

Estimación de la aceleración de la gravedad mediante la oscilación de un péndulo

Brayan Santiago Amorocho Lizcano^{*}

Santiago Andrés Montes Camacho^{**}

Juliana Paola Andrade Rodriguez^{***}

*Universidad Industrial de Santander
Cra 27 Calle 9 Ciudad Universitaria*

30/09/2021

^{*}e-mail: brayansantiagoamorocho@gmail.com

^{**}e-mail: santiagoamontes@gmail.com

^{***}e-mail: juliandra080817@gmail.com

Índice

1. Introducción	4
2. Metodología	5
2.1. El Montaje Experimental	6
2.2. La Simulación Teórica	7
2.3. El Simulador PHET	8
3. El experimento y los resultados	9
3.1. Cuando la longitud de la cuerda es de alrededor de 1 metro:	9
3.1.1. Movimiento gradual	9
3.1.2. Velocidad Angular	11
3.1.3. Comparación con la teoría	13
3.2. Cuando la longitud de la cuerda es de 0.5 metros:	17
3.2.1. Movimiento Gradual	17
3.2.2. Velocidad angular	19
3.2.3. Comparación con la teoría	21
3.3. Los resultados del simulador	26
4. Errores y Precisión	28
5. Conclusiones y Recomendaciones	30
6. Referencias	31

Resumen

El presente estudio aborda el entendimiento de la oscilación de un péndulo simple a través del tiempo con el fin de calcular, mediante las variables involucradas en el movimiento, una estimación del valor de la gravedad en la ciudad de Bucaramanga. Para ello se realizó un montaje experimental en el cual se evalúan 4 ángulos distintos de 5° , 12° , 20° , y 33° ; masas de 300 g y 400 g ; y longitudes de cuerda de 0.5 m y 1.05 m . De igual manera, se repitió 10 veces la medición de cada uno de los casos con el fin de estimar la precisión.

Los resultados experimentales permitieron obtener una aproximación al periodo oscilatorio del péndulo para cada ángulo y longitud de cuerda, través del análisis cuantitativo de los datos obtenidos. Asimismo, se establecieron los márgenes de error en relación al promedio de la medición de cada caso estudiado, y la desviación en cuanto a sus medidas para cada cierto tiempo de oscilación.

En este orden de ideas, se concluye que aquellos ángulos de 5° y 12° son los que arrojan un menor margen de error, se establecen las posibles intervenciones de la fuerzas de fricción del aire, y se calcula un valor para la aceleración de gravedad de aproximadamente $8,8 \pm 0,61\text{ m/s}^2$ en un ambiente real, lo que involucra el rozamiento y sus efectos en el periodo del movimiento.

1. Introducción

La mecánica clásica marcó un evento muy importante dentro del avance del conocimiento científico; desde el entendimiento de la gravedad, hasta la dinámica de los cuerpos y sus aplicaciones prácticas. Son estos descubrimientos los que permiten una construcción complementaria de los nuevos aportes que logran alcanzarse a través de los años. De la misma manera en que se comprende las fuerzas que intervienen en un cuerpo en reposo o en movimiento, puede deducirse la variación que tendrá ya sea a través del tiempo, de un ángulo específico, de una distancia delimitada o cualquier otra variable de la cual se desee partir para interpretar algún fenómeno.

Asimismo, algo característico y a la vez impresionante de la física es permitir comprobar o debatir aquello que se tenía por certero, mediante la relación de los nuevos avances y estableciendo una relación que, o bien esté acorde a las bases que se afirman con anterioridad, o las complementen permitiendo un mejor panorama objetivo; del cual puedan estimarse conclusiones interesantes.

Es por ello que, teniendo como objetivo principal del presente estudio estimar el valor de la gravedad, se partirá del conocimiento obtenido respecto al comportamiento de oscilación de un péndulo simple (descrito de manera muy precisa como un sólido rígido de forma arbitraria que puede oscilar en un plano vertical que contenga a su centro de masa, alrededor de un eje perpendicular a dicho plano[1]). Esto permitirá establecer una relación entre estos dos campos, los cuales pueden catalogarse como pertenecientes a la misma rama estudiada (mecánica), obteniendo así información pertinente para llevar a cabo una aproximación muy realista a esta magnitud tan importante en el estudio de los cuerpos en un campo gravitacional no despreciable.

De la misma manera, se podrá abordar el proceso de calcular la aceleración gravitatoria en la tierra desde una perspectiva diferente a la tradicional, aportando un nuevo enfoque del problema y un planteamiento objetivo mediante la comparación teórica y experimental, evidenciando así los resultados obtenidos y su interpretación correspondiente.

2. Metodología

El objetivo planteado del estudio, tal como se ha indicado con anterioridad, consiste en estimar la aceleración de la gravedad a través del entendimiento de la oscilación de un péndulo. Para ello es de gran importancia tener una buena base conceptual de la descripción de este movimiento en cuestión.

Para comprender las oscilaciones que realiza un péndulo, y de la misma manera poder hacer predicciones acertadas al respecto, se debe abordar con precaución el movimiento periódico, el cual puede aproximarse como un caso del movimiento armónico simple para ángulos no muy altos. En este sistema, una partícula con cierta masa realiza un movimiento periódico a través del tiempo, debido a que al partir de un ángulo inicial diferente de 0° , la componente horizontal de su peso diferirá de 0 N , por lo que la partícula estudiada comenzará a moverse.

Cabe resaltar el hecho de que, teóricamente, la energía inicial con la cual parte el objeto en cuestión debe ser igual a la energía final de su ciclo; es decir, no puede aumentar su ángulo de llegada respecto al inicial. Sin embargo, y como este sistema no se encuentra en el vacío sino que está en presencia de moléculas gaseosas, las cuales interfieren con el movimiento del cuerpo. Entonces aparecerá la fuerza de rozamiento sobre su superficie, y por ende la energía se comenzará a disipar conforme transcurran las oscilaciones. Es por ello que es posible que a medida que transcurre el tiempo, el ángulo final irá disminuyendo según la fuerza de rozamiento que presente el sistema.

Teniendo esto claro pueden plantearse las fórmulas matemáticas que permiten establecer la relación entre cada una de las variables que intervienen en el movimiento del péndulo. En el libro de los físicos Raymond A. Serway y John W. Jewett [2] se sintetiza esto de la siguiente manera:

$$F_t = -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (1)$$

donde F_t es la componente del peso horizontal del cuerpo, m su masa y g el valor de la gravedad. Además $\frac{d^2 s}{dt^2}$ corresponde a la derivada segunda de la posición en función del tiempo, o lo que es lo mismo, la aceleración tangencial.

Partiendo de la anterior fórmula, y conociendo que $s = R\Delta\theta$, es decir, el producto del radio (la longitud de la cuerda en la cual oscila el péndulo, que se denotará como L) y del ángulo, puede llegarse a lo siguiente:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \quad (2)$$

De esta manera, comprendiendo a $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ como la aceleración angular (α), y teniendo en cuenta que cuando se trabaja en ángulos pequeños el $\sin(\theta) \approx \theta$, se puede finalmente expresar:

$$\alpha \approx -\frac{g}{L} \theta \quad (3)$$

También debe entenderse la variable de la velocidad angular (ω) como la derivada del ángulo en función del tiempo, y el periodo (T) como el tiempo que el péndulo tarda en completar una oscilación.

Además como se trabajan con pequeños ángulos puede estudiarse ω como un movimiento armónico simple. De esta forma, es correcto formular las siguientes relaciones:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \approx \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{o} \quad g \approx \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (4)$$

Por lo que, conceptualmente es válido afirmar que el periodo, la longitud de la cuerda y la gravedad están relacionadas entre sí, lo cual permitirá delimitar de una mejor manera el proceso a seguir durante el planteamiento experimental y teórico.

Finalmente, hay que aclarar que en la fórmula 2, cuando se habla de la aproximación de $\sin(\theta) \approx \theta$, solo aplica para ángulos muy pequeños (Aproximadamente menores que un radián) [3]. Se trabajará con aquellos ángulos pequeños cuya aproximación no dé un margen de error de más del 3%, además de uno considerablemente mayor con el fin de demostrar que esta aproximación no siempre es válida. Para ello, se corrió un código en Python¹ que permitiera calcular el ángulo cuyo seno difiere en un 3% de su valor (en radianes, claro está) y se llegó a la conclusión de que realizar esta aproximación es válida para ángulos menores a aproximadamente 0,4242 radianes, lo que en grados equivale a 24,30°. De modo que se utilizarán ángulos de 5°, 12°, 20° y 33°.

2.1. El Montaje Experimental

Se planteará un péndulo conformado por una botella de agua con 300mL (300 mg) y 400mL (400mg), y una cuerda de 1,05 m y 0,5 m. Cabe resaltar que, tal como se ha inferido, la masa no debería influir en la oscilación del péndulo, sin embargo esto será evaluado durante la experimentación con el fin de determinar qué tan certera es tal afirmación, y para qué casos aplica realmente. De igual manera se trabajarán con cuatro ángulos (5°, 12°, 20° y 33°); con el fin de determinar qué tanto difiere el cambio de las variables estudiadas conforme aumenta el ángulo inicial. También es importante aclarar que inicialmente se iba a trabajar con una cuerda de longitud de 1 m. Sin embargo, luego de armar el montaje experimental y realizar la medición de la cuerda colgada al techo, dicha medida resultó ser de 1,05 m, y no de 1 m. Además, como no se sabía con certeza qué afectaciones podría tener este cambio de parámetros iniciales en los resultados, se optó por trabajar con esa longitud tanto en el experimento, como en la simulación teórica.

