Problema 13: Movimiento de un Paracaidista

Lucero Molina Brayan, Macías Velázquez Danna Yohali, Velazquez Ceja Juan Pablo
Ingeniería Telemática 1TV3, UPIITA-IPN

I. Enunciado del Problema

Un paracaidista está equipado con un anemómetro y un altímetro. Abre su paracaídas 25 segundos después de saltar del avión, que vuela a una altitud de 20,000 ft, y observa que su altitud es de 14,800 ft.

Se supone que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, que la velocidad inicial es cero y que la aceleración de la gravedad es $g = 32$ ft/s^2.

II. Desarrollo Paso a Paso

II-A. Ecuación Diferencial del Movimiento

Partimos del modelo físico:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \tag{1}$$

con condiciones iniciales $v(0) = 0$ y $s(0) = 0$.

Dividiendo entre m:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \tag{2}$$

II-B. Separación de Variables

Reordenamos los términos para separar variables:

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt$$

II-C. Integración de Ambos Lados

Integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int dt$$

El resultado de la integral del lado izquierdo es una función hiperbólica inversa:

$$\sqrt{\frac{m}{gk}}\,\text{arctanh}\left(\frac{v\sqrt{k}}{\sqrt{gm}}\right) = t + C$$

II-D. Despeje de la Velocidad

Aislamos v:

$$\text{arctanh}\left(\frac{v\sqrt{k}}{\sqrt{gm}}\right) = \sqrt{\frac{gk}{m}}(t - C)$$

Aplicando la función inversa $\tanh$:

$$\frac{v\sqrt{k}}{\sqrt{gm}} = \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}(t - C)\right)$$

Por tanto:

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}(t - C)\right) \tag{3}$$

II-E. Determinación de la Constante de Integración

Aplicamos la condición inicial $v(0) = 0$:

$$0 = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\tanh(-\sqrt{\frac{gk}{m}}C) \Rightarrow \tanh(-\sqrt{\frac{gk}{m}}C) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Sustituyendo $C = 0$ en la ecuación (3):

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right) \tag{4}$$

II-F. Obtención de la Posición

Para encontrar $s(t)$, integramos la velocidad:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \sqrt{\frac{gm}{k}}\int \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)dt$$

La integral de la tangente hiperbólica es el logaritmo del coseno hiperbólico:

$$s(t) = \frac{m}{k}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)\right| + C$$

Usando la condición inicial $s(0) = 0$:

$$C = 0$$

Por tanto:

$$s(t) = \frac{m}{k}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)\right| \tag{5}$$

II-G. Determinación de la Masa

El paracaidista recorre una distancia de $20{,}000 - 14{,}800 = 5{,}200$ ft en 25 s. Usando la ecuación (5):

$$5200 = \frac{m}{0{,}003}\ln\left[\cosh\left(25\sqrt{\frac{32(0{,}003)}{m}}\right)\right]$$

Resolviendo numéricamente se obtiene:

$$m \approx 6{,}92$$

III. Conclusión (Velazquez Ceja Juan Pablo)

Con base en los resultados obtenidos, se determinó que la masa del paracaidista es aproximadamente $m = 6{,}92$ slug, lo que equivale a un peso cercano a 221 lb (100 kg), una cifra razonable para un adulto con equipamiento.

III-A. *Cálculo de Velocidad y Distancia a los 15 segundos*

Con los valores:

$$g = 32, \quad k = 0{,}003, \quad m = 6{,}92$$

Usamos la ecuación (4):

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)$$

Sustituyendo $t = 15$ s:

$$v(15) = \sqrt{\frac{32(6{,}92)}{0{,}003}} \tanh\left(\sqrt{\frac{32(0{,}003)}{6{,}92}}(15)\right)$$

$$v(15) \approx 256{,}27 \text{ ft/s}$$

Para la posición, usamos la ecuación (5):

$$s(15) = \frac{6{,}92}{0{,}003} \ln\left[\cosh\left(15\sqrt{\frac{32(0{,}003)}{6{,}92}}\right)\right]$$

$$s(15) \approx 2542{,}83 \text{ ft}$$

III-B. *Campo de Direcciones*

La ecuación diferencial que describe el cambio de velocidad puede representarse mediante un campo de direcciones, donde cada punto (t, v) muestra la pendiente $\frac{dv}{dt}$.

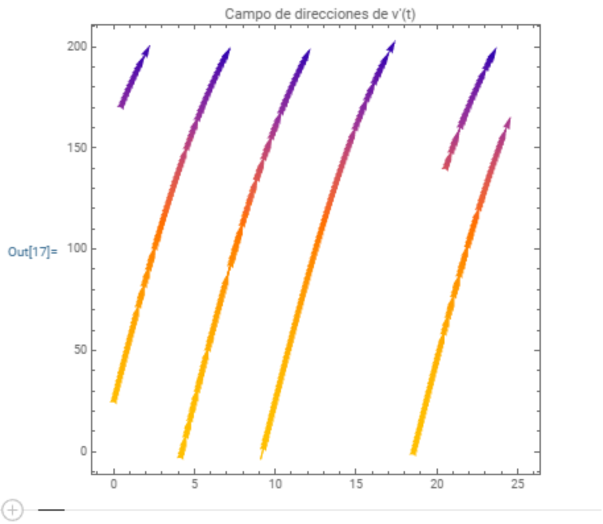

Figura 1: Campo de direcciones para $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$.

III-C. *Solución Particular*

A continuación se presenta la curva de velocidad $v(t)$ obtenida de la ecuación (4).

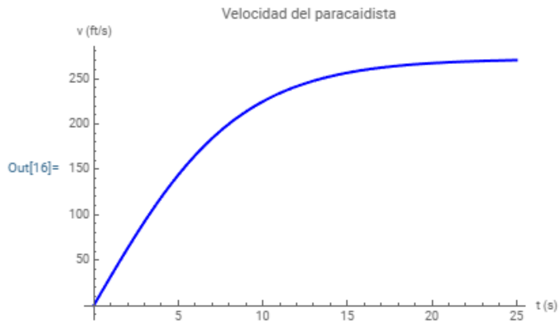

Figura 2: Solución particular de $v(t)$ con $m = 6{,}92$ slug, $k = 0{,}003$ y $g = 32$ ft/s^2.

IV. Conclusiones Finales

Macías Velázquez Danna Yohali: El problema demuestra cómo un modelo matemático, basado en una ecuación diferencial de primer orden, puede describir un fenómeno físico real como la caída de un paracaidista. A partir de los principios físicos y la integración, se obtuvieron las ecuaciones de velocidad y posición, que permiten determinar propiedades físicas como la masa.

Lucero Molina Brayan: El ejercicio permitió determinar la ecuación diferencial que describe el movimiento del paracaidista considerando la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad. La solución obtenida muestra el comportamiento de la velocidad hasta alcanzar la velocidad terminal y coincide con los datos proporcionados en el problema.