

Estimación de la fricción en fluidos

Brayan Santiago Amorocho Lizcano*
Santiago Andrés Montés Camacho[†]

Universidad Industrial de Santander
Cra 27 Calle 9 Ciudad Universitaria

26/08/2021

*e-mail: brayansantiagoamorocho@gmail.com

[†]e-mail: santiagoamontes@gmail.com

Índice

1	Introducción	4
2	Metodología	6
2.1	El Montaje Experimental	7
2.2	La Simulación Teórica	7
3	Experimento y resultados	9
3.1	La Servilleta Arrugada	9
3.2	La servilleta Extendida	12
4	Conclusiones y Recomendaciones	17

Resumen

Este informe aborda el estudio cinemático y dinámico del movimiento de los cuerpos dentro de la mecánica clásica, donde se propone encontrar la manera más adecuada de entender cómo el rozamiento afecta la caída de un cuerpo, y de igual manera llegar a estimar una posible constante de fricción (κ) que pudiese predecir el comportamiento de dicho cuerpo. Para ello, se consideró el desplazamiento de una servilleta en dos casos diferentes: comprimida (sin fricción) y extendida (con fricción). Dichas servilletas se lanzaron desde una altura de $2m$ y se simuló la caída desde un ordenador. Además, para lograr aseverar con precisión los datos del experimento, este se repitió 10 veces con cada servilleta.

Experimentalmente se demostró, tras analizar cuantitativamente los resultados obtenidos de velocidad, posición y aceleración en función de tiempo durante la caída; que pese a lo pensado en un inicio (y encontrado en la simulación), en ambos escenarios las servilletas presentaban rozamiento. Además, se compararon las mediciones experimentales obtenidas en la caída de la servilleta extendida, estableciendo una varianza y algunos gráficos de dispersión para ajustar un modelo que permitiese predecir los movimientos de caída con fricción de manera óptima.

Finalmente, los resultados obtenidos en el estudio permiten abordar de manera más viable el análisis del rozamiento en el movimiento de un cuerpo, puesto que el valor de κ obtenido brinda una aproximación más real a la naturaleza; además de que evidencia cómo la fricción busca igualar el peso del cuerpo, y por ende adquirir una tendencia de velocidad constante.

Abstract

This paper approaches the kinematic and dynamic study of the movement of bodies within classical mechanics. It is proposed to find the most adequate way to understand how friction affects a body falling, and in the same way, to estimate the value of a friction constant κ that can predict the behavior of the falling body. In order to achieve this, it was considered the displacement of a napkin in two different cases: compressed (without friction) and extended (with friction). These napkins were thrown from a height of $2m$ and the fall was simulated on a computer. In addition, for the purpose of estimating better the precision of the experiment, it was repeated 10 times with each napkin.

Experimentally it was shown that; after quantitatively analyzing the results obtained of speed, position and acceleration as a function of time during the fall; Despite what was thought at the beginning and found in the simulation, in both scenarios the napkins showed friction. Furthermore, the experimental measurements obtained in the fall of the extended napkin were compared, establishing a variance and some scatter plots in order to fit a model that would allow to predict the friction fall movements in an optimal way.

Finally, the results obtained in the study allow a more viable approach to the analysis of friction in the movement of a body, since the value of κ obtained provides a more realistic approach to nature; moreover, it is evidenced how friction seeks to equalize the weight of the body, and therefore acquire a constant speed trend.

1 Introducción

La física es la ciencia que busca establecer leyes que expliquen fenómenos naturales. Sin embargo, es difícil describir dichos fenómenos de forma general cuando estos varían según su naturaleza. No es lo mismo buscar una explicación para la caída de un rayo que para la atracción de dos imanes. Entonces, los físicos dividieron la física en *sub-ramas*, llamadas áreas o campos. Las cuales permiten que el estudio y explicación de fenómenos naturales sea más sencillo, agrupando aquellos fenómenos con características similares. Así, existen áreas como el electromagnetismo, la acústica, la astronomía, etc. De igual manera, para facilitar más el estudio de los fenómenos, los físicos optaron por fragmentar las áreas en ramas a partir del tipo de problemas que cada una abarca. Así, por ejemplo, dentro del área del electromagnetismo está la electrostática y dentro de la mecánica clásica se encuentra la cinemática. Entonces, a partir de acá, cada fenómeno físico pertenecerá a una rama específica, lo que le permitirá ser estudiado de manera más optima.

Este artículo ahonda en la mecánica clásica, el área de la física que estudia el movimiento de los cuerpos. Se trabaja en dos ramas en específico: La cinemática y la dinámica. La primera estudia el comportamiento de los cuerpos en movimiento sin tener en cuenta las circunstancias que lo causan, mientras que la segunda se refiere al estudio del movimiento y su relación con las fuerzas que lo generan. [1] En este informe se busca comprender el comportamiento de un cuerpo en caída libre una vez ha adquirido un movimiento en dos casos diferentes: Cuando la fuerza de fricción es despreciable, es decir, un problema de cinemática; y cuando la fuerza de fricción es considerable, es decir, un problema de dinámica.

En ese orden de ideas, resulta interesante pensar en qué ocurriría con las fuerzas de fricción al alterar la forma de un mismo objeto. Es por eso que en este artículo se analizan dos casos particulares: Cuando se deja caer una servilleta arrugada en forma de pelota, ¿Le afectará la fricción? Y cuando se deja caer extendida, ¿Cómo se puede estimar la fuerza de fricción? ¿Los tiempos de caída serán iguales? El astronauta Davis Scott le dió la razón a Galileo al comprobar que dos cuerpos en el vacío (la luna) tocarían el suelo al mismo tiempo¹[2], ¿Será igual en un medio no vacío como lo es el aire? Si no es así, ¿Por qué?

Ahora bien, antes de realizar el análisis es necesario tener en cuenta que el estudio de cualquier fenómeno de la naturaleza se puede abordar de dos maneras. La primera es la parte ideal o teórica, en la cual se asegura un resultado matemáticamente correcto al ahondar el problema sin tener en cuenta otros factores además del fenómeno a estudiar. Y la segunda es la parte experimental o realista, la cual está sujeto a la interacción de factores externos que pueden alterar las mediciones y por ende, los resultados. Es necesario entender que ambas situaciones son necesarias de estudiar, pues no se puede llegar a comprender el mundo real sin partir de un modelo más sencillo; y no se puede tomar el modelo teórico como una verdad absoluta pues no está teniendo en cuenta factores externos que podrían influir en los resultados.