De esta manera, realizarán 10 veces las mediciones de cada uno de los siguientes casos:

- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 5° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 5° y masa: 400 g.
- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 12° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 12° y masa: 400 g.
- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 20° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 20° y masa: 400 g.

¹Aproximando la función seno en ángulos pequeños

- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 33° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 1,05 m, ángulo inicial: 33° y masa: 400 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 5° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 5° y masa: 400 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 12° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 12° y masa: 400 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 20° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 20° y masa: 400 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 33° y masa: 300 g.
- Longitud de cuerda: 0,5 m, ángulo inicial: 33° y masa: 400 g.

El proceso se llevará a cabo cargando el video de cada prueba en el programa *Tracker*, el cuál va a hacer un seguimiento por cada *FPS* (Frame o cuadro por segundo) del ángulo en un instante t , así como también el cálculo de la velocidad angular ω en dicho intervalo. Para facilitar las cosas se utilizará como fondo una pared blanca, puesto que, siendo la tapa de la botella utilizada de color rojo, será más sencillo en *Tracker* seguir dicho punto a lo largo del movimiento, resultando así más rápido y eficiente. Igualmente se sostendrá el péndulo de un adhesivo para colgar desde el techo, para así evitar rozamiento con alguna superficie sólida como lo podría ser la pared. Es importante mencionar que pese a que las experimentaciones se lleven a cabo con el mayor cuidado posible, es imposible evitar la fricción con el aire, es por ello que se estudiará un largo intervalo de tiempo para así estimar hasta qué periodo oscilatorio la fricción es lo suficientemente baja como para no afectar demasiado el movimiento.

2.2. La Simulación Teórica

En lo que concierne al modelo teórico, se escribirá un código en lenguaje Python, utilizando la versión más reciente hasta la fecha, es decir, la versión 3.9.6. Se optó por utilizar este lenguaje de programación dada su versatilidad y sencillez de entender dado que es muy intuitivo. Además, se va a trabajar en *Jupyter notebook*, un entorno informático interactivo basado en la web (RIA) donde se puede escribir código de Python en un formato más interactivo. Ahora bien, la finalidad del montaje teórico es compararlo con la realidad. Es por eso que se va a recrear el montaje experimental, de acá saldrán las gráficas y datos necesarios para estimar la aceleración de la gravedad. Entonces, como se mencionó en el planteamiento del montaje experimental [2.1], se trabajarán 4 ángulos, con 2 longitudes de cuerda y 2 masas diferentes. Es decir, se presentarán $4 \times 2 \times 2 = 16$ casos posibles, cada uno con 10 repeticiones con el fin de estimar la precisión del experimento. Por lo tanto, habrán 16 posibles escenarios teóricos y por ende, 16 gráficas que permitan comparar dichos escenarios con los ocurridos en el mundo real. Por último, con el fin de poder compartir el código resultante de

una forma más sencilla y menos tediosa, se trasladó el código a una interfaz de *Google Colab*, que es básicamente lo mismo que Jupyter Notebook, solo que al almacenar en la nube permite la creación de *hyperlinks*, los cuales le dan acceso al código a cualquier persona.

2.3. El Simulador PHET

Finalmente, internet es un vasto campo de conocimiento. En él se encontró un simulador que cae como anillo al dedo para este caso: Un simulador del movimiento de un péndulo en un ambiente sin fricción (PHET)², cortesía de la Universidad de Colorado. Se utilizará dicho simulador para comparar la efectividad de la simulación teórica y experimental. Cabe resaltar el hecho de que es un ambiente sin fricción, por ende, se intuye que no es comparable con la realidad, sin embargo, servirá para realizar una estimación de la fricción presente y por ende una estimación de la gravedad. Pero de ello se ahondará en la sección de resultados [3.3], donde se retomará esta herramienta.

²https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_en.html

3. El experimento y los resultados

Se procedió a realizar el experimento y su debida comparación con el modelo teórico³. Es decir, se grabaron 160 vídeos, y se analizaron en *Tracker*. Los datos obtenidos en tracker se guardaron en hojas de cálculo⁴ para su posterior comparación con el mundo ideal. Además, dado que teóricamente el periodo de oscilación de un péndulo depende más que nada de la longitud de la cuerda, y con el fin de presentar los resultados de una manera más organizada, se separó cada caso en secciones en función de la longitud de la cuerda, así:

3.1. Cuando la longitud de la cuerda es de alrededor de 1 metro:

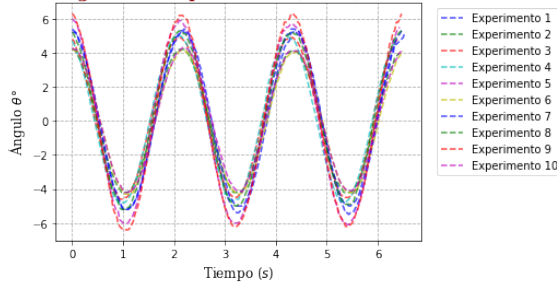
Cuando la longitud de la cuerda es de 1,05 m, se presentan 4 posibles valores del ángulo (5° , 12° , 20° , 33°). Se llevó a cabo el análisis del movimiento gradual y la velocidad angular de cada caso. Y posteriormente se comparó con el modelo teórico en Python.

3.1.1. Movimiento gradual

En las figuras 1, 2, 3 y 4 se ve la variación del ángulo en grados a lo largo de siete segundos aproximadamente. Se puede apreciar que se trabajaron masas distintas (la misma botella, con distinto volumen). En las figuras de la izquierda se grafican los datos obtenidos cuando la botella presentaba una masa igual a 300 gramos, mientras que a la derecha se ven las gráficas obtenidas cuando oscilaba una masa de 400 gramos.

Más adelante, en la sección [3.1.3] se realizará un promediado de estos datos para poder compararlos más fácilmente. Sin embargo, sin necesidad de comparar las gráficas con la teoría, se puede observar que cada par de gráficas presentan periodos muy similares. El cálculo del periodo a partir de los datos obtenidos se encuentra más adelante al final de la sección [3.1], junto con la respectiva estimación de la aceleración de la gravedad.

Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 5^\circ$) - 300ml - 1.05m.



Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 5^\circ$) - 400ml - 1.05m.

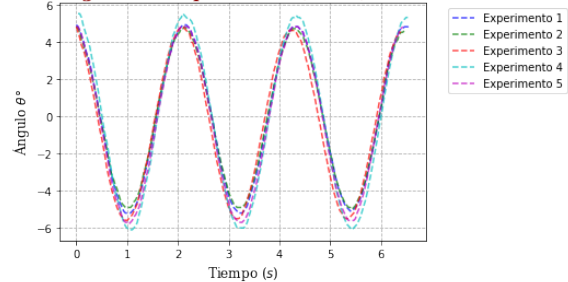
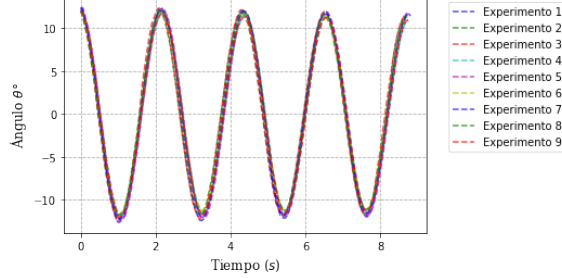
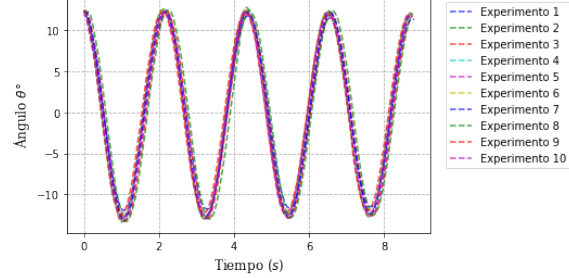
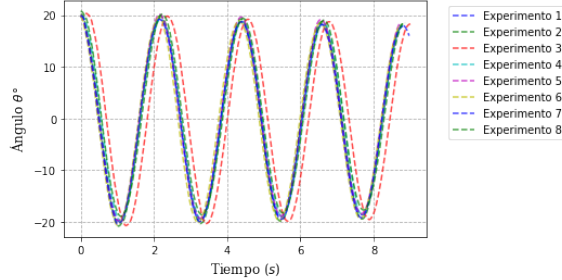
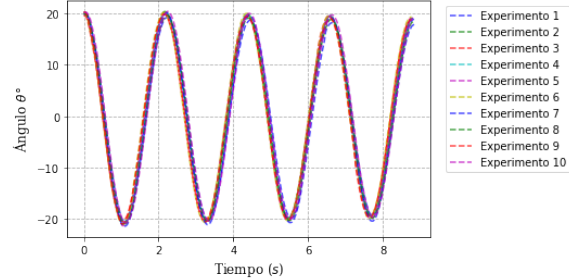
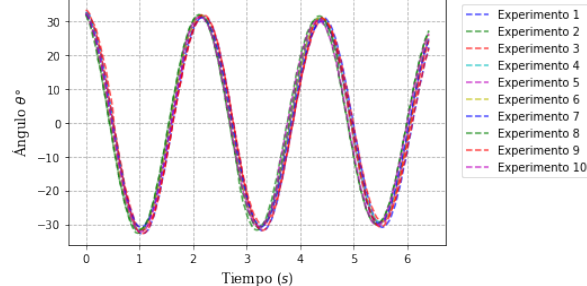
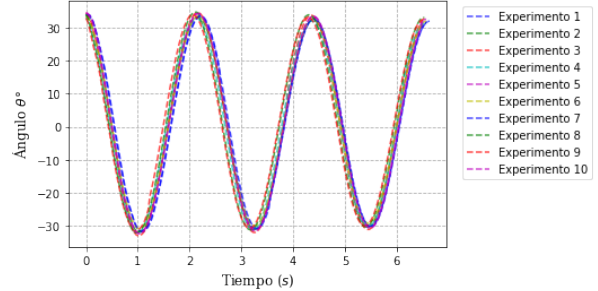


Figura 1: Variación del ángulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 5° .

