

Inestabilidad Magnetorotacional en el modelo de MHD Ideal en el régimen lineal

Brayan Santiago Amorocho Lizcano
Dylan Alexander Castellanos Jaimes
Juan Pablo Celis Avila

Universidad Industrial de Santander - Escuela de Física

Dirigido a: Fabio Duvan Lora Clavijo

28 de noviembre de 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Modelo MHD Ideal	2
2.1. Teorema de Alfvén	4
3. Inestabilidad Magneto-rotacional	5
3.1. La naturaleza de la inestabilidad	5
3.2. Magnetohidrodinámica de fluidos en rotación	5
3.2.1. Estado de equilibrio	5
3.2.2. Ecuaciones linealizadas a partir del análisis de pequeñas perturbaciones	6
3.3. Relación de dispersión	6
3.4. Criterio de estabilidad	8
4. Conclusiones y Discusión	10
Anexos	11
A. Cálculo de las ecuaciones linealizadas	11

Resumen

La inestabilidad magnetorotacional (MRI) es clave para entender la turbulencia en discos de acreción. Este fenómeno, propuesto inicialmente en 1959, adquirió relevancia astrofísica hasta 1991 cuando Balbus y Hawley le dieron una interpretación física simple. La MRI facilita el transporte de momento angular y la acreción de material hacia objetos compactos mediante tensiones magnéticas. En un fluido conductor ideal con rotación diferencial, las líneas de campo magnético “congelan” al plasma, generando tensiones al estirarse con el movimiento del fluido, que actúan redistribuyendo momento angular. Sin embargo, si el campo magnético induce una rotación más rápida de lo que permite la nueva posición radial del fluido, surge inestabilidad, provocando que el elemento fluido continúe desplazándose y perturbe el sistema.

La formulación matemática de la MRI se basa en las ecuaciones de la MHD ideal, donde los campos de velocidad, presión, densidad y magnético son perturbados en orden lineal y se describen como ondas planas, trabajando en la aproximación de Boussinesq. La relación de dispersión obtenida muestra cómo la interacción entre fuerzas de flotación, velocidad angular y tensión magnética determina la estabilidad del sistema. Finalmente, el análisis demuestra que un disco inicialmente estable puede volverse inestable al introducir un campo magnético, siempre que el gradiente de velocidad angular sea menor que cero. Este criterio confirma el papel crucial de la MRI en la dinámica de discos astrofísicos, impulsando la turbulencia necesaria para su evolución.

1. Introducción

La inestabilidad magnetorotacional (MRI) es un fenómeno fundamental en astrofísica que permite explicar, entre otras cosas, la turbulencia en discos de acreción. Su descubrimiento se remonta a mediados del siglo XX, cuando el físico ruso Evgeny Velikhov [Velikhov 1959] propuso que un fluido conductor en un sistema rotante que se encuentra inmerso en un campo magnético podría volverse inestable si la velocidad angular disminuía con el radio.

Un año más tarde, Subrahmanyan Chandrasekhar [Chandrasekhar, Trehan y Weiss 1960] generaliza este análisis al incorporar las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) en rotación, además de proponer condiciones para que la inestabilidad aparezca. Sin embargo, para la fecha la relevancia de su trabajo no fue plenamente reconocido en el contexto de la astrofísica. No fue sino hasta principios de la década de 1990 que Balbus y Hawley mostraron la importancia de la MRI en discos de acreción [Balbus y Hawley 1991]. En ese influyente trabajo, donde utilizan un enfoque de perturbaciones lineales de las ecuaciones de la MHD, explican cómo la MRI podría proporcionar el mecanismo necesario para generar turbulencia en estos discos, permitiendo el transporte de momento angular y facilitando la acreción de material hacia objetos compactos como estrellas jóvenes, estrellas de neutrones e incluso agujeros negros.

En este trabajo se partirá de las ecuaciones de la MHD Ideal, se propondrán perturbaciones con forma de onda plana a los campos de velocidad, presión, densidad y magnético y se hallará la relación de dispersión en términos de las condiciones iniciales. Se establecerá un criterio de estabilidad y se concluirá en una discusión sobre los resultados obtenidos.

