

# Asignación 1 Mecánica Clásica

Valentina Moreno, Brayan Molano  
*Universidad Industrial de Santander*  
*Bucaramanga*

Versión  $\alpha\beta$  jue 29 de ago

## Índice

<b>1. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
<b>2. Integración numérica</b>	<b>6</b>
2.1. Variación de Parámetros . . . . .	6
2.2. Movimiento caótico . . . . .	9
<b>3. Espectrograma y espectro de potencias</b>	<b>10</b>

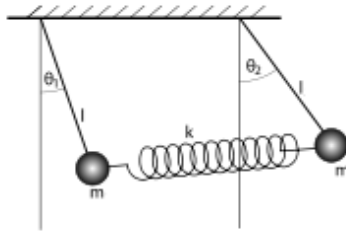
## Resumen

Este trabajo aborda el estudio de un sistema compuesto por dos péndulos de igual masa acoplados mediante un resorte. El objetivo es hallar, derivar y analizar las ecuaciones de movimiento del sistema, integrar estas ecuaciones numéricamente y explorar cómo los parámetros físicos del sistema, como la posición del resorte y las relaciones de masa y longitud, influyen en el comportamiento del sistema. Además, se examina la aparición de caos bajo ciertas condiciones iniciales y se realiza un análisis espectral de la señal para diferentes amplitudes. Finalmente, se simplifican las ecuaciones bajo el supuesto de pequeñas oscilaciones, repitiendo los análisis anteriores para esta aproximación lineal.

## 1. Planteamiento del problema

En sistemas físicos acoplados, la interacción entre componentes puede dar lugar a dinámicas complejas que no se observan en sistemas aislados. Un ejemplo representativo de esto es el sistema de dos péndulos acoplados mediante un resorte, donde la energía puede transferirse entre los péndulos a través del acoplamiento elástico como el ejemplo que veremos a continuación ilustrado en la figura 1. Calculando las ecuaciones de movimiento de este sistema por lagrange el procedimiento es :

La energía cinética de los péndulos es:



$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left( l_1 \dot{\theta}_1 \right)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left( l_2 \dot{\theta}_2 \right)^2$$

La energía cinética total es:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left( l_1 \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( l_2 \dot{\theta}_2 \right)^2$$

La energía potencial de cada masa debido a la gravedad es:

$$U_1 = m_1 g l_1 \cos \theta_1$$

$$U_2 = m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

La energía potencial del resorte es:

$$U_k = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{donde } x = (x_2 - x_1)$$

Expresando  $x$  en términos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$U_k = \frac{1}{2} k (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)^2$$

La energía potencial total es entonces:

$$U = m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)^2$$

El Lagrangiano se define como:

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left( l_1 \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( l_2 \dot{\theta}_2 \right)^2 - \left[ m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)^2 \right]$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Para  $\dot{\theta}_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \end{aligned}$$

Para  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 - \frac{1}{2} k [l_2^2 \sin^2 \theta_2 - 2 l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1]$$

Simplificando:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = m_1 g l_1 \sin \theta_1 + k l_1 \cos \theta_1 (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)$$

De manera similar, para  $\dot{\theta}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Para  $\theta_2$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 g l_2 \sin \theta_2 + k l_2 \cos \theta_2 (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 - k \cos \theta_1 l_1 (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1) \\ 0 &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 + k \cos \theta_2 l_2 (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones resultantes muestran las ecuaciones ya conocidas de un péndulo simple, donde los primeros términos representan la dinámica típica de un péndulo bajo la influencia de la gravedad. Sin

embargo, los términos adicionales al final, que aparecen debido al resorte acoplado, introducen lo que se conoce como el factor de acoplamiento. Este factor de acoplamiento, dependiente de la constante elástica  $k$  del resorte y las diferencias en las longitudes y los ángulos de los péndulos, modifica el comportamiento del sistema al vincular las oscilaciones de ambos péndulos. Este acoplamiento es lo que diferencia a este sistema de un par de péndulos independientes, generando interacciones que pueden llevar a comportamientos más complejos, como modos de oscilación combinados y, bajo ciertas condiciones, incluso a un comportamiento caótico. .