³Código del modelo teórico - Y otros datos

⁴Datos Experimentales

Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 12^\circ$) - 300ml - 1.05m.**Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 12^\circ$) - 400ml - 1.05m.**Figura 2: Variación del ángulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 12° .**Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 1.05m.****Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 1.05m.**Figura 3: Variación del ángulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 20° .**Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 33^\circ$) - 300ml - 1.05m.****Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 1.05m.**Figura 4: Variación del ángulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 33° .

De igual forma, se puede ver que la amplitud de la gráfica generada va decreciendo con el paso del tiempo. Esto es obra de la fuerza de fricción, puesto que se puede observar que en la gráfica 4 la amplitud decrece más notablemente que en la figura 1. Y esto se debe precisamente a que entre mayor sea el ángulo, mayor es la velocidad. Y entre más veloz sea la masa, mayor fuerza de fricción

presenta [4]. Por lo tanto, se procedió a analizar el comportamiento de la velocidad angular.

3.1.2. Velocidad Angular

De igual forma, en las figuras 5, 6, 7 y 8 se observan los datos obtenidos respecto a la velocidad angular. Es importante tener en cuenta que, dado que la fórmula 2 de aproximación del seno se hace con un ángulo en radianes, la velocidad angular se ve relativamente pequeña. Sin embargo, se confirma lo dicho en la sección [3.1.1], la velocidad angular de la figura 5 es considerablemente mayor que la de las figuras 7 y 8.

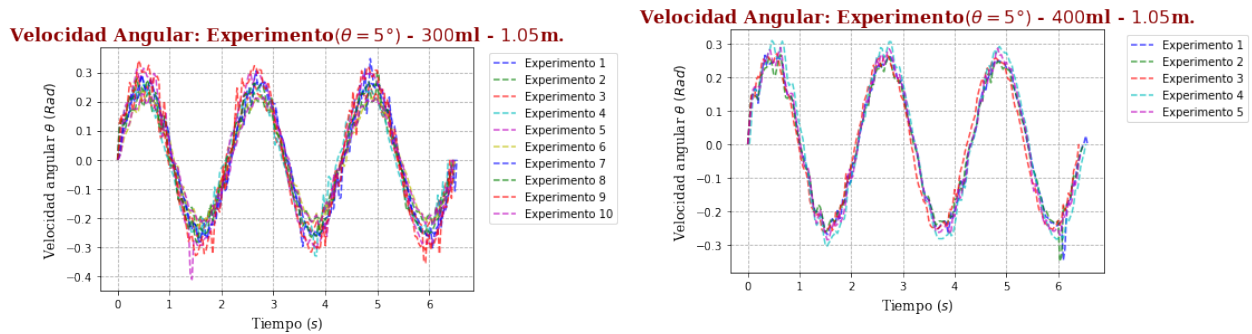


Figura 5: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 12° .

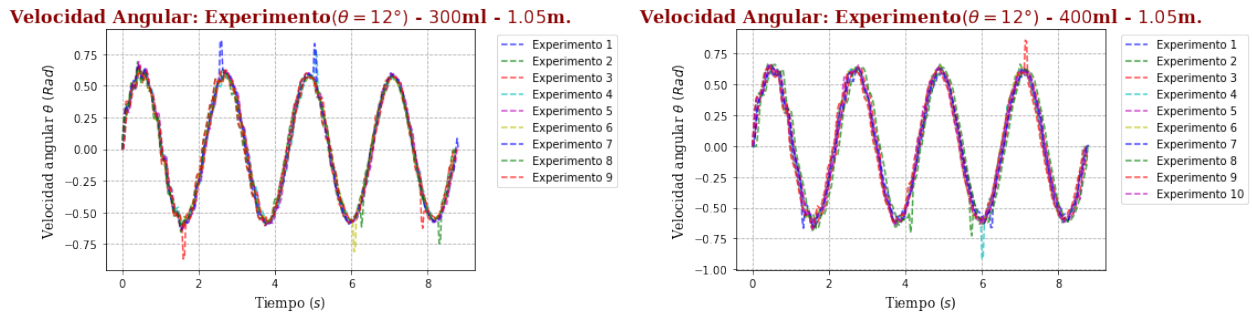
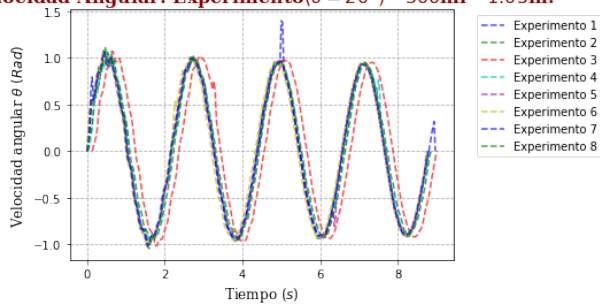
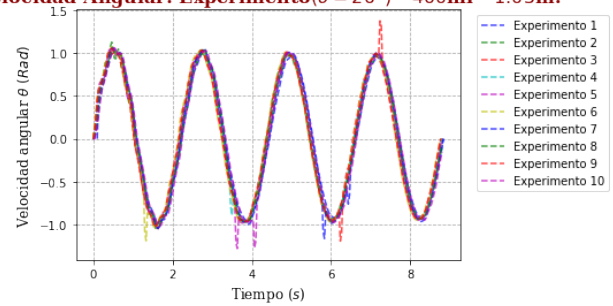
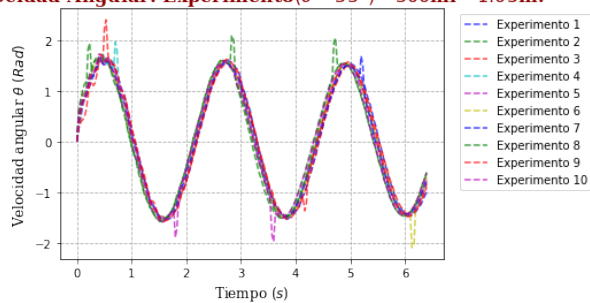
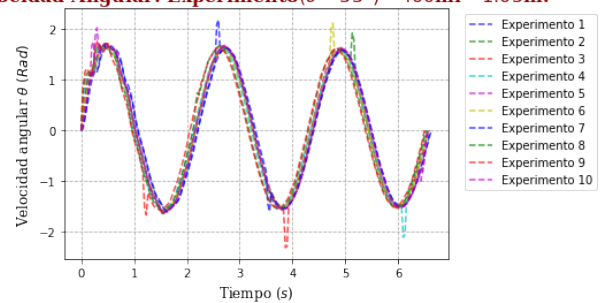


Figura 6: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 12° .

De manera más concreta, para ángulos pequeños: Cuando el ángulo inicial es 5° , la velocidad angular escasamente supera los 0.3 rad/s , sin importar su masa. Cuando $\theta = 12^\circ$, la velocidad angular máxima es de aproximadamente $0,70 \text{ rad/s}$. Mientras que cuando el ángulo es de 20° , la velocidad angular alcanza a superar la unidad (1 rad/s). Y para el ángulo grande (30°), la velocidad angular es varía entre 1 rad/s .

Velocidad Angular: Experimento($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 1.05m.**Velocidad Angular: Experimento($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 1.05m.**Figura 7: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 20° .**Velocidad Angular: Experimento($\theta = 33^\circ$) - 300ml - 1.05m.****Velocidad Angular: Experimento($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 1.05m.**Figura 8: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 33° .

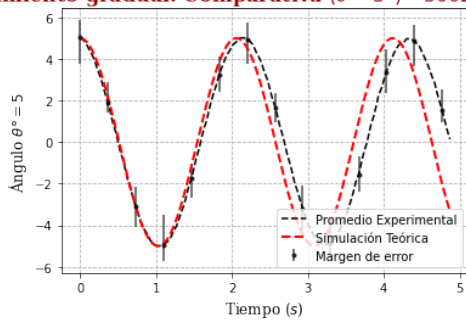
Otra vez, se recomienda revisar las tablas de datos obtenidos en Tracker con el fin de obtener valores más exactos de la aceleración angular.⁵ Finalmente, se llegó a la conclusión de que la fuerza de fricción o rozamiento podría afectar los resultados de la estimación de la gravedad, pues ésta sería menor a la real. Por lo tanto, se decidió tener en cuenta únicamente las primeras dos oscilaciones del péndulo en cuestión. Donde se supone que la fricción (que aumenta a medida que pasa el tiempo) aún no ha alterado considerablemente los datos.