2. Modelo MHD Ideal

En el modelo MHD Ideal se toman las formas de disipación de energía como despreciables, esto es considerar el fluido como un conductor perfecto, sin efecto Hall, con flujo de calor nulo y no viscoso. En primer orden de magnitud, el término corrientes de desplazamiento en la ecuación de Ampère-Maxwell es despreciable en magnitud comparado a la circulación de campo magnético. De igual forma, la fuerza eléctrica es despreciable en magnitud comparada a la fuerza magnética. Con estas consideraciones, las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía quedan escritas de la siguiente forma:

$$\partial_t \ln \rho + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P, \quad (2.2)$$

$$\partial_t P + (\mathbf{v} \cdot \nabla) P + \gamma P \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.3)$$

donde $\rho(\mathbf{r}, t)$ es la densidad de masa total, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de velocidades, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ es la corriente de conducción o de cargas libres, $p(\mathbf{r}, t)$ es el campo de presiones que responde a una cierta ecuación de estado, γ es el índice adiabático y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ es el campo magnético externo y se rige bajo las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.6)$$

Como se observa en la ecuación (2.6), el campo queda completamente determinado si se conoce una ecuación que describa la dependencia de la densidad de corriente \mathbf{J} en función de las propiedades del sistema y de los campos eléctricos y magnéticos, tanto externos como auto-consistentes. Esta relación se obtiene a partir de la ley de Ohm general.

En este caso, al no considerar el efecto Hall, asumir que la densidad de corriente es estacionaria, despreciar \mathbf{l} y despreciar los efectos no lineales, la ley de Ohm toma su forma clásica: $\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}'$. Para velocidades no relativistas, las cantidades \mathbf{J} y \mathbf{E} en el sistema no inercial se relacionan con las del sistema inercial de la siguiente manera: $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ y $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Por lo tanto, la ley de Ohm puede expresarse como:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.7)$$

donde σ representa la conductividad eléctrica.

Si se reemplaza (2.6) en (2.7) se puede reescribir como

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

Aplicando el rotacional a la ecuación anterior y reemplazando (2.5) se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta (\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.9)$$

Al utilizar la identidad vectorial del triple producto cruz, y considerando que la divergencia de campo magnético es nula, la anterior ecuación queda expresada como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.10)$$

La ecuación anterior describe la evolución temporal del campo magnético \mathbf{B} en un medio conductor, y es conocida como la *ecuación de inducción magnética* en magnetohidrodinámica (MHD). El primer término de la derecha describe la *advección* o transporte del campo magnético debido al movimiento del fluido conductor con velocidad (\mathbf{v}). Este término indica cómo el campo magnético es arrastrado y deformado por la dinámica del fluido, el Segundo término representa la *difusión* del campo magnético, causada por los efectos resistivos del medio conductor. La difusividad magnética η (relacionada con la conductividad eléctrica y la permeabilidad del material) determina la rapidez de esta difusión.

Del sistema de ecuaciones MHD, surge la cantidad adimensional, denominada número de Reynolds magnético, que permite medir la dominancia entre los efectos advectivos y los términos disipativos

$$R_m = \frac{U_0 L_0}{\eta}, \quad (2.11)$$

donde U_0 y L_0 son, respectivamente, la velocidad y la longitud características de variación de los campos \mathbf{u} y \mathbf{B} , este número tendrá implicaciones para describir el teorema de Alfvén.

Debido a que la dinámica del campo magnético queda, entonces, completamente determinada mediante la ecuación de inducción (2.10) y la condición de divergencia nula (2.4), las ecuaciones MHD (ecuación de continuidad(2.1), ecuación de movimiento(2.2) y la ecuación de inducción (2.10)) conforman un sistema de 3 ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, y acopladas, con 6 incógnitas, 3 para

las componentes del campo de velocidades y 3 para las componentes del campo magnético. A su vez, asumiendo un régimen incompresibilidad en el fluido¹, por lo que la ecuación de continuidad al garantizar el régimen de incompresibilidad puede expresarse como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.12)$$

2.1. Teorema de Alfvén

El teorema de Alfvén, también conocido como el *teorema de congelamiento del campo magnético*, es un fenómeno importante de ilustrar en la magnetohidrodinámica (MHD) ideal, formulado por Hannes Alfvén en 1942 (Alfvén 1942). Este teorema describe cómo las líneas del campo magnético se comportan en un fluido conductor en movimiento, como por ejemplo un plasma astrofísico.

El teorema de Alfvén surge como una consecuencia directa de la ecuación de inducción magnética. Si se considera un plasma con una conductividad eléctrica ideal, es decir, $\sigma \rightarrow \infty$, i.e. $R_m \gg 1$ el término difusivo puede despreciarse frente al término de advección del campo magnético. De esta forma, la ecuación de inducción magnética se reduce a:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.13)$$

Esta forma implica la **conservación del flujo magnético**. Para una superficie S que se mueve junto con el fluido, por lo que el flujo magnético

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.14)$$

permanece constante en el tiempo, este resultado indica que el flujo magnético a través de cualquier superficie en movimiento con el fluido permanece “congelado” al plasma. Esto significa que si dos elementos de fluido están conectados por una línea de campo magnético en un instante inicial, permanecerán asociados a la misma línea en cualquier instante posterior. La topología del campo magnético no se ve alterada en estas condiciones ideales, y no puede haber reconexión magnética (Pontin y Priest 2022).

