\frac{C}{\cancel{r}}\right) r^{\cancel{2}} \, dr = \cancel{4}^{2}\pi C \left(\frac{r^2}{\cancel{2}}\right)\Bigg|_R^{2R} = 2\pi C \left[4R^2 - R^2\right]$$

$$\boxed{Q_{enc} = 6\pi C R^2}$$

volviendo a (*)

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{6\pi R^2 C}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{3R^2C}{2\varepsilon_0 r^2} \left[\frac{N}{C}\right]}$$

volviendo a (#)

$$-\int_A^C \left(\frac{3R^2C}{2\varepsilon_0 r^2}\right) dr = -\frac{3R^2C}{2\varepsilon_0} \int_{A=3R}^{C=2R} \frac{dr}{r^2} = \frac{3R^2C}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{3R}^{2R} = \frac{3R^2C}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right]$$

$$= \frac{\cancel{3}R^{\cancel{2}}C}{2\varepsilon_0 \cancel{6}_{2}\cancel{R}} = \frac{RC}{4\varepsilon_0}$$

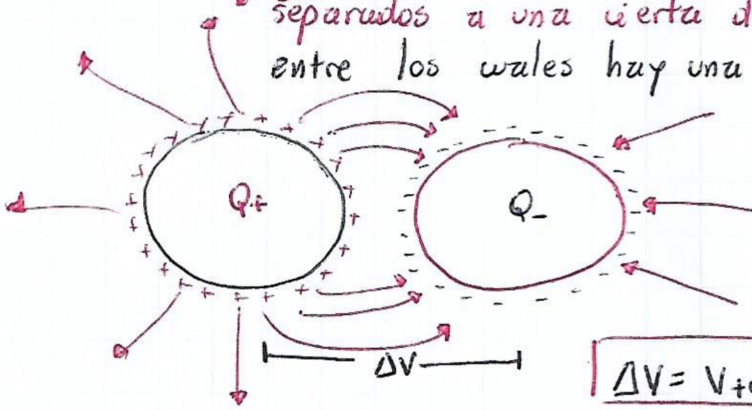
Capacitancia y Condensadores

1. Definición

Un capacitor o condensador es un dispositivo constituido por:

- dos conductores
- de igual magnitud de carga, pero de distinto signo
- separados a una cierta distancia.

entre los cuales hay una diferencia de potencial.



$$\boxed{\Delta V = V_{+Q} - V_{-Q}}$$

2. Función

El capacitor almacena carga eléctrica en sus placas y por ende almacena energía potencial entre las placas, y especificamente en el $\vec{E}$.

3. Aplicaciones:

El capacitor posee un sinnúmero de aplicaciones.

- flash
- desfibriladores
- electroshocks
- crossover o filtros
- pantallas touch.

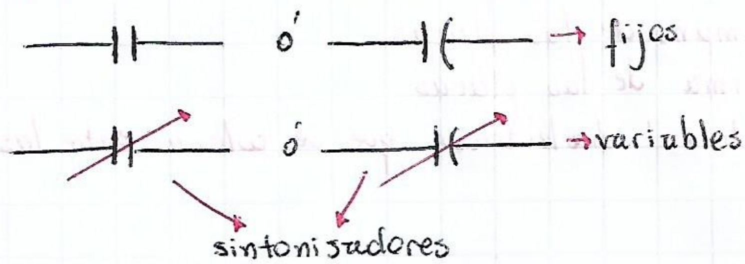
4. Símbolos

Los capacitores pueden ser de:

- corriente continua. (D.C)
- corriente alterna (A.C)

D.C.:

A.C:



5. Capacitancia (C).

Es el cociente entre la carga de "uno" de los conductores y la D.D.P (ΔV) entre ellos; esto es:

$$\boxed{C = \frac{|\pm Q|}{\Delta V}\left[\frac{C}{V}\right] = \text{faradio} = F}$$

habitualmente se utiliza:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

$V \to V_{\infty} = 0$

$V \to V_{\perp} = 0$

5.1.) Submúltiplos

- $1[\text{milifaradio}] = 1[mF] = 10^{-3}[F]$
- $1[\text{microfaradio}] = 1[\mu F] = 10^{-6}[F]$
- $1[\text{nanofaradio}] = 1[nF] = 10^{-9}[F]$
- $1[\text{picofaradio}] = 1[pF] = 10^{-12}[F]$

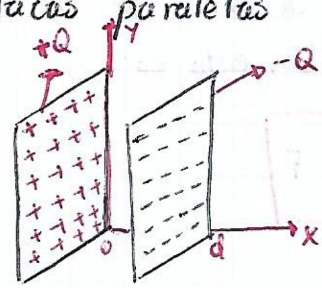
5.2) Dependencia:

La capacitancia está en función de:

- El tamaño de las placas
- La forma de las placas
- El material dieléctrico que se coloca entre las placas.

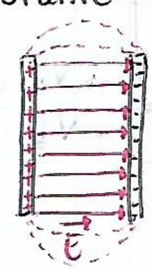
6. Cálculo de la Capacitancia de un capacitor de:

6.1) Placas paralelas



$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad ; \quad \Delta V = -\int_{d}^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}$ entre placas paralelas siempre es constante



$$\Delta V = -\int_{d}^{0} E \, dl \cos(0°)$$

$$\Delta V = -E \int_{d}^{0} dx \quad ; \quad dl = dx$$

$$\Delta V = -E[x]_{d}^{0} = -E[0-d]$$

* $\boxed{\Delta V = Ed}$

* El campo eléctrico para un plano viene dado por:

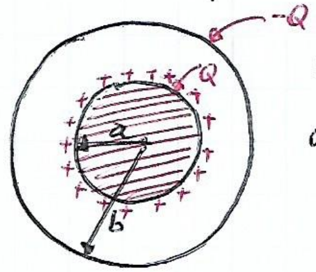
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{E d} \quad ; \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot Q}{\sigma \cdot d} \quad ; \quad \sigma = \frac{Q}{A}, \quad A = \frac{Q}{\sigma}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

6.2) Placas esféricas



Un condensador de este tipo está compuesto de una esfera sólida y un casquete.

Se sabe que $\boxed{E = \dfrac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}}$; $a < r < b$

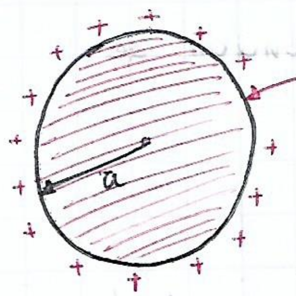
$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\cancel{Q}}{\dfrac{\cancel{Q}}{4\pi \varepsilon_0} \left[\dfrac{b-a}{ab} \right]} = \frac{4\pi \varepsilon_0 ab}{(b-a)}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi \varepsilon_0 ab}{(b-a)}}$$

6.3) Condensador esférico



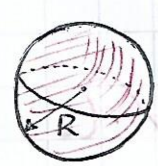
Consiste en un conductor sólido y el otro en el infinito.

Utilizando la expresión del condensador anterior:

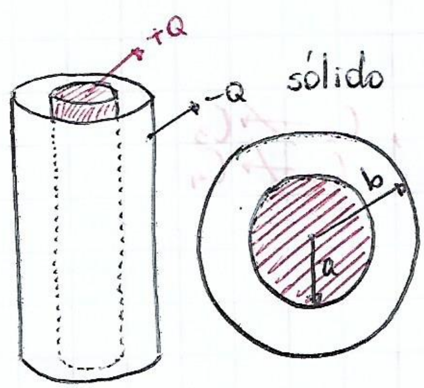
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\, ab : b}{(b-a) : b} \quad b\to\infty \quad \frac{4\pi\varepsilon_0\, a}{\left(1 - \lim\limits_{b\to\infty} \cancel{\frac{a}{b}}\right)^{0}}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\, a}$$

En general $\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\, R}$



6.4) Conductores coaxiales



Es un capacitor compuesto por un cilindro sólido con +Q y un casquete cilíndrico con -Q

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q\, \ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_0 L}}$$

$$C = \frac{\cancel{Q}}{\dfrac{\cancel{Q}\, \ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_0 L}}$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$$

7. Conexión de condensadores

Los capacitores para que puedan realizar su función se asocian en distintas configuraciones

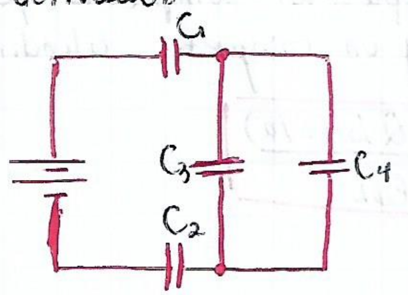
7.1.) Definición Conexión serie ($\rightarrow$)

a.) Un capacitor esta en serie con otro, cuando una de las placas se conecta a una de las placas del otro condensador, sin interrupción y sin derivación.

a.1) Conexiones incorrectas:

i. Con interrupción $\Rightarrow$ $C_1 \not\rightarrow C_2$

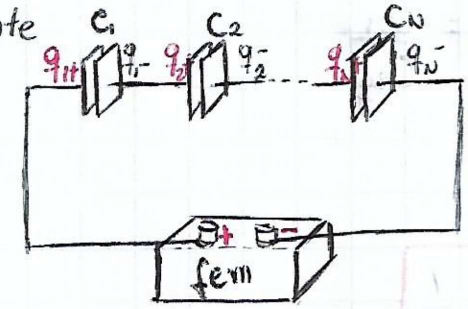
ii Con derivación



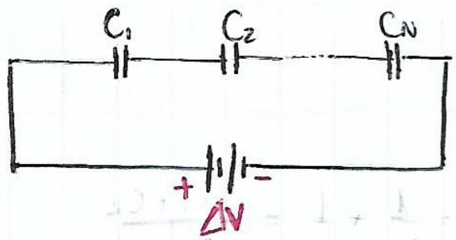
$C_1 \not\rightarrow C_3$; $C_2 \not\rightarrow C_3$
$C_1 \not\rightarrow C_4$; $C_2 \not\rightarrow C_4$

a.2) Conexión correcta

i Físicamente



ii Simbolicamente



b.) Parámetros

b.1) Carga eléctrica

La carga total para este tipo de conexión viene dada por $\boxed{Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_N}$

b.2) Voltaje: $\boxed{\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_N}$

b.3) Capacidad equivalente (Ceq).

$$C_{eq} = \frac{Q_T}{\Delta V} \quad ; \quad \Delta V = \frac{Q_T}{C_{eq}}$$

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_N$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_N}}$$

c.) Casos frecuentes

i Para dos condensadores

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}} \approx \boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

ii Para tres condensadores

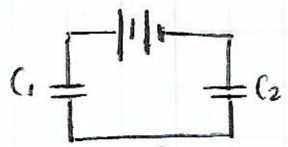
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}{C_1 C_2 C_3}$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}}$$

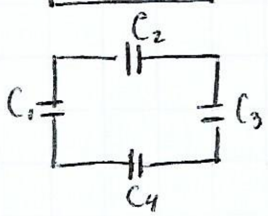
7.2) Conexión paralelo (//)

a.) Definición: Dos condensadores están en paralelo cuando ambas placas de un capacitor están conectadas a ambas placas de otro capacitor, que generalmente tiene derivación pero no siempre.

a.1.) Conexiones incorrectas



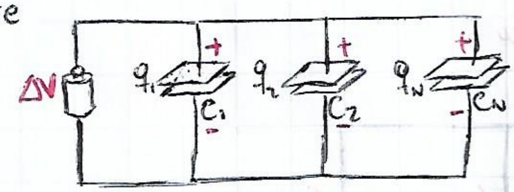
$C_1 \not\parallel C_2$; $C_1 \rightarrow C_2$



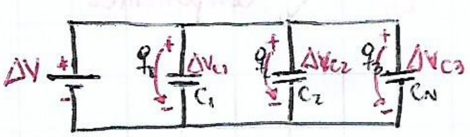
$C_1 \not\parallel C_3$; $C_2 \not\parallel C_4$

a.2) Conexiones correctas

i Físicamente



ii Simbólicamente



b.) Parámetros

$$\boxed{\Delta V = \Delta V_{C1} = \Delta V_{C2} = \Delta V_{CN}}$$

$$\boxed{Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_N}$$

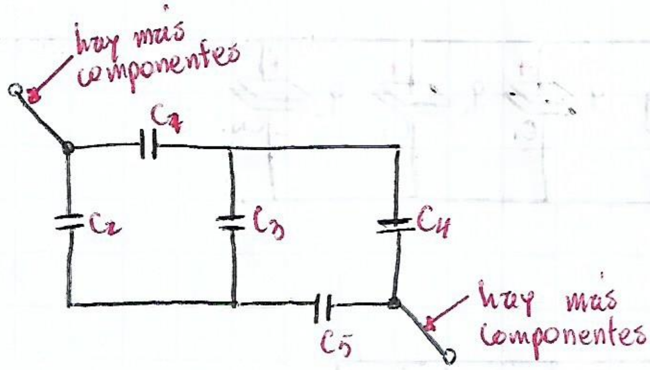
b.1.) Capacidad equivalente

$$C_{eq} \Delta V = C_1 \Delta V_{C1} + C_2 \Delta V_{C2} + C_N \Delta V_{CN}$$

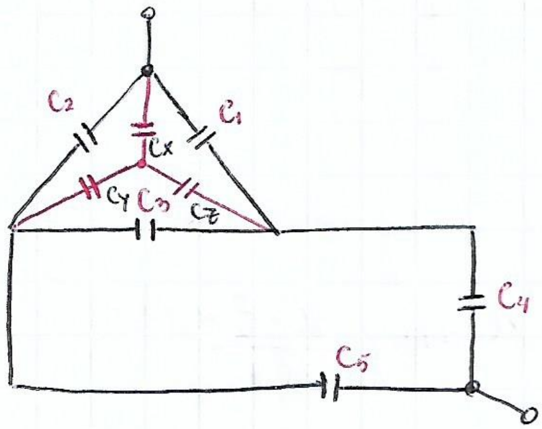
$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_N}$$

F.3) Conexión triangulo-estrella

Cuando una configuración de capacitores no se puede resolver por el metodo serie-paralelo, entonces se recurre a la siguiente transformación.



En caso de no visualizar el triángulo entonces, otra alternativa esquemática sería.



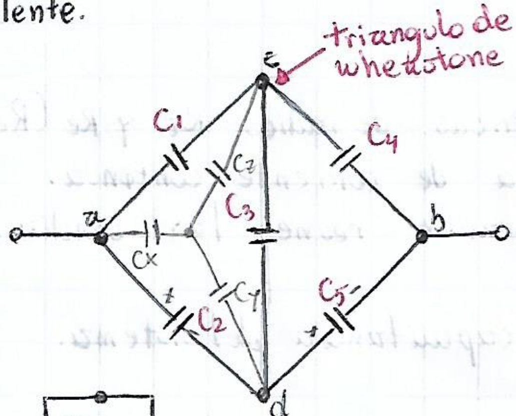
$$\boxed{C_x = \frac{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}{C_3}}$$

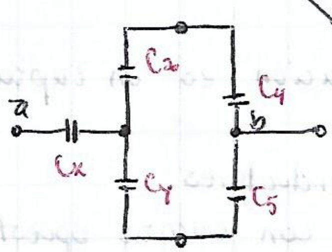
$$\boxed{C_y = \frac{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}{C_1}}$$

$$\boxed{C_z = \frac{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}{C_2}}$$

Ejemplo:

Se tiene el sigte circuito de condensadores, calcule la capacidad equivalente.





$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C$

$$C_x = \frac{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3}{C_3}$$

$$C_x = \frac{3C^{\cancel{2}}}{\cancel{C}} = 3C$$

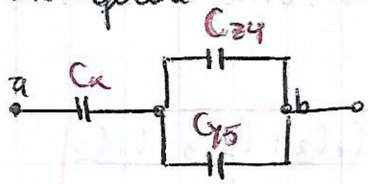
$C_y = 3C$

$C_z = 3C$

$$C_z \to C_4 = \frac{3C \cdot C}{(3C)+C} = \frac{3C^2}{4C} = \frac{3C}{4}$$

$$C_y \to C_5 = \frac{3C \cdot C}{3C+C} = \frac{3C^2}{4C} = \frac{3}{4}C$$

Circuito queda



$$C_{z4} \parallel C_{y5} = \frac{3}{4}C + \frac{3}{4}C = \frac{3}{2}C$$

Finalmente

$$C_x \to C_{z4y5} = \frac{3C \cdot \frac{3}{2}C}{3C + \frac{3}{2}C}$$

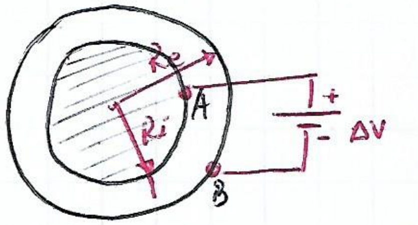
$$C_{eq} = \frac{\cancel{9}/\cancel{2}\,C^{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{9}\cancel{C}}{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = C}$$

Ejercicios:

1. Dos esferas conductoras concentricas de radios R_i y R_e $(R_e - R_i = d)$ están conectadas a una batería de corriente contínua.

 a.) Determinar la sigte configuración reune las condiciones de capacitor.

 b.) Si se cumple ⓐ calcular la capacitancia del sistema.



a.) La sigte. configuración es un capacitor por que.