⁵Datos Experimentales

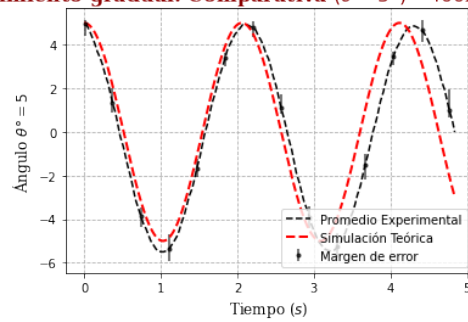
3.1.3. Comparación con la teoría

En las figuras 9, 10, 11 y 12 se muestra la comparación entre la simulación hecha en Python y el promedio de la parte experimental. Tras comparar cualquier resultado experimental con el modelo teórico se hace muy obvia la presencia de la fuerza de fricción. En estas graficas se puede apreciar cómo en los diferentes ángulos el margen de error se vuelve más notable a medida que pasa el tiempo. En el movimiento gradual experimental se ve que cada vez le cuesta más tiempo al objeto completar cada oscilacion, como si fuese “retenido”, mientras tanto, en la velocidad angular se observa como varia cada vez más, haciendose más tardia. La mayor razón por la que el margen de error se vuelve cada vez mayor en todos los resultados es debido a que en la simulación la fricción es despreciable, mientras en el teorico, ésta claramente está afectando.

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 300ml - 1.05m. Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 400ml - 1.05m.

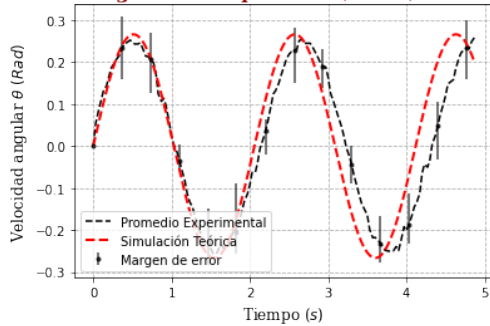


(a)



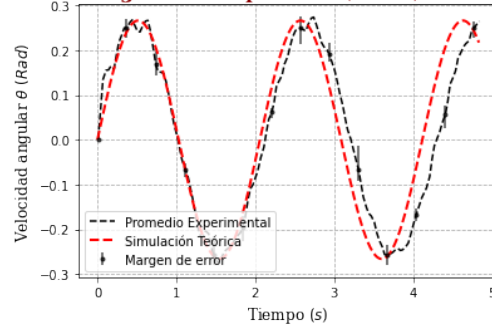
(b)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 300ml - 1.05m.



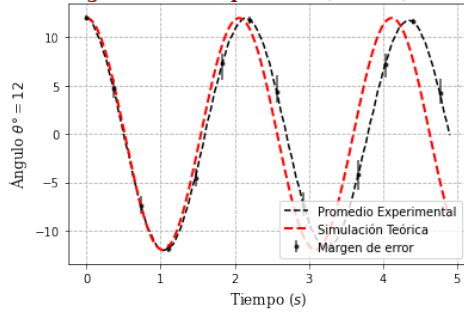
(c)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 400ml - 1.05m.

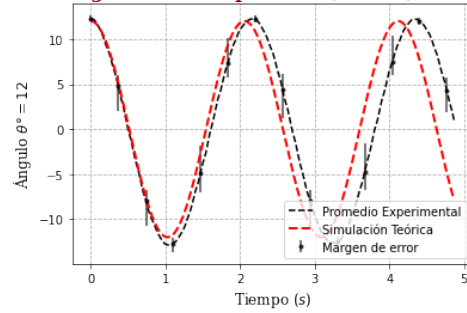


(d)

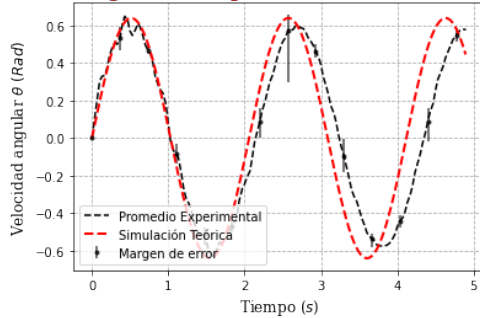
Figura 9: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 5° .

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 300ml - 1.05m.

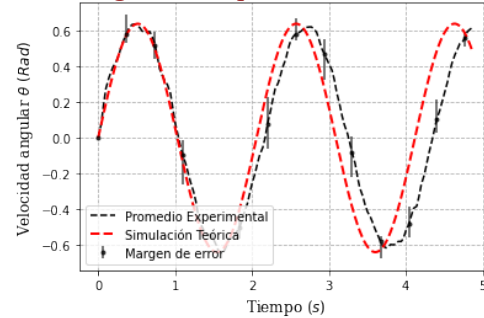
(a)

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 400ml - 1.05m.

(b)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 300ml - 1.05m.

(c)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 400ml - 1.05m.

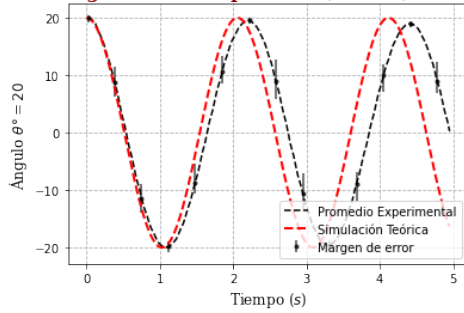
(d)

Figura 10: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 12° .

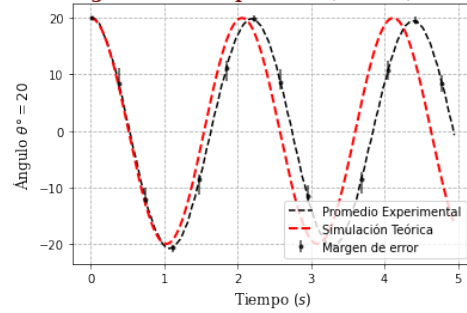
Por ejemplo, en las figuras 9a, 9b, 11c, 11d, 11a, 11b, 12c y 12d, se observa cómo los valores que toma el ángulo experimental promedio es sumamente similar a los valores teóricos. Sin embargo, esta armonía se pierde a medida que pasa el tiempo, puesto que la variación del ángulo experimental tiende a ser “retenida”, tomándole cada vez más tiempo completar cada oscilación. Y es precisamente esta “retención” la misma fuerza de rozamiento mencionada anteriormente.

Sin embargo, en en las de los dos primeros ángulos (5° y 12°) se puede ver que la primera oscilación del ángulo es sumamente similar a la oscilación teórica. Esto indica que en este primer momento (de aproximadamente 2 segundos) no hubo fuerza de fricción considerable.

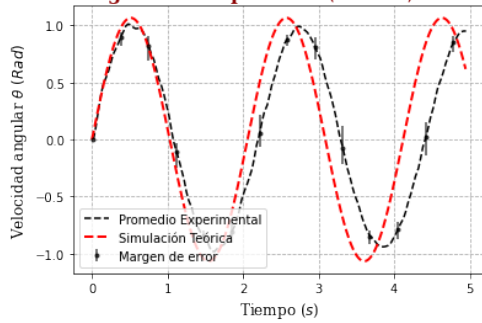
Y es justamente por esto que, al momento de calcular datos como el periodo de oscilación o el margen de error, se tendrán en cuenta únicamente las primeras dos oscilaciones registradas en cada experimento.

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 1.05m.

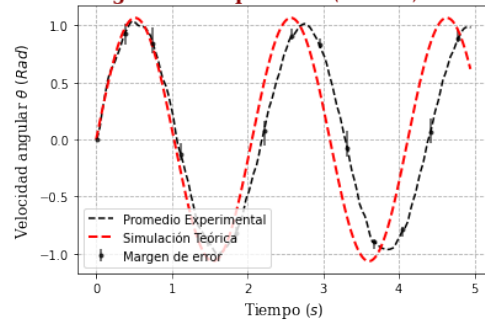
(a)

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 1.05m.

(b)

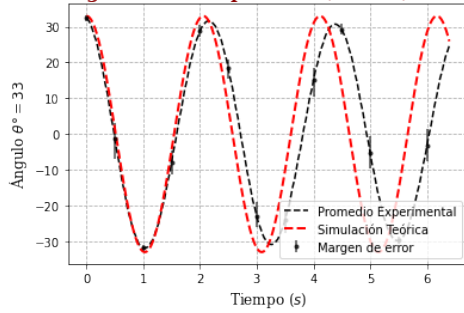
Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 1.05m.

(c)

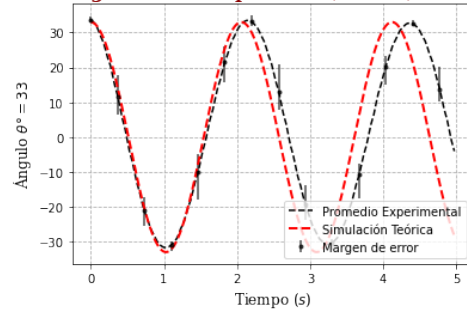
Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 1.05m.

(d)

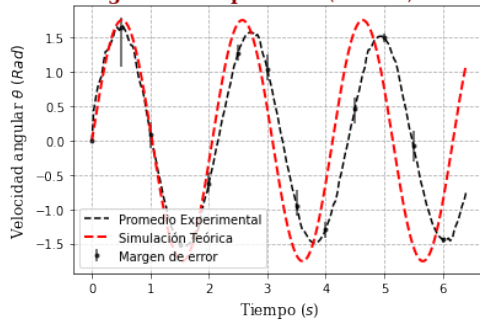
Figura 11: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 20° .