Haciendo las aproximaciones suponiendo pequeñas oscilaciones. Esto es  $\theta_1 \ll 1$ ,  $\theta_2 \ll 1$  y  $\theta_1^2 \sim \theta_2^2 \sim 0$ ,  $\sin \theta_1 \sim \theta_1$ ,  $\sin \theta_2 \sim \theta_2$ ,  $\cos \theta_1 \sim 1$  y  $\cos \theta_2 \sim 1$ . Obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \theta_1 + k l_1 (l_1^2 \theta_1 - l_2^2 \theta_2) = 0$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \theta_2 - k l_1 (l_1^2 \theta_1 - l_2^2 \theta_2) = 0$$

Si por otro lado se mueve el resorte al punto medio de la varilla las ecuaciones de movimiento cambiarían:

La energía cinética de los péndulos sería la misma, es decir:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\theta}_2)^2$$

La energía cinética total:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\theta}_2)^2$$

La energía potencial de cada masa debido a la gravedad es la misma ya que continúan al extremo del péndulo:

$$U_1 = m_1 g l_1 \cos \theta_1$$

$$U_2 = m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

La energía potencial del resorte cambiaría, pues la distancia recorrida sobre el eje X sería distinta:

$$U_k = \frac{1}{2} k \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right)^2$$

La energía potencial total es entonces:

$$U = m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right)^2$$

El Lagrangiano se define como:

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$= \frac{1}{2}m_1 \left( l_1 \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( l_2 \dot{\theta}_2 \right)^2 - \left[ m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2}k \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right)^2 \right]$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Para  $\dot{\theta}_1$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1$$

Para  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 + k \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right)$$

Para  $\dot{\theta}_2$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2$$

Para  $\theta_2$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin \theta_2 + k \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para el resorte en el punto medio de la varilla seria:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 - k \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right) = 0$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin \theta_2 + k \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \right) = 0$$

Si asumimos  $l_1 = l_2$  Las ecuaciones serian:

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l \sin \theta_1 - k \frac{l^2}{4} \cos \theta_1 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 0$$

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l \sin \theta_2 + k \frac{l^2}{4} \cos \theta_2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 0$$

Por esto al mover el resorte solo se vera afectado el factor de acomplamiento en este caso se reduce a un cuarto.

## 2. Integracion numerica

Para la solucion de las anteriores ecuaciones, se realizo un codigo en python utilizando el metodo de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup>/5<sup>o</sup> orden (RK45) y se usaron las librerías `numpy` y `matplotlib` para realizar los cálculos y generar gráficos de los resultados. el codigo esta disponible en el colab: [Ver Colab](#) Se graficaron las soluciones de la ecuacion respecto del tiempo, es decir  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  se grafico asi mismo los espacios de fase ( $\theta_2$  vs  $\dot{\theta}_2$ ) y ( $\theta_1$  vs  $\dot{\theta}_1$ ) y tambien se grafico una diferencia de los angulos de los pendulos respecto del tiempo. Tambien se realizo una simulacion visual de los pendulos con la conexion del resorte para poder observar que e el comportamiento de los pendulos fuera mas o menos el esperado en las condiciones propuestas por el ejercicio. Variando los parametros y haciendo multiples simulaciones, se encontro que los parametros que condicionan el sistema incluyen: las masas  $m$  de los péndulos, ya que variaciones en las masas pueden alterar la frecuencia natural de oscilación de cada péndulo y la dinámica acoplada del sistema; la longitud  $L$  de las varillas, la cual afectaría directamente el periodo de oscilación de los péndulos; la constante elástica  $k$  del resorte, que determina la fuerza de acoplamiento entre los dos péndulos, donde un resorte más rígido acoplará más fuertemente las oscilaciones, las condiciones iniciales de los péndulos, como los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  y sus derivadas, que pueden influir en cómo evoluciona el sistema con el tiempo; y la relación entre las masas y longitudes, que si son diferentes podrían condicionar el comportamiento del sistema conduciendo distintos modos de oscilación más o menos complejos. Para el caso de oscilaciones pequeñas, al tutilizar las aproximaciones los parametros que condicionan el sistema siguen siendo los mismos, sin embargo el sistema tiende a mostrar comportamientos mas periodicos con respecto al caso anterior Como se puede ver en las s figuras 2 y 3 donde se utilizaron las mismas condiciones iniciales y los mismos parametros constantes:

### 2.1. Variacion de Párametros

Anteriormente se calcularon las ecuaciones de movimiento considerando tanto longitudes distintas como masas distintas de los pendulos para observar mejor como influyen estos cambios en el sistema se simulo el codigo con masas iguales y con masas distintas. Para el caso sin aproximaciones se observaron las siguientes graficas:

Estas graficas tienen tanto las mismas condiciones iniciales como la misma constante del resorte  $K$ , se puede observar que en el caso de masas iguales el sistema tiene un comportamiento periodico muy marcado distinto al caso donde se establecen masas distintas, la relacion  $m_1/m_2$  seria 1/3, el

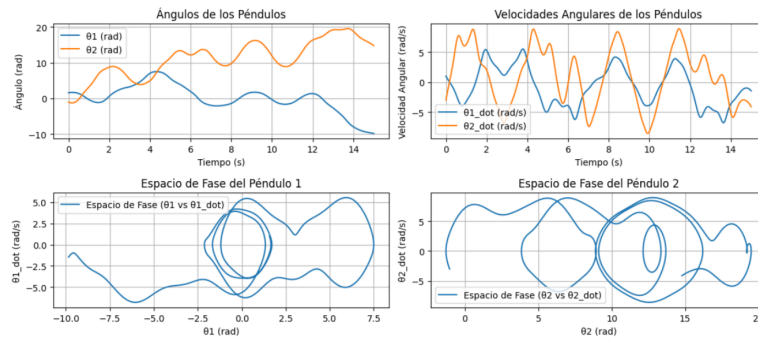


Figura 1: Graficas Sin aproximaciones

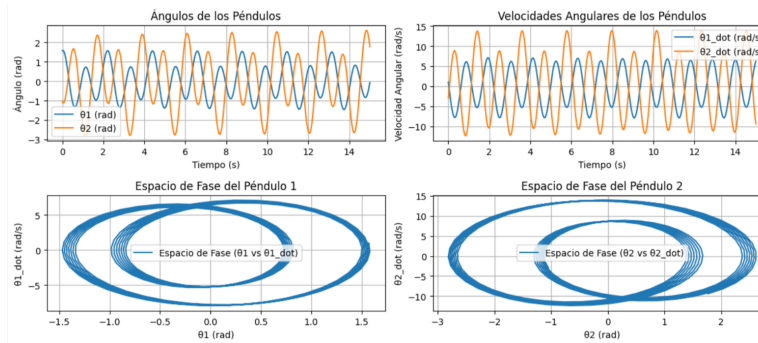


Figura 2: Graficas para angulos pequeños

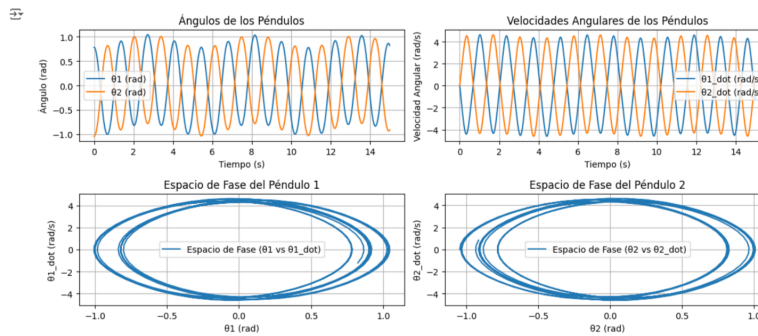


Figura 3: Graficas Masas Iguales

sistema muestra un comportamiento mas desordenado respecto al anterior, la masa menor dio varias vueltas enteras, mientras que la masa mayor se mantiene oscilando entre 0 y  $2\pi$ . Para el caso en que se tienen varillas de distinta longitud la varilla de mayor longitud mantuvo el comportamiento periodico mientras que la varilla de menor longitud presenta un comportamiento desordenado.