1. se tienen dos conductores
2. estan cargados con cargas opuestas
3. estan separados a una distancia
4. están conectados a una D.D.P.

b. Calculo de la capacitancia

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad ; \quad \Delta V = -\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

nota: el signo de la capacitancia depende de los límites de integración que habría que cambiar

$\vec{E} = ?$

nos damos una sup. $Ri < r < Re$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad ; \quad Ri < r < Re$$

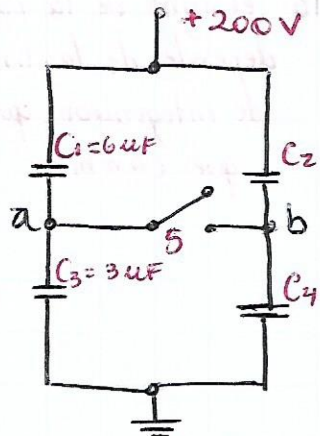
$$\Delta V = -\int_{A}^{B} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \, dr \Rightarrow \Delta V = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \int_{A=Ri}^{B=Re} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta V = \frac{-Q}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{Ri}^{Re} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{Re} - \frac{1}{Ri} \right]$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{Ri - Re}{Re\,Ri} \right] \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{-dQ}{4\pi \varepsilon_0 Re Ri}}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \frac{\cancel{Q}}{\frac{-\cancel{Q}d}{4\pi \varepsilon_0 Re Ri}} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{4\pi \varepsilon_0 Re Ri}{d}}$$

2. Se tiene la sigte configuración de capacitores

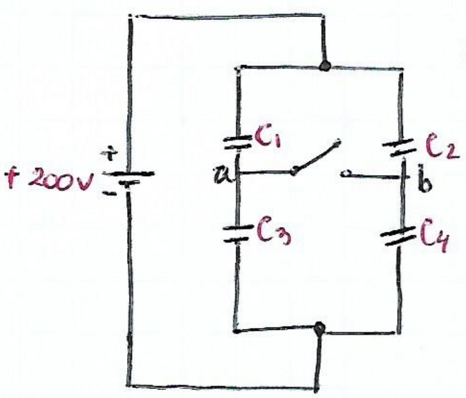


a.) Calcular la ddp entre a y b si S esta abierto

b.) Si cierra S calcular el potencial en "b".

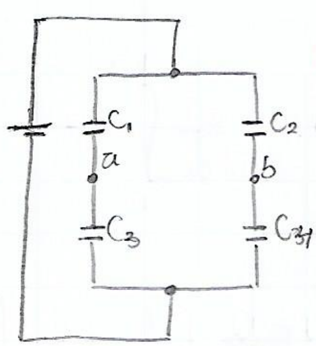
c.) Calcular la carga que fluye por S desde que esta abierto hasta que se cierra.

es equivalente



Solución

a.) I.) Con S abierto



a.) Cálculo de la ΔV_{ab}

para calcular la ΔV_{ab}, se requiere obtener primero: V_a y despues el V_b.

$$C_{13} = C_1 \to C_3 = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{6\mu F \cdot 3\mu F}{9\mu F} = \frac{18\,\mu F^{\cancel{2}}}{9\,\cancel{\mu F}} = 2\mu F$$

$$C_{24} = C_2 \to C_4 = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \frac{3\mu F \cdot 6\mu F}{9\mu F} = \frac{18(\mu F)^{\cancel{2}}}{9\cancel{\mu F}} = 2\mu F$$

$$C_{1324} = C_{13} \,//\, C_{24} = C_{13} + C_{24} = 4\mu F$$

$C_{eq} = 4\,\mu F$

$$V = \frac{Q_T}{C_{eq}} \Rightarrow 200\,V = \frac{Q_T}{4\,\mu F}$$

$\boxed{Q_T = 800\,[\mu C]} \Rightarrow$ carga total

* cálulo de la Q_{C13} y Q_{C24}

Como C_{eq}: $C_{13} \parallel C_{24}$ y en $\parallel$ el voltaje es el mismo en los condensado-res, entonces $V_{C13} = V_{C24} = 200\,V$

- $Q_{C13} = C_{13} V_{C13} = 2\,\mu F \cdot 200\,V = 400\,\mu C$
- $Q_{C24} = C_{24} V_{C24} = 2\,\mu F \cdot 200\,V = 400\,\mu C$

* calculo de la Q_{C3} y Q_{C4}

C_{24}: $C_2 \rightarrow C_4$

Como C_{13}: $C_1 \rightarrow C_3$ y en "$\rightarrow$" la carga es la misma en todos los capacitores, entonces:

$$Q_{C1} = Q_{C3} = Q_{C13} = 400\,\mu C$$
$$Q_{C3} = 400\,\mu C$$

$\therefore$ $V_a = V_{C3} = \frac{Q_{C3}}{C_3} = 133,3\,[V]$

$\boxed{V_a = 133,33\,[V]}$

$\therefore$ $V_b = V_{C4} = \frac{Q_{C4}}{C_4} = 66,6\,[V]$

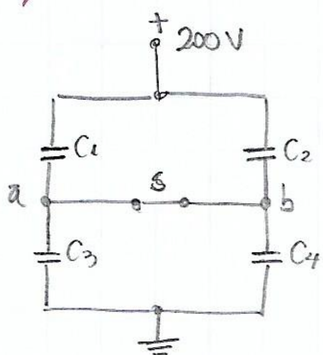
$\boxed{V_b = 66,6\,[V]}$

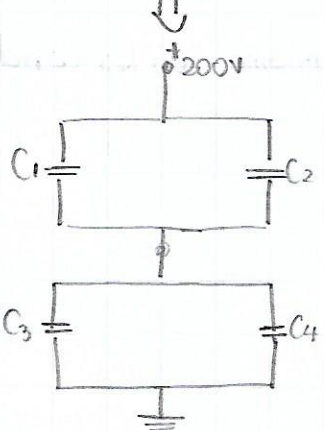
$\Delta V_{ab} = \Delta V_a + \Delta V_b$

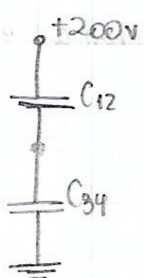
$\Delta V_{ab} = 133,33 - 66,7$

$\boxed{\Delta V_{ab} = 66,7\,[V]}$

b.) II.) Con S cerrado







a.) Calculo de Vb

* C_{12}

$C_{12} = C_1 \parallel C_2$

$C_{12} = C_1 + C_2 = 6\,\mu F + 3\,\mu F = 9\,\mu F$

$\boxed{C_{12} = 9\,\mu F}$

* C_{34}

$C_{34} \; C_3 \parallel C_4$

$C_{34} = C_3 + C_4 = 3\,\mu F + 6\,\mu F = 9\,\mu F$

$\boxed{C_{34} = 9\,\mu F}$

* Cálculo Ceq

$C_{1234} = C_{12} \rightarrow C_{34}$

$$C_{1234} = \frac{C_{12} \cdot C_{34}}{C_{12} + C_{34}} = \frac{9\,\mu F \cdot 9\,\mu F}{18\,\mu F}$$

$$C_{1234} = \frac{81\,(\mu F)^{\cancel{2}}}{18\,\cancel{\mu F}}$$

$$\boxed{C_{1234} = \frac{9}{2}\,\mu F}$$

* Cálculo de la carga total

$$Q_T = C_{eq} \cdot V$$
$$Q_T = \frac{9}{\cancel{2}} \mu F \cdot \cancel{2}00V$$
$$\boxed{Q_T = 900 \mu C}$$

* Cálculo de la Q_{C12} y Q_{C34}

$C_{eq}: C_{12} \rightarrow C_{34}$ y en "$\rightarrow$" la carga es la misma
entonces:

$$Q_{C12} = Q_{C34} = Q_T = \boxed{Q_{C34} = 900 \mu C}$$

* Cálculo del V_{C34}

Como se tiene C_{34} y Q_{34} se calcula el V_{C34}

$$V_{C34} = \frac{Q_{C34}}{C_{34}} = \frac{900 \mu C}{9 \mu F} = 100 V$$
$$\boxed{V_{C34} = 100V}$$

Como $C_{34}: C_3 \parallel C_4$ y en "$\parallel$" los voltajes son iguales, entonces

$$V_{C3} = V_{C4} = V_{34}$$
$$V_{C4} = 100V$$

$$\boxed{\therefore V_b = 100V}$$

c.) la carga que fluye cuando S esta abierto a cuando esta cerrado

$$Q_{s\,abierto} = 800\ \mu C$$

$$Q_{s\,cerrado} = 900\ \mu C$$

$$Q_{cerrado} - Q_{abierto} = Q_{fluye}$$

$$Q_{fluye} = 900\ \mu C - 800\ \mu C$$

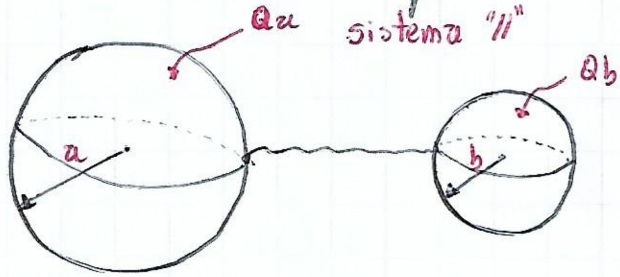
$$\boxed{Q_{fluye} = 100\ \mu C}$$

3. Dos esferas conductoras de radios "a" y "b" están separadas por una gran distancia, se conecta una a otra mediante un cable y se le suministra carga Q al conjunto.

Calcular:

a.) La carga en cada esfera (Q_a y Q_b)

b.) Calcular la capacitancia equivalente del conjunto.



$$Q_a = \left(\frac{a}{a+b}\right) Q$$

$$Q_b = \left(\frac{b}{a+b}\right) Q$$

$$C_{eq} = 4\pi\varepsilon_0 (a+b)$$

$C = 4\pi\varepsilon_0 R \rightarrow$

$$Q_a + Q_b = Q$$

$$C_{eq} = C_a + C_b \approx C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$R = a$

$R = b$

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q_{enc}}{V_{enc}} \; ; \; V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$C_{eq} = 4\pi\varepsilon_0 a + 4\pi\varepsilon_0 b$$

$$\boxed{C_{eq} = 4\pi\varepsilon_0 (a+b)}$$

$$Q = \left(\frac{r}{R}\right) Q$$

$$\boxed{Q_a = \frac{a}{(a+b)} Q \;\wedge\; Q_b = \frac{b}{(a+b)} Q}$$

$$Q_a + Q_b = Q$$

$$\left(\frac{a}{a+b}\right) Q + \left(\frac{b}{a+b}\right) Q = Q$$

$$Q\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) = Q$$

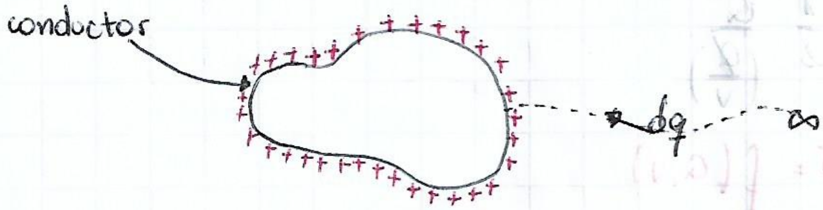
$$Q\left(\overset{1}{\frac{\cancel{a+b}}{\cancel{a+b}}}\right) = Q$$

$$Q(1) = Q$$

$$\boxed{Q = Q}$$

"Energía potencial electrostática en un condensador"

Supongamos que se está cargando un conductor genérico, con cargas infinitesimales dq que trae un agente externo desde el infinito.



A medida que se deposita en el conductor la carga se genera una tensión o voltaje o d.d.p., provocando que exista energía potencial eléctrica en el campo eléctrico que produce las cargas eléctricas a su alrededor.
El agente externo para trasladar el dq del "∞" al conductor realiza trabajo:

$$\boxed{dW = V dq} \quad (W_{ab} = q \Delta V)$$

Calculando la energía potencial:

$$U = \int dW = \int_0^Q V dq$$

$$C = \frac{q}{V} \Longrightarrow V = \frac{q}{C}$$

$$U = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq \; ; \; U = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} \quad U = f(Q, C)$$

$C = \frac{Q}{V}$ $\quad U = \frac{1}{2}\left(\frac{CV}{C}\right)^2$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} CV^2} \quad U = f(C,V)$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\left(\frac{Q}{V}\right)}$$

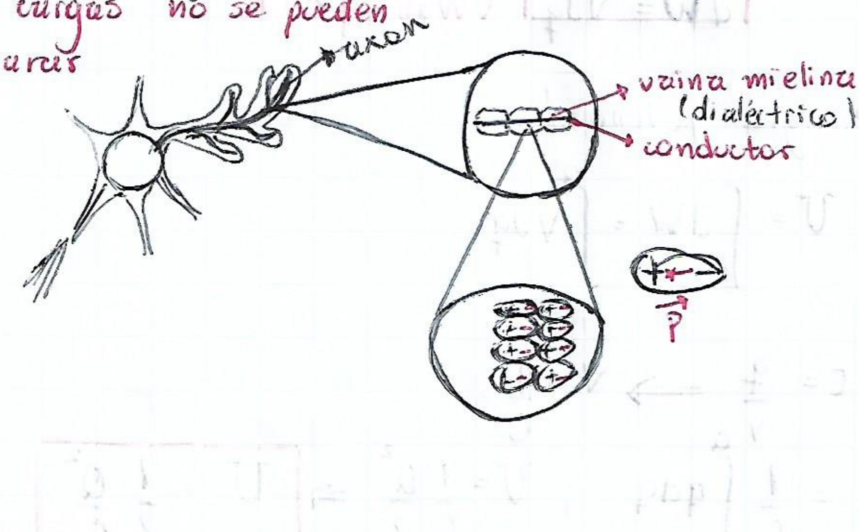
$$\boxed{U = \frac{1}{2} QV} \quad U = f(Q,V)$$

"Condensadores con dialéctrico"

1. Dialéctrico: es un material no conductor o aislante, por que la carga eléctrica en estos materiales no tiene facilidad de movimiento.

ej: vidrio, goma, papel, cerámica

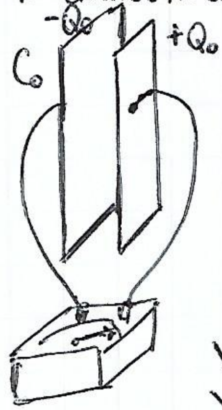
las cargas no se pueden separar



2. **Utilidad:** al introducir un dieléctrico en el espacio de las placas de un condensador, aumenta su capacitancia, si el dieléctrico llena por completo todo el espacio entre las placas la capacitancia aumenta en un factor K, llamado constante dieléctrica o permitividad relativa ε_r.

3. **Experimento.**

Capacitor sin dieléctrico



Capacitor con dieléctrico

Que la d.d.p. con dieléctrico disminuyo en un factor kappa (K)

$$\boxed{V = \frac{V_0}{K}}$$

V: potencial con dieléctrico
V_0: potencial sin dieléctrico
Q_0: carga eléctrica del capacitor

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{\frac{V_0}{K}} = K\frac{Q_0}{V_0}$$; Q_0 = cte por estar aislado el capacitor.

$$\boxed{C = K C_0}$$

4. Efectos en la capacitancia, C.E. y E. potencial

- La capacitancia de un condensador de placas en el vacío viene dada por:

$$C_{s/d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \xrightarrow{\text{dialectrico}} C_d = K\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

- y la d.d.p. se expreso como

$$V_0 = E_0 d \longrightarrow \text{sin dialéctrico}$$

$$V = Ed \longrightarrow \text{con dialéctrico}$$

$$\frac{V_0}{V} = \frac{E_0 \cancel{d}}{E \cancel{d}}$$

$$E = \left(\frac{V}{V_0}\right) E_0$$

$$E = \frac{1}{K} E_0$$

$$\boxed{E = \frac{E_0}{K}}$$ disminuye E

- $U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \rightarrow$ sin dialéctrico

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \rightarrow \text{con dialéctrico}$$

$$\frac{U_0}{U} = \frac{1/2\, C_0 V_0^2}{1/2\, C V^2}$$

$$\frac{U_0}{U} = \frac{C_0 V_0^2}{C V^2}$$

5. Constante dialéctrica ($K = \varepsilon_r$)

$$K = \varepsilon_r = \frac{\text{permitividad en cualquier medio}}{\text{permitividad en el medio vacío}}$$

$$\boxed{K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$ adimensional

6. Rigidez o resistencia dialéctrica.

Es la intensidad máxima del campo eléctrico que la puede aplicar al dialéctrico, antes de que haya descarga eléctrica o se rompa rayo.