Sin embargo, en un modelo físico más real se considera que la resistividad eléctrica es ($\eta > 0$), por lo que el término difusivo ya no puede despreciarse. En este caso, el fenómeno de reconexión magnética puede ocurrir o también puede ocurrir debido a movimientos del fluido, suficientemente complejos, que puedan producir contorsiones en las líneas de campo.

Debido a la “congelación” del campo magnético, las líneas de campo se estiran y enrollan con el movimiento del fluido. como se verá más adelante, en un fluido con rotación diferencial, como lo puede ser un disco de acreción, estas líneas “congeladas” de campo magnético generaran tensiones magnéticas, actuando como “enlaces” entre diferentes capas de fluido. Estas tensiones magnéticas redistribuyen el momento angular, desestabilizando el sistema (Balbus y Hawley 1998).

¹Esta estrategia permite reducir la complejidad de las ecuaciones sin perder información trascendental respecto al comportamiento general del plasma.

3. Inestabilidad Magneto-rotacional

3.1. La naturaleza de la inestabilidad

Antes de presentar la formulación matemática e incorporar las ecuaciones de la MHD, es oportuno detenerse a analizar las razones físicas por las cuales se genera la inestabilidad. Dado un disco que rota diferencialmente, es decir, diferentes partes del mismo rotan con velocidades diferentes, el cual a su vez está sometido a un campo magnético externo en dirección vertical. Al considerar un elemento de fluido que se desplaza hacia afuera, este se verá sometido a una fuerza restauradora generada por el campo magnético, que estará intentando de manera simultánea tanto devolver el elemento a su órbita inicial como imponer que el elemento de fluido siga rotando.

Si lo primero se realiza de manera exitosa, el elemento de fluido estará constantemente siendo devuelto a su primera órbita y no hay inestabilidad. Pero, dado que se trata de un disco donde la velocidad de rotación puede depender del radio, sucede que el campo magnético hace al elemento de fluido rotar demasiado rápido para su nueva órbita. Ese es el origen de la inestabilidad: El exceso de fuerza centrífuga hace que el elemento que se mueve hacia afuera interactúe con los demás elementos de fluido y el plasma se vuelva inestable.

3.2. Magnetohidrodinámica de fluidos en rotación

Cuando se consideran las ecuaciones de la magnetohidrodinámica de un fluido que rota con una velocidad angular instantánea Ω , la velocidad relativa al marco inercial es

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_r + \Omega \times \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{v}_r es la velocidad en el marco no inercial, y \mathbf{v}_i la velocidad del marco inercial, por ende la ecuación de movimiento (2.2) en el marco inercial queda de la forma:

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla |\Omega \times \mathbf{r}|^2] = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P, \quad (3.2)$$

Se propone un modelo idealizado y simplificado, aunque suficientemente ilustrativo, para analizar los fenómenos físicos involucrados. Considérese un plasma en forma de disco, con extensión vertical finita y simetría axial, descrito en un sistema de coordenadas cilíndricas $(\hat{R}, \hat{\phi}, \hat{z})$, en el cual se considera que la velocidad angular varía de manera radial al disco $\Omega(R)$ y apunta en la dirección \hat{z} , las demás variables en general pueden tener una dependencia de $\mathbf{r}(\hat{R}, \hat{\phi}, \hat{z})$, además el plasma se encuentra inmerso en un campo magnético externo constante en el tiempo, con componentes vertical y azimutal, en general el campo magnético externo dependerá también de la componente B_r , pero debido a que, en un plasma rotativo, un pequeño campo magnético en dirección radial causa un campo B_ϕ dependiente del tiempo (Balbus y Hawley 1991), lo que complica enormemente el problema, por lo que en este caso no se tendrá en cuenta la componente radial del campo magnético.

3.2.1. Estado de equilibrio

En este modelo, se asume un estado de equilibrio caracterizado por las siguientes condiciones: velocidad inicial nula en el marco de referencia no inercial, campo magnético uniforme, densidad de masa uniforme, y velocidad angular uniforme. Bajo estas suposiciones y sin considerar un gradiente de presión, la ecuación de movimiento en el estado de equilibrio toma la forma:

$$\frac{1}{2}(\Omega^2 \nabla r^2) = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla P_0 = \nabla \left(\frac{B_0^2}{2\rho_0 \mu_0} \right) - \frac{1}{\rho_0} \nabla P_0, \quad (3.3)$$

de la ecuación anterior se puede observar que la presión magnética y el gradiente de presión equilibra la aceleración centrífuga, manteniendo en un momento inicial estable el sistema, además como en el equilibrio se asume una velocidad angular uniforme, esto causara una forma helicoidal en las distintas capas de fluido.

