Problemas Clasica Punto 1

Para un cuerpo que se mueve por un fluido las fuerzas que actuan sobre el son

$$m \cdot a = W - E - F_d$$

Siendo W el peso, E la fuerza de empuje y Fd la fuerza de resistencia del agua

$$W = m \cdot g \qquad E = \rho_a V g \qquad F_d = \frac{\rho_a A C_d v^2}{2}$$

A = Area Cd = coeficiente de resistencia

$$m \cdot a = m \cdot g - \rho_a V g - \frac{\rho_a A C_d v^2}{2}$$

la velocidad terminal se podria calcular cuando la aceleración sea 0

$$mg - \rho_a V g - \frac{\rho_a A C_d v^2}{2} = 0$$

$$mg - \rho_a V g = \frac{\rho_a A C_d v^2}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2mg - \rho_a V g}{\rho_a A C_d}} = V_t$$

La ecuacion diferencial nos queda

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - \rho_a V g - \frac{\rho_a A C_d v^2}{2}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho_a V}{m}\right) - \frac{\rho_a A C_d v^2}{2}$$ ← Si metemos la velocidad terminal Vt

$$\frac{dv}{dt} = mg - \rho_a V g \left(1 - \frac{v^2}{V_t^2}\right)$$

$$mg - \rho_a V g \, dt = \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{V_t^2}\right)}$$

Integrando

$$\int (mg - \rho_a V g)\, dt = \int \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{V_t^2}}$$

$$(mg - \rho_a V g)\, t + C = V_t \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{V_t}\right)$$

Despejando v

$$v(t) = V_t \tanh\left(\left(\frac{mg - \rho_a V g}{V_t}\right) t + C'\right)$$

con $C' = \dfrac{C}{V_t}$

Teniendo como condición inicial $v(0) = V_0$

$$C' = \operatorname{arctanh}\left(\frac{V_0}{V_t}\right)$$

Entonces

$$v(t) = V_t \tanh\left(\left(\frac{mg - \rho_a V g}{V_t}\right) t + \operatorname{arctanh}\left(\frac{V_0}{V_t}\right)\right)$$

calculando la velocidad terminal

$$V_t = \sqrt{\frac{2mg - 2g\rho_a V}{\rho_a C_d A}}$$

Suponiendo un humano esférico de 0,3 m de radio de 70 kg y C_d de 0,47

$V_t \approx -2{,}5\ m/s \rightarrow$

Entonces la velocidad inicial estaría dada por $v = \sqrt{2gh} = 14\ m/s$

$$v(t) = -2{,}5\ m/s \tanh\left(\left(\frac{70(9{,}8) - 1000 \cdot 0{,}113 \times 9{,}8}{-2{,}5}\right) t + \operatorname{arctanh}\left(\frac{14}{-2{,}5}\right)\right)$$

Punto 2

Como en el caso anterior pero esta vez el corcho se moverá en dirección de la fuerza de empuje

Conocemos

$\rho_c = 256,77 \ kg/m^3$ $\rho_a = 1000 \ kg/m^3$

$m = \rho_c \cdot V$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (0,025 \ m)^3 = 6,545 \times 10^{-5} m$

$m = 1,680 \times 10^{-2} \ kg$

$$m \cdot a = -w + E - Fr$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho_a V g}{m} - g - \frac{\rho_a A C_d V^2}{2m}$$

$V_0 = 0$

$$V(t) = V_t \tanh\left(\left(\frac{\rho_a V g - mg}{V_t}\right)t + \operatorname{arctanh}\left(\frac{V_0}{V_t}\right)\right)$$

$$V(t) = V_t \tanh\left(\left(\frac{\rho_a V g - mg}{V_t}\right)t\right)$$

$$V_t = \sqrt{\frac{2\rho_a V g - mg}{A \rho_a C_d}}$$

$$V_t = 1,05 \ m/s$$

Punto 3

El volumen de la burbuja será variable entonces la C_d será

$$PV = nRT$$

$$m \cdot a = \rho_a V \cdot g - \frac{\rho_a A C_d V^2}{2}$$ si h es la altura

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = \rho_a \left(\frac{nRT}{P_{atm} + \rho_a \cdot g h}\right) - \frac{1}{2} C_d A \cdot \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \rho_a$$

Energía potencial de una catenaria → Es la energía almacenada debido a su posición en un campo gravitacional

Para conocer este valor se necesita:

- Densidad lineal del cable
- Aceleración de la gravedad
- Forma matemática de la catenaria.

Su ecuación en el plano xy

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

a ⇒ Parámetro relacionado con la tensión del cable.

Energía Potencial total se define como:

$$u = \int_{x_1}^{x_2} y(x) \lambda g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

} no tiene solución analítica.

Los cables de los tendidos eléctricos tienen una forma de catenaria. Muestre que esa forma minimiza su energía potencial

Para resolver esto vamos a utilizar calculo variacional

Principio variacional en mecánica:

Calculo variacional ⇒ En este caso lo utilizaremos para encontrar la curva que minimiza una cierta cantidad

Asumiendo que

$L \Rightarrow$ longitud del cable.

(x_1, y_1) (x_2, y_2) $\Rightarrow$ coordenadas de suspensión del cable.

Necesitamos hallar una curva $y(x)$ que minimice la energía potencial del cable.

Sabemos que la energía potencial del cable está dada por:

$$U[y(x)] = \lambda g \int_{x_1}^{x_2} y(x) \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx}_{\text{elemento diferencial de la longitud del cable}}$$

Donde λ, g son constantes

elemento diferencial de la longitud del cable.

Para hallar esta curva $y(x)$ que minimiza $U[y(x)]$ se debe usar la ecuación de Euler-Lagrange.

Esta ecuación está dada por:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

El lagrangiano de este sistema es

$$\mathcal{L} = \left[y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right] \lambda g$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Realizando las respectivas operaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(y(x) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)\right] \lambda g$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \sqrt{1+\dot{y}^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left[\left(y(x) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)\right] \lambda g$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

Reemplazando en la ecuación de Euler Lagrange obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) - \left(\sqrt{1+\dot{y}^2}\right) = 0.$$