Entonces, sin más preámbulo, la comparación entre el montaje experimental y el modelo teórico se abarca a fondo en la siguiente sección [2], donde también se aclaran las condiciones iniciales, estimaciones de error, precisión y demás posibles factores que podrían inferir en los resultados, de

¹El video grabado del experimento de la pluma y el martillo durante la misión tripulada a la Luna *Apollo XV* (1971) puede encontrarse en: <https://www.youtube.com/watch?v=ZVfhztmK9zI>

los cuales se habla en la sección [3]. Y para finalizar el artículo, se presentan las conclusiones en la sección [4].

2 Metodología

La idea principal es *estudiar la caída libre de una servilleta arrugada y una servilleta extendida. A partir de la cuestión: ¿Cómo afecta la resistencia del aire a la caída de ambos cuerpos?* Pero antes de pensar en una metodología acertada o de intentar buscar una solución al problema, es conveniente pensar, ¿Qué información se puede obtener a partir de la idea inicial?

Para ello, es pertinente consultar bibliografía relacionada a esta rama de la física, la caída libre. En su libro “*Fundamentals of Physics*”, el físico Jearl Walker menciona algunas ecuaciones que describen el movimiento de un cuerpo con aceleración constante, despreciando la fricción del aire: [3]

$$v_f = v_0 + at \quad y \quad y = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1)$$

donde v_f será la velocidad que alcanza el cuerpo a tocar el suelo, v_0 la velocidad inicial, y la distancia recorrida, a su aceleración (debe ser constante) y t el tiempo transcurrido.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que cuando un cuerpo se encuentra en caída libre, según Walker, presenta las siguientes características:

- Su aceleración será igual a la aceleración de gravedad en la tierra. Para este experimento se aproximó a $g = 9,78 \text{ m/s}^2$.
- Su velocidad inicial será 0 m/s .
- La altura máxima desde donde fue lanzado el objeto se puede obtener si se conoce el tiempo total que tardó en completar el recorrido y viceversa.

A partir de lo anterior, se pueden reescribir las ecuaciones propuestas (1) :

$$a = g \quad \Rightarrow \quad v_f = gt \quad y \quad y = \frac{1}{2} gt^2 \quad (2)$$

Es crucial tener en cuenta que estas fórmulas aplican únicamente cuando se desprecia la resistencia del aire, por lo tanto, las fórmulas que describen el movimiento del cuerpo cuando la fricción es considerable serán analizadas más adelante, en la sección de resultados [3].

Con base en las fórmulas de caída libre (2), se pueden definir las condiciones iniciales del experimento en cuestión. En este caso, que el tiempo es directamente proporcional a la distancia recorrida. Además, la máxima distancia que el objeto llegará a recorrer será igual a la altura desde la que sea lanzado. Entonces, la variable independiente será la altura(y). El valor utilizado será de 2 m , debido a su facilidad de estudio. Puesto que es una altura donde ambas servilletas pueden ser observadas con mejor precisión, sin que caigan muy rápido, ni muy lento. Asimismo, las medidas de la servilleta son de $14,3 \text{ cm} \times 13,4 \text{ cm}$, con un peso de $0,7 \text{ gramos}$.

Ahora que ya se tienen claros los parámetros iniciales y algo de teoría, es pertinente recordar que, como se mencionó en la introducción [1] todo análisis de un problema se compone de dos partes: La experimental y la teórica. Cada una trabaja de manera diferente.

2.1 El Montaje Experimental

En este orden de ideas, para el experimento se dejarán caer dos servilletas por separado. La primera estará arrugada, como una pelota, de tal forma que la resistencia del aire no afecte su recorrido; y la segunda, estará extendida, de manera que se pueda analizar cómo afecta la resistencia del aire su trayectoria. Se grabará el acontecimiento y luego el vídeo se cargará en el programa *tracker*, lo que permitirá analizar cada video imagen por imagen, establecer unas distancias de partida fijas y situar una masa puntual la cual va a seguir al cuerpo a través del espacio que recorra en su caída.

Ahora bien, es oportuno recordar que en este mundo nada es perfecto, todos los experimentos están sujetos a factores externos que pueden alterar los resultados y que los investigadores no pueden controlar. Por lo tanto, para maximizar la precisión y exactitud de este experimento, se llevó a cabo 10 veces consecutivas. Es decir, tanto la servilleta comprimida como la extendida se dejaron caer 10 veces y se grabó lo ocurrido.

En cuanto a las especificaciones técnicas del video, este va a contar con aproximadamente 30 imágenes por segundo. Teóricamente, utilizando las fórmulas de caída libre (2), se estima un tiempo de caída de alrededor de 0,63 y 0,64 segundos cuando no hay fricción, por lo que el estudio de la servilleta comprimida podrá valerse de entre 18 y 20 imágenes continuas.

Entre las limitaciones que podrán interferir en estas mediciones se encuentra la dificultad de seguir exactamente el mismo punto a través del tiempo. Esto refiere principalmente a que la servilleta no es un punto en el espacio, sino un cuerpo compuesto por infinitos puntos, y al ser parcialmente igual en la mayoría de su área, no es posible hacer un seguimiento exacto de la misma zona, que a su vez es influenciada por la distorsión visual que genera su movimiento en la cámara.

Por otra parte, el programa utilizado brindará las variables obtenidas en el estudio, las cuales son: aceleración, velocidad, posición y, evidentemente, el tiempo correspondiente. Asimismo, permitirá visualizarlo en una gráfica bidimensional para una mayor comprensión del comportamiento del cuerpo. Todos estos datos que el programa brinda facilitará la comparación de los datos con el modelo teórico. Pero, ¿Cómo será este modelo ideal?

2.2 La Simulación Teórica

En lo que concierne al modelo teórico, se escribió un código en lenguaje Python, utilizando la versión más reciente hasta la fecha, es decir, la versión 3.9.6. Se optó por utilizar este lenguaje de programación dada su versatilidad. Python es un lenguaje dinámico, intuitivo y sencillo de entender, por ende, las líneas de código son más legibles a comparación de otros lenguajes como Java o C#.