3.2.2. Ecuaciones linealizadas a partir del análisis de pequeñas perturbaciones

Las ecuaciones (2.12), (3.2) y (2.13) constituyen, por componentes, 7 ecuaciones que permiten entender el comportamiento de un plasma en el régimen ideal. Partiendo del estado de equilibrio, se proponen pequeñas perturbaciones a los diferentes campos, de la forma: $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\Omega}(R) \times \mathbf{r}$, $P(\mathbf{r}, t) = P_0 + P_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$, donde estas perturbaciones se consideran de la forma: $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ con $k^2 \equiv k_r^2 + k_z^2$, es decir, con simetría respecto a un eje.

Cabe resaltar que se trabajará en la aproximación de Boussinesq, la cual supone que las variaciones de densidad son despreciables, esto es $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0$ con $\rho_1 = 0$, en todas las ecuaciones excepto en la ecuación de movimiento. En el régimen lineal, se consideran únicamente perturbaciones de primer orden. Reemplazando la forma de los campos en las ecuaciones se obtiene (ver Anexo A):

$$k_r v_{r1} + k_z v_{z1} = 0, \quad (3.4a)$$

$$-i\omega v_{r1} + \frac{ik_r}{\rho_0} P_1 - 2\Omega v_{\varphi1} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{ik_r}{\mu_0 \rho_0} (B_{\varphi0} B_{\varphi1} + B_{z0} B_{z1}) - \frac{ik_r}{\mu_0 \rho_0} B_{z0} B_{r1} = 0, \quad (3.4b)$$

$$-i\omega v_{\varphi1} + v_{r1} \frac{\kappa^2}{2\Omega} - ik_z B_z \frac{B_{\varphi1}}{\mu_0 \rho_0} = 0, \quad (3.4c)$$

$$-i\omega v_{z1} + \frac{ik_z}{\rho_0} P_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial P_0}{\partial z} - \frac{ik_r}{\mu_0 \rho_0} B_{\varphi0} B_{\varphi1} = 0, \quad (3.4d)$$

$$-i\omega B_{r1} - ik_z B_{z0} v_{r1} = 0, \quad (3.4e)$$

$$-i\omega B_{\varphi1} - \frac{d\Omega}{d \ln r} B_{r1} - ik_z B_{z0} v_{\varphi1} = 0, \quad (3.4f)$$

$$-i\omega B_{z1} - ik_z B_{z0} v_{z1} = 0, \quad (3.4g)$$

donde κ es la frecuencia epíciclica y se define como:

$$\kappa^2 \equiv \frac{2\Omega}{r} \frac{d(r^2 \Omega)}{dr}. \quad (3.5)$$

Para completar el conjunto de ecuaciones se requiere de una ecuación de estado. Esta será la entropía para perturbaciones adiabáticas en la aproximación Boussinesq:

$$i\omega \frac{5}{3} \frac{\rho_1}{\rho_0} + v_{z1} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial z} + v_{r1} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial r} = 0. \quad (3.6)$$

3.3. Relación de dispersión

Lo que se hará a continuación es eliminar v_{r1} de las ecuaciones (3.4a)-(3.4g) y expresar todas las cantidades perturbadas en términos de v_{z1} utilizando la ecuación de estado (3.6), para luego reemplazarlas en la ecuación de movimiento (3.4b). Se encuentra primero que:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{3}{5i\omega} v_{z1} \left[\frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial z} - \frac{k_z}{k_r} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial r} \right], \quad (3.7a)$$

$$\frac{P_1}{\rho_0} + \frac{B_{\varphi_0} B_{\varphi_1}}{\mu_0 \rho_0} = \frac{v_{z1}}{k_z} \left[\omega + \frac{3}{5\omega \rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} \left(\frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial z} - \frac{k_z}{k_r} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial r} \right) \right], \quad (3.7b)$$

$$v_{r1} = -\frac{k_z}{k_r} v_{z1}, \quad (3.7c)$$

$$v_{\varphi_1} = \frac{v_{z1}}{i\omega} \frac{k_z}{k_r} \left(-\frac{\kappa^2}{2\Omega} + \frac{k_z^2 v_{Az}^2}{\omega^2} \frac{d\Omega}{d \ln r} \right) \left(1 - \frac{k_z^2 v_{Az}^2}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad (3.7d)$$