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 300ml - 1.05m.

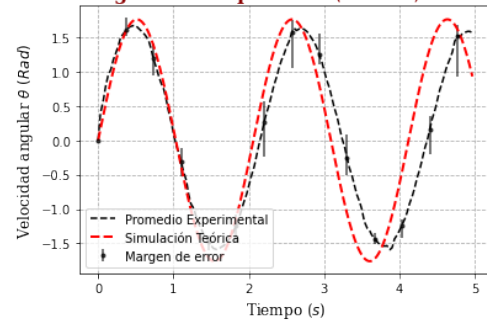
(a)

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 1.05m.

(b)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 300ml - 1.05m.

(c)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 1.05m.

(d)

Figura 12: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 33° .

Ahora bien, a partir de los datos que arroja tracker, combinados con el poder de Python, se puede estimar el valor del periodo (en promedio) y de la gravedad para cada caso. Es decir, para las masas de 300 g y 400 g. Se hizo uso de las fórmulas mencionadas en la metodología (fórmula 4). Los resultados se observan en la tabla ??.

Ángulo Inicial (θ°)	Masa (g)	Periodo(seg)	Gravedad(m/s^2)
5	3 00	2,08	9,6
5	4 00	2,1	9,4
12	3 00	2,08	9,6
12	4 00	2,1	9,4
20	3 00	2,2	8,6
20	4 00	2,23	8,3
33	3 00	2,1	9,4
33	400	2,1	9,1

Tabla 1: Valores estimados del periodo y la gravedad cuando la cuerda mide 1,05 metros.

Según esta tabla, la gravedad promedio es de aproximadamente $9,2 m/s^2$. Más adelante se comparará con el valor obtenido en la sección [3.2.3] y además, se analizará la confiabilidad de este valor en la sección de errores y precisión[4].

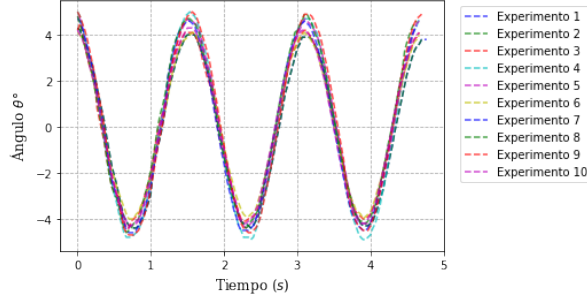
3.2. Cuando la longitud de la cuerda es de 0.5 metros:

Para este caso se presentan 4 posibles valores del ángulo(5° , 12° , 20° , 33°) y se analiza :

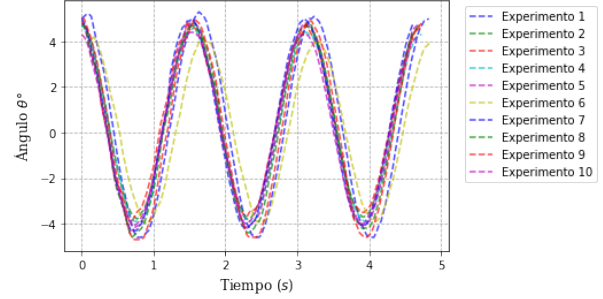
3.2.1. Movimiento Gradual

En la figuras 13, 14, 15, 16, se aprecia una cercanía bastante pronunciada, lo cual puede percatarse por la superposición de las líneas de cada uno de los experimentos, lo que genera un resultado muy similar al obtenido por una gráfica experimental independiente.

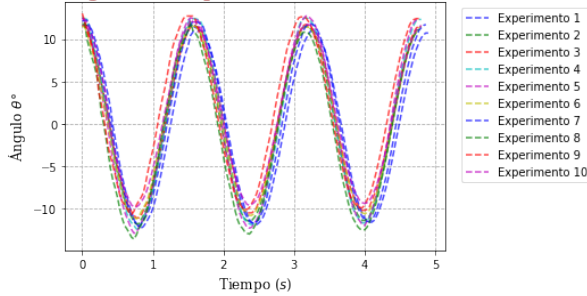
Lo mismo puede inferirse del periodo, el cuál tiende a coincidir para cada uno de los experimentos pertenecientes a un mismo caso.

Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 5^\circ$) - 300ml - 0.5m.

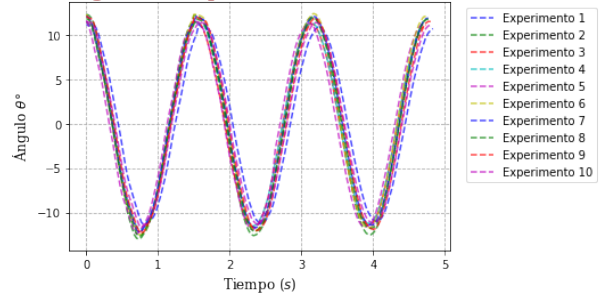
(a)

Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 5^\circ$) - 400ml - 0.5m.

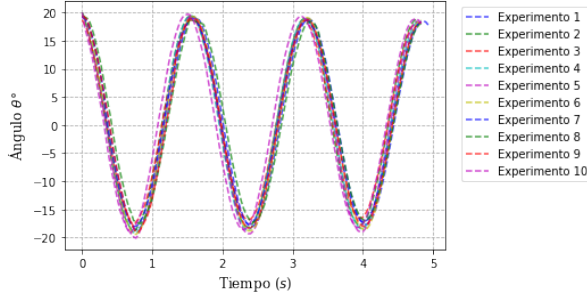
(b)

Figura 13: Variación del angulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 5° .**Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 12^\circ$) - 300ml - 0.5m.**

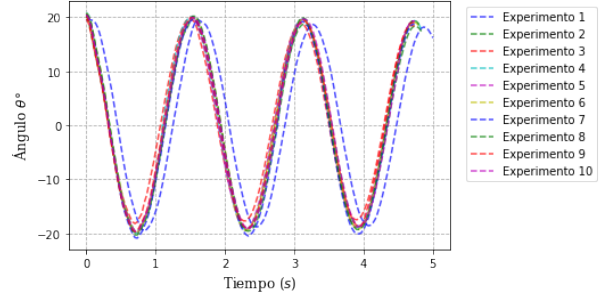
(a)

Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 12^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

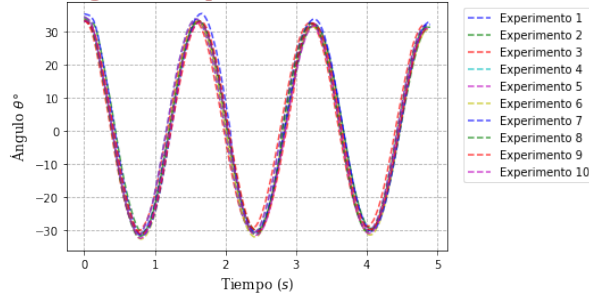
Figura 14: Variación del angulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 12° .**Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 0.5m.**

(a)

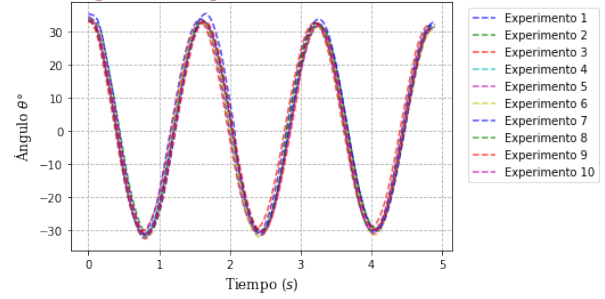
Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

Figura 15: Variación del angulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 20° .

Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(a)

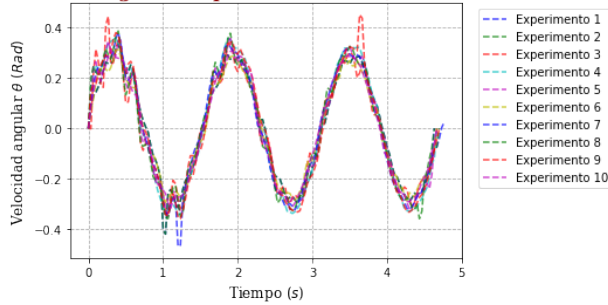
Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

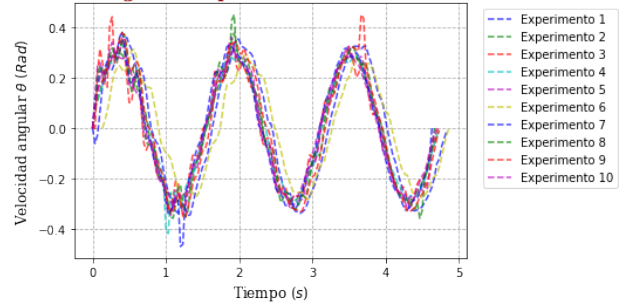
Figura 16: Variación del ángulo en grados en función del tiempo cuando el ángulo es de 33° .

3.2.2. Velocidad angular

En las figuras 17, 18, 19, 20, puede verse que durante las tres oscilaciones los periodos se asemejan en gran medida. En algunos casos se presentan disparidades puntuales, sobretodo en aquellos puntos en los que el valor absoluto de la velocidad es máximo. También suele presentarse cuando la velocidad angular va en aumento o en disminución progresiva. Aún así, la tendencia a lo largo del tiempo es similar para cada uno de los movimientos.