Además, inicialmente se trabajó en una plataforma de Google conocida como “*Google Colab*” o “*Colaboratory*”. Se optó por esta plataforma ya que permite programar en Python sin necesidad de un editor de código, puesto que trabaja desde la nube. Además, como su nombre lo indica, es colaborativo. Esto significa que varios usuarios pueden editar el código a la vez, directamente desde la nube. Sin embargo, cuanto más largo era el código, la plataforma se tornaba más tediosa y más pesada. Por lo que optó por cambiar de plataforma. Esta vez se trabajó con “*Spyder*”, en un entorno de desarrollo integrado (IDE) también en su versión más reciente. La única diferencia relevante a comparación de “*Google Colab*” es que no se puede guardar en la nube, sino de forma local. Sin embargo, esto no fue mayor inconveniente a la hora de realizar la simulación.

Ahora bien, la finalidad del montaje teórico es compararlo con la realidad. Para ello se recreó matemáticamente el montaje experimental. Es decir, a partir de las ecuaciones propuestas por Walker (2), y de los parámetros iniciales, se calculó el tiempo que las servilletas tardarían en tocar el suelo, la trayectoria que deberían seguir, y la velocidad en cada punto de ésta. Luego, para una mejor comprensión de los datos, se optó por graficar. Se hicieron distinta cantidad de gráficas según el caso: Dos para el caso de la servilleta arrugada, en donde se comparan tanto la distancia recorrida como la velocidad contra el tiempo transcurrido; y 5 para el caso de la servilleta extendida, que presentan la distancia recorrida y la velocidad en función del tiempo, además de las gráficas de dispersión o residuos para cada modelo. Finalmente, se transcribieron al código de Python los datos obtenidos en *tracker* y también se graficaron, de forma que se pudiera hacer una comparación entre el mundo ideal y el mundo real.

3 Experimento y resultados

Una vez realizado el experimento, se procedió a comparar los datos con el modelo teórico². Como se mencionó en la metodología [2]; para facilitar el análisis de los resultados, estos se agruparon en dos secciones: Con la servilleta arrugada, y con la servilleta extendida.

3.1 La Servilleta Arrugada

Antes que nada, es preciso consultar qué dice la teoría en este caso. Para ello, se aplicaron las fórmulas (2) de caída libre anteriormente mencionadas en la metodología [2]. Las cuales permiten estimar la velocidad que la servilleta tiene en cada momento de su caída.

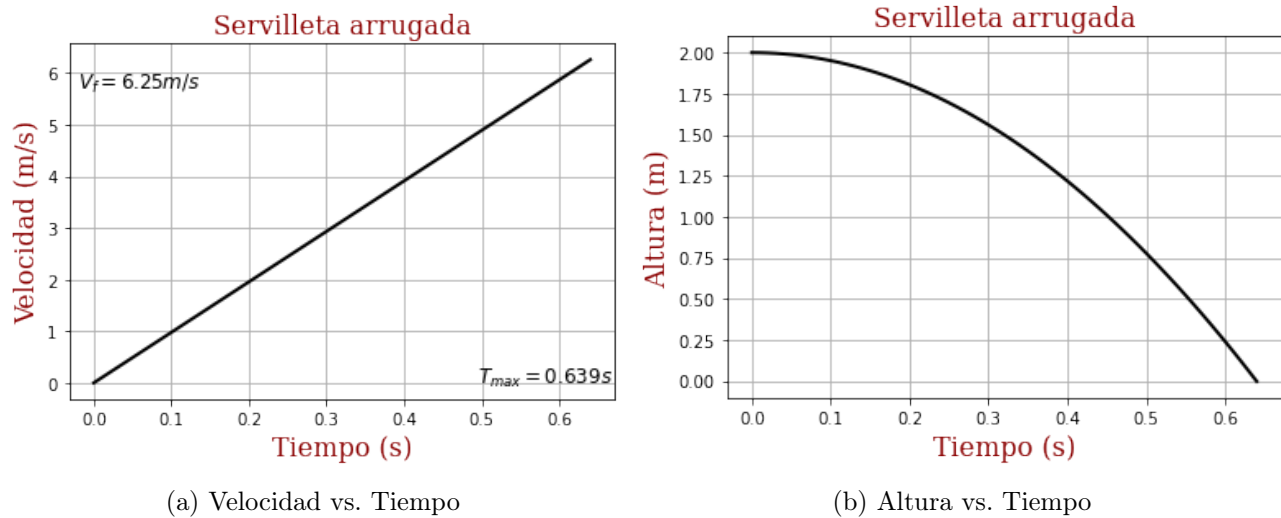


Figura 1: Modelo teórico. Sin resistencia del aire aparente.

La figura 1 describe los resultados obtenidos por el modelo teórico para la servilleta arrugada. A la izquierda, en la figura 1a se muestra cómo la velocidad aumenta de manera lineal, lo que permite intuir que la aceleración es constante. Parte del reposo hasta llegar al suelo a una velocidad máxima de aproximadamente $6,25 \text{ m/s}$ en alrededor de $0,639$ segundos. Además, en la figura 1b se ve la trayectoria que sigue la servilleta. Forma una semiparábola desde la altura inicial (2 metros), hasta que toca el suelo.

Del mismo modo, en la figura 2 se aprecian los datos obtenidos una vez realizado el experimento diez veces y haber promediado la información. A la izquierda, en la figura 2a se observa cómo la velocidad ya no es lineal, lo que significa que la aceleración ya no es constante; lo que sugiere, entre otras cosas, una posible interferencia del aire. Por otra parte, en la figura 2b se ve cómo la trayectoria de la servilleta sigue siendo una parábola, muy similar a la descrita por el modelo teórico.

²El código completo del modelado teórico puede encontrarse en: <https://github.com/BrayanAmor8/Friccion-en-fluidos/blob/main/Fricción%20en%20fluidos%20-%20Código.py>