$$B_{z1} = -\frac{k_z B_z}{\omega} v_{z1}, \quad (3.7e)$$

$$B_{\varphi_1} = 2\Omega \frac{B_z}{i\omega^2} \frac{k_z^2}{k_r} \left(1 - \frac{k_z^2 v_{Az}^2}{\omega^2} \right)^{-1} v_{z1}, \quad (3.7f)$$

donde v_{Az}^2 es la velocidad de Alfvén:

$$v_{Az}^2 = \frac{B_{z0}^2}{\mu_0 \rho_0}. \quad (3.8)$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.7a)-(3.7f) en (3.4b) y reordenando los términos se encuentra la relación de dispersión:

$$\tilde{\omega}^4 + \frac{k_z^2}{k^2} \left[\frac{3}{5\rho_0} \left(\frac{k_r}{k_z} \frac{\partial P_0}{\partial z} - \frac{\partial P_0}{\partial r} \right) \left(\frac{k_r}{k_z} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial z} - \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial r} \right) - \kappa^2 \right] \tilde{\omega}^2 - 4\Omega^2 \frac{k_z^2 v_{Az}^2}{k^2} = 0, \quad (3.9)$$

donde

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - k_z^2 v_{Az}^2. \quad (3.10)$$

Es posible simplificar aún más la expresión al darse cuenta de que

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial z} = \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial r}, \quad (3.11)$$

al asumir la rotación sobre cilindros; o de manera equivalente, que las superficies isobáricas e isocóricas coinciden. Así, es conveniente definir a los términos que sobreviven como

$$N_r^2 = -\frac{3}{5\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial r}, \quad (3.12a)$$

$$N_z^2 = -\frac{3}{5\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{\partial \ln P_0 \rho_0^{-5/3}}{\partial z}, \quad (3.12b)$$

que son los términos de la *frecuencia de Brunt-Väisälä* o de *flotación* $N^2 = N_r^2 + N_z^2$, no ser confundidas con componentes vectoriales. Con esto, la relación de dispersión queda finalmente escrita como:

$$\frac{k^2}{k_z^2} \tilde{\omega}^4 - \left[\kappa^2 + \left(\frac{k_r}{k_z} N_z - N_r \right)^2 \right] \tilde{\omega}^2 - 4\Omega^2 k_z^2 v_{Az}^2 = 0. \quad (3.13)$$

En la ecuación (3.13) se puede observar que la única dependencia del campo magnético semilla es en su componente a lo largo de z , contenida en v_{Az} .

En la figura (3.1) se grafican las soluciones positiva (línea azul) y negativa (línea naranja) para la frecuencia ω^2/Ω^2 en función de $k_z v_{Az}/\Omega$, obtenidas de la relación de dispersión (3.13), en el caso límite $k_r = 0$ para el cual donde hay mayor inestabilidad. Se puede observar en ambas soluciones que la frecuencia tiende rápidamente a infinito, lo que corrobora que se trata de inestabilidades en el sistema.

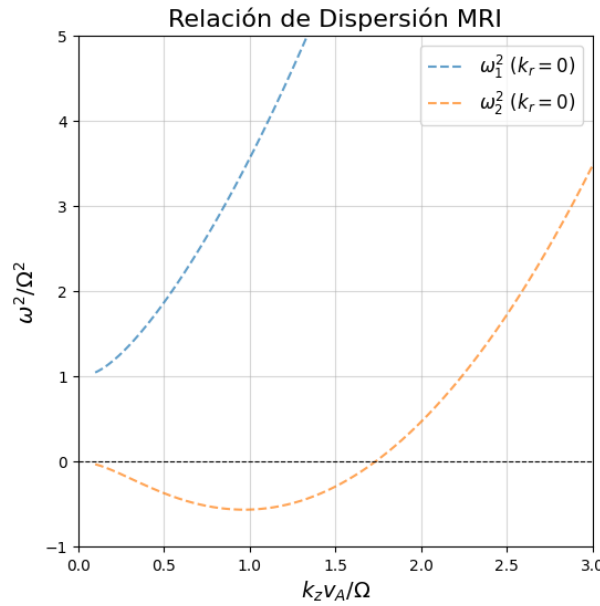


Figura 3.1: Relación de dispersión para el caso de mayor inestabilidad $k_r = 0$.

Las frecuencias de Brunt-Väisälä describen la tendencia de un elemento de fluido debido a un equilibrio entre la flotabilidad y la gravedad. Si un elemento de fluido es desplazado hacia una región diferente, diferentes fuerzas intentarán devolverlo a su posición siempre que el sistema sea estable, esto es, siempre que $N^2 > 0$ [Haverkort, Blank y Koren 2012].