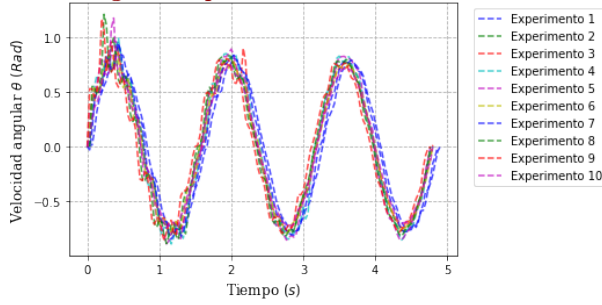
Velocidad Angular: Experimento($\theta = 5^\circ$) - 300ml - 0.5m.

(a)

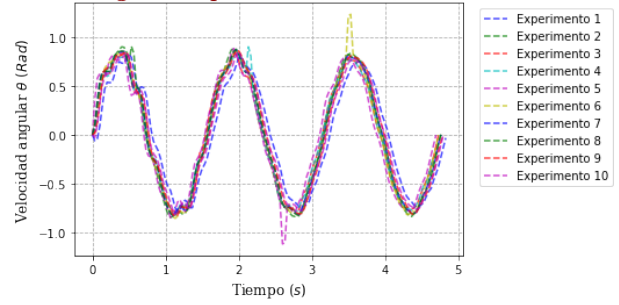
Velocidad Angular: Experimento($\theta = 5^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

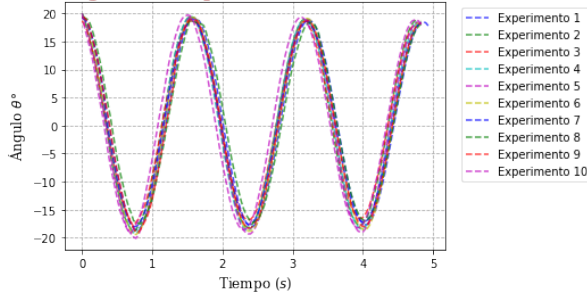
Figura 17: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 5° .

Velocidad Angular: Experimento($\theta = 12^\circ$) - 300ml - 0.5m.

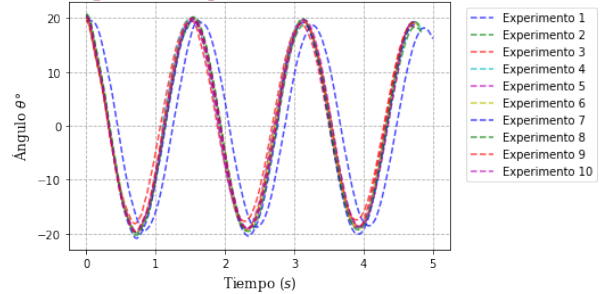
(a)

Velocidad Angular: Experimento($\theta = 12^\circ$) - 400ml - 0.5m.

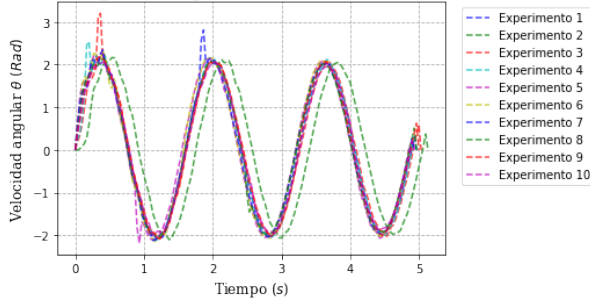
(b)

Figura 18: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 12° .**Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 0.5m.**

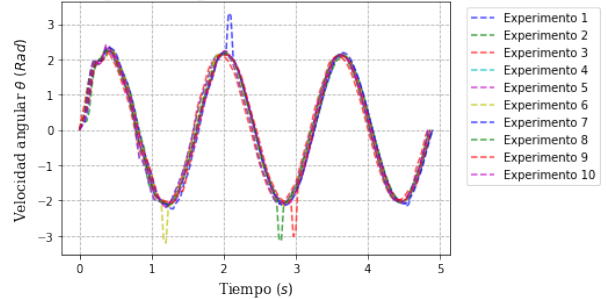
(a)

Movimiento gradual: Experimento ($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

Figura 19: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 20° .**Velocidad Angular: Experimento($\theta = 33^\circ$) - 300ml - 0.5m.**

(a)

Velocidad Angular: Experimento($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

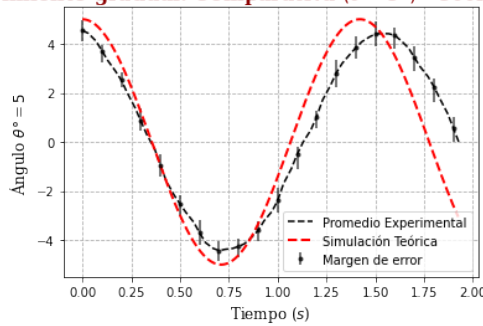
Figura 20: Variación de la velocidad angular en función del tiempo cuando el ángulo es de 33° .

3.2.3. Comparación con la teoría

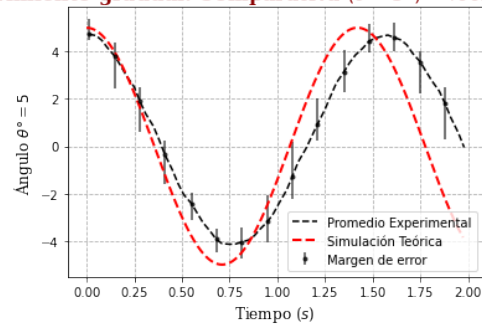
Para algunos tiempos puntuales se calculó el margen de error con respecto al promedio de los resultados experimentales, y a su vez se comparó con el movimiento resultante de la simulación teórica. Esto se obtiene restando el valor promedio al máximo obtenido experimentalmente (medido como valor absoluto, con el fin de manejar magnitudes positivas), y el resultado se expresa como una barra vertical. Esto permite visualizar de mejor manera qué tan distantes se encuentran los datos entre sí y con ello, tener una perspectiva más amplia de la exactitud de los datos experimentales.

En las siguientes tablas (21,22, 23 y 24), puede observarse que la mayor diferenciación en cuanto a los ángulos y sus respectivas velocidades en los diferentes instantes de tiempo, ocurren cuando el movimiento tiende a terminar su primera oscilación. Con esto se evidencia que en la fase inicial el margen de error es muy mínimo.

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 300ml - 0.5m. Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 400ml - 0.5m.

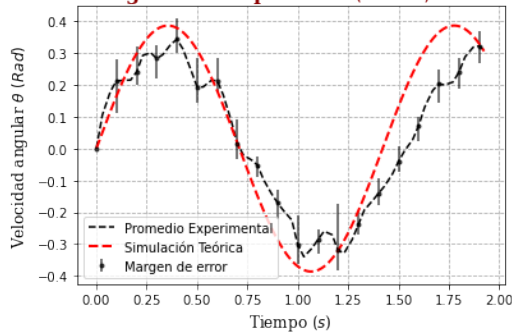


(a)

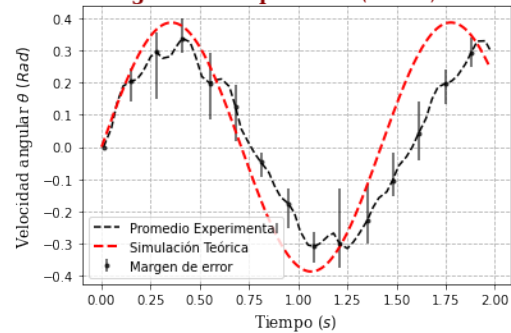


(b)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 300ml - 0.5m. Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 5^\circ$) - 400ml - 0.5m.



(c)

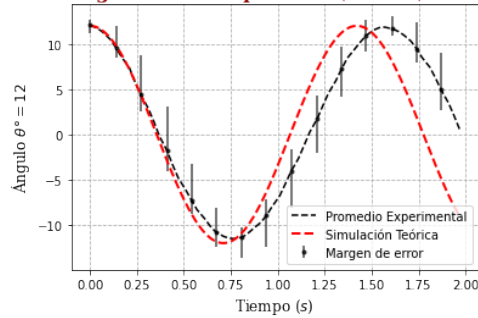


(d)

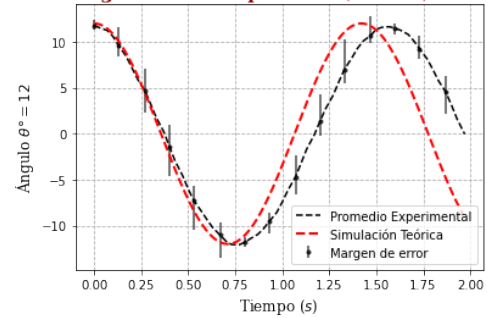
Figura 21: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 5° .

Asimismo, en el caso de la figura 21 se contempla un pequeño aumento del margen de error en los resultados con un volumen de 300mL a medida que avanza el tiempo, sin embargo no llega a ser demasiado pronunciado, como sí lo es aquellos en los que el ángulo es mayor, puesto que se su desviación tiende a ser más notoria que aquellos ángulos de menor magnitud.

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 300ml - 0.5m. Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 400ml - 0.5m.