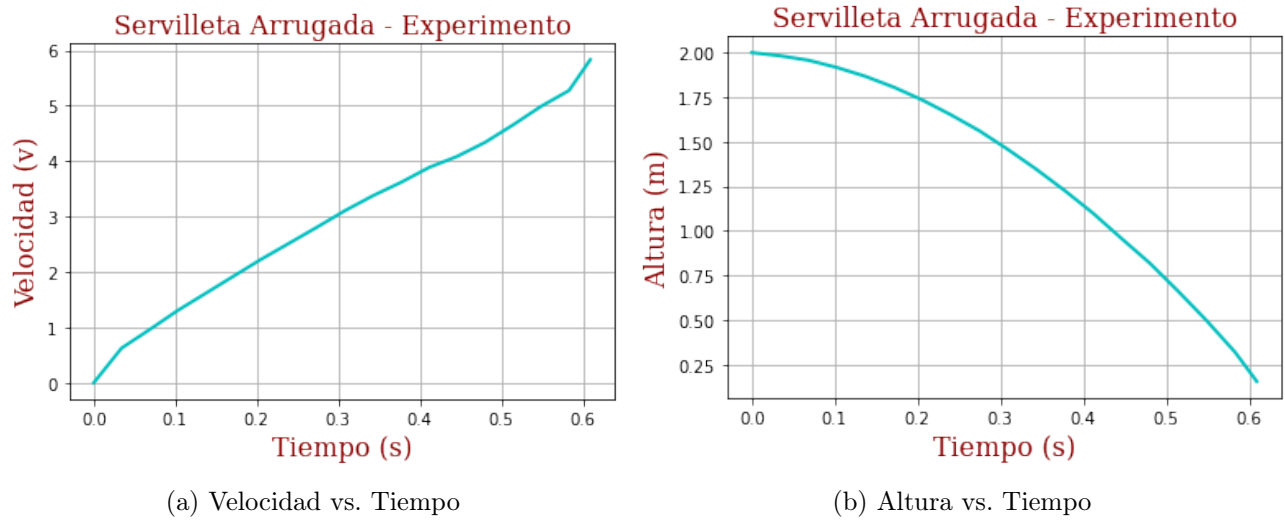


Figura 2: Montaje Experimental.

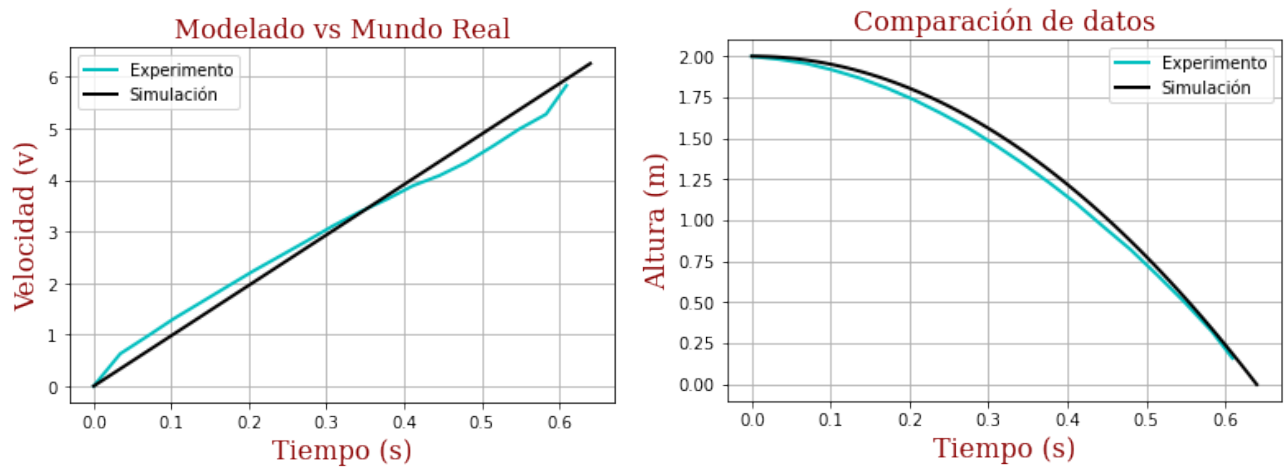


Figura 3: Comparación del montaje experimental y el modelado teórico.

Además, en la figura 3 se muestran los resultados obtenidos tras comparar el modelado teórico con el montaje experimental. Las gráficas dejan en claro que la velocidad es diferente y por ende, la trayectoria que sigue la servilleta también lo es. Sin embargo, esta diferencia no es tan marcada, lo que permite pensar que, si durante la trayectoria se presentó resistencia del aire, ésta no fue muy marcada y no alteró los resultados considerablemente.

En ese orden de ideas, es posible afirmar que la resistencia del aire sigue interfiriendo incluso cuando la servilleta está arrugada. Si bien lo hace en menor medida, no es pertinente despreciarlo. Por lo tanto, a partir de los datos obtenidos en el montaje experimental se calculó el valor de la constante de fricción (κ) para este caso.

Para ello, se supuso que la servilleta arrugada formaba una esfera perfecta, para facilidad de los cálculos. Y se partió de dos ecuaciones sencillas que involucran la fuerza de rozamiento (F_r) y la constante de fricción (κ) mencionadas por HJ Holterman [4]:

$$F_r = -\kappa v^2 \quad \text{y} \quad F_r = -\frac{1}{2}C_D\rho_fAv^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{2}C_D\rho_fA \quad (3)$$

Donde F_r es la fuerza de rozamiento, C_D es el coeficiente de arrastre, ρ_f es la densidad del aire ($1,29 \text{ kg/m}^3$), y A es el área de la sección transversal a la dirección del movimiento, que para el caso de una esfera es $A = \pi D^2/4$ donde D es el diámetro de la esfera. Por lo tanto, para la servilleta usada, que tiene diámetro de $1,5 \text{ cm}$ será $A = 1,767 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

Sin embargo, el coeficiente de arrastre (C_D) es una función del número de Reynolds (Re), el cual está dado por la ecuación $Re = \frac{\rho_f D v}{\eta}$, donde η es la viscosidad del aire ($1,74 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$) y v es la velocidad de la servilleta. Para hallar el mayor número de Reynolds, se utilizó la velocidad máxima ($6,25 \text{ m/s}$). De esta forma, el máximo número de Reynolds para la servilleta será de $Re \approx 6950$.

Para el caso de una esfera, Flemmer y Banks (1986) dicen que cuando el número de Reynolds está en un rango de 1000 a 200000, el coeficiente de fricción será $C_d = 0,44$ [5]. Cabe aclarar que cuando el número de Reynolds es menor a 1000, es porque la velocidad de la servilleta es menor a $0,9 \text{ m/s}$ aproximadamente. Sin embargo, esto no afecta mucho los cálculos ya que a partir del segundo 0,07 se supera esta velocidad.