Asimismo, N_r^2 sirve como indicador de la estabilidad frente a desplazamientos radiales, es decir, determina la estabilidad en función de cómo cambia la densidad y la presión a lo largo del disco. Por otra parte, N_z^2 mide la estabilidad frente a desplazamientos axiales, es decir, mide la interacción del material del disco con la gravedad del objeto central. Para el objeto de estudio, se asumirá que ambas frecuencias son reales, asegurando así que el disco sin magnetizar es estable per se, y solo resta estudiar la estabilidad al encontrarse sometido a un campo magnético.

3.4. Criterio de estabilidad

Para mostrar que $\tilde{\omega}^2$ es real y una función continua en la relación de dispersión, se procede a estudiar el caso límite donde $\omega^2 = 0$ y por ende $\tilde{\omega}^2 = -k_z^2 v_A^2$. Reemplazando en la ecuación (3.4) se obtiene:

$$k^2 k_z^2 v_A^4 + \kappa^2 k_z^2 v_{Az}^2 + \left(\frac{k_r^2}{k_z^2} N_z^2 + N_r^2 - 2 \frac{k_r}{k_z} N_z N_r \right) k_z^2 v_{Az}^2 - 4\Omega^2 k_z^2 v_A^2 = 0,$$

cancelando v_{Az}^2 y recordando la definición de k^2 se llega a

$$(k_z^2 + k_r^2) k_z^2 v_{Az}^2 + \kappa^2 k_z^2 + k_r^2 N_z^2 + k_z^2 N_r^2 - 2k_r k_z N_z N_r - 4\Omega^2 k_z^2 = 0,$$

$$k_r^2 (k_z^2 v_{Az}^2 + N_z^2) - 2k_r k_z N_z N_r + k_z^2 (k_z^2 v_{Az}^2 + N_r^2 + \kappa^2 - 4\Omega^2) = 0. \quad (3.14)$$

Ahora, recordando la definición de κ en (3.5), los últimos dos términos se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\kappa^2 - 4\Omega^2 = \frac{2\Omega}{r} \frac{d(r^2\Omega)}{dr} - 4\Omega^2 = \frac{2\Omega}{r} \left(2r\Omega + r^2 \frac{d\Omega}{dr} \right) - 4\Omega^2 = 2\Omega r \frac{d\Omega}{dr},$$

donde, utilizando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\kappa^2 = 2\Omega r \frac{d\Omega}{dr} = r \frac{d\Omega^2}{dr} = \frac{d\Omega^2}{d \ln r}.$$

Así, reemplazando en (3.14) se llega a una ecuación cuadrática para k_r :

$$(k_z^2 v_{Az}^2 + N_z^2) k_r^2 - 2k_z N_z N_r k_r + k_z^2 \left(k_z^2 v_{Az}^2 + N_r^2 + \frac{d\Omega^2}{d \ln r} \right) = 0, \quad (3.15)$$

donde se puede resolver el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ para encontrar qué valores de k_r son reales.

En este punto es pertinente revisar el significado físico del vector de onda. En general, la parte real describe las oscilaciones, mientras que la parte imaginaria corresponde a términos disipativos. En el presente caso, para k_r implica que la parte imaginaria introduce un factor exponencial que atenúa la amplitud de la onda a medida que esta avanza en dirección radial, ergo, hay estabilidad. Esto implica que las fuerzas restauradoras, ya sea por presión magnética o fuerzas de Coriolis, son más grandes que las fuerzas desestabilizadoras. Por otra parte, si k_r toma valores reales, no existe dicha atenuación, de manera que la onda se propaga libremente en dirección radial y esto implica que el plasma es inestable.

En ese orden de ideas, el criterio de estabilidad se da si se cumple que $\Delta < 0$, es decir:

$$4k_z^2 N_r^2 N_z^2 - 4k_z^2 (k_z^2 v_{Az}^2 + N_z^2) \left(\frac{d\Omega^2}{d \ln r} + k_z^2 v_{Az}^2 + N_r^2 \right) < 0, \\ k_z^2 N_r^2 N_z^2 < k_z^2 (k_z^2 v_{Az}^2 + N_z^2) \left(\frac{d\Omega^2}{d \ln r} + k_z^2 v_{Az}^2 + N_r^2 \right), \quad (3.16)$$

donde el último término incluye la contribución de fuerzas centrífugas, y además, $N_z^2 > 0$.