7. tabla de constantes dialéctricas

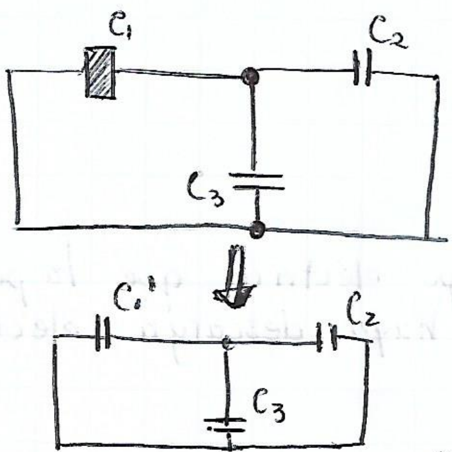
Material	Constante eléctrica (K)	Rigidez dialectrico [V/m]
vacío	1	—
aire	1,00059	$3 \cdot 10^6$
agua	80	—
papel	3,7	$16 \cdot 10^6$
vidrio	5,6	$14 \cdot 10^6$
teflón	2,1	$60 \cdot 10^6$

8. ejercicios

1. Se sabe que la carga en $C_3 = 30\mu[F]$ es $60[\mu C]$. Calcular la carga eléctrica en cada uno de los condensadores si se retira el dieléctrico de $C_1 = 20\ \mu F$

$K = 2$

$C_2 = 10\ \mu F$



Solución:

i) Cálculo del V_{C_3}:

$$C_3 = \frac{Q_{C_3}}{V_{C_3}} \qquad V_{C_3} = \frac{60\mu C}{30\mu F}$$

$$V_{C_3} = \frac{Q_{C_3}}{C_3} \qquad \boxed{V_{C_3} = 2[V]}$$

Como $C_1 \parallel C_2 \parallel C_3$ y en "$\parallel$" los voltajes son iguales entonces:

$$V_{C1} = V_{C2} = V_{C3} = V$$

ii) Cálculo de la Ceq

Como $C_1 \parallel C_2 \parallel C_3 \longrightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$

$$C_{eq} = (20 + 10 + 30)[\mu F]$$

$$\boxed{C_{eq} = 60[\mu F]}$$

iii) Cálculo de la Q

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \rightarrow Q = C_{eq} \cdot V$$

$$Q = (60[\mu F]) \cdot 2(V)$$

$$\boxed{Q = 120[\mu C]}$$

iv) Cálculo de la C_1'

$$C_1 = C_1' K \longrightarrow C_1' = \frac{C_1}{K}$$

$$C_1' = \frac{20[\mu F]}{2} \qquad \boxed{C_1' = 10[\mu F]} \longrightarrow \text{sin dieléctrico}$$

v) Cálculo de la C'_{eq}

$$C_1' \parallel C_2 \parallel C_3 \longrightarrow C'_{eq} = C_1' + C_2 + C_3$$

$$C'_{eq} = (10 + 10 + 30)[\mu F]$$

$$\boxed{C'_{eq} = 50[\mu F]}$$

vi) Cálculo del V'

$$C'_{eq} = \frac{Q'}{V'} \longrightarrow V' = \frac{Q'}{C'_{eq}}$$

como el circuito del "antes" está aislado, entonces

$$Q' = Q = 120[\mu C]$$

$$V' = \frac{120[\mu C]}{50[\mu F]} \longrightarrow \boxed{V' = 2{,}4[V]}$$

Como $C_1' \parallel C_2 \parallel C_3$ y en $\parallel$ el voltaje es el mismo, entonces

$$V_{C_1'} = V_{C_2} = V_{C_3} = V' = 2{,}4[V]$$

vii) Cálculo de las $Q_{C_1'}$, Q_{C_2}, Q_{C_3}

$$C_1' = \frac{Q_{C_1'}}{V'_{C_1}} \Rightarrow Q_{C_1'} = C_1' V_{C_1}'$$

$$Q_{C_1'} = 10(\mu F) \cdot 2{,}4[V]$$

$$\boxed{Q_{C_1'} = 24[\mu C]}$$

$$C_2 = \frac{Q_{C_2}}{V'_{C_2}} \Rightarrow Q_{C_2} = C_2 \cdot V'_{C_2}$$

$$Q_{C_2} = 10[\mu F] \cdot 2{,}4[V]$$

$$\boxed{Q_{C_2} = 24[\mu C]}$$

$$C_3 = \frac{Q_{C_3}}{V'_{C_3}} \longrightarrow Q_{C_3} = C_3 \cdot V'_{C_3}$$

$$Q_{C_3} = 30[\mu F] \cdot 2{,}4[V]$$

$$\boxed{Q_{C_3} = 72[\mu C]}$$

* Comprobación

En "II" las cargas se suman

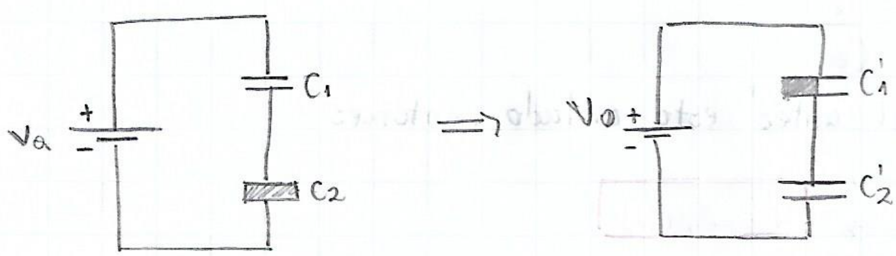
$Q = 120[\mu C]$

$Q = Q_{C_1} + Q_{C_2} + Q_{C_3}$

$Q = (24+24+72)(\mu C)$

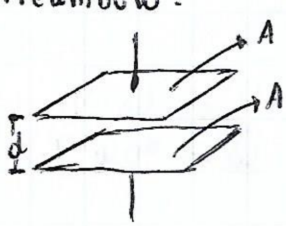
$\boxed{Q = 120\ \mu C}$

2. La figura muestra una disposición serie de capacitores conectados a una fuente constante V_0. Tal como están $C_1 = 4[\mu F]$ y $C_2 = 2[\mu F]$. Si el dieléctrico de constante $K=2$ se saca de C_2 y se introduce en C_1 de tal forma que calza exactamente en posición vertical ocupando la mitad del espacio entre las placas de C_1. Determine la variación de C_2. (ΔQ_{C_2}).

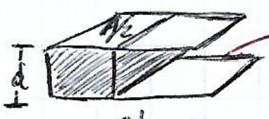


Solución

1. Preámbulo:



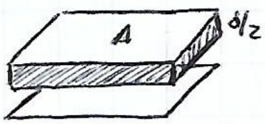
$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}} \rightarrow$ sin dieléctrico



$$C'' = \frac{1}{2} C_0 \longrightarrow C'' = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$C' = \frac{k\varepsilon_0 (A/2)}{d} \;,\; C' = \frac{k\varepsilon_0 A}{2d} \;,\; C' = \frac{1}{2} k \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\boxed{C' = \frac{1}{2} k C_0}$$



$$C' = \frac{k \varepsilon_0 A}{d/2} = 2k\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\boxed{C' = 2kC_0}$$

$$C'' = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d}{2}} = 2\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$C'' = 2C_0$$

... Solución.

i) Cálculo de la C_{eq}

$$C_1 \rightarrow C_2 \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{4[\mu F] \cdot 2[\mu F]}{4+2\,[\mu F]} = \frac{8[\mu F]^2}{6[\cancel{\mu F}]}$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{4}{3}[\mu F]}$$

ii) Cálculo de Q

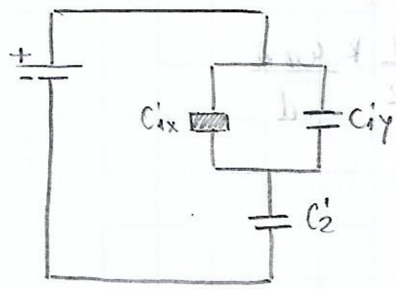
$$C_{eq} = \frac{Q}{V_0} \longrightarrow Q = C_{eq} \cdot V_0$$

$$\boxed{Q = \frac{4}{3} V_0 [\mu C]}$$

Como $C_{eq}: C_1 \rightarrow C_2$ y "$\rightarrow$" las cargas son iguales, entonces

$$Q_{C1} = Q_{C2} = Q \longrightarrow \boxed{Q_{C2} = \frac{4}{3} V_0}$$

iii) Circuito equivalente



iv) Cálculo del C_2'

$$C_2 = K C_2' \rightarrow C_2' = \frac{C_2}{K}$$

$$C_2' = \frac{2\,[\mu F]}{2} \rightarrow \boxed{C_2' = 1\,[\mu F]}$$

v) Cálculo del C_1'

$$C_1' = C_{1x}' + C_{1y}' \text{ (por estar en //)}$$

$$C_1' = \frac{K C_1}{2} + \frac{C_1}{2} = \frac{C_1}{2}(K+1)$$

$$C_1' = \frac{4}{2}(2+1) = 2(3)$$

$$\boxed{C_1' = 6\,[\mu F]}$$

vi) Cálculo del C_{eq}'

$$C_1' \rightarrow C_2' \Rightarrow C_{eq}' = \frac{C_1' C_2'}{C_1' + C_2'}$$

$$C_{eq}' = \frac{6\,(\mu F)\,1\,(\mu F)}{6+1\,(\mu F)} = \frac{6}{7}\frac{[\mu F]^{\cancel{2}}}{\cancel{[\mu F]}}$$

$$\boxed{C_{eq}' = \frac{6}{7}\,[\mu F]}$$

vii) Cálculo de Q'

$$C'_{eq} = \frac{Q'}{V_0} \Rightarrow Q' = C'_{eq} V_0$$

$$Q' = \frac{6}{7} V_0 \Rightarrow \boxed{Q' = \frac{6}{7} V_0}$$

Como $C'_1 \rightarrow C'_2$ y en "$\rightarrow$" la carga es la misma, entonces:

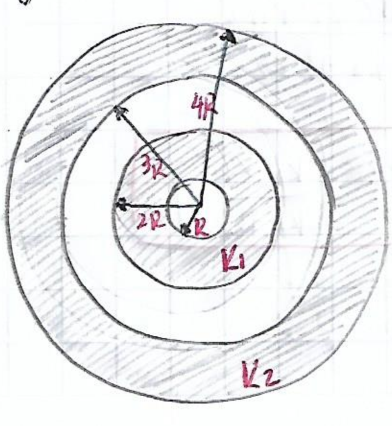
$$Q_{C'_1} = Q_{C'_2} = Q' = \frac{6}{7} V_0$$

$$\boxed{Q_{C'_2} = \frac{6}{7} V_0}$$

$$\Delta Q_{C_2} = Q_{C_2} - Q_{C'_2}$$
$$= \frac{4}{3} V_0 - \frac{6}{7} V_0$$
$$= \frac{28 V_0 - 18 V_0}{21} = \frac{10}{21} V_0$$

$$\boxed{\Delta Q_{C_2} = \frac{10}{21} V_0}$$

3. Con cuatro esferas conductoras de radios $R, 2R, 3R$ y $4R$ se diseñaron dos capacitores en el espacio entre conductores de relleno con dieléctricos de constantes K_1 y K_2 según se muestra en la figura. Determinar la capacidad equivalente del conjunto.



Solución: El conjunto de dos capacitores reúne las condiciones de capacitores en serie, porque una sola armadura del primer condensador, se une a una sola armadura del otro capacitor.

Se sabe que la capacitancia de un condensador esferico viene dada por:

$$C = \frac{4\pi \varepsilon_0 ab}{(b-a)}$$

i. Cálculo del $C_1 (K_1)$

$$C_1 = \frac{4\pi \varepsilon_0 K_1 (R)(2R)}{(2R-R)}$$

$$C_1 = \frac{4\pi \varepsilon_0 K_1 2R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}}$$

$$\boxed{C_1 = 8\pi \varepsilon_0 K_1 R}$$

ii. Cálculo del $C_2 (K_2)$

$$C_2 = \frac{4\pi \varepsilon_0 K_2 (3R)(4R)}{(4R-3R)}$$

$$C_2 = \frac{4\pi \varepsilon_0 K_2 12R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}}$$

$$\boxed{C_2 = 48\pi \varepsilon_0 K_2 R}$$

iii. Cálculo del C_{eq}

$$C_1 \rightarrow C_2 \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{(8\pi \varepsilon_0 K_1 R)(48\pi K_2 \varepsilon_0 R)}{(8\pi \varepsilon_0 K_1 R) + (48\pi \varepsilon_0 K_2 R)}$$

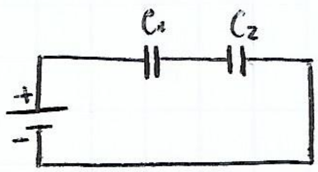
$$C_{eq} = \frac{(8)(48)(\pi \varepsilon_0 R)^2 K_1 K_2}{8\pi \varepsilon_0 R (K_1 + 6K_2)}$$

$$C_{eq} = \frac{48\pi \varepsilon_0 R K_1 K_2}{K_1 + 6K_2}$$

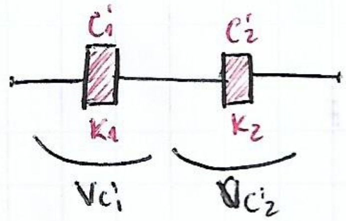
$$\boxed{C_{eq} = 48\pi \varepsilon_0 R \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + 6K_2}\right)}$$

4. Dos condensadores de aire de 1,5 [μF] y 3[μF] se conectan en serie a una fuente de voltaje que les proporciona una tensión de 50 [V]. Los desconectamos de la fuente y sin descargarlos los llenamos con dieléctricos de constantes $k_1 = 3$ y $k_2 = 5$ respectivamente ¿Cuáles son las diferencias de potencial entre las armaduras de cada uno en esta nueva situación?

Antes



Después



Solución

i) Cálculo del C_{eq}

$$C_1 \rightarrow C_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{(1{,}5)(3)}{(1{,}5+3)} = \frac{4{,}5}{4{,}5}$$

$$\boxed{C_{eq} = 1[\mu F]}$$

ii) Cálculo de la Q

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C_{eq} V$$

$$Q = (1[\mu F])(50[V])$$

$$\boxed{Q = 50[\mu C]}$$

iii) Cálculo de C_1' y C_2'

$C_1' = K_1 C_1$ y $C_2' = K_2 C_2$

$C_1' = 3(1{,}5\,[\mu F]) \longrightarrow \boxed{C_1' = 4{,}5\,[\mu F]}$

$C_2' = 5(3\,[\mu F]) \longrightarrow \boxed{C_2' = 15\,[\mu F]}$

iv) Cálculo de $V_{C_1'}$ y $V_{C_2'}$

$$V_{C_1'} = \frac{Q}{C_1'} = \frac{50\,\mu C}{4{,}5\,\mu F}$$

$$\boxed{V_{C_1'} = 11{,}11\,[V]}$$

$$V_{C_2'} = \frac{Q}{C_2'} = \frac{50\,\mu C}{15\,\mu F}$$

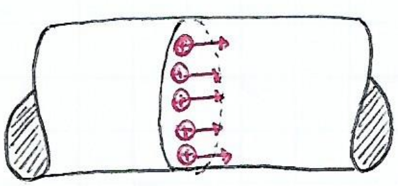
$$\boxed{V_{C_2'} = 3{,}33}$$

Electrodinámica.-

El concepto clave en esta parte del electromagnetismo es:

Corriente eléctrica: $(\bar{I})$

Es el movimiento de cargas eléctricas positivas que pasan por una sección transversal de un conductor en un tiempo determinado.



$$\boxed{\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\,\frac{[C]}{[s]} = [\text{ampére}]}$$

1 [coulomb] = $6{,}25 \cdot 10^{18}$ electrones

Corriente instantánea: (I)

Es el límite de la corriente promedio cuando $\Delta t \to 0$

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \longrightarrow \boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

$$dq = I dt \longrightarrow \boxed{Q(t) = \int_{t_0}^{t} I(t)\, dt}$$

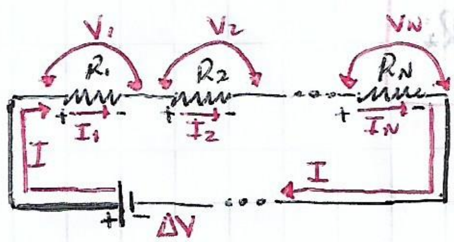
Conexión de resistencias.-

Conexión en serie:

Una resistencia esta en serie con otra cuando un solo terminal de la primera se conecta a un solo terminal de la ~~prim~~ segunda resistencia. sin derivación y sin interrupciones.

Parametros eléctricos:

a) Corriente total (I)



$$\boxed{I = I_1 = I_2 = \ldots = I_N}$$

b.) Voltaje total ($V = \Delta V$)

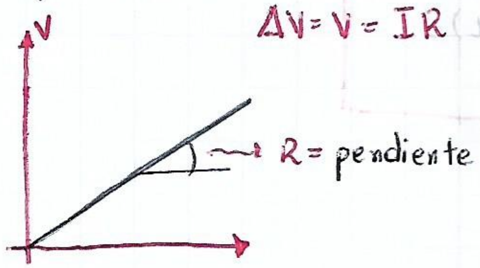
$$\boxed{\Delta V = V = V_1 + V_2 + \dots + V_N}$$

c.) Resistencia equivalente (R_{eq}).

$$\Delta V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$$

Por la ley de ohm

$$\Delta V = V = IR$$



$$I R_{eq} = I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_N R_N$$

como $I = I_1 = I_2 = \dots = I_N$

$$I R_{eq} = I R_1 + I R_2 + \dots + I R_N$$

$$I R_{eq} = I (R_1 + R_2 + \dots + R_N)$$

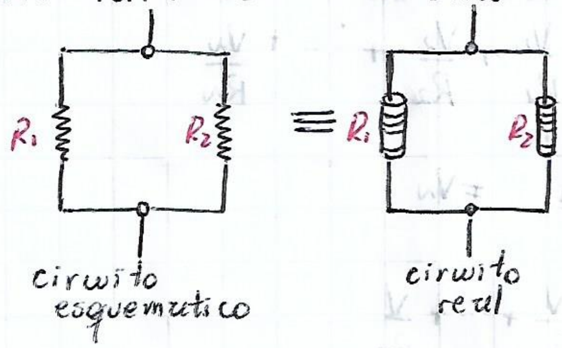
$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N}$$

ó

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{I=1}^{N} R_i}$$

Conexión en paralelo:

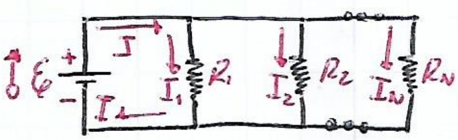
Una resistencia está en paralelo con otra, cuando ambos terminales de una resistencia se conectan a ambos terminales de la otra resistencia.