Finalmente, se resuelve la ecuación (3):

$$\kappa = \frac{1}{2}C_D\rho_fA \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{2} \times 0,44 \times 1,29 \text{ kg/m}^3 \times 1,767 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 5,04 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \quad (4)$$

Por lo tanto, para el caso de la servilleta arrugada se presentó un coeficiente de fricción de $5,04 \times 10^{-5} \text{ kg/m}$ que, si bien es relativamente pequeño, no se puede despreciar, ya que sigue interfiriendo en el experimento

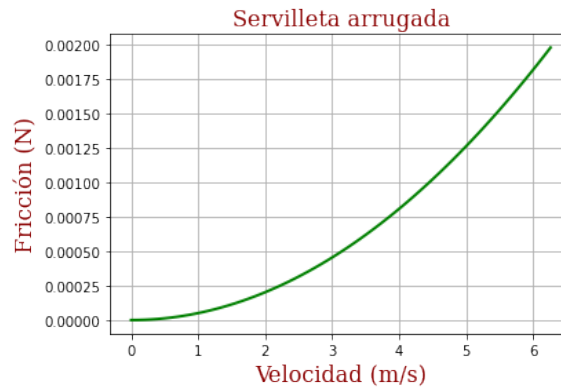


Figura 4: La fuerza de fricción aumenta de manera exponencial

En la figura 4 se observa cómo varía la fuerza de fricción, entre 0 y $1,968 \times 10^{-3} \text{ N}$, aumentando exponencialmente en función de la velocidad de la servilleta.

3.2 La servilleta Extendida

En este caso, a diferencia del anterior, no es posible despreciar la resistencia del aire. Por lo tanto, lo más adecuado es consultar fuentes bibliográficas antes de iniciar con el experimento o la simulación. En su libro “Conceptual Physics” [6], Paul Hewitt se refiere a este fenómeno como «Caída no libre». Y la aceleración se puede obtener a partir de la segunda ley de Newton ($F = ma$):

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg - R}{m} \quad (5)$$

donde mg es el peso y R es la resistencia del aire (κ) multiplicada por la velocidad. Es importante agregar que cuando $R = mg$, es decir, cuando $R = 0,0007g \times 9,78m/s^2 = 0,006846 N$, la servilleta caerá a velocidad constante dado que no hay aceleración. Sin embargo, si R es mayor, la velocidad de la servilleta será disminuirá. Ahora bien, utilizando un poco de aritmética la ecuación (5) se puede reescribir así:

$$a = g - \frac{\kappa \times v}{m} \quad (6)$$

Partiendo de esta información, se procedió a realizar primeramente el experimento con el fin de determinar un posible valor para la resistencia del aire (κ) para luego realizar el modelado teórico con los posibles valores para κ .

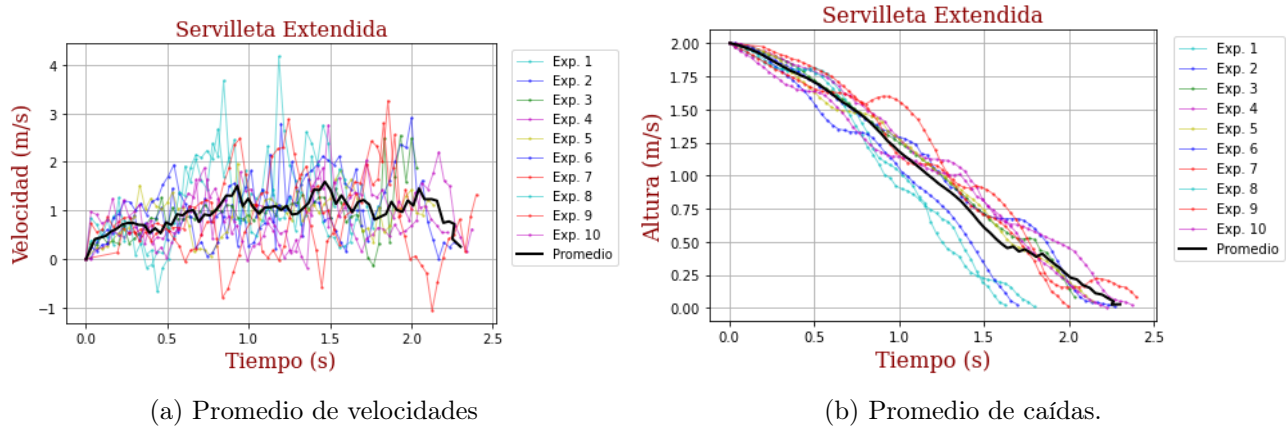


Figura 5: Resultados tras repetir el experimento 10 veces diferentes.

Como se ve en la figura 5, la resistencia del aire sí que afectó los resultados, prácticamente todos los experimentos arrojaron un resultado diferente. A la izquierda, en la figura 5a ocurre algo interesante, y es que la velocidad no aumenta linealmente como en el caso de la servilleta arrugada, sino que aumenta de forma dispereja hasta llegar a un punto donde la velocidad se “estabiliza”, pues deja de aumentar o disminuir bruscamente. Esto quiere decir que la resistencia del aire es, en algunos tramos, mayor a la masa de la servilleta multiplicada por la gravedad ($\kappa > mg$), por lo que la aceleración en la ecuación (6) es negativa y la velocidad disminuye. También es notable mencionar que la velocidad máxima que alcanza la servilleta extendida en cualquier tramo de su caída la supera

fácilmente la servilleta arrugada tras poco más de 0,1 segundos de caída libre, hecho que visibiliza la gran influencia que tiene la resistencia del aire en la velocidad de la servilleta extendida. Por otra parte, a la derecha, en la figura 5b las cosas vuelven a la normalidad. La servilleta tarda entre 1,6 y 2,4 segundos en tocar el suelo. Su recorrido es bastante similar al caso de la servilleta arrugada, solo que dadas las diferencias de velocidades, esta vez tarda casi dos segundos más en completar la trayectoria.

Entonces, como mencionó anteriormente, el promedio muestra un resultado menos caótico, con una tendencia de la velocidad a tomar un valor constante. En este caso, llega un punto en el que la velocidad tiende a variar aproximadamente entre 0,5 y 1 metros por segundo. A partir de estos datos se puede hacer una estimación para el valor de κ . Partiendo de las fórmulas de Hewitt (6), que dicen que cuando la servilleta adquiere una velocidad constante, sin aceleración, significa que:

$$\begin{aligned}\kappa \times v &= m \times g \Rightarrow \frac{1}{2}m/s \leq v \leq 1m/s \\ \frac{1}{2}m/s &\leq \frac{m \times g}{\kappa} \leq 1m/s \\ \frac{1}{2}m/s &\leq \frac{m \times g}{\kappa} \wedge \frac{m \times g}{\kappa} \leq 1m/s\end{aligned}$$

y dado que $v \geq 0$, $m \geq 0$ & $g \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$, es válido afirmar que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\kappa &\leq mg \wedge mg \leq \kappa \\ \kappa &\leq 2mg \wedge mg \leq \kappa \\ \kappa &\leq 0,01367 \wedge 0,006846 \leq \kappa \\ \therefore \kappa &\in [0,01367; 0,006846]\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que la constante de fricción que alteró la velocidad de esta servilleta se encuentra entre 0,01367 y 0,006746 kg/s aproximadamente. Lo siguiente es evaluar estos valores de κ en el montaje teórico y comparar los resultados.