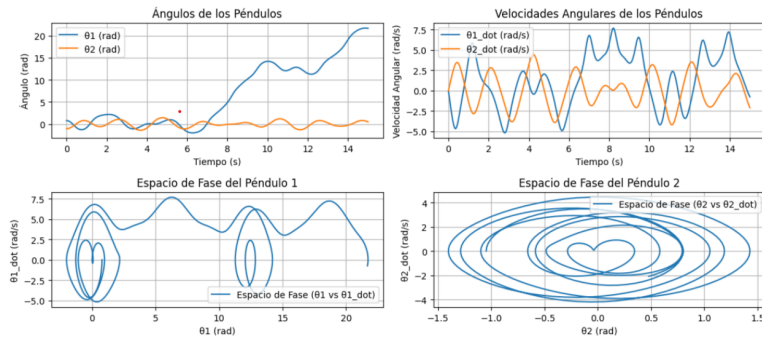


Figura 4: Graficas Masas diferentes

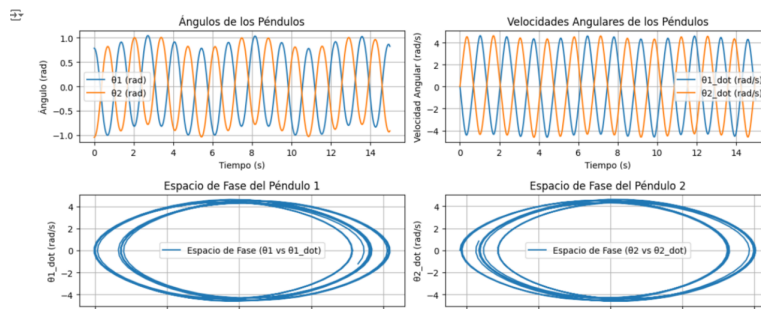


Figura 5: Graficas longitudes iguales

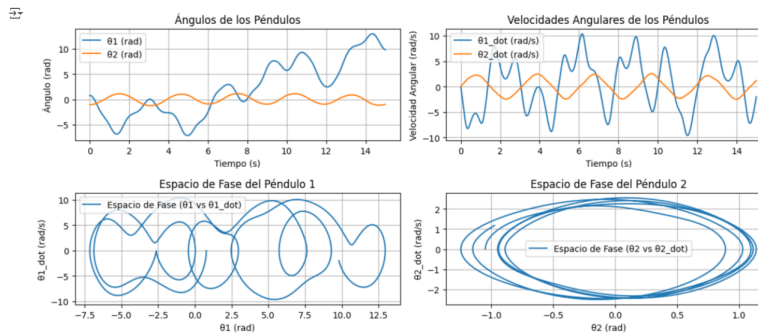


Figura 6: Graficas longitudes diferentes

Para las ecuaciones con aproximación las figuras 7, 8, 9 y 10 se observa para el caso de establecer masas distintas que el sistema mantiene el comportamiento periodico sin embargo, la masa que se aumenta disminuye su amplitud de oscilacion. De la misma manera para el caso de longitudes diferentes, al aumentar la longitud la amplitu de oscilacion del angulo disminuye.



## 2.2. Movimiento caótico

Los coeficientes de Lyapunov son una medida de la estabilidad en sistemas dinámicos. Dado un sistema  $\dot{x} = f(x)$ , se definen como:

$$\frac{d}{dt} \ln \|\delta x(t)\| = \sum_i \lambda_i$$

donde  $\delta x(t)$  es una perturbación y  $\lambda_i$  son los coeficientes de Lyapunov. Un  $\lambda_i$  positivo indica comportamiento caótico (expansión exponencial), mientras que un  $\lambda_i$  negativo indica estabilidad (contracción).

En el código en el colab una sección calcula dichos coeficientes que a pesar de variar tanto las condiciones iniciales como los parametros constantes no obtuvimos comportamientos caóticos en este sistema, a pesar de observar comportamientos bastante desordenados no consideramos caótico las trayectorias de estos.