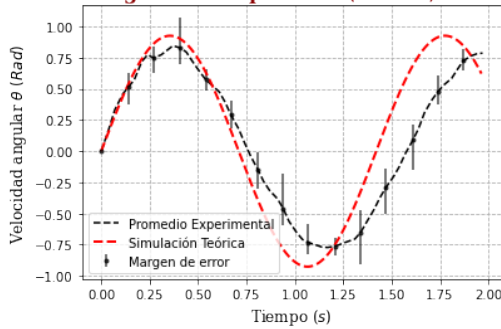


(a)

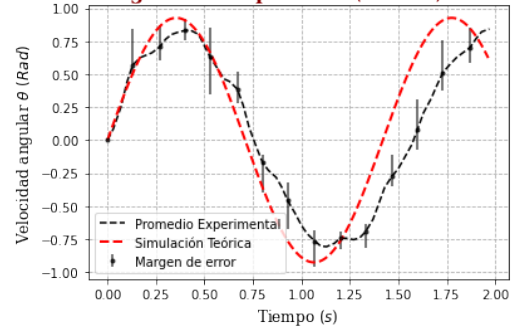


(b)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 300ml - 0.5m. Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 12^\circ$) - 400ml - 0.5m.

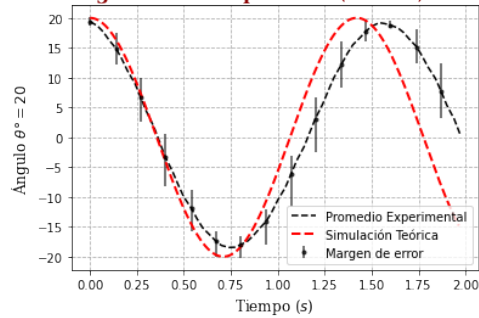


(c)

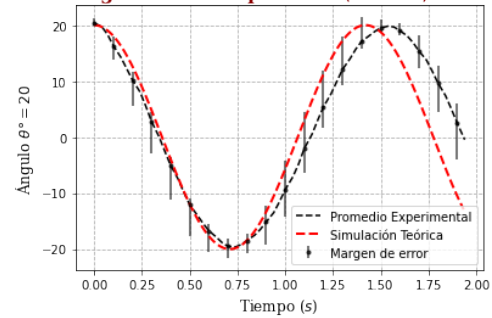


(d)

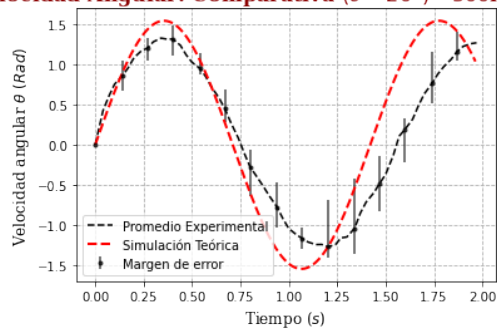
Figura 22: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 12° .

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 0.5m.

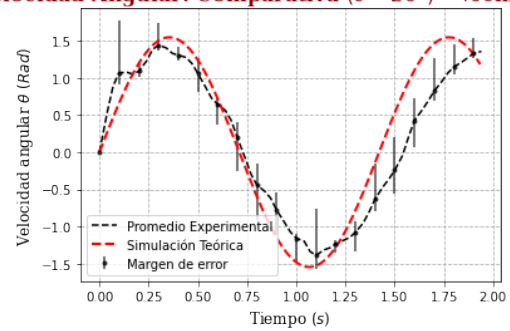
(a)

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

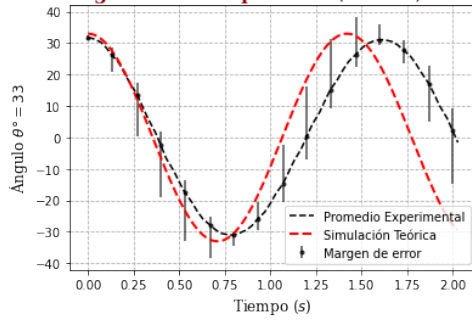
Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 300ml - 0.5m.

(c)

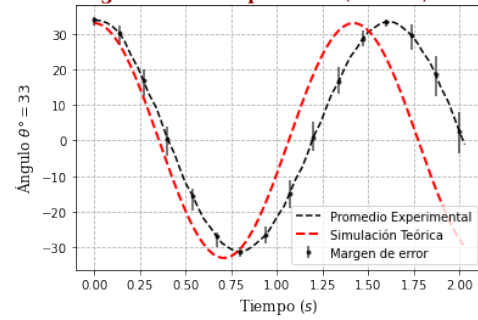
Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 20^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(d)

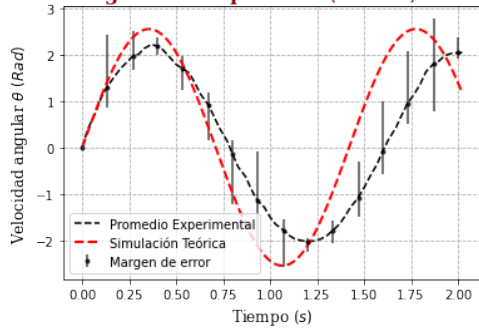
Figura 23: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 20° .

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 300ml - 0.5m.

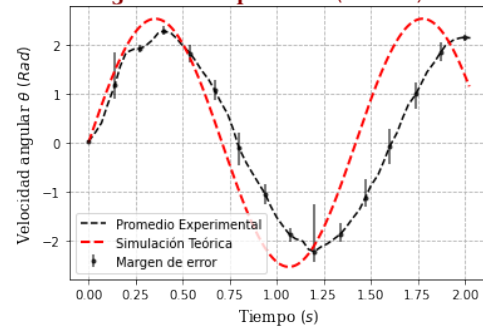
(a)

Movimiento gradual: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(b)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 300ml - 0.5m.

(c)

Velocidad Angular: Comparativa ($\theta = 33^\circ$) - 400ml - 0.5m.

(d)

Figura 24: Margen de error experimental cuando el ángulo inicial es de 33° .

Para finalizar, de igual forma en la que se hizo en la sección [3.1.3], se partió de los datos arrojados por tracker y se analizaron en Python con el fin de estimar el valor del periodo (en promedio) y de la gravedad para cada caso. Se hizo uso de las fórmulas mencionadas en la metodología (fórmula 4). Los resultados se observan en la tabla ??.

Ángulo Inicial (θ°)	Masa (g)	Periodo(seg)	Gravedad(m/s^2)
5	3 00	1,5	8,77
5	4 00	1,52	8,5
12	3 00	1,53	8,4
12	4 00	1,52	8,5
20	3 00	1,55	8,2
20	4 00	1,46	9,2
33	3 00	1,6	7,7
33	400	1,6	7,7

Tabla 2: Valores estimados del periodo y la gravedad cuando la cuerda mide 0,05 metros.

Según los datos de la tabla, la gravedad promedio es de $8,4 m/s^2$. Esto, comparado con el valor obtenido para la gravedad en el caso de la cuerda de $1,05 m$ [3.1], da a entender que la gravedad promedio total es de aproximadamente $8,8 m/s^2$.

3.3. Los resultados del simulador

Los datos obtenidos a partir de la simulación del movimiento en el simulador PHET de la Universidad de Colorado, mencionado en la metodología [2.3] se pueden observar en la tabla 3.

Longitud (m)	Masa (Kg)	Ángulo($^{\circ}$)	Periodo(seg)
1	0.3	5	1,98
1	0.4	5	2,01
0,5	0.3	5	1,38
0,5	0.4	5	1,39
1	0.3	12	1,98
1	0.4	12	2,01
0,5	0.3	12	1,38
0,5	0.4	12	1,39
1	0.3	20	2,01
1	0.4	20	1,99
0,5	0.3	20	1,41
0,5	0.4	20	1,41
1	0.3	40	2,05
1	0.4	40	2,05
0,5	0.3	40	1,43
0,5	0.4	40	1,43

Tabla 3: Valores obtenidos en el simulador PHET de la Universidad de Colorado.

Cabe resaltar que para este simulador se trabajó sin fricción y con la aceleración gravitacional de la tierra (De unos $9,78 \text{ m/s}^2$). Como se logra observar en la tabla 3, la masa del objeto y el ángulo inicial prácticamente no alteran el periodo del péndulo. Se puede decir que esa variación entre los tiempos de oscilación medidos son más error humano a la hora de cronometrar que influencia de la masa o del ángulo. Sin embargo, ese “error humano” no es muy grande, puesto que al realizar los respectivos cálculos del periodo a partir de las fórmulas mencionadas en la metodología (4) se obtiene que:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T \approx \begin{cases} 2\pi\sqrt{\frac{1 \text{ m}}{9,78 \text{ m/s}^2}} \approx 2,01s, & \text{si } L = 1 \text{ m} \\ 2\pi\sqrt{\frac{0,5 \text{ m}}{9,78 \text{ m/s}^2}} \approx 1,42s, & \text{si } L = 0,5 \text{ m} \end{cases} \quad (5)$$

Por lo tanto, para el caso del simulador es posible afirmar que se presenta un margen de error de $\pm 0,04 \text{ s}$, obtenido tras restar el valor del simulador del valor teórico (5). Además, también es válido decir que tanto la masa del objeto como el ángulo inicial son irrelevantes en el cálculo del periodo, para el caso sin fricción.

Ahora bien, es momento de comparar el simulador con los datos obtenidos en el mundo real.