Sin embargo, debido a que el valor de κ se encuentra en un intervalo, no resulta del todo acertado realizar un modelo teórico para todos los posibles valores de κ que se encuentren en dicho intervalo, esto tardaría una eternidad. Por lo que se optó por algo más óptimo: Se estimó el valor promedio de κ para cada experimento y luego dicho valor se comparó con el intervalo de κ obtenidos.

En la figura 6 se observan los valores tomados por κ según el experimento. Como se puede observar, los valores varían mucho, lo que indica que es posible que hayan fuerzas externas que afecten los resultados. Eso se discutirá más adelante en el apartado de márgenes de error. Ahora bien, como se mencionó anteriormente, los valores de κ que sirven en este experimento son aquellos entre 0,01367 y 0,006746 kg/s aproximadamente. Es decir, únicamente sirven los valores de los experimentos 5, 6, 8, 9 y 10, cuyos valores se pueden observar en la tabla que se encuentra en la figura 6. Cabe resaltar que el valor para el experimento se aceptó debido a que se consideró un margen de error de 0,002, es decir, los datos podrían variar entre 0,01367 y 0,006746 kg/s o 0,01567 y 0,004746 kg/s . Los demás datos quedan descartados debido a que superaban este margen de error.

N° de Experimento	Valor de κ (kg/s)
1	0.01747
2	0.03851
3	0.01854
4	0.02022
5	0.01344
6	0.01381
7	0.02995
8	0.01317
9	0.00675
10	0.01362

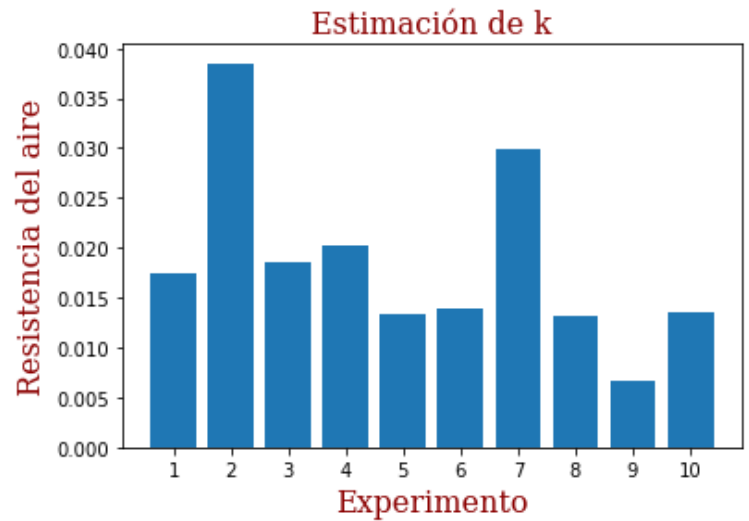


Figura 6: Valores promedio de κ para cada experimento.

En la figura 7 se puede observar el modelo teórico para cada valor de κ definido anteriormente. Es curioso mencionar que casi todos los modelos arrojan un resultado considerablemente similar: transcurridos alrededor de 0,2 segundos, la velocidad se torna constante alrededor de los 0,5m/s. Sin embargo, el modelo 9 muestra que transcurridos 0.4 segundos, la velocidad se torna constante con un valor de poco más de 1m/s. ¿Cómo se puede determinar qué modelo es más adecuado?

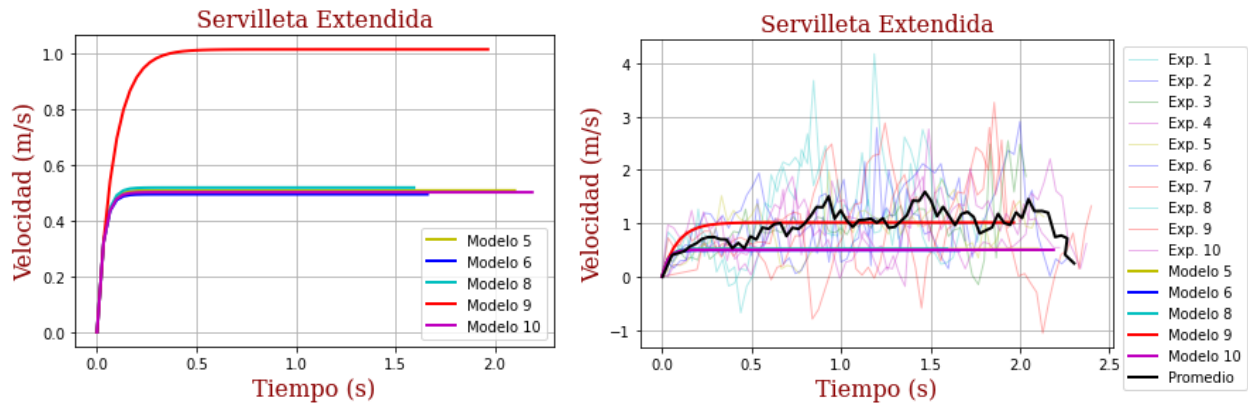


Figura 7: Resultados tras repetir el experimento 10 veces diferentes.

La primera idea es promediar κ y hacer una simulación con el resultado. Sin embargo, este método no es eficiente porque, como se vio anteriormente, cada experimento presenta un margen de error que alteró los datos. Entonces, si se saca el promedio, no es posible descartar la posibilidad de que uno de estos experimentos haya presentado dichos márgenes considerablemente altos y por ende, se obtenga una falsa estimación de κ . Entonces, con el fin de determinar si los experimentos

son o no son viables, se procedió a utilizar un análisis por mínimos cuadrados. Según Steven Brown (2009), profesor de la Universidad de Delaware en USA [7], es un método que consiste en sumar los residuos elevados al cuadrado, los cuales se obtienen tras restar el dato obtenido en cierto punto de la gráfica, con el mismo dato, en el mismo punto, pero del modelo teórico. Es decir:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (7)$$

donde y es el valor tomado por el eje Y de la gráfica en cada punto X según los datos experimentales (en este caso, el valor de la velocidad para cada instante de tiempo), y x, y es exactamente lo mismo, solo que es tomado en base al modelo teórico. Sin embargo, antes de eso es posible hacer un pequeño análisis estadístico. Si para cada modelo se toma cada valor de la velocidad correspondiente a cada instante del tiempo, se hace posible obtener una tabla de dispersión. Entre más cercanos a 0 estén los datos, es más bajo el margen de error. Los resultados se aprecian en la figura 8.