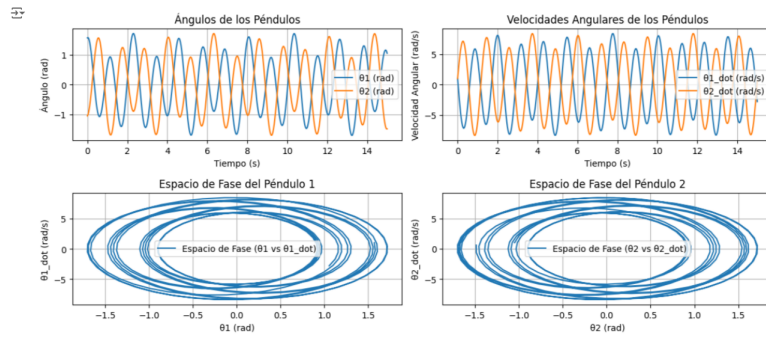


Figura 7: Graficas masas iguales

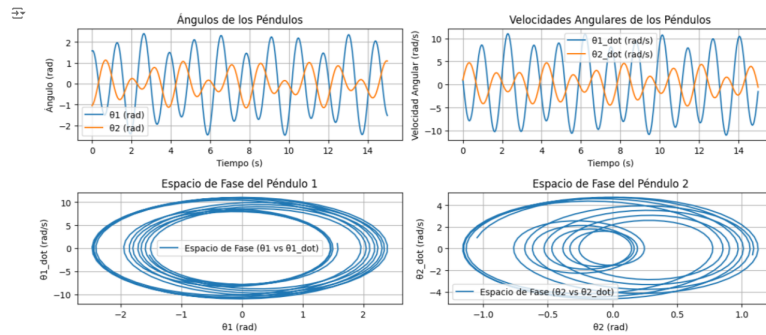


Figura 8: Graficas masas diferentes

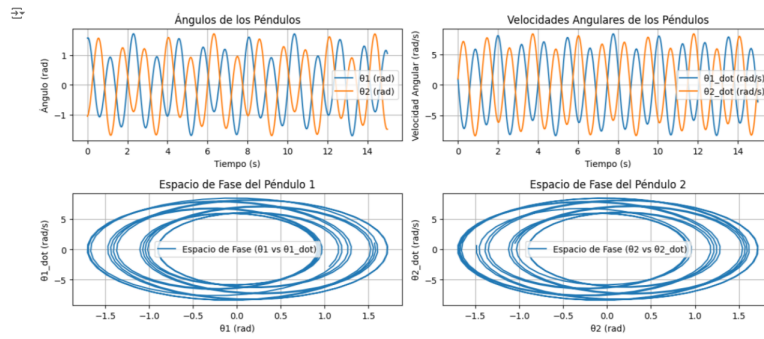


Figura 9: Graficas longitudes iguales

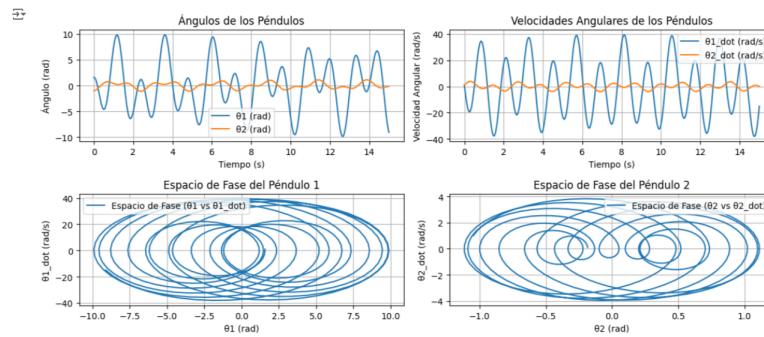


Figura 10: Graficas longitudes diferentes

### 3. Espectrograma y espectro de potencias

En el caso de los picos altos en el espectro de potencias indican que el sistema tiene dos frecuencias dominantes en el rango de 0 a 1 Hz, si mantenemos las masas y longitudes iguales el espectro de potencias sera similar para ambos angulos. Esto sugiere que el sistema oscila principalmente a esas frecuencias específicas, probablemente correspondientes a los modos normales de vibración del sistema.

