

Problema 4.91

Sean ϕ y f los valores de ϕ y f en algún punto P_0 , y sea ΔV una región pequeña que rodea a P_0 . Sobre la superficie S que limita a ΔV los valores de $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$, $f = f_0 + \Delta f$

$$\nabla = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S ds$$

$$\nabla \times (\phi f) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S ds \times (\phi f)$$

$$= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S ds \times (\phi_0 + \Delta\phi) f$$

$$= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\phi_0 \oint_S ds \times f + \oint_S ds \times (\Delta\phi) f \right]$$

$$= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\phi_0 \oint_S ds \times f + \oint_S ds \times (\phi - \phi_0) (f_0 + \Delta f) \right]$$

$$= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\phi_0 \oint_S ds \times f + \oint_S ds \phi \times f - \phi_0 f_0 \oint_S ds + \oint_S ds \times \Delta\phi \Delta f \right]$$

Pero $\oint_S ds = 0$ y $\oint_S ds \times \Delta\phi \Delta f$ es un término de orden superior

Entonces en