Parametros eléctricos

a.) Voltaje total (V o ΔV)

El voltaje en resistencias en paralelo es el mismo al voltaje de la batería.



$$\boxed{V = V_1 = V_2 = \ldots = V_N}$$

b.) Corriente total (I)

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + \ldots + I_N}$$

c.) Resistencia equivalente

Se sabe que:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_N}{R_N}$$

$$V = V_1 = V_2 = \dots = V_N$$

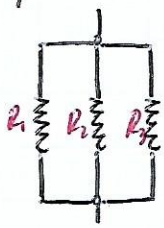
$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots + \frac{V}{R_N}$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}}$$

Casos frecuentes

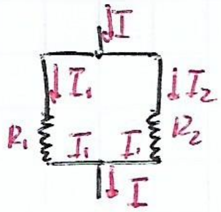
1. para 3 resistencias



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}}$$

2. para 2 resistencias



$$\frac{1}{Req} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$\boxed{Req = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$R_1 // R_2 \rightarrow V_1 = V_2$

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (1)$$
$$I = I_1 + I_2 \quad (2)$$

despejando en (2)

$$I_1 = I - I_2 \quad / \quad I_2 = I - I_1$$

reemplazando en (1)

$$(I - I_2) R_1 = I_2 R_2$$
$$I R_1 - I_2 R_1 = I_2 R_2$$
$$I R_1 = I_2 R_2 + I_2 R_1$$
$$I R_1 = I_2 (R_1 + R_2)$$
$$\boxed{I = I_2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)}$$

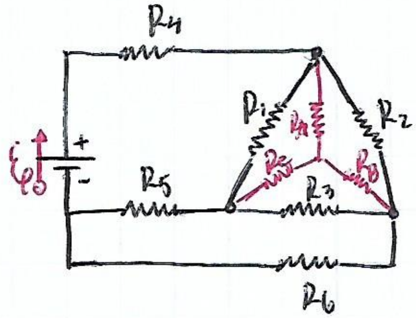
Nota: Si aumentamos la conexiones en paralelo lo que provoca es que disminuya la resistencia equivalente y aumenta la corriente

$$Req < \underbrace{R_1 ; R_2 ; \ldots ; R_N}_{\text{aparatos conectados}} \qquad I_N \rightarrow C I_N$$

aumenta la corriente en "C" veces.

Conexión triángulo - estrella

Consideremos la sigte configuración.



$$\boxed{R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2+R_3}}$$

$$\boxed{R_B = \frac{R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$

$$\boxed{R_C = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$

$R_1 = 2\,\Omega$ $R_4 = 4\,\Omega$

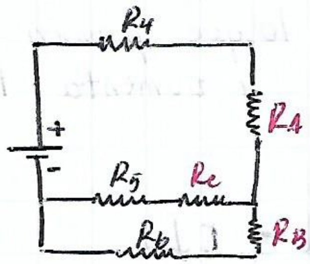
$R_2 = 3\,\Omega$ $R_5 = 3\,\Omega$

$R_3 = 2\,\Omega$ $R_6 = 1\,\Omega$

$$R_A = \frac{2 \cdot 3}{2+3+2} = \frac{6}{7} \rightarrow \boxed{R_A = \frac{6}{7}\,\Omega}$$

$$R_B = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7} \rightarrow \boxed{R_B = \frac{6}{7}\,\Omega}$$

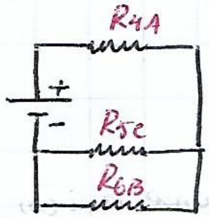
$$R_C = \frac{2 \cdot 2}{7} = \frac{4}{7} \rightarrow \boxed{R_C = \frac{4}{7}\,\Omega}$$



$$R_{4A} = 4 + \frac{6}{7} = \frac{34}{7} \rightarrow \boxed{R_{4A} = \frac{34}{7}\,\Omega}$$

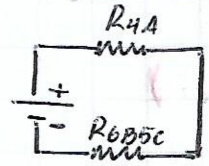
$$R_{5C} = 3 + \frac{4}{7} = \frac{25}{7} \rightarrow \boxed{R_{5C} = \frac{25}{7}\,\Omega}$$

$$R_{6B} = 1 + \frac{6}{7} = \frac{13}{7} \rightarrow \boxed{R_{6B} = \frac{13}{7}\,\Omega}$$



$$R_{6B5C} = \frac{\frac{13}{7} \cdot \frac{25}{7}}{\frac{13}{7} + \frac{25}{7}} = \frac{\frac{325}{49}}{\frac{38}{7}} = \frac{325}{266}$$

$$\boxed{R_{6B5C} = \frac{325}{266}\ \Omega}$$



$$R_{eq} = \frac{325}{266} + \frac{34}{7} = \frac{231}{38}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{231}{38}\ \Omega}$$

Leyes de Kirchhoff

I.) Introducción:

Los circuitos eléctricos (redes eléctricas) se pueden resolver en general, mediante:

1.) Método de la Resistencia equivalente → cuando hay una sola fuente de voltaje.

2.) Método de Leyes de Kirchhoff → se utiliza cuando hay más de una fuente de voltaje (F.E.M)

II.) Leyes de Kirchhoff

- Las leyes de Kirchhoff se basan en:
  - El principio de conservación de la carga.
  - El principio de conservación de la energía.

(Estas se pueden aplicar usando tres métodos, a saber:)

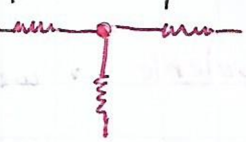
A) Ley de las corrientes (LKC)

"La suma algebraica de las corrientes que confluyen (salir o entrar) a un nodo es igual a cero", o también "La suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo", esto es:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} I_i = 0} \quad ó \quad \boxed{\sum I_{entran} = \sum I_{salen}}$$

1. Nodo:

Es un punto real (físico) que conecta tres o más terminales en un circuito.

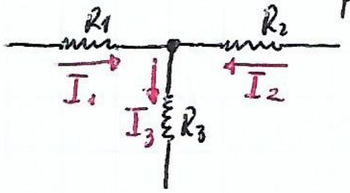


2. Convención:

i.- Las corrientes que entran a un nodo serán positivas.

ii.- Las corrientes que salen serán negativas.

ej:



I_1 entra $\rightarrow$ $I_1 > 0$
I_2 entra $\rightarrow$ $I_2 > 0$
I_3 sale $\rightarrow$ $I_3 < 0$

Aplicando LKC al nodo del circuito, se tiene que:

$$I_1 + I_2 + -I_3 = 0$$
$$I_1 + I_2 = I_3$$

B Ley de los voltajes (LKV)

"La suma algebraica de los voltajes en una malla es cero", o también "La suma de las subidas de potencial (por fem) es igual a la suma de las caídas de potencial (por resistencias)."

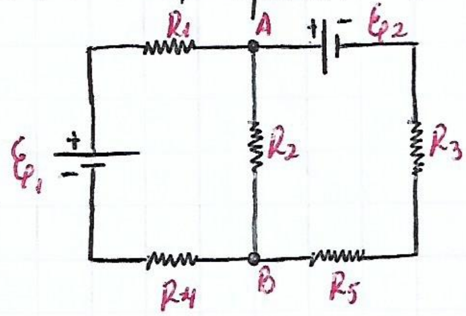
$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} V_i = 0} \quad ó \quad \boxed{\sum \varepsilon = \sum R.I}$$

1. Malla:

Es todo camino conductor cerrado para la corriente eléctrica.

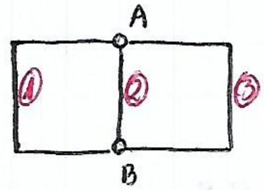
2. Rama:

Es el conjunto de todos los elementos eléctricos (fem, resistencias, capacitores, etc), que hay entre dos consecutivos.



• Nodos: A y B
• Mallas: $R_1 R_2 R_4 \varepsilon_1 R_1$; $\varepsilon_2 R_3 R_5 R_2 \varepsilon_2$
$\varepsilon_1 R_1 \varepsilon_2 R_3 R_5 R_4 \varepsilon_1$.

• Ramas: se obtiene llevando el circuito a grafo.



Ramas: 1, 2 y 3

3. Convención:

3.1.- Para la fem:

a.) Cuando se recorre la fem de menos a más, la d.d.p aumenta. $\boxed{\Delta V = +\mathcal{E}_0}$

b.) Cuando se recorre la fem de más a menos, la d.d.p disminuye porque hay una caída de potencial. $\boxed{\Delta V = -\mathcal{E}_0}$

3.2.- Para la resistencia

a.) Cuando se recorre la resistencia en el mismo sentido que la corriente la d.d.p disminuye

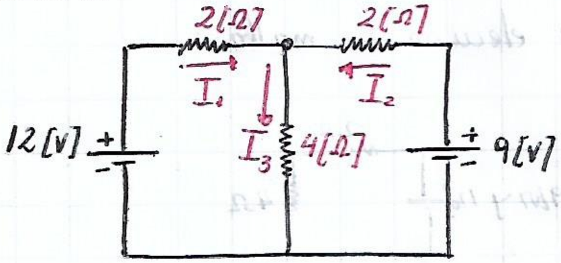
$$\boxed{\Delta V = -RI}$$

b.) Cuando se recorre la resistencia en sentido opuesto a la corriente la d.d.p. aumenta.

$$\boxed{\Delta V = +RI}$$

III.) Ejemplo:

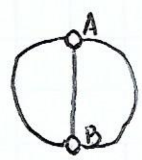
Calcular las corrientes eléctricas por cada una de las ramas del sigte circuito:



Utilizando los trés metodos de resolución.

Solución ☐ Método 1

i. Se lleva el circuito a grafo



Nodos: N=2

Ramas: R=3

ii. Aplicamos LKC a

$M = N - 1$ nodos

$M = 2 - 1 \Rightarrow \boxed{M = 1}$

iii. Elegir sentido para las corrientes de ramas:

iv. LKC daría como resultado:

$$\boxed{I_1 + I_2 - I_3 = 0}$$

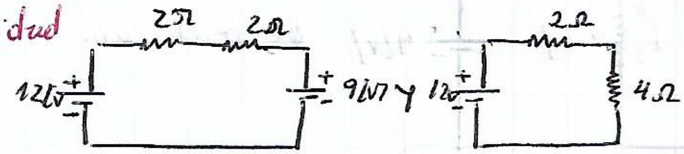
v. Elegir las mallas en base a la sigte ecuación:

número de mallas $Q = R - M = 3 - 1 = 2$

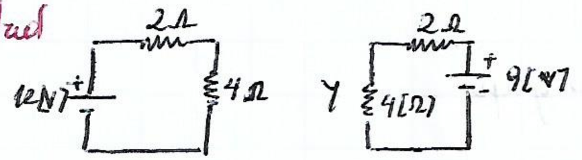
$$\boxed{Q = 2}$$

vi. Hay tres posibilidades de eleción de mallas:

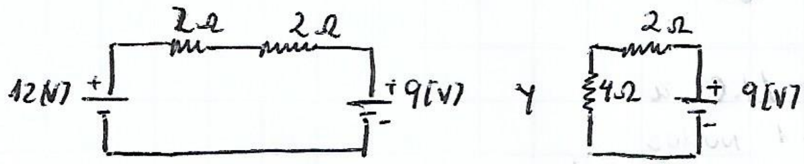
1ª posibilidad



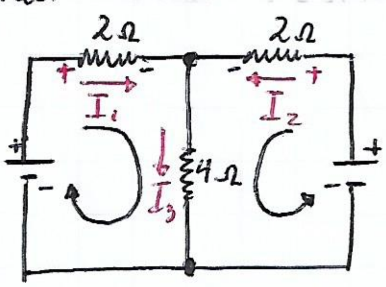
2ª posibilidad



3ª posibilidad



vii. Una vez elegida las mallas, elegimos un sentido de recorrido de las mallas.



→ : sentido de la corriente

→ : sentido usuario

viii. Se colocan los signos a las resistencias en base al sentido de las corrientes.

ix. Apliquemos LKV a ambas mallas

$$+12 - 2I_1 - 4I_3 = 0$$
$$\boxed{2I_1 + 4I_3 = 12}$$

Nota: el número de ecuaciones totales para un circuito viene dado por:

$$N = Q + M$$
$$\boxed{N = 3}$$

$$9 - 2I_2 - 4I_3 = 0$$
$$\boxed{2I_2 + 4I_3 = 9}$$

Haciendo un sistema:

1 $\quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$

2 $\quad 2I_1 + 0I_2 + 4I_3 = 12$

3 $\quad 0I_1 + 2I_2 + 4I_3 = 9$

Resolvemos por determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \div 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-8) + (-8) + (-4) \Rightarrow \boxed{\Delta = -20}$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 4 \\ 12 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \cancel{0\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}^{\,0} - \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_1 = -[(48) - 36] - 24$$

$$\boxed{\Delta I_1 = -36}$$

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{-36}{-20} = \frac{9}{5}\,[A] = 1{,}8\,[A]$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 0 - \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_2 = (48) - 36 - 18$$

$$\boxed{\Delta I_2 = -6}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{-6}{-20} = \frac{3}{10} = 0{,}3\,[A]$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 0$$

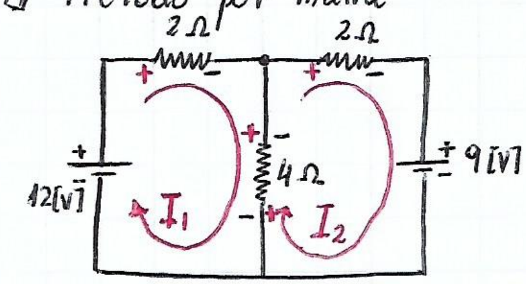
$$\Delta I_3 = -24 - 18$$

$$\boxed{\Delta I_3 = -42}$$

Esta configuración y sus resultados corresponden al método combinado.

$$I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{-42}{-20} = \frac{21}{10} = 2{,}1\,[A]$$

Método por malla



i. Malla 1

aplicando LKV a esta malla

$$12 - 2I_1 - 4I_1 + 4I_2 = 0$$

$$-6I_1 + 4I_2 = -12 \quad / \cdot (-1)$$

$$\boxed{6I_1 - 4I_2 = 12}$$

ii Malla 2

aplicando LKV a esta malla

$$-2I_2 - 9 + 4I_1 - 4I_2 = 0$$

$$-6I_2 + 4I_1 = 9$$

$$\boxed{4I_1 - 6I_2 = 9}$$

iii Hacemos un sistema

$$3I_1 - 2I_2 = 6 \quad / \cdot -3$$

$$4I_1 - 6I_2 = 9$$

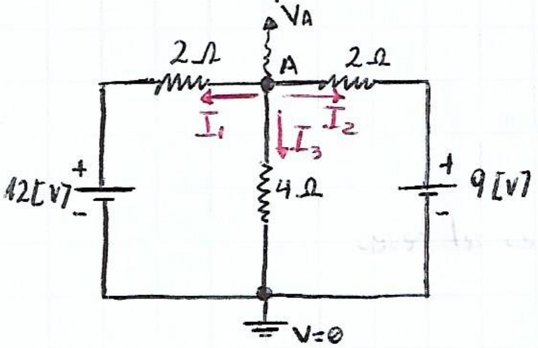
$$-9I_1 + 6I_2 = -18$$

$$4I_1 - 6I_2 = 9$$

$$-5I_1 \ / = -9$$

$$I_1 = \frac{9}{5}\,[A] = 1{,}8\,[A]$$

Método por nodos



¡ Aplicando LKC al nodo "A"

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

y se requiere ley de ohm $\Delta V = IR$

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

$$\underbrace{\left(\frac{V_A - 12}{2}\right)}_{I_1} + \underbrace{\left(\frac{V_A - 9}{2}\right)}_{I_2} + \underbrace{\left(\frac{V_A}{4}\right)}_{I_3} = 0$$

$$\frac{2V_A - 24 + 2V_A - 18 + V_A}{4} = 0$$

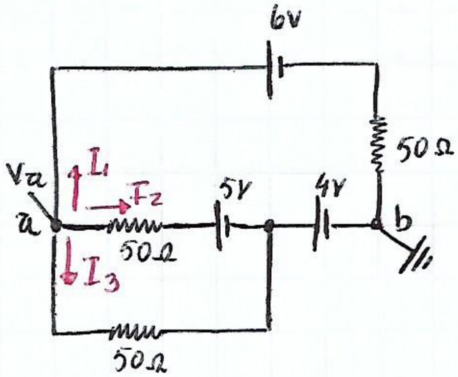
$$2V_A - 24 + 2V_A - 18 + V_A = 0$$

$$5V_A - 42 = 0$$

$$\boxed{V_A = \frac{42}{5} [V]}$$

Ejercicios:

1. Dado el circuito:



Hallar: (a) corriente por cada resistencia.
(b) la d.d.p entre "a" y "b" (ΔV_{ab})