Si $\frac{d\Omega^2}{d \ln r}$ es muy pequeño, el último término puede llegar a ser muy pequeño tal que no se cumpla la desigualdad y $\Delta > 0$, y por lo tanto, inestabilidad. Si $\frac{d\Omega^2}{d \ln r} > 0$, el último término es positivo y suficientemente grande para que $\Delta < 0$, asegurando inestabilidad.

Cabe mencionar que el caso límite donde $\frac{d\Omega^2}{d \ln r} = 0$ permite que se garantice estabilidad dado que $N_z^2 > 0$. En ese orden de ideas, usando la regla de la cadena se define el criterio de estabilidad:

$$\frac{d\Omega}{dr} \geq 0. \quad (3.17)$$

En general, este criterio no se cumple en objetos astrofísicos y se generan inestabilidades. Así que se propone calcular el valor crítico para k_z^2 reescribiendo la ecuación (3.16) rompiendo el paréntesis de la forma:

$$k_z^2 v_{Az}^2 \left(\frac{d\Omega^2}{d \ln r} + N_z^2 + N_r^2 \right) + k_z^4 v_a^4 + N_z^2 \frac{d\Omega^2}{d \ln r} > 0,$$

la cual no es más que una ecuación cuadrática para k_z^2 en el caso límite donde $\Delta = 0$. En ese orden de ideas, el valor crítico para k_z^2 es:

$$(k_z)_{crit}^2 = \frac{1}{2v_A^2} \left[\left(N_z^2 + N_r^2 + \frac{d\Omega^2}{d \ln r} \right)^2 - 4N_z^2 \frac{d\Omega^2}{d \ln r} \right]^{1/2} - \frac{1}{2v_A^2} \left[N_z^2 + N_r^2 + \frac{d\Omega^2}{d \ln r} \right]. \quad (3.18)$$

4. Conclusiones y Discusión

El presente trabajo plantea un primer acercamiento a lo que es la inestabilidad magnetorotacional. Es por ello que se trabaja un caso relativamente simple, como lo es un plasma en forma de disco que rota diferencialmente y es sometido a un campo magnético constante únicamente con componentes vertical y azimutal. Se trabaja teoría de perturbaciones en el régimen lineal, considerando la aproximación de Boussinesq válida, donde las variaciones de densidad son pequeñas y el plasma es incompresible.

Así, se encuentra que ese tipo de plasmas presentan una inestabilidad innata, que depende únicamente del gradiente de la velocidad angular (3.17). Al no trabajar expresiones explícitas de la velocidad angular, este criterio de estabilidad aplica para cualquier sistema que rota diferencialmente $\Omega = \Omega(r)$.

Ahora bien, si se desea realizar una descripción completa de la inestabilidad, es necesario trabajar el régimen no lineal. Para el caso de objetos astrofísicos, no siempre será posible realizar la aproximación de Boussinesq dado que algunos de ellos rotan a altas velocidades. También surge la necesidad de estudiar el comportamiento de estos objetos sometidos a campos magnéticos no uniformes.

Finalmente, se trabajan perturbaciones para la MHD ideal, sin embargo, existen otros modelos, como la Teoría Doble Adiabática (CGL), que describen satisfactoriamente la dinámica de los plasmas sin sacrificar información valiosa como la anisotropía del medio. Si bien ya se ha trabajado el régimen lineal para el caso de plasmas anisótropos compresibles [Quataert 2002], aún resulta necesario realizar un estudio más completo considerando, por ejemplo, las colisiones internas del plasma.

Referencias

- [1] Hannes Alfvén. "Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves". En: *Nature* 150.3805 (1942), págs. 405-406.
- [2] Steven A Balbus y John F Hawley. "A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I-Linear analysis. II-Nonlinear evolution". En: *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 376, July 20, 1991, p. 214-233. 376 (1991), págs. 214-233.
- [3] Steven A Balbus y John F Hawley. "Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks". En: *Reviews of modern physics* 70.1 (1998), pág. 1.
- [4] Subrahmanyan Chandrasekhar, Surindar Kumar Trehan y George Weiss. "Plasma physics". En: *Physics Today* 13.11 (1960), págs. 46-46.
- [5] Johannes Wilhelmus Haverkort, Hugo J de Blank y Barry Koren. "The Brunt-Väisälä frequency of rotating tokamak plasmas". En: *Journal of Computational Physics* 231.3 (2012), págs. 981-1001.
- [6] David I Pontin y Eric R Priest. "Magnetic reconnection: MHD theory and modelling". En: *Living Reviews in Solar Physics* 19.1 (2022), pág. 1.
- [7] Eliot Quataert. "The magnetorotational instability in a collisionless plasma". En: *The Astrophysical Journal* 577.1 (2002), pág. 524.
- [8] EP Velikhov. "Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field". En: *Sov. Phys. JETP* 36.9 (1959), págs. 995-998.

