Ejercicios: (1.5-7)

2. Considere:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i \hat{e}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}(r) = \vec{a}(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{e}_i \quad y \quad \vec{b} = b^i(x,y,z)\hat{e}_i$$

$$\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z) \quad y \quad \psi = \psi(r) = \psi(x,y,z).$$

Demuestre las identidades:

a). $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$$\nabla(\phi\psi) = \partial^i(\phi\psi)\hat{e}_i = [(\partial^i\phi)\psi + \phi(\partial^i\psi)]\hat{e}_i \rightsquigarrow \text{Derivada del producto.}$$

$$= \phi(\partial^i\psi)\hat{e}_i + \psi(\partial^i\psi)\hat{e}_i$$

$$= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \quad //$$

d) $\nabla\cdot(\nabla\times a)$, ¿Qué puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

$\nabla\cdot(\nabla\times a)$ representa un "producto punto" entre vectores, es correcto.

→ $\nabla\times(\nabla\cdot a)$ ⤳ $\nabla\cdot a$ arroja un escalar.

$\nabla\times(\circ)$ ⤳ ese $(\circ)$ no puede ser un escalar, debe ser un vector.

→ La expresión no tiene sentido.

f) $\nabla\times(\nabla\times a) = \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a$

$$\nabla\times(\nabla\times a) = \varepsilon^{ijk}\partial_j(\nabla\times a)_k = \varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial^m a^n = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mnk}\partial_j\partial^m a^n$$

$$= (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m)\partial_j\partial^m a^n = \partial_j\partial^i a^j - \partial_m\partial^m a^i$$

$$= \nabla(\nabla\cdot a) - (\nabla\cdot\nabla)a$$

$$= \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a} \quad //$$