En el caso del espectrograma La intensidad cercana a 0 en esas frecuencias podría ser un indicio de que, aunque hay picos en las frecuencias específicas, la energía total del sistema en esas frecuencias es baja. Esto puede ocurrir en sistemas donde las oscilaciones en esas frecuencias son débiles o el sistema está en un estado donde esas frecuencias no están energizadas significativamente. Se puede concluir que en estas frecuencias o modos normales de oscilacion el sistema tiene minima energia.

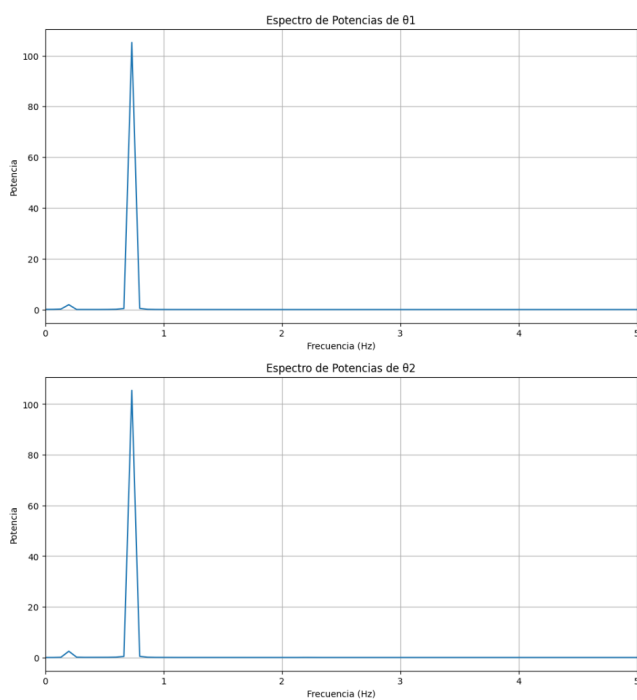


Figura 11: Espectro de potencias

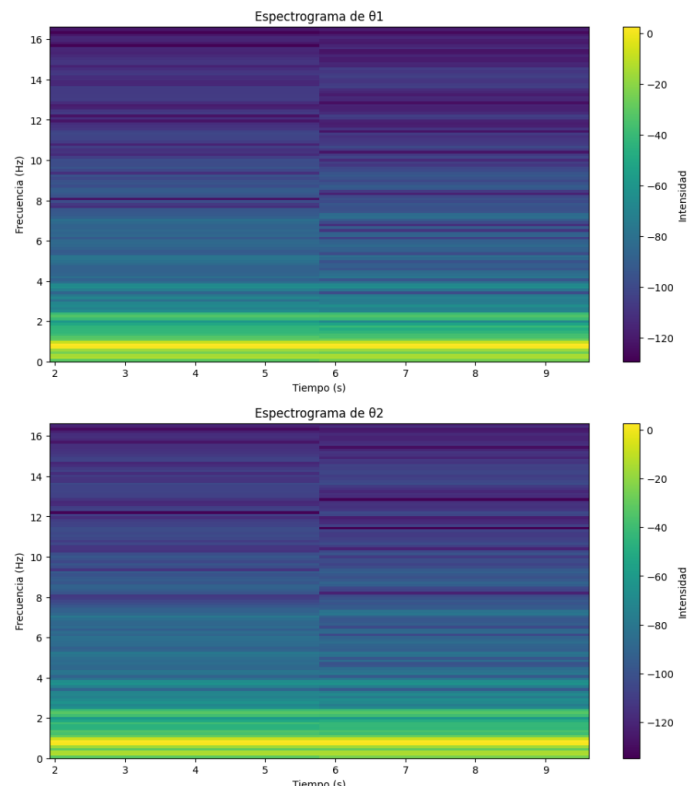


Figura 12: Espectrograma