Solución:

- número de nodos: 2
- aplicación LKC: $M = N - 1 = 1$ $\boxed{M = 1}$
- número de ramas: 3
- aplicación LKV: $Q = R - M = 3 - 1$ $\boxed{Q = 2 \text{ mallas}}$
- número de ecuaciones:

$E = Q + M = 2 + 1$

$\boxed{E = 3}$

I) Método por nodos

(a.) cálculo de las corrientes

en el nodo "a" se aplica LKC

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad ; \quad I = \frac{\Delta V}{R}$$

$$\underbrace{\left(\frac{V_a - 6V}{50}\right)}_{I_1} + \underbrace{\left(\frac{V_a - 5 - 4}{50}\right)}_{I_2} + \underbrace{\left(\frac{V_a - 4}{50}\right)}_{I_3} = 0$$

$$V_a - 6V + V_a - 9v + V_a - 4v = 0$$

$$3V_a - 19 = 0$$

$$3V_A = 19$$

$$\boxed{V_A = \frac{19}{3}}$$

i. $I_1 = \dfrac{V_a - 6}{50} = \dfrac{\frac{19}{3} - 6}{50}$

$I_1 = \dfrac{1}{3 \cdot 50} = \dfrac{1}{150} [A]$

$\boxed{I_1 = \dfrac{1}{150} [A]} \simeq \boxed{I_1 = 6{,}67 [mA]}$

ii $I_2 = \dfrac{V_a - 9}{50} = \dfrac{19/3 - 9}{50}$

$I_2 = \dfrac{-8}{3 \cdot 50} = \dfrac{-4}{75}$

$\boxed{I_2 = \dfrac{-4}{75} [A]} \simeq \boxed{I_2 = -53{,}33 [mA]}$ (-) por que el sentido esta al revés.

iii $I_3 = \dfrac{V_A - 4}{50} = \dfrac{19/3 - 4}{50}$

$\boxed{I_3 = \dfrac{7}{150}} \Rightarrow \boxed{I_3 = 46{,}66 \ m[A]}$

(b) cálculo de la ΔV_{ab}

$V_a - 50 I_2 - 5 - 4 = V_b$

$V_a - 50 I_2 - 9 = V_b$

$V_a - V_b = 50 I_2 + 9$

$V_a - V_b = 50(-53{,}33 \cdot 10^{-3}) + 9$

$V_a - V_b = -2{,}6665 + 9$

$\boxed{V_a - V_b = 6{,}33 [V]}$

Tarea

(a) calcular ΔV_{ab} por rama I_1

(b) " " por rama I_3

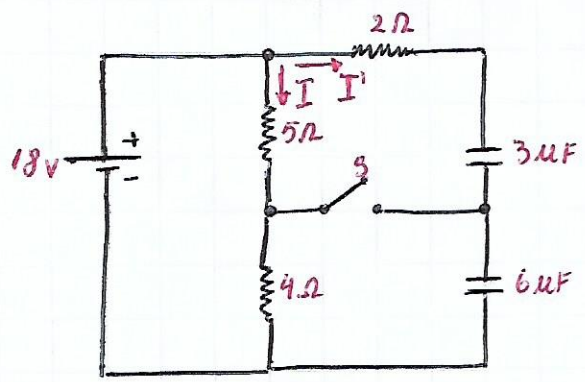
(c) hacer el ejercicio con la tierra puesta en c

(d) hacer el mismo ejercicio por malla.

2. En el circuito de la figura la fem de 18V ha estado conectada durante largo tiempo $(t \to \infty)$

(a) ¿cuál es el potencial del punto "a" respecto "b", cuando S está abierto?

(b) ¿cuál es la carga de cada capacitor cuando S está cerrado?



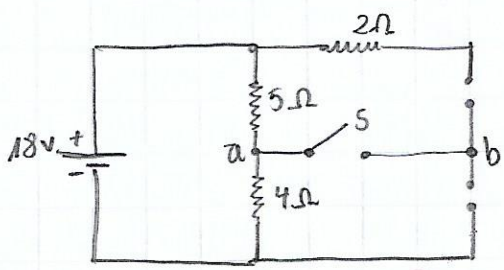
(a) Cálculo del V_{ab} con S abierto.

- La fem de 18V ha estado conectada por largo tiempo $t \to \infty \Rightarrow$ que los capacitores están totalmente cargados.

$\Rightarrow Q = cte \to I = \dfrac{dQ}{dt}$

$\Rightarrow I' = 0$

$\Rightarrow$ Los capacitores se comportan como un circuito abierto



Nota:

En caso de que el tiempo fuera $t = 0$ o cercano a ese valor

$Q = 0$; $C = \dfrac{Q}{V} \Rightarrow V = \dfrac{Q}{C}$

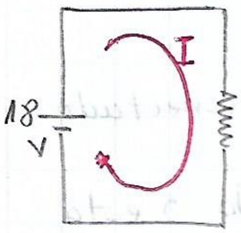
$V = 0$

El condensador se comporta como un cortocircuito

Cálculo de la Req

$5\,\Omega \to 4\,\Omega \Rightarrow Req = 5+4 = 9\,\Omega$

$\boxed{Req = 9\,\Omega}$



$I = \dfrac{V}{Req} = \dfrac{18\,V}{9\,\Omega}$

$\boxed{I = 2\,A}$

$V_{5\Omega} = I \cdot 5\,\Omega$ $\quad V_{4\Omega} = I \cdot 4\,\Omega$

$= 2A \cdot 5\,\Omega$ $\quad V_{4\Omega} = 2A \cdot 4\,\Omega$

$\boxed{V_{5\Omega} = 10[V]}$ $\quad \boxed{V_{4\Omega} = 8[V]}$

Cálculo de Ceq

$C_1 \to C_2 \Rightarrow Ceq = \dfrac{3 \cdot 6}{3+6} = \dfrac{\cancel{18}}{\cancel{9}} = 2$

$\boxed{Ceq = 2\,[\mu F]}$

$Q_T = Ceq \cdot 18\,V = 2\,\mu F \cdot 18\,V$

$\boxed{Q_T = 36\,\mu C}$

$\boxed{Q_{C1} = 36\,\mu C}$ $\quad \boxed{Q_{C2} = 36\,\mu C}$

Cálculo de V_{C1} y V_{C2}

$$V_{C1} = \frac{Q_{C1}}{C_1} \Rightarrow V_{C1} = \frac{36\,\mu C}{3\,\mu F}$$

$$\boxed{V_{C1} = 12\,[V]}$$

$$V_{C2} = \frac{Q_{C2}}{C_2} \Rightarrow V_{C2} = \frac{36\,\mu C}{6\,\mu F}$$

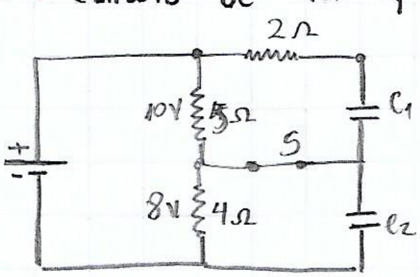
$$\boxed{V_{C2} = 6\,[V]}$$

$$V_a + 10V - 12V = V_b \qquad V_a - 8V + 6V = V_b$$

$$V_a - V_b = 12V - 10V \qquad V_a - V_b = 8V - 6V$$

$$\boxed{V_a - V_b = 2\,[V]} \qquad \boxed{V_a - V_b = 2\,[V]}$$

(b) Cálculo de Q_{C1} y Q_{C2} cuando S está cerrado.



$4\Omega \parallel C_2$ y en paralelo el voltaje es el mismo

$$V_{4\Omega} = V_{C2} = 8\,[V] \quad \| \quad V_{5\Omega} = V_{C1} = 10\,[V]$$

$$Q_{C2} = C_2 V_{C2} = 6(\mu F) \cdot 8\,[V]$$

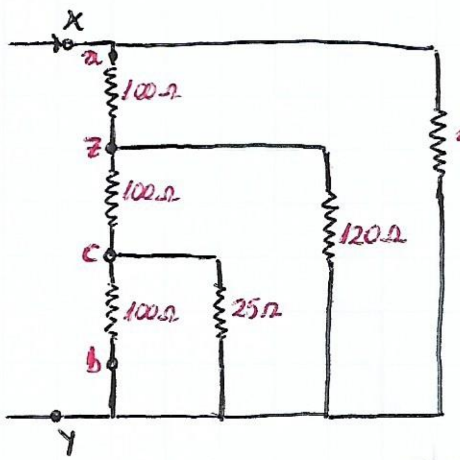
$$\boxed{Q_{C2} = 48\,[\mu C]}$$

$$Q_{C1} = C_1 V_{C1} = 3\,\mu F\ 10\,V = \boxed{Q_{C1} = 30\,\mu C}$$

3. El resistor largo entre "a" y "b" del circuito presentado, tiene una resistencia de 300 Ω y tres derivaciones de un tercio de su longitud cada una.

Calcular: (a) La resistencia equivalente entre "X" e "Y"

(b) La diferencia de potencial V_{bc}, si la d.d.p $V_{xy} = 320$ [V]



Solución:

La resistencia de un material está relacionada con Longitud a traves de:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow R \propto L$$

$R_{az} = R_{zc} = R_{cb} = 100$ [Ω]

4. tramo bc

$$R_{bc} = \frac{100 \cdot 25}{100 + 25}$$

$$R_{bc} = \frac{2500}{125} = 20$$

$$\boxed{R_{bc} = 20\ \Omega}$$

tramo bc → z

$$R_{bcz} = 20 + 100$$

$$R_{bcz} = 120 \Rightarrow \frac{120 \cdot 120}{120 + 120}$$

$$\boxed{R_{bcz} = 60\ \Omega}$$

tramo $bcz \rightarrow a$

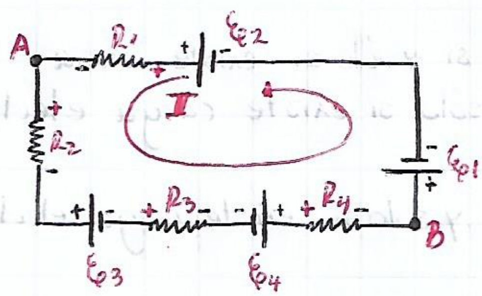
$$R_{bcza} = 60 + 100$$

$$R_{bcza} = 160 \Rightarrow \frac{160 \cdot 40}{160+40}$$

$$R_{bcza} = 32\,\Omega$$

$$R_{bcza} = \boxed{R_{eq} = 32\,\Omega}$$

4. En el circuito de la figura, determinar la corriente y la d.d.p entre "a" y "b".



$R_1 = 4\,\Omega$ $\quad \mathcal{E}_1 = 40\,V$
$R_2 = 1\,\Omega$ $\quad \mathcal{E}_2 = 50\,V$
$R_3 = 2\,\Omega$ $\quad \mathcal{E}_3 = 20\,V$
$R_4 = 3\,\Omega$ $\quad \mathcal{E}_4 = 30\,V$

Solución:

Se elige el sentido de la fuente de mayor valor $\mathcal{E}_2 = 50[V]$

Aplicando LKV

$$+50 - 4I - I - 20 - 2I + 30 - 3I - 40 = 0$$
$$-10I + 20 = 0$$
$$I = \frac{20}{10}$$
$$\boxed{I = 2[A]}$$

$$V_A - IR_2 - \mathcal{E}_3 - IR_3 + \mathcal{E}_4 - IR_4 = V_B$$
$$V_A - 2\cdot 1 - 20 + 2\cdot 2 + 30 - 2\cdot 3 = V_B$$
$$V_A - 2 - 20 - 4 + 30 - 6 = V_B$$
$$V_A - 2 = V_B$$
$$\boxed{V_A - V_B = 2}$$
$$V_A + 2\cdot 4 - 50 + 40 = V_B$$
$$V_A - 2 = V_B$$
$$\boxed{V_A - V_B = 2}$$

Magnetismo.-

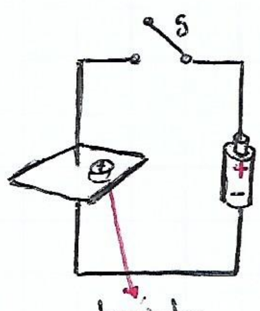
I. Introducción.

- Existe campo gravitacional si y sólo si existe masa.
- Existe campo eléctrico si y sólo si existe carga eléctrica en reposo ($\vec{V} = \vec{0}$).
- Existe campo magnético, si y solo si existe carga eléctrica en movimiento ($\vec{V}_q \neq \vec{0}$).
- Existe campo magnético si y solo si existe corriente eléctrica.
- Existe campo magnético terrestre ($25[\mu T]$ a $65[\mu T]$) porque existe corriente eléctrica en el núcleo de la tierra (Ni-FE).

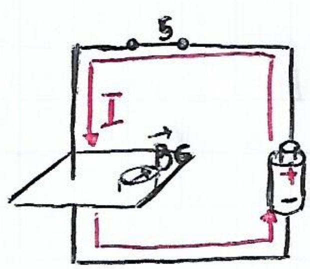
II. Relación entre corriente eléctrica y $\vec{B}$:

- Hans Christian Oersted relaciono "I" con $\vec{B}$.

S abierto

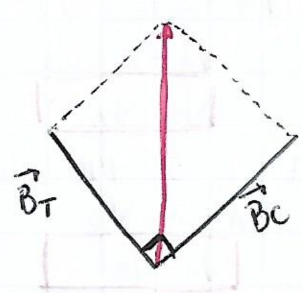


S cerrado

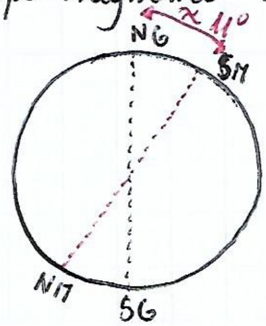


$\vec{B}_R = \vec{B}_T + \vec{B}_C \rightarrow$ conductor

$\downarrow$ terrestre



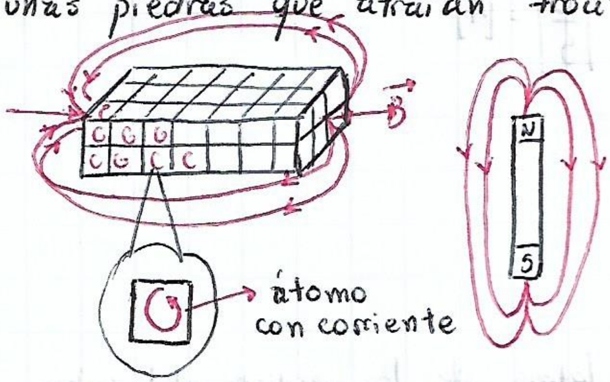
II Campo magnetico terrestre



NG: norte geográfico
SG: sur geográfico

III. Imanes permanentes:

- Thales de Mileto descubrió en la ciudad griega de "magnesia" unas piedras que atraían trocitos de hierro.

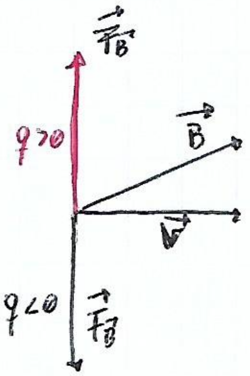


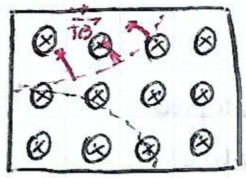
IV. Movimiento de la carga eléctrica en un $\vec{B}$ = cte.

- Experimentalmente se obtuvo la sigte. expresión matemática para la fuerza que experimenta una carga en un $\vec{B}$ = cte.

$$\boxed{\vec{F}_{\vec{B}} = q\vec{v} \times \vec{B}} \quad q > 0$$

$$\boxed{\vec{F}_{\vec{B}} = -q\vec{v} \times \vec{B}} \quad q < 0$$





⊗ : $\vec{B}$ entrante
⊙ : $\vec{B}$ saliente

■ Unidades del $\vec{B}$

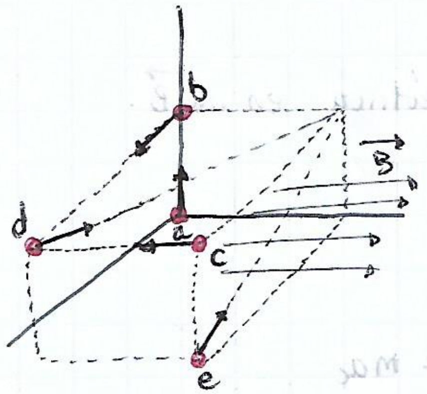
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F = qvB$$

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} \Rightarrow [B] = \frac{[N]}{[C]\left[\frac{m}{s}\right]} \quad ; \quad \left[\frac{C}{s}\right] = [A]$$

$$[B] = \frac{[N]}{[A][m]} = [\text{Tesla}] = [T]$$

Ejemplo:

Cada uno de los puntos con letras de los vértices del cubo de la figura representan una carga positiva "q" que se desplaza con una velocidad de magnitud $\vec{v}$ en el sentido que se indica. La región de la figura se halla en un campo magnético $\vec{B}$ paralelo al eje x. y dirigido hacia la derecha. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza sobre cada carga y muestre la fuerza en el diagrama.