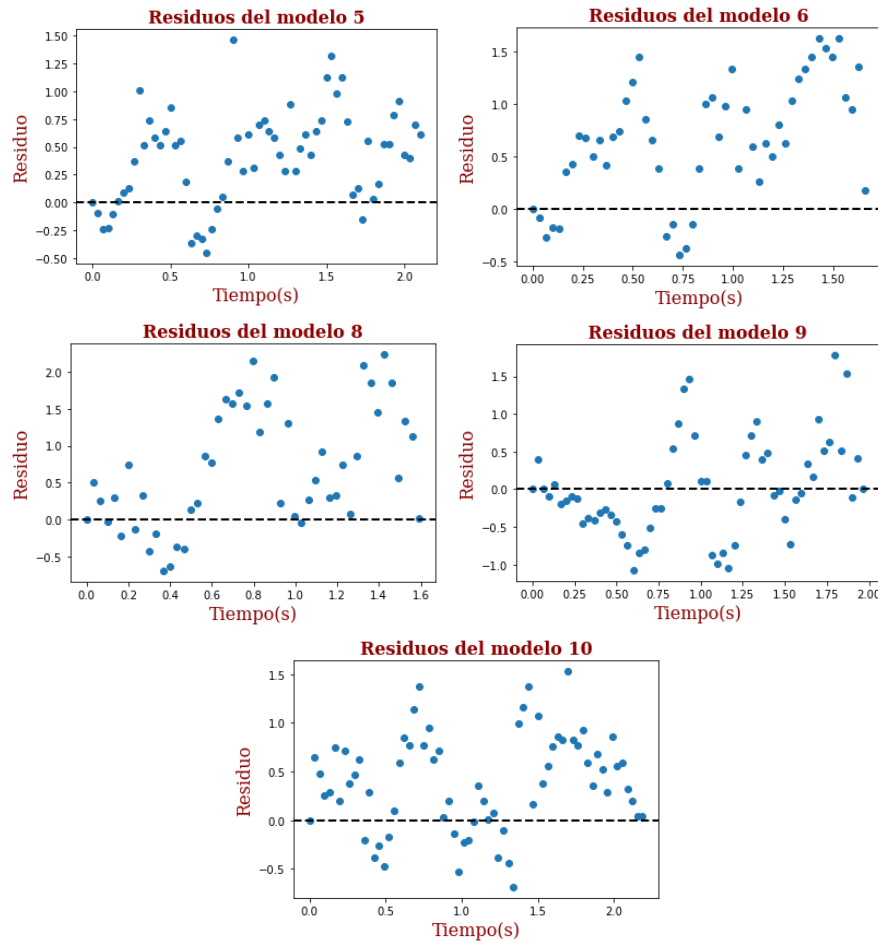


Figura 8: Gráfico de dispersión para los modelos con margen de error relativamente bajo.

Acá es donde entra en juego la ecuación de los residuos cuadrados (7) para determinar cuál de los 5 modelos es el más apropiado. Simplemente se efectúa la sumatoria para cada modelo y se elige el que de el resultado más cercano a 0. En la tabla 1 se observa que es posible descartar los modelos 6 y 8 debido a que presentan una suma demasiado alta, lo que indica un margen de error considerablemente alto.

N° de Experimento	Suma de residuos cuadrados
5	22.20
6	38.31
8	54.81
9	27.06
10	24.96

Cuadro 1: Residuos cuadrados de los modelos de la figura 8

Para este punto, ya se va esclareciendo que el modelo más óptimo es el número 5. Según la figura 6, el valor de la constante de fricción κ es de 0,013 kg/s aproximadamente. Esta hipótesis se confirma al revisar que el modelo que ocupó el segundo lugar, el modelo 10, también tiene una constante de fricción de $\kappa \approx 0,013 \text{ kg/s}$. Por lo tanto, es correcto afirmar que para una servilleta de masa $m = 0,0007$ gramos, con dimensiones de $14,3 \text{ cm} \times 13,4 \text{ cm}$ que cae desde una altura de dos metros, posee una constante de fricción $\kappa \approx 0,013 \text{ kg/s}$.

4 Conclusiones y Recomendaciones

Una de las ventajas de llevar a cabo una investigación a partir de una comparación entre una situación ideal y una realista, es que permite aprovechar el conocimiento previo que se tiene en la materia, ya sea a través de referencias externas o leyes coherentemente establecidas, y utilizarlo para modelar un evento el cual permitirá comprender un poco más los fenómenos de la naturaleza. Y fue precisamente esto lo que facilitó el estudio de la fricción del aire en el movimiento de los cuerpos en caída libre. Desde el montaje experimental se propusieron las pautas requeridas para entender la forma en que la constante de rozamiento (κ) interactuaba en el comportamiento de un objeto que se desplaza en un fluido (el aire, en este caso), a través de las fórmulas de movimiento uniformemente acelerado y las ecuaciones propuestas por los físicos Jearl Walker (1) y HJ Holterman (3); así como los valores establecidos por Flemmer y Blanks en función del número de Reynolds (4).

De igual manera, se pudo observar que pese a que inicialmente se consideraba la caída de la servilleta comprimida como una situación ausente en fricción, los resultados experimentales demostraron que no era completamente así, ya que el coeficiente de fricción se manifestaba incluso en un rango muy reducido. Por otra parte, la caída de la servilleta extendida demostró un par de fenómenos interesantes:

En primera instancia, se pudo concluir que la forma que tenía la servilleta no solamente influía en su roce con el aire, sino también en la interacción que tenía consigo mismo al caer; esto es debido a que su forma extendida permitía fácilmente generar una rotación sobre sí misma, es decir, presentar momento de torsión (torque), por lo que la mínima diferencia de fuerza de rozamiento presentada en su superficie hacía que la servilleta se volteara, adquiriendo nuevos comportamientos tales como una suspensión momentánea o un repentino aumento de velocidad. A esto debe sumársele la acción de fuerzas horizontales, los cuales pueden o bien acelerar o desacelerar la caída de manera abrupta, teniendo así intervalos de tiempo con valores de aceleraciones demasiado cercanas a 0, o de valores de magnitud muy amplia (ya sea de forma negativa o positiva, dependiendo de si influye en una disminución o aumento en la velocidad).

