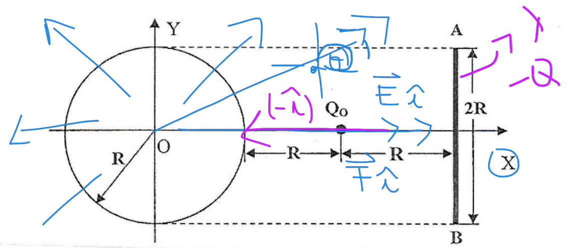
La figura muestra dos distribuciones de cargas. La esfera no conductora de radio R posee una densidad de carga volumétrica $\rho = A/r$, donde A es una constante y "r" la distancia de un punto de la esfera hasta el centro; y la barra AB de largo $2R$ posee una carga Q negativa, con distribución λ uniforme. Calcule: (a) la fuerza sobre la carga Q_o, debida a ambas distribuciones. (b) que valor debe tener A para que la fuerza resultante sobre Qo sea cero



a) $\vec F_{Q_0} = \vec F_{Q_0\lambda} + \vec F_{Q_0\rho}$

① $\vec F_{Q_0\lambda}$ ②

① $\vec F_{Q_0\lambda}$:

$$\vec F_{Q_0\lambda} = KQ_0\int \frac{dq\,(\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3}$$

$\vec r = 2R\hat\imath$, $\vec r\,' = 3R\hat\imath + y\hat\jmath$ $\Big\}$ $\vec r - \vec r\,' = -R\hat\imath - y\hat\jmath$, $|\vec r - \vec r\,'|^3 = (R^2+y^2)^{3/2}$

$dq = \lambda dl$, $dl = dy$ $\Big\}$ $dq = \lambda dy$, $\lambda = \frac{-Q}{2R}$

$\lambda = \frac{\text{carga}}{\text{long}}$ $\quad dq = -\frac{Q}{2R}dy$

$-R \le y \le R$

$$\vec F_{Q_0\lambda} = KQ_0\int_{-R}^{R}\frac{\left(\frac{-Q}{2R}\right)dy\,(-R\hat\imath - y\hat\jmath)}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{KQ_0Q}{2R}\int_{-R}^{R}\frac{(-R\hat\imath - y\hat\jmath)\,dy}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

(A) (B)

(A) x tabla

$$-R\int_{-R}^{R}\frac{dy}{(R^2+y^2)^{3/2}}\hat\imath = -R\left[\frac{y}{R^2\sqrt{R^2+y^2}}\right]_{-R}^{R} = -\cancel{R}\left[\frac{2\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}\sqrt{2R^2}}\right]\hat\imath = -\frac{2}{\sqrt{2}R}\hat\imath$$

(B) x tabla

$$-\int_{-R}^{R}\frac{y\,dy}{(R^2+y^2)^{3/2}}\hat\jmath = -\left[-\frac{1}{\sqrt{y^2+R^2}}\right]_{-R}^{R}\hat\jmath = 0\hat\jmath$$

$$\boxed{\vec F_{Q_0\lambda} = \frac{KQ_0Q}{\sqrt{2}R^2}\hat\imath\ (N)}$$

② $\vec F_{Q_0\rho}$:

$E = \frac{F}{q} \to F = Eq$

E: Sup. Gauss con $r = 2R$

$$\oint \vec E\cdot d\vec S = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Q_{enc}: $\rho \neq$ cte

$$Q_{enc} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{A}{\cancel{r}}\cdot r^{\cancel{2}}\,\text{sen}\theta\, d\phi\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{2\pi A\cdot\cancel{2}R^2}{\cancel{2}}$$

$Q_{enc} = 2\pi AR^2$ (c)

$$\oint \vec E\, d\vec S = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\cancel{\pi}\cdot 4R^{\cancel{2}}) = \frac{2\cancel{\pi}A\cancel{R^2}}{\varepsilon_0}$$

$E = \frac{A}{8\varepsilon_0}$ (N/C)

$$\boxed{\vec F_{Q_0\rho} = \frac{A}{8\varepsilon_0}Q_0\hat\imath\ (N)}$$

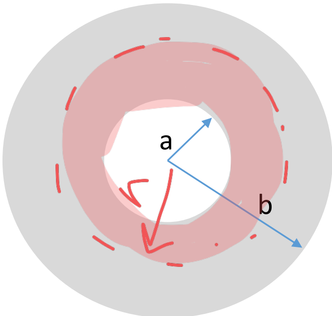
a) $$\boxed{\vec F_{Q_0} = \left(\frac{KQ_0Q}{\sqrt{2}R^2}\hat\imath + \frac{A}{8\varepsilon_0}Q_0\hat\imath\right)(N)}$$

b) $0 = \frac{KQ_0Q}{\sqrt{2}R^2} + \frac{A}{8\varepsilon_0}Q_0$

$A = -\frac{8\varepsilon_0 KQ}{\sqrt{2}R^2}$ $\quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$A = -\frac{2Q}{\pi\sqrt{2}R^2}$