Anexos

A. Cálculo de las ecuaciones linealizadas

Se toma la ecuación de movimiento en general:

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2] = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P, \quad (\text{A.1})$$

al asumir las condiciones de equilibrio se llega a la ecuación de equilibrio

$$\rho_0 \left[\frac{1}{2} (\Omega^2 \nabla r^2) \right] = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 - \nabla P_0. \quad (\text{A.2})$$

Si ahora a la ecuación de movimiento, se le reemplaza los campos perturbados considerados y se toma el régimen lineal (despreciamos los términos de segundo perturbativos de segundo orden), la ecuación de movimiento queda:

$$\rho_0 [\partial_t \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 - 2\boldsymbol{\Omega}(R) \times \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}) \times \mathbf{r}|^2] = \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla P_1 - \nabla P_0. \quad (\text{A.3})$$

Si se toma la ecuación de continuidad y le aplicamos la forma de los campos perturbados, obtenemos que $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, de la ligadura anterior podemos desarrollar el término $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$ de la ecuación de movimiento, este término se anula, ya que $(\mathbf{v}_1 \cdot i\mathbf{k}) \mathbf{v}_1$ y como el producto punto es conmutativo, entonces $(\mathbf{v}_1 \cdot i\mathbf{k}) \mathbf{v}_1 = 0$, por ende la ecuación de movimiento queda:

$$\rho_0 [\partial_t \mathbf{v}_1 - 2\boldsymbol{\Omega}(R) \times \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}) \times \mathbf{r}|^2] = \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla P_1 - \nabla P_0. \quad (\text{A.4})$$

Se desarrolla ahora el término de la aceleración centrífuga, $\frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}) \times \mathbf{r}|^2$, el cual aplicando regla de la cadena queda:

$$\frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}) \times \mathbf{r}|^2 = \nabla \Omega^2(R) r^2 + \Omega^2(R) \nabla r^2, \quad (\text{A.5})$$

entonces la ecuación de movimiento queda de la forma:

$$\rho_0 [\partial_t \mathbf{v}_1 - 2\boldsymbol{\Omega}(R) \times \mathbf{v}_1 + \nabla \Omega^2(R) r^2 + \Omega^2(R) \nabla r^2] = \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla P_1 - \nabla P_0, \quad (\text{A.6})$$

se observa que al sustituir la ecuación de equilibrio en la ecuación anterior, el término $\rho(\Omega^2(R) \nabla r^2)$ se cancela con $\nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 - \nabla P_0$ por lo que la ecuación de movimiento se reescribe como

$$\rho_0 [\partial_t \mathbf{v}_1 - 2\boldsymbol{\Omega}(R) \times \mathbf{v}_1 + \nabla \Omega^2(R) r^2] = \nabla \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla P_1, \quad (\text{A.7})$$

luego al usar la identidad vectorial del triple producto cruz, el término de presión y tensión magnética se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 &= \nabla \left(\frac{B_0 B_1}{2} \right) + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0, \\ \nabla \times \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 &= \nabla \left(\frac{B_0 B_1}{2} \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

como \mathbf{B}_0 es uniforme, el término $(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)\mathbf{B}_0$ se desvanece, por lo que al reemplazar lo anterior en la ecuación de movimiento, se obtiene

$$\rho_0[\partial_t \mathbf{v}_1 - 2\boldsymbol{\Omega}(R) \times \mathbf{v}_1 + \nabla \Omega^2(R)r^2] = \nabla\left(\frac{B_0 B_1}{\mu_0}\right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1 - \nabla P_1, \quad (\text{A.9})$$

por último vease el término $\nabla \Omega^2(R)r^2$, como Ω solo depende del término radial, el gradiente de este será $\frac{d\Omega^2}{dR}r^2\hat{R}$

por ende la ecuación de movimiento queda como:

$$\rho_0[\partial_t \mathbf{v}_1 - 2\boldsymbol{\Omega}(R) \times \mathbf{v}_1 + \frac{d\Omega^2}{dR}r^2\hat{R}] = \nabla\left(\frac{B_0 B_1}{\mu_0}\right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1 - \nabla P_1, \quad (\text{A.10})$$

Al descomponer por componentes las ecuaciones MHD y poner los campos perturbados de la forma de ondas planas, i.e sustituir las derivadas temporales por $-i\omega$ y las espaciales por $i\mathbf{k} = i(\mathbf{k}_R + \mathbf{k}_z)$ en la ecuación de movimiento, de inducción y continuidad se obtienen las ecuaciones (3.4a - 3.4g)