Es por todo esto que encontrar un valor específico de κ , o incluso una aproximación muy realista implica una gran variedad de muestras, y una adaptación muy adecuada del entorno en el que se lleva a cabo la experimentación; pues si se quiere entender de manera óptima el comportamiento global de la caída de la servilleta y se descuidan los detalles anteriormente mencionados, los valores obtenidos distarían en gran medida del camino que se quiere seguir para llegar al objetivo planteado. Esto no siempre debe ocurrir por falta de conocimiento o precisión en los cálculos, sino por la naturaleza misma, pues es ella quien impone los diferentes efectos que producen la infinidad de variaciones minúsculas que hacen que el comportamiento macroscópico sea difícil de establecer bajo un parámetro invariable para absolutamente cualquier caída a través del tiempo. Aun así, se debe ser muy precavido en el control de estos factores, pues se podría estar forzando un resultado de manera intencional, y esto no se compatibiliza con la intención de la investigación científica, ya que el principal propósito no es adecuar la naturaleza a la hipótesis que se ha planteado, sino lo contrario: Adecuar la hipótesis con lo que manifiesta la naturaleza, de tal manera que pueda predecir fenómenos de manera correcta, o lo que es lo mismo: No consiste en adecuar los datos experimentales al modelo, sino adecuar un modelo que se ajuste a los datos experimentales (teniendo claramente

en cuenta el margen de error de la medición).

Para el caso del presente informe, se llevó a cabo la realización de diferentes gráficas de dispersión a partir de la suma de los residuos cuadrados resultantes de aplicar la diferencia de los valores obtenidos en las mediciones experimentales y del valor que el modelo planteado predecía para cierto tiempo t . De esta manera, se determinó que el modelo que más se ajustaba a todas las mediciones comparadas, correspondía con aquel que predice una constante de fricción de aproximadamente $0,013Kg/s$. Es de vital importancia tener en cuenta que, pese a ser la gráfica una herramienta muy útil para sintetizar un comportamiento general y tener una aproximación al mismo, son los datos quienes finalmente sustentan el modelo más óptimo para la predicción del movimiento, es decir, pese a que múltiples modelos puedan asemejarse visualmente al resultado experimental o lucir como si los puntos descritos estén más próximos unos de otros, sólo se puede tener la certeza de haber encontrado el modelo más cercano cuando así los sugieran los datos cuantitativos; en este caso, aquel cuya la suma de residuos cuadrados sea menor.

Ahora bien, volviendo a la comparativa expresada antes de este inciso, resultan más que evidentes las diferencias en las trayectorias de ambas servilletas, y de igual manera, las causas a las que se deben tales disparidades. Una de ellas es la disimilitud del tiempo de caída, el cual es mayor en la servilleta extendida debido a que las fuerzas que actúan en sentido contrario al movimiento (es decir, las fuerzas de rozamientos) son mayores o están más presentes que en la servilleta arrugada, ocasionando que su aceleración sea menor. En cuanto a la velocidad, aumenta inicialmente hasta adquirir un comportamiento uniforme luego de un cierto tiempo. Claramente, en las mediciones experimentales individuales no se halla este seguimiento de manera perfecta, sin embargo, el análisis global del movimiento completo permite deducir que así lo indica su tendencia. Y es esto último, lo que abre paso a la explicación que sustenta a su vez la teoría planteada en esta investigación, ya que, tal como se mencionó en la descripción experimental, al ser el producto de κ por la velocidad equivalente al valor procedente del producto de la masa por la gravedad terrestre (o lo que es lo mismo, el peso del cuerpo), entonces adquiere una velocidad constante.

Es en este punto que debe resaltarse la viabilidad que trajo consigo el planteamiento experimental del estudio [2], en lo que concierne a la cantidad y variedad de muestra obtenida: Al llevar a cabo 10 mediciones para cada forma de servilleta (arrugada y extendida), desde la altura más adecuada dentro de la predisposición del entorno en el que se desarrolló, se logró una gran variedad de resultados por intervalos de tiempo, lo que brindó información más que suficiente para llevar a cabo un análisis que posteriormente fue contemplado en una gráfica bidimensional que permitiese relacionar ambas variables a la vez. Es por esta razón, que se recomienda, en caso de realizar estudios posteriores al respecto, utilizar alturas superiores que permitan contemplar aún mejor el comportamiento de κ y su fuerte impacto en la velocidad del cuerpo en caída. Ya que, como mostraron los resultados [3], a mayor altura habrá siempre mayor tiempo de caída, y por ende, mayor información de la velocidad del objeton, lo que permite mayor precisión en los cálculos. En este orden de ideas, inclusive la servilleta arrugada adquiriría velocidad constante, tras transcurrir una cantidad t de tiempo. Pues como se contempló en los resultados [3], la constante de fricción puede ser baja en cuerpos con forma compacta, pero no es igual a 0; lo que significa que tarde o temprano terminará afectando la aceleración aparentemente constante del objeto en cuestión, tal como se observó en el caso de la servilleta extendida. De hecho, puede intentarse con volúmenes

diferentes: En el informe se comparó una servilleta que caía arrugada y una que estaba extendida, pero se puede poner a prueba diferentes otras formas con otros cuerpos y establecer así un mayor análisis comparativo que enriquezca la estimación de κ y brinde una visión aún más amplia de qué tan viable resulta extrapolarlo a la caída de cualquier otro objeto estándar con fricción, aumentando el impacto que tendría estudio en el conocimiento y aplicación del tema.

Referencias

- [1] R Resnick, D Halliday, and KS Krane. Física, vol. 1. 4ta. *Edición. México, CECSA*, 2001.
- [2] Jorge I Zuluaga. La teoría de la relatividad en la vida cotidiana. *Revista Universidad de Antioquia*, 2011.
- [3] David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker. *Fundamentals of physics*. John Wiley & Sons, 2013.
- [4] HJ Holterman. *Kinetics and evaporation of water drops in air*, volume 2012. Citeseer, 2003.
- [5] Rory LC Flemmer and CL Banks. On the drag coefficient of a sphere. *Powder Technology*, 48:217–221, 1986.
- [6] Paul G Hewitt. *Conceptual physics*. Pearson Education, 2002.
- [7] Steven Brown, Romà Tauler, and Beata Walczak. *Comprehensive chemometrics: chemical and biochemical data analysis*. Elsevier, 2009.