Una esfera maciza no conductora de radio b tiene una cavidad esférica de radio a. Esta esfera tiene una distribución uniforme de carga, con una carga total Q. Determinar la diferencia de potencial entre a y b,



$$\Delta V_{ba} = V_a - V_b = -\int_b^a E_{(a<r<b)} \cdot dr$$

E_{int} : sup. Gauss con $a<r<b$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$\underline{Q_{enc}:}$ $\rho = cte$

$$\rho_T = \rho_{enc}$$

$$\frac{Q_T}{V_T} = \frac{Q_{enc}}{V_{enc}} \rightarrow Q_{enc} = \frac{Q_T \cdot V_{enc}}{V_T}$$

$$Q_{enc} = \frac{Q \cdot \cancel{\tfrac{4}{3}\pi}(r^3 - a^3)}{\cancel{\tfrac{4}{3}\pi}(b^3 - a^3)}$$

$$Q_{enc} = \frac{Q(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q(r^3 - a^3)}{\varepsilon_0 (b^3 - a^3)}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \quad (N/C)$$

$(a<r<b)$

$$\Delta V_{ba} = -\int_b^a \frac{Q(r^3 - a^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2 (b^3 - a^3)} dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (b^3 - a^3)} \int_b^a \frac{(r^3 - a^3)}{r^2} dr$$

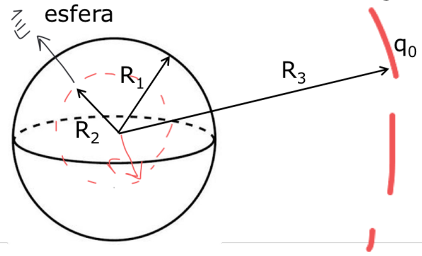
$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (b^3 - a^3)} \left[\int_b^a \left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) dr \right]$$

$$\left[\frac{r^2}{2} + a^3 \frac{1}{r} \right]_b^a$$

$$\Delta V_{ba} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (b^3 - a^3)} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + a^3\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \right] \quad (V)$$

Una carga total Q, cuyo valor se desconoce esta distribuida en forma variable en una región esférica de radio R_1= 15(cm), cuya densidad volumétrica de carga es ρ=Ar, donde A es una constante y r es la coordenada radial (distancia) al centro de la esfera ($r<R_1$). A una distancia R_2= 10(cm) (en el interior de la distribución), el campo eléctrico tiene un valor de $E=5{,}33\times10^5$ (N/m), Determinar:

a) El valor numero y las unidades físicas de la constante A.
b) La carga total Q existente en la región esférica.
c) La fuerza eléctrica sobre una carga q_0=20 (μC) que se ha colocado a una distancia R_3=100(cm) den centro de la esfera



a) Sup Gauss con $r = R_2$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Q_{enc} : $\rho \neq cte$

$$Q_{enc} = \int \rho \, dv$$

$$= \int_0^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Ar\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi A \cancel{2} R_2^4}{4}$$

$$Q_{enc} = A\pi R_2^4$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

En $r = R_2 \rightarrow E_2 = 5{,}33\times10^5 (N/C)$

$$E_2(4\pi R_2^2) = \frac{A\pi R_2^4}{\varepsilon_0}$$

$$A = \frac{E_2 4 \varepsilon_0}{R_2^2}$$

$$A = \frac{5{,}33\times10^5 (N/C)\cdot 4 \cdot 8{,}85\times10^{-12} (C^2/Nm^2)}{(0{,}1)^2 \; m^2}$$

$$A = 1{,}9\times10^{-3} \; (C/m^4)$$

b) Q_T : $\rho \neq cte$

$$Q_T = \int_0^{R_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Ar\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$Q_T = A\pi R_1^4$$

$$Q_T = 1{,}9\times10^{-3}\, \pi \, (0{,}15)^4$$

$$Q_T = 3\times10^{-6} \; (C)$$

$$Q_T = 3 \; (\mu C)$$

c) $F_{q_0 Q}$:

$$F_{q_0 Q} = \frac{K q_0 Q}{R_3^2}$$

$$= \frac{9\times10^{9}\cdot 20\times10^{-6}\cdot 3\times10^{-6}}{1^2}$$

$$= 0{,}54 \; (N)$$