Para ello, se dividió el valor teórico del periodo entre el valor experimental. Los datos se encuentran en la tabla 4.

Longitud (m)	Masa (Kg)	Ángulo($^{\circ}$)	Comparación
0,5	0.3	5	$\frac{1,42}{1,56} \approx 0,92$
0,5	0.4	5	$\frac{1,42}{1,52} \approx 0,93$
0,5	0.3	12	$\frac{1,42}{1,53} \approx 0,93$
0,5	0.4	12	$\frac{1,42}{1,52} \approx 0,93$
0,5	0.3	20	$\frac{1,42}{1,55} \approx 0,92$
0,5	0.4	20	$\frac{1,42}{1,467} \approx 0,97$
0,5	0.3	33	$\frac{1,42}{1,6} \approx 0,89$
0,5	0.4	33	$\frac{1,42}{1,6} \approx 0,88$
1	0.3	5	$\frac{2,01}{2,08} \approx 0,97$
1	0.4	5	$\frac{2,01}{2,1} \approx 0,96$
1	0.3	12	$\frac{2,01}{2,08} \approx 0,97$
1	0.4	12	$\frac{2,01}{2,11} \approx 0,95$
1	0.3	20	$\frac{2,01}{2,2} \approx 0,91$
1	0.4	20	$\frac{2,01}{2,23} \approx 0,9$
1	0.3	33	$\frac{2,01}{2,13} \approx 0,94$
1	0.4	33	$\frac{2,01}{2,13} \approx 0,94$

Tabla 4: Comparación del periodo experimental y los datos obtenidos en el simulador PHET.

Según la tabla 4, se encuentra que el valor experimental corresponde, en promedio, a 93,2 veces el valor teórico del simulador. Lo que significa que la exactitud de los valores experimentales fue del 93.2 %.

4. Errores y Precisión

En toda práctica experimental que se realiza es crucial revisar los errores que se cometen, y hacer lo posible por estimar la precisión. Es por ello que, tal como se mencionó en la sección de metodología [2], se realizaron al menos 10 muestras de cada situación. Entonces, con el fin de estimar la precisión de cada caso, se procedió a calcular la desviación cuadrática(6) media en cada experimento. Para luego promediarlo y así conseguir una desviación cuadrática media promedio para cada caso. La fórmula para encontrar la desviación cuadrática media es la raíz cuadrada de la varianza[5], es decir:

$$x_{RMS} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \tilde{x})^2}{N}}, \quad (6)$$

donde x_{RMS} es la desviación cuadrática media, o RMS por sus siglas en inglés, x_i es el dato medido en cierto instante, \tilde{x} es la media o promedio obtenido en dicho instante y N es el número total de datos obtenidos. Se expresa en las mismas unidades usadas para medir los datos, en este caso, en grados. Los resultados se promediaron para cada caso y se muestran en la tabla 5.

Longitud (m)	Masa (Kg)	Ángulo (°)	Desviación Cuadrática Media (°)
0,5	0.3	5	0,28
0,5	0.4	5	0,43
0,5	0.3	12	1,22
0,5	0.4	12	0,83
0,5	0.3	20	1,62
0,5	0.4	20	1,27
0,5	0.3	33	2,78
0,5	0.4	33	1,96
1	0.3	5	0,57
1	0.4	5	0,33
1	0.3	12	0,64
1	0.4	12	0,86
1	0.3	20	1,21
1	0.4	20	0,89
1	0.3	33	1,86
1	0.4	33	2,24

Tabla 5: Desviación cuadrática media de los periodos obtenidos.

Como era de esperarse, la desviación cuadrática media es mayor en los ángulos más grandes. En el caso del ángulo de 33° fue de, en promedio, 2,21°, lo que significa que se tenía razón en un principio al afirmar que no era buena idea realizar la aproximación del seno del ángulo (visto en metodología [2]) y que además la fuerza de fricción influyó bastante. De igual manera, se puede observar que en los casos donde la RMS es menor fue en aquellos ángulos más chicos. Esto no necesariamente quiere decir que su estimación de gravedad sea la más correcta. Sino que es más probable que se puedan

obtener los mismos resultados al recrear el experimento en las mismas condiciones al haber menor fuerza de fricción, por lo tanto, es muy probable que las gráficas acá mostradas en el caso de los ángulos más chicos sean muy similares a las gráficas obtenidas por un científico en china al realizar el experimento con los mismos parámetros iniciales y las mismas constantes de fricción.

Ahora bien, en la tabla 6 se observan los resultados tras haber realizado el mismo procedimiento anterior, pero con los valores de la gravedad. Es decir, esta tabla muestra qué tan dispersos se encuentran los valores de la gravedad obtenidos.

	Desviación Cuadrática Media (m/s^2)
Gravedad (m/s^2)	0.61

Tabla 6: Desviación cuadrática media de los valores estimados para la aceleración de la gravedad.

Esto quiere decir que, tras aplicar la fórmula 6 con todas las estimaciones de la gravedad que se encuentran en las tablas 1 y 2, la desviación media es de $0,61 m/s^2$. O, en otras palabras, el valor de la aceleración de gravedad estimado en este informe es de $g \approx 8,8 \pm 0,61 m/s^2$.

5. Conclusiones y Recomendaciones

El estudio del movimiento pendular y el análisis cuantitativo de la variación de su ángulo a través del tiempo de oscilación, permitieron obtener unos resultados que brindaban un nuevo acercamiento al valor de la gravedad, en lugar de simplemente considerar aquel preestablecido de manera teórica, abriendo la posibilidad de abordar este campo a través de la experimentación.

En cuanto a los ensayos, el contraste de tonos de color entre el punto estudiado (en este caso, la tapa de la botella), y el fondo (en este caso, la pared), permitieron llevar a cabo un seguimiento automático en el programa *Tracker*, teniendo así mayor exactitud y posibilitando la obtención de intervalos de tiempo similares entre cada cuadro de video analizado. Esto permitió promediar los resultados experimentales en base a un tiempo t , que en este caso, logró estudiarse como variable independiente de forma acertada (puesto que, al estar todos los datos evaluados en base a las mismas diferencias de tiempo, era correcto llevar a cabo su media muestral). De igual forma se obtuvo su correspondiente margen de error, y se expresó en las tablas apropiadas según la información que proveían.

Asimismo, partiendo del hecho de que los tiempos de oscilación no se mantenían iguales en todos los ciclos, se evidencia la presencia del rozamiento del aire durante el movimiento pendular de la botella. Esto ocasiona una pequeña disminución en el periodo, que si bien parece despreciable, da una explicación congruente respecto al porqué el resultado estimado de la gravedad es menor al valor comúnmente manejado de manera teórica. Cabe resaltar que a pesar de ello, el bajo margen de error del presente estudio muestra un cálculo bastante oportuno sustentado bajo unos resultados experimentales que se llevaron a cabo a través de la mayor objetividad posible, y de la manera más precisa dentro de las limitaciones que implica el estudio. En este orden de ideas, un valor de la aceleración de gravedad de aproximadamente $8,8 \pm 0,61 \text{ m/s}^2$, sería aquel obtenido en la ciudad de Bucaramanga, considerando un ambiente en el cual está presente el rozamiento con el aire.

Tras el análisis de los ángulos estudiados, se puede concluir que existe un margen de error menor cuando éste se encuentra entre 5° y 12° , por lo que se recomienda tener en cuenta estos valores para futuras investigaciones al respecto. De la misma manera, el resultado y análisis experimental muestra una mayor desviación entre resultados para aquellos ángulos que son mayores, sobretodo el de 33° .

En cuanto a la masa del cuerpo que oscila, se presenció una menor desviación entre los datos experimentales de aquellos cuyo volumen era de 400mL, es decir, 400mg de masa; por lo que, pese a que teóricamente la masa no debería influir en la oscilación, la experimentación demostró que de hecho sí lo consigue, pero en un grado muy menor al considerable. Lo más probable es que sea debido a que a mayor masa, el rozamiento que tiene el cuerpo con el aire es menor, lo cual puede también ir relacionado con la forma vertical de la botella (el objeto estudiado en cuestión). Teniendo todo esto presente, se recomienda llevar a cabo estudios cuyos cuerpos tengan formas diferentes y mayores distinciones en cuanto a sus masas. A su vez, podría experimentarse con ángulos mayores partiendo de 12° , puesto que al ser éste el ángulo más alto con el que se obtuvo un menor margen de error, el estudiar ángulos similares permitiría estimar un límite más preciso para el cual el péndulo se comporta como un movimiento armónico simple.

6. Referencias

Referencias

- [1] José Hernández and Hector Maya. Estudio de los modos de oscilación en un péndulo físico simétrico usando el potencial efectivo. *Ciencia en Desarrollo*, 10(2):93–102, 2019.
- [2] Raymond A Serway and John W Jewett. *Física para ciencias e ingeniería con física moderna*. Cengage Learning Editores, 2009.
- [3] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica*. Reverté, 2018.
- [4] AV Kraff, GS Vázquez, RR Mijangos, and JA Heredia-Cancino. Obtención y solución a la ecuación de movimiento de un cohete, actuando sobre él las fuerzas externas del campo gravitacional constante y el rozamiento del aire proporcional a la velocidad. *Revista mexicana de física E*, 61(1):6–10, 2015.
- [5] Diana M Kelmansky. Estadística para todos. *Buenos Aires: Ministerio de Educación-Instituto Nacional de Educación Tecnológica*, 2009.