Solución:

i. en a.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = v\hat{j} \\ \vec{B} = B\hat{i}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{F}_B = qv\hat{j}\times B\hat{i} \\ \vec{F}_B = qvB(\hat{j}\times\hat{i}) \\ \boxed{\vec{F}_B = qvB(-\hat{k})}\end{array}$$

ii. en d

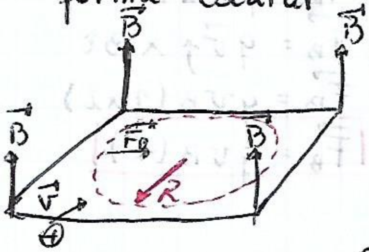
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = v_x\hat{i} + v_z(-\hat{k}) \\ \vec{B} = B\hat{i}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{F}_B = q[v_x\hat{i} + v_z(-\hat{k})]\times B\hat{i} \\ \vec{F}_B = qv_xB(\cancel{\hat{i}\times\hat{i}})^{0} - qv_zB(\hat{i}\times-\hat{k}) \\ \boxed{\vec{F}_B = qv_zB(-\hat{j})}\end{array}$$

iii. en e.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = v_y\hat{j} + v_z(-\hat{k}) \\ \vec{B} = B\hat{i}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\vec{F}_B = q[v_y\hat{j} + v_z(-\hat{k})]\times B\hat{i} \\ \vec{F}_B = qv_yB(\hat{j}\times\hat{i}) - qv_zB(\hat{k}\times\hat{i}) \\ \vec{F}_B = -qv_yB\hat{k} - qv_zB\hat{j} \\ \boxed{\vec{F}_B = -qB(v_y\hat{k} + v_z\hat{j})\ [N]}\end{array}$$

V. Movimiento circunferencial de una carga eléctrica en un $\vec{B}$.

A En forma escalar



$$F_B = F_c \longleftrightarrow qvB = ma_c$$

$$q\cancel{v}B = m\left(\frac{v^{\cancel{2}}}{R}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{mv}{Bq}}$$

Por otro lado sabemos: $v = \omega R$: ω : velocidad angular
$\omega = cte$

$$\cancel{R} = \frac{m(\omega \cancel{R})}{qB} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{qB}{m}}$$

también $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{qB}}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{f = \frac{qB}{2\pi m}}$$

Ejemplo:

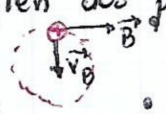
1. Un eléctron penetra dentro de un campo magnetico uniforme, de intensidad 0,001 [T] $\perp$ a su velocidad. Si el rayo de la trayectoria que describe el eléctron es de 5cm encuentre.

(a) Su velocidad

(b) El periodo de movimiento de la órbita

Preambulo

Cuando una carga ingresa a una región del espacio donde hay un $\vec{B} = cte$, existen dos posibilidades:

i. $\vec{v} \perp \vec{B} \longrightarrow$ 

ii. $\vec{v} \not\perp \vec{B} \longrightarrow$  $\rightarrow$ helicoide

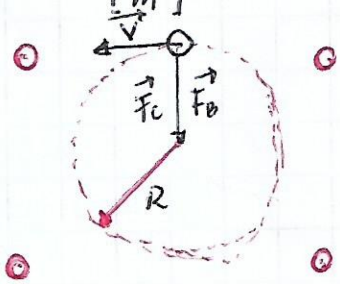
Solución:

Este ejemplo corresponde a la posibilidad: $\vec{v} \perp \vec{B}$

$R = 5\,[cm] \longrightarrow \boxed{R = 0{,}05\,[m]}$

$B = 0{,}001\,[T] = 0{,}001\left[\frac{Wb}{m^2}\right]$

$\boxed{B = 0{,}001\left[\frac{kg}{C \cdot s}\right]}$



i. Cálculo de la velocidad

$q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} [C]$

$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31} [Kg]$

Fuerza centripeta $F_c = F_B$: Fuerza magnética

$$m a_c = q v B \; ; \; a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$m\left(\frac{v^2}{R}\right) = q v B$$

$$v = \frac{q B R}{m}$$

$$v = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19} [\cancel{C}])(0{,}001 [\cancel{Kg}/\cancel{C}\cdot s])(0{,}05 [m])}{(9{,}11 \cdot 10^{-31} [\cancel{Kg}])}$$

$$\boxed{v = 8{,}79 \cdot 10^{6} \left[\frac{m}{s}\right]}$$

ii Cálculo del periodo T
de la expresión

$$\frac{m v^{\cancel{2}}}{R} = q \cancel{v} B$$

$$\frac{m v}{R} = q B \; : \; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega R$$

$$\frac{m\,(\omega R)}{R} = q\,v B$$

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right) = q B$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{q B}}$$

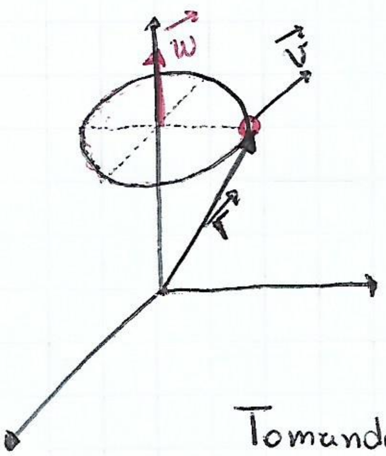
$$T = \frac{2\,(3{,}14)(9{,}1\times10^{-31}\,[\cancel{kg}])}{(1{,}6\cdot10^{-19}\,[\cancel{C}])\left(0{,}001\,\left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{C}\,s}\right]\right)}$$

$$T = 35{,}7\cdot10^{-9}\,[s]$$

$$\boxed{T = 35{,}7\,[ns]}$$

B) En forma vectorial.

Consideremos el sigte esquema vectorial.



$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

sabemos que: $\vec{F_B} = \vec{F_c}$

$q\vec{v}\vec{B} = m\vec{a_c}$ (*)

Tomando la expresión: $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \Big/ \frac{d}{dt}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) \rightarrow \vec{a_c} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Como estamos en un movimiento circular uniforme (M.C.U) $\Rightarrow \vec{w} = cte$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{w}}{d\vec{t}} = \vec{0}$$

$$\vec{a_c} = \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a_c} = \vec{w} \times \vec{v}}$$

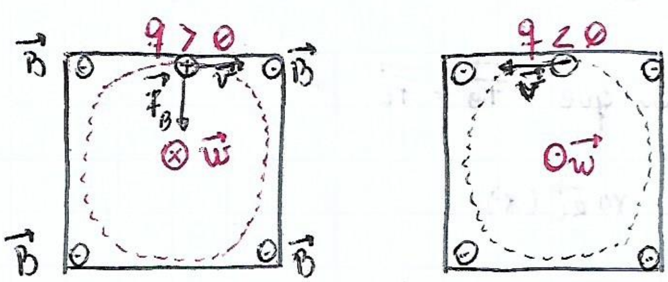
Volviendo a $(*)$: $q\vec{v} \times \vec{B} = m(\vec{w} \times \vec{v})$

$$\vec{v} \times q\vec{B} = \vec{v} \times (-m\vec{w})$$

$$q\vec{B} = -m\vec{w} \Rightarrow \boxed{\vec{w} = \left(\frac{-q}{m}\right)\vec{B}} \quad q > 0$$

$$\boxed{\vec{w} = \left(\frac{q}{m}\right)\vec{B}} \quad q < 0$$

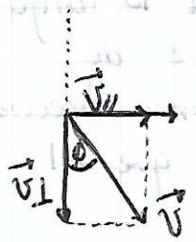
- $q > 0 \Rightarrow \vec{w}$ y $\vec{B}$ tienen sentidos opuestos.
- $q < 0 \Rightarrow \vec{w}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo sentido.



Fuerza sobre magnetica
- carga
  - $\vec{v} \perp \vec{B}$
  - $\vec{v} \not\perp \vec{B}$
- conductor
  - para conductores rectos
  - para conductores curvilineos.

VI. Movimiento de carga en un $\vec{B} = cte$ y $\vec{v} \not\perp \vec{B}$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$



Donde: $\vec{v}_{\parallel}$: componente $\parallel$ al $\vec{B}$ de la velocidad
$\vec{v}_{\perp}$: componente $\perp$ al $\vec{B}$ de la velocidad

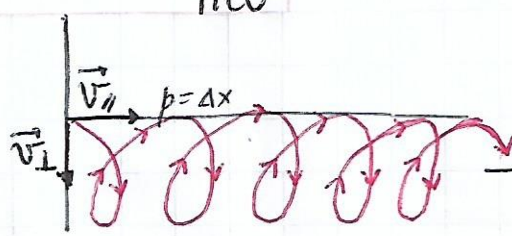
Aplicando: $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{F}_B = q(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_B = \underbrace{\cancel{q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}}}_{\vec{F}_{\parallel}}^{0} + \underbrace{q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}}_{\vec{F}_{\perp}}$$

$\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = \vec{0}$
$\vec{F}_{\parallel} = \vec{0}$
$\vec{a} = \vec{0}$
$\vec{v}_{\parallel} = cte$
$\Rightarrow$ MRU.

$$\underbrace{\vec{F}_B = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}}_{\text{encargada de MCU}}$$



Se define el paso como: $p = \Delta x$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \boxed{p = v_{\parallel} \cdot T}$$

Ejemplo:

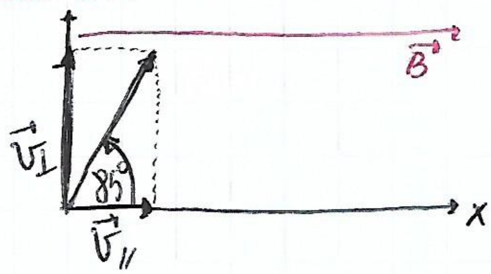
Un campo magnetico de 0,15 [T] esta dirigido a lo largo del eje x positivo. Un positrón que se mueve con rapidez de $5 \cdot 10^6$ [m/s] entra al campo magnético a lo largo de una dirección que forma un ángulo de 85° con el eje x. Se espera que el movimiento de la particula sea una helice.

Calcule:

(a) el paso p

(b) el radio de la trayectoria.

Solución:



$\vec{v}_{\parallel} = v \cos(85^\circ)$

$\vec{v}_{\parallel} = (5 \cdot 10^6 [\frac{m}{s}])(0,09)$

$$\boxed{\vec{v}_{\parallel} = 436 \cdot 10^3 \ [\frac{m}{s}]}$$

Periodo T:

$F_B = F_c$

$q v B = m \frac{v^2}{R} \ ; \quad v = \omega R \ ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2(3,14)(9,11 \cdot 10^{-31} [kg])}{(1,6 \cdot 10^{-19} [C])(0,15 [\frac{kg}{Cs}])} \Rightarrow \boxed{T = 2,38 \cdot 10^{-10} [s]}$$

$p = v_{\parallel} \cdot T$

$p = (435 \cdot 10^{3} [\frac{m}{s}])(2{,}38 \cdot 10^{-10} [s])$

$p = 103{,}53 \cdot 10^{-6} [m]$

$\boxed{p = 0{,}10353 \, [mm]}$

B Radio:

de $qB = \frac{m \cdot v}{R}$

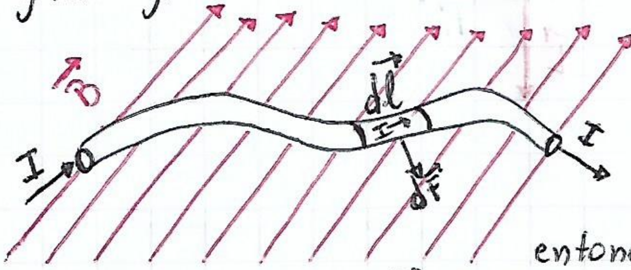
$R = \frac{mv}{qB} = \frac{(9{,}11 \cdot 10^{-31} [Kg])(5 \cdot 10^{6} [\frac{m}{s}] \cdot sen(85^{\circ}))}{(1{,}6 \cdot 10^{-19} [C])(0{,}15 [\frac{Kg}{Cs}])}$

$R = 4{,}25 \cdot 10^{-6} [m]$

- Fuerza magnética sobre un conductor con corriente

A De forma arbitraria

Consideremos un segmento infinitesimal de alambre de cualquier forma, de sección transversal, por el cual circula corriente, según la figura sgte:



$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$ → general

$\boxed{\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}}$ → forma recta

Según la expresión $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$, entonces la fuerza que experimenta infinitesimalmente el $d\vec{l}$ viene dada por:

$$\boxed{d\vec{F} = I \, d\vec{l} \times \vec{B}}$$

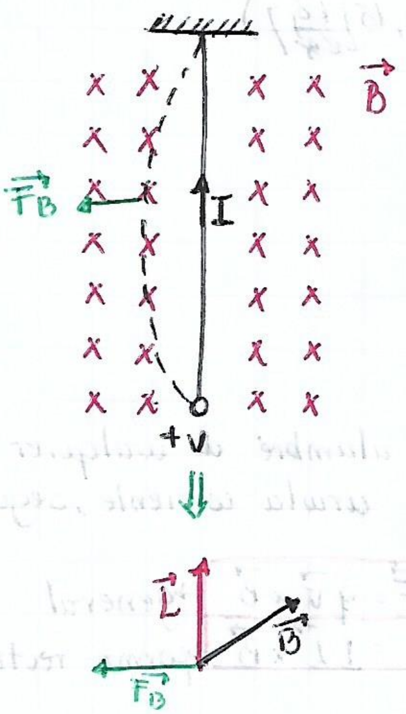
Si se consideran todos los elementos $d\vec{l}$ del alambre, para calcular la fuerza total sobre él, entonces debemos integrar.

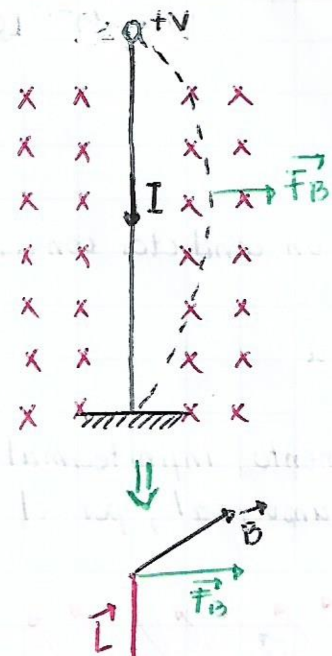
$$\boxed{\vec{F} = I\int_a^b d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Donde:

I = corriente [A] = [C/s]

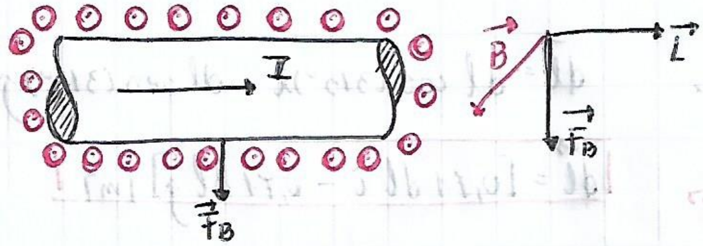
$d\vec{l}$ = elemento infinitesimal de longitud que tiene la misma dirección y sentido que la corriente, pero magnitud dl.





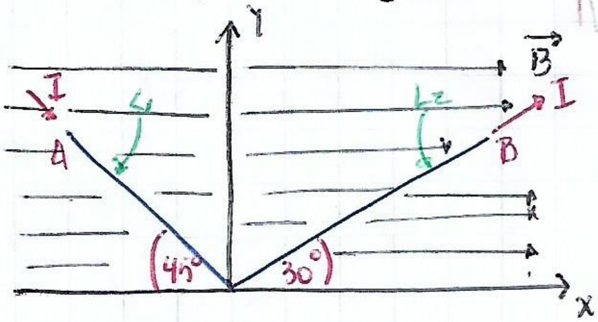
B De forma rectilinea consideremos un segmento de alambre rectilineo, de longitud "L" por el que circula una corriente "I" e inmerso en un $\vec{B}$ = cte, entonces la fuerza que experimenta viene dado por:

$$\boxed{\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}}$$



C Ejemplos:

1. Un segmento de alambre como se muestra en la figura, está inmerso en un $\vec{B} = 1,9\,\hat{\imath}$ [T] por el alambre circula una corriente de $I = 0,2$ [A]. La sección corta del alambre mide 0,8[m], y la sección larga mide 1,6 [m].
Calcular la fuerza magnetica sobre todo el alambre.

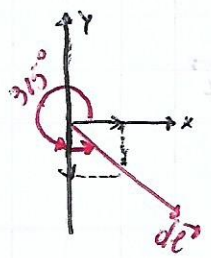


Solución

$$\vec{F}_{AOB} = \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{OB}$$

i. Cálculo de la $\vec{F}_{AO}$:

i.1 Esquema:



$$\vec{dl} = dl\cos(315°)\hat{\imath} + dl\,\mathrm{sen}(315°)\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{dl} = [0{,}71\,dl\,\hat{\imath} - 0{,}71\,dl\,\hat{\jmath}]\ [m]}$$

$$\vec{F}_{AO} = I\int_0^{L_1} \vec{dl} \times \vec{B}$$

i.2 Cálculo del $\vec{dl} \times \vec{B}$

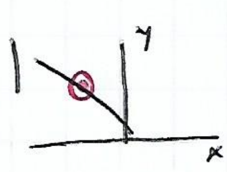
$$\vec{dl} \times \vec{B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0{,}71\,dl & -0{,}71\,dl & 0 \\ 1{,}9 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$\boxed{\vec{dl} \times \vec{B} = 1{,}35\,dl\ \hat{k}\ [mT]}$$

$$\vec{F}_{AO} = (0{,}2)\int_0^{L_1} (1{,}35\,\vec{dl})\,\hat{k}$$

$$\vec{F}_{AO} = 0{,}27\int_0^{L_1} \vec{dl}\ \hat{k}$$

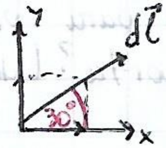
$$\vec{F}_{AO} = 0{,}27 \cdot L_1 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{AO} = 0{,}22\,\hat{k}\ [N]}$$



ii. Cálculo de la $\vec{F}_{OB}$:

$$\vec{F}_{OB} = I \int_0^{L_2} d\vec{l} \times \vec{B}$$

ii1. Esquema



$$\vec{dl} = dl\cos(30°)\hat{i} + dl\,sen(30°)\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{dl} = (0{,}87)\,dl\,\hat{i} + (0{,}5)\,dl\,\hat{j}}$$

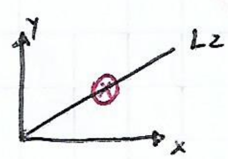
ii2. $d\vec{l} \times \vec{B}$

$$d\vec{l} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0{,}87\,dl & 0{,}5\,dl & 0 \\ 1{,}9 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{d\vec{l} \times \vec{B} = -0{,}95\,dl\,\hat{k}}$$

$$\vec{F}_{OB} = -0{,}2 \int_0^{L_2} 0{,}95\,dl\,\hat{k}$$

$$\vec{F}_{OB} = -0{,}19 \cdot 1{,}6 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{OB} = 0{,}3\,[-\hat{k}]\ [N]}$$



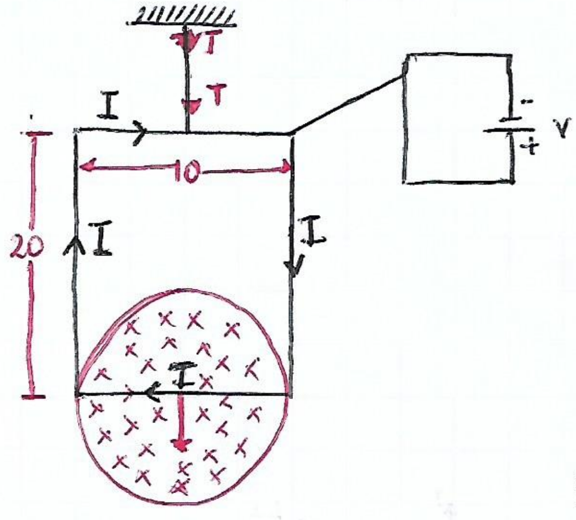
$$\vec{F}_{AOB} = \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{OB}$$

$$\vec{F}_{AOB} = (0{,}22)\hat{k} + (-0{,}3)\hat{k}$$

$$\vec{F}_{AOB} = -0{,}08\,\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{F}_{AOB} = 0{,}08\,-\hat{k}\ [N]}$$

2. Una espira rectangular cuyas dimensiones son 10[cm] por 20[cm] esta suspendida por una cuerda, y la parte horizontal inferior de la espira está inmersa en un campo magnetico confinado a una región circular. Si una corriente de 3[A] se mantiene en la espira en la dirección mostrada en la figura ¿Cuál es la dirección y la magnitud del campo magnético requerido para producir una tensión de $4 \cdot 10^{-2}$[N] en la cuerda que lo soporta? (desprecie la masa de la espira).



Solución

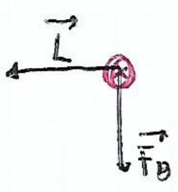
$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}$$

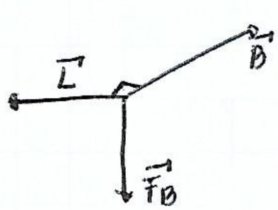
$$|\vec{F}_B| = ILB$$

$$B = \frac{|\vec{F}_B|}{IL}$$

$$B = \frac{(4 \cdot 10^{-2}\,[kg\ m/s^2])}{(3\,[\frac{C}{s}])\,(0{,}1\ m)}$$

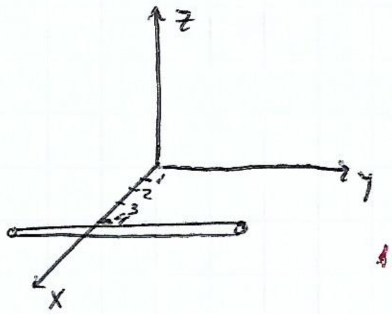
$$B = 0{,}13\ \frac{kg}{C \cdot s} \Rightarrow \boxed{B = 0{,}13\ [T]}$$





$$\boxed{\vec{B} = 0{,}13\,(-\hat{k})\,[T]}$$

3. Un conductor de longitud $L = 2{,}5\,m$ localizado en $z = 0\,[m]$, $x = 4\,[m]$ lleva una corriente de $12\,[A]$ en direción $-\hat{j}$ encuentre el campo magnetico B uniforme en la región si la fuerza sobre el conductor es $1{,}2 \times 10^{-2}\,[N]$ en la direción $\frac{-\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$.



R= $\vec{B} = 2{,}8 \cdot 10^{-4} (\hat{i} + \hat{k})\,[T]$

Solución:

1. Angulo de la fuerza

$$\vec{F} = \vec{F}\hat{u} = [1{,}2 \times 10^{-2}] \left(\frac{-\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{F} = 8{,}5 \times 10^{-3} (-\hat{i} + \hat{k})\,[N]$$

$$\boxed{\vec{F} = [-(8{,}5 \times 10^{-3})\hat{i} + 0\hat{j} + (8{,}5 \times 10^{-3})\hat{k}]\,[N]}$$

2. Calculo del $\vec{B}$

$$\vec{F_B} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

$$(-8{,}5 \times 10^{-3})\hat{i} + (8{,}5 \times 10^{-3})\hat{k} = 12 \cdot 2{,}5 (-\hat{j}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$(-8{,}5 \times 10^{-3})\hat{i} + (8{,}5 \times 10^{-3})\hat{k} = -30\hat{j} (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= -30B_x(\hat{j} \times \hat{i}) - 30B_y(\hat{j} \times \hat{j}) - 30B_z(\hat{j} \times \hat{k})$$

$$= 30B_x(-\hat{k}) - 30B_z(\hat{i})$$

$$(-8{,}5 \times 10^{-3})\hat{i} + (8{,}5 \times 10^{-3})\hat{k} = 30B_x(-\hat{k}) - 30B_z(\hat{i})$$

Nota:

Dos vectores son iguales, si y solo si, si sus componentes son iguales.

1. $-30\,B_z = -8{,}5 \times 10^{-3}$

2. $30\,B_x = 8{,}5 \times 10^{-3}$

de 1. $B_z = \dfrac{-8{,}5 \times 10^{-3}}{(-30)}$

$$\boxed{B_z = 2{,}8 \times 10^{-4}\,[T]}$$

de 2. $B_x = \dfrac{8{,}5 \times 10^{-3}}{30}$

$$\boxed{B_x = 2{,}8 \times 10^{-4}\,[T]}$$

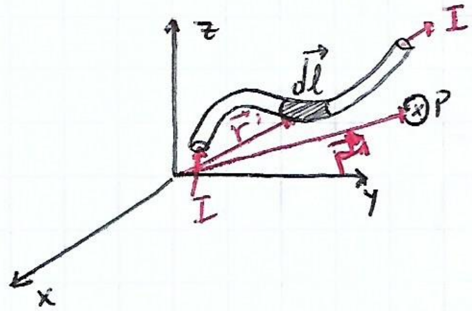
$\therefore$ $\boxed{\vec{B} = (2{,}8 \times 10^{-4})(\hat{\imath} + \hat{k})\,[T]}$

- Ley de Biot-Savat

I. Objetivo:

Calcular los campos magneticos que produce las corrientes estacionarias ($I = cte$) que circulan por los conductores:

II. Ley propiamente tal:



$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\vec{dl}\times(\vec{r}\times\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

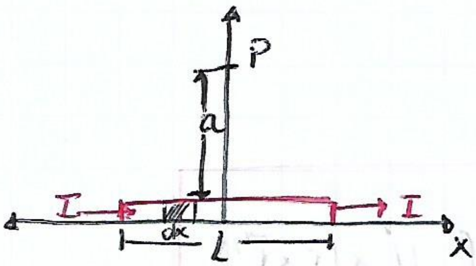
- ¡Donde:
    - μ_0: Permeabilidad magnetica del vacio

    $$\boxed{\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,[wb/A\cdot m]}$$

    - I: Corriente [A]
    - $\vec{dl}$: Elemento infinitesimal de longitud cuya dirección y sentido es de I.
    - $\vec{r}, \vec{r}'$: Vectores posición elemento fuente y objeto.

III. Ejemplos.

1. Calcular el campo magnetico en el punto "P" debido a un alambre rectilineo de longitud "L", por el cual circula una corriente "I" según la figura:



Solución:

i. Vectores posición.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} = 0\hat{i} + a\hat{j} \\ \vec{r}\,' = x\hat{i}\end{array}\right\} \vec{r} - \vec{r}\,' = -x\hat{i} + a\hat{j}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = (x^2 + a^2)^{3/2}$$

ii. Obtención del $\vec{dl}$

$$\vec{dl} = dl\,\hat{i} \Rightarrow \vec{dl} = dx\,\hat{i}$$

$$-L/2 \le x \le L/2$$

iii Calculo de $\vec{B}$

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx\,\hat{\imath} \times (-x\hat{\imath} + a\hat{\jmath})}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$* \ d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = dx\,\hat{\imath} \times (-x\hat{\imath} + a\hat{\jmath})$$
$$= -x\,dx\,\cancel{(\hat{\imath} \times \hat{\imath})}^{0} + a\,dx\,(\hat{\imath} \times \hat{\jmath})$$
$$= a\,dx\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{a\,dx\,\hat{k}}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}\right]_{-L/2}^{L/2} \hat{k}$$

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[\frac{(L/2)}{a^2\sqrt{L^2/4+a^2}} - \frac{-(L/2)}{a^2\sqrt{\frac{L^2+4a^2}{4}}}\right] \hat{k}$$

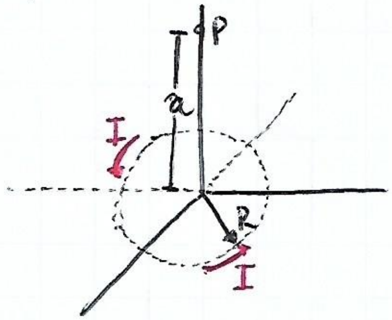
$$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\left[\frac{L}{a^2\sqrt{L^2+4a^2}} + \frac{L}{a^2\sqrt{L^2+4a^2}}\right]\hat{k}$$

$$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I \cancel{a}\, 2L}{\cancel{4}\pi\, a^{\cancel{2}}\sqrt{L^2+4a^2}}\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi a\sqrt{L^2+4a^2}}\hat{k}\ [T]}$$

$$L \to \infty \Rightarrow \vec{B_p} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi a\sqrt{L^2+4a^2}} \quad \frac{:L}{:\sqrt{L^2}}$$

$$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{1+\lim\limits_{L\to\infty}\cancel{\frac{4a^2}{L^2}}^{\,0}}} \Rightarrow \boxed{\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{k}\ [T]}$$

2. Calcula el $\vec{B_p}$ debido a una espira circular de radio "R" por el que circula una corriente "I", segun la figura:



Solución

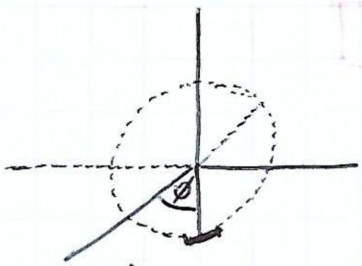
i. Vectores posición

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + a\hat{k} \\ \vec{r}' = R\cos\phi\,\hat{i} + R\operatorname{sen}\phi\,\hat{j}\end{array}\right\} \vec{r}-\vec{r}' = -R\cos\phi\,\hat{i} - R\operatorname{sen}\phi\,\hat{j} + a\hat{k}.$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2+a^2}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = (R^2+a^2)^{3/2}$$

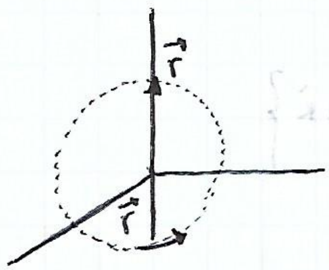
ii. dl Como magnitud

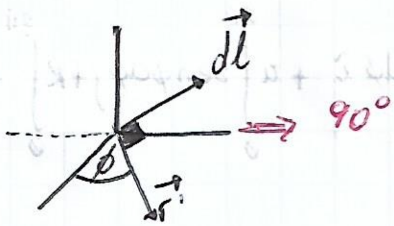


$$dl = R\,d\phi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

iii. $\vec{dl}$ Como vector





$$\vec{dl} = R\,d\phi\, \cos(\phi + \pi/2) + R\,d\phi\, \operatorname{Sen}(\phi + \pi/2)$$

$$\vec{dl} = R\,d\phi\,[\cos[\phi]\cancelto{0}{\cos[\pi/2]} - \operatorname{sen}(\phi)\cancelto{1}{\operatorname{sen}[\pi/2]} + \operatorname{sen}[\phi]\cancelto{0}{\cos(\pi/2)} + \cos[\phi]\cancelto{1}{\operatorname{sen}[\pi/2]}\,\hat{j}]$$

$$\boxed{\vec{dl} = -R\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, \hat{\imath} + R\cos\phi\, d\phi\, \hat{\jmath}}$$

iv $\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R\cos\phi\,\hat{\imath} - R\operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath} + a\hat{k}$$

$$\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -R\operatorname{sen}\phi\, d\phi & R\cos\phi\, d\phi & \phi \\ -R\cos\phi\,\hat{\imath} & -R\operatorname{sen}\phi & a \end{vmatrix}$$

$$\vec{dl} \times (\vec{r}-\vec{r}') = aR\cos\phi \, d\phi \, \hat{\imath} - aR\,\text{sen}\,\phi \, d\phi \, \hat{\jmath} + (R^2\text{sen}^2\phi \, d\phi + R^2\cos^2\phi \, d\phi)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{dl} \times (\vec{r}-\vec{r}') = aR\cos\phi \, d\phi \, \hat{\imath} + aR\,\text{sen}\,\phi \, d\phi \, \hat{\jmath} + R^2 d\phi \, \hat{k}}$$

- Volviendo a $\vec{B_p}$

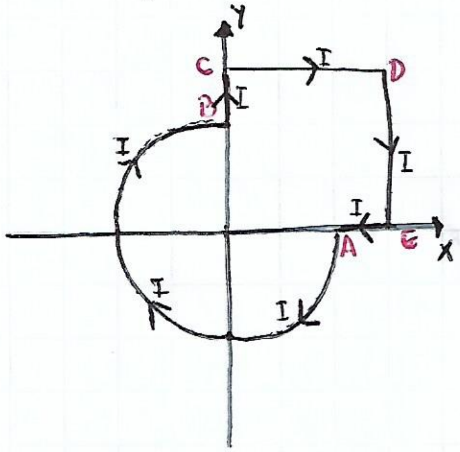
$$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{aR\cos\phi \, d\phi \, \hat{\imath} + aR\,\text{sen}\,\phi \, d\phi \, \hat{\jmath} + R^2 d\phi \, \hat{k}}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2+a^2)^{3/2}} \left\{ a\int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi \, \hat{\imath} + a\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\phi \, d\phi \, \hat{\jmath} + R\int_0^{2\pi} d\phi \, \hat{k} \right\}$$

$$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2+a^2)^{3/2}} \left\{ a\,[\text{sen}\,\phi]_0^{2\pi} \hat{\imath} + a\,[-\cos\phi]_0^{2\pi} \hat{\jmath} + R\,[\phi]_0^{2\pi} \hat{k} \right\}$$

$$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I R (2\pi R)}{4\pi (R^2+a^2)^{3/2}} \hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{B_p} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+a^2)^{3/2}} \hat{k} \; [T]}$$

3. Dada la sigte configuración tipo espira, calcular el campo magnético en el origen, debido a una corriente "I" que cirula por la configuración.



Solución: $\vec{B}_o = \vec{B}_{o\,\widehat{AB}} + \vec{B}_{o\,\overline{BC}} + \vec{B}_{o\,\overline{CD}} + \vec{B}_{o\,\overline{DE}} + \vec{B}_{o\,\overline{EA}}$

calculo del $\vec{B}_{o\widehat{AB}}$:

$$\vec{B}_{o\,\widehat{AB}} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_l \frac{\vec{dl} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

i vectores posición.

$\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$

$\vec{r}\,' = a\cos\phi\,\hat{\imath} + a\,\text{sen}\phi\,\hat{\jmath}$

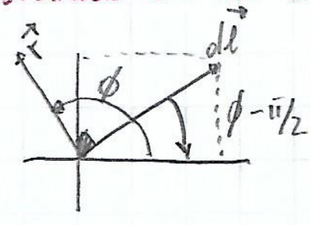
$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = a^3$

ii obtención del $\vec{dl}$ como magnitud

$dl = a\,d\phi$

$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 2\pi$

iii obtención del $\vec{dl}$ como vector.



$\vec{dl} = a\,d\phi\cos(\phi - \frac{\pi}{2})\hat{\imath} + a\,d\phi\,\text{sen}(\phi - \frac{\pi}{2})$

$\cos(\phi - \frac{\pi}{2}) = \cos(\phi)\cancel{\cos(\frac{\pi}{2})}^{0} + \text{sen}(\phi)\cancel{\text{sen}(\frac{\pi}{2})}^{1}$

$\boxed{\cos(\phi - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(\phi)}$

$\text{sen}(\phi - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(\phi)\cancel{\cos(\frac{\pi}{2})}^{0} - \cos(\phi)\cancel{\text{sen}(\frac{\pi}{2})}^{1}$

$\boxed{\text{sen}(\phi - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\phi)}$

$\therefore \; \vec{dl} = a\,sen\,\phi\, d\phi\, \hat{\imath} - a\cos\phi\, d\phi\, \hat{\jmath} \qquad \vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = -a^2 d\phi\, \hat{k}$

iv. volviendo a $\vec{B_0}\,\hat{AB}$

$$\vec{B_0}\,\hat{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{-\cancel{a^2}\, d\phi\, \hat{k}}{a^{\cancel{3}}}$$

$$\vec{B_0}\,\hat{AB} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\phi\, \hat{k} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a}\left[2\pi - \frac{\pi}{2}\right]\hat{k}$$

$$\vec{B_0}\,\hat{AB} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a}\,\frac{3}{2}\pi = \frac{-3\mu_0 I}{8\pi a}$$

$$\boxed{\vec{B_0}\,\hat{AB} = \frac{3\mu_0 I}{8\pi a}(-\hat{k})\,[T]}$$

calculo del $\vec{B_0}\,_{\overline{BC}}$

$$\vec{B_0}\,_{\overline{BC}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

i. vectores posición

$\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$

$\vec{r}\,' = y\,\hat{\jmath}$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = y^3$

ii obtención del $\vec{dl}$

$$\vec{dl} = dy\,(\hat{j})$$

$$b-a \leq y \leq b$$

iii cálculo del $\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')$

$$\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = dy\hat{j} \times -y\hat{j}$$

$$= -y\,dy\,(\hat{j} \times \hat{j})$$

$$= \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_{0\,\overline{BC}} = \vec{0}\,[T] \Rightarrow \vec{B}_{0\,\overline{AE}} = \vec{0}\,[T]$$

cálculo del $\vec{B}_{0\,\overline{CD}}$

$$\vec{B}_{0\,\overline{CD}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

i vectores posición.

$$\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\vec{r}\,' = x\hat{i} + b\hat{j}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = (x^2 + b^2)^{3/2}$$

ii obtención del $\vec{dl}$

$$dl = dx\,(\hat{i})$$

$$0 \leq x \leq b$$

iii $\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')$

$$dl \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = dx\,\hat{i} \times (x\hat{i} + b\hat{j})$$

$$\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = -b\,dx\,\hat{k}$$

iv volviendo a $\vec{B}_{0\,\overline{CD}}$

$$\vec{B}_{0\,\overline{CD}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^b \frac{-b\,dx\,\hat{k}}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \int_0^b \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_{0\,\overline{CD}} = \frac{-\mu_0 I \cancel{b}}{4\pi} \left[\frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}} \right]_0^b \hat{k} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{b}{b\sqrt{b^2+b^2}} \right] \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_{0\,\overline{CD}} = -\frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I}{8\pi b}\,\hat{k}\,[T]}$$

-Ley de Ampère

[A] Propósitos:

1. Determinar el campo magnético que produce una corriente que circula por un alambre.
2. Establecer una relación matemática entre el campo magnético producido por una corriente y la corriente en sí.

[B] Enunciado:

"La integral de línea de una $\vec{B}d\vec{l}$ de una trayectoria cerrada es igual al producto de la permeabilidad magnética del medio vacío y la corriente encerrada por dicha trayectoria."

[C] Expresión matemática:

La Ley de Ampère viene dada por la sigte. expresión:

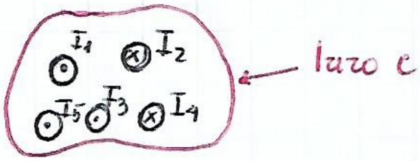
$$\boxed{\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}}$$

Donde:

- $\vec{B}$ = campo magnético $[T] = [Wb/m^2] = [Kg/C \cdot s]$
- $d\vec{l}$ = elemento infinitesimal del lazo o curva cerrada (c).
- I_{enc} = corriente total encerrada por el lazo (C). [A]

D Convención:

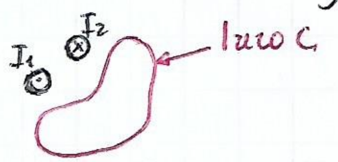
La I_{enc} puede representar a varias corrientes que encierra el lazo "C".



$$I_{enc} = I_1 + (-I_2) + I_3 + (-I_4) + I_5$$

- Las corrientes que "salen" son positivas.
- Las corrientes que "entran" son negativas.

Si el lazo "C" no encierra ninguna corriente, esto es:



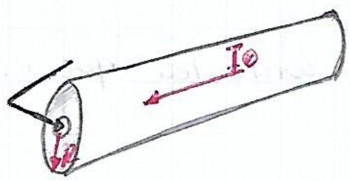
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \vec{0} \\ d\vec{l} = \vec{0}\ (\times) \rightarrow \text{nunca es cero} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$$

E Ejemplos:

1. Se tiene un alambre por donde circula una corriente (I_0) uniforme, de radio "R". Calcular el campo magnético para: (a) $r < R$, (b) $r \geq R$, (c) graficar $B(r)$.

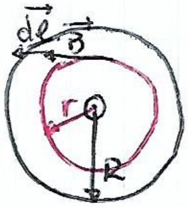
figura



Solución

(a.) $B(r)$; $r < R$

nos damos un lazo cerrado C, con $r < R$.



$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot dl \cancel{\cos(0)}^{1} = B \oint dl = B(2\pi r)$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{enc}$$

I_0 uniforme $\longrightarrow$ $J = \dfrac{I}{A} = cte \Rightarrow \dfrac{I_{enc}}{A_{enc}} = \dfrac{I_0}{A_T}$

$$I_{enc} = \left(\frac{A_{enc}}{A_T}\right) \cdot I_0$$

$$I_{enc} = \left(\frac{\cancel{\pi} r^2}{\cancel{\pi} R^2}\right) I_0 \Rightarrow I_{enc} = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

volviendo...

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{enc}$$

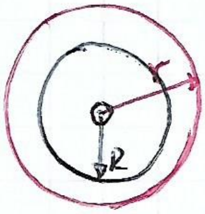
$$B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2}\right) I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 r^{\cancel{2}} I_0}{2\pi \cancel{r} R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 r I_0}{2\pi R^2}$$

$$\boxed{B = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2}\right) r \,[T]}$$

(b) $B(r)$: $r \geq R$

nos damos un lazo cerrado cor (C) $r \geq R$



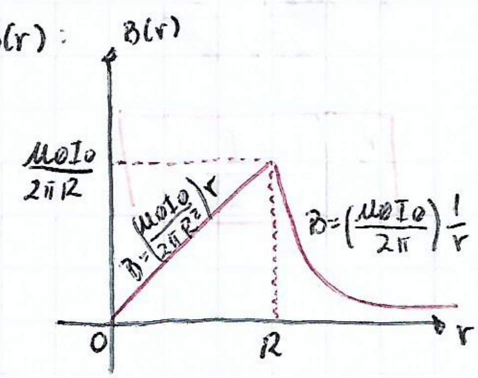
$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\oint_C B \cdot dl \cos(0) = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$\boxed{B = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\right) \frac{1}{r} \,[T]} \Rightarrow r = R \Rightarrow \boxed{B(R) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R}}$$

(c) Gráfico de $B(r)$:



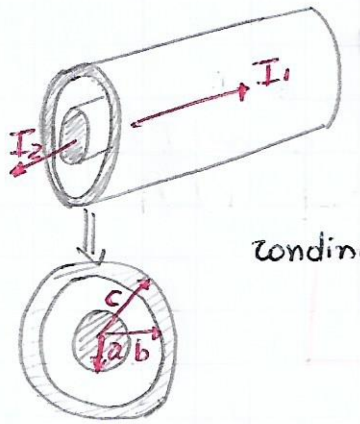
2. Dado un cable coaxial donde el conductor interior tiene radio "a" y el exterior radios "b" y "c", con $c>b$; calcular: el campo magnético para:

(a) $r>a$

(b) $a<r<c$

(c) $b<r<c$

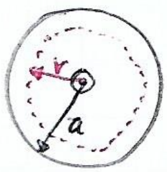
(d) $r>c$



condición: $I_1 = I_2$.

Solución:

(a) Para $r<a$



$$\underbrace{\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl}}_{} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{enc}$$

$$\boxed{\frac{I_{enc}}{A_{enc}} = \frac{I_2}{A_T}}$$

$$I_{enc} = \frac{A_{enc}}{A_T} I_2$$

$$I_{enc} = \frac{\cancel{\pi} r^2}{\cancel{\pi} a^2} I_2$$

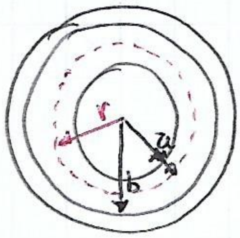
$$I_{enc} = \frac{r^2}{a^2} I_2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}}$$

$$B = \frac{\mu_0 r^{\cancel{2}} I_2}{2\pi \cancel{r} a^2}$$

$$\boxed{B = \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a^2}\right) r}$$

(b) $B(r)$; $a<r<b$

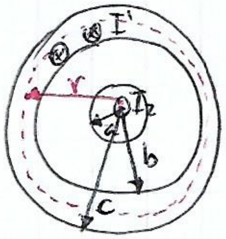


$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$\boxed{B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)\frac{1}{r}\ [T]}$$

(c) $B(r)$; $b<r<c$



$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 (I - I')$$

$$\frac{I'}{\pi(r^2-b^2)} = \frac{I}{\pi(c^2-b^2)}$$

$$I' = \left(\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right) I$$

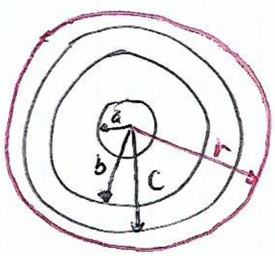
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[I - \left(\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)I\right]$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[\frac{(c^2-b^2)-(r^2-b^2)}{(c^2-b^2)}\right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[\frac{c^2-\cancel{b^2}-r^2+\cancel{b^2}}{c^2-b^2}\right]$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right]\frac{1}{r}}$$

(d) Para $r > c$



$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

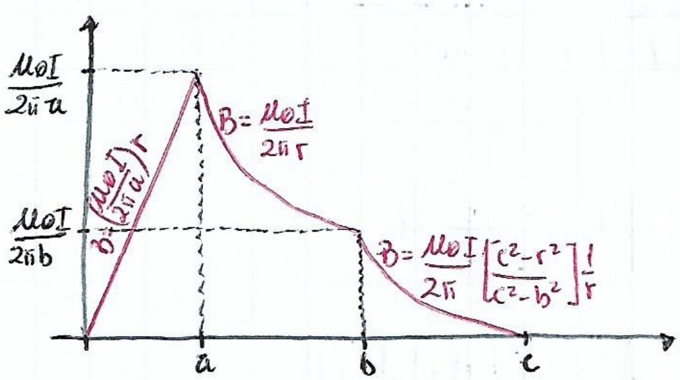
$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cancelto{0}{(I-I)}$$

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

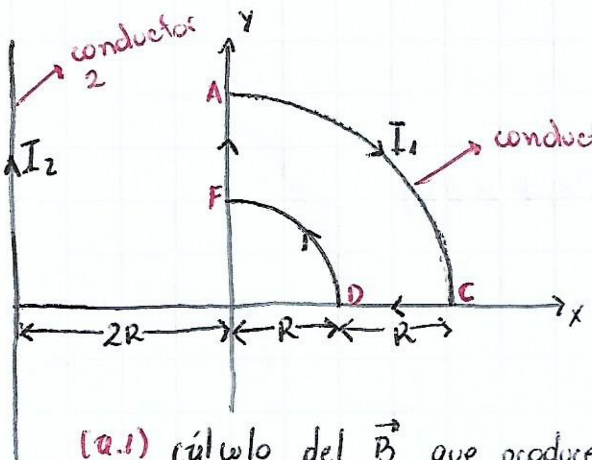
$$B(r) = 0 \; ; \quad r > 0$$

Grafica de $B(r)$



3. La figura muestra una figura (espira) cerrada ACDFA, en el plano XY por la que circula una corriente I_1 (en el conductor 1). Además existe un conductor recto, de gran longitud paralelo al eje "y" a la distancia 2R del origen, por el cual circula una corriente I_2 (en el conductor 2). Para esta situación calcule:

(a) La fuerza en magnitud y sentido, sobre el tramo $\overline{FA}$ del conductor 1, (b) La fuerza en magnitud y sentido sobre el tramo $\overline{CD}$ del conductor 1, debido a la corriente del conductor 2.

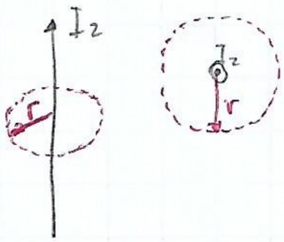


Solución:

(a) cálculo de la $\vec{F}_{\overline{FA}②}$

$$\vec{F}_{FA②} = I_1 \int_l \vec{dl} \times \vec{B}$$

(a.1) cálculo del $\vec{B}$ que produce I_2



$$\oint_c \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}}$$

para $r = 2R$

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi 2R}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R}(-\hat{k})\,[T]}$$

(a.2) volviendo a $\vec{F}_{FA②}$

$$\vec{F}_{FA②} = I_1 \int \vec{dl} \times \vec{B}$$

$$\vec{dl} = dy\ \hat{j}\ ;\ R \leq y \leq 2R$$

$$\vec{dl} \times \vec{B} = dy\ \hat{j} \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R}(-\hat{k})$$

$$\vec{dl} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R}\, dy\,(-\hat{i})$$

$$\vec{F}_{FA②} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R} \int_R^{2R} dy\,(-\hat{i}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R}(2R - R)(-\hat{i})$$

$$\boxed{\vec{F}_{FA②} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}(-\hat{i})\,[N]}$$

(b) cálculo de la $\vec{F}_{\overline{CD}②}$

$$\vec{F}_{\overline{CD}②} = I_1 \int_l \vec{dl} \times \vec{B}$$

(b.1) cálculo del $B(x)$:

como se sabe que el $\vec{B}$ a una cierta distancia r vale:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

$$\boxed{B(x) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi X}(-\hat{k})}$$

(b.2) cálulo del $\vec{dl} \times \vec{B}$

$$\vec{dl} = dx\,(-\hat{\imath})$$

$$\vec{dl} \times \vec{B} = dx(-\hat{\imath}) \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\,(-\hat{k})$$

$$\vec{dl} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I_2\, dx}{2\pi x}\,(-\hat{\jmath})$$

$$\boxed{\vec{dl} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\,\frac{dx}{x}\,(-\hat{\jmath})}$$

(b.3) Volviendo a $\vec{F}_{\bar{C}\bar{D}(2)}$

$$\vec{F}_{\bar{C}\bar{D}(2)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{R}^{2R} \frac{dx}{x}\,(-\hat{\jmath})$$

$$\vec{F}_{\bar{C}\bar{D}(2)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\,\ln(x)\Big|_{R}^{2R}(-\hat{\jmath})$$

$$\vec{F}_{\bar{C}\bar{D}(2)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\,\ln\left(\frac{2\cancel{R}}{\cancel{R}}\right)(-\hat{\jmath})$$

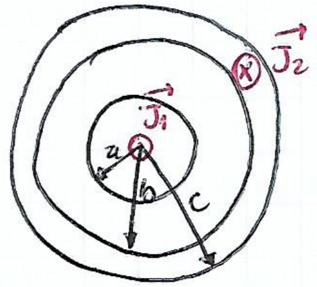
$$\boxed{\vec{F}_{\bar{C}\bar{D}(2)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\,\ln(2)\,(-\hat{\jmath})\ [N]}$$

4. El conductor coaxial muy largo de la figura transporta por el conductor cilíndrico central de radio "a" una corriente siendo su densidad de corriente $\vec{J_1} = kr(\hat{z})$; donde "k" es una constante y por el conductor cilíndrico hueco que lo rodea de radio interior "b" y exterior "c", lleva también la misma corriente pero en sentido contrario siendo su densidad $J_2 = J_0(-\hat{z})$; $J_0 = cte$. Calcular:

(a) El campo magnético para $r < a$

(b) El campo magnético para $b < r < c$

(c) El cociente entre $\frac{k}{J_0}$.



$$I = \iint_S \vec{J} \cdot ds \Rightarrow ds = r\,dr\,d\phi$$

respuestas:

(a) $I_{enc} = \frac{2}{3}\pi k r^3\,[A]$

$$I_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} (kr')(r'dr'd\phi)$$

$$B = \frac{\mu_0 k r^2}{3}\,[T]$$

(b) $I_1 = \frac{2}{3} k\pi a^3$;

$I_2 = J_0\pi(c^2 - b^2)$

$$I_{enc} = \frac{2\pi k a^3 - 3J_0\pi(r^2 - b^2)}{3}$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 k a^3}{3r} - \frac{J_0(r^2 - b^2)}{2r}\right)[J] \Rightarrow \frac{k}{J_0} = \frac{3}{2}\frac{(c^2 - b^2)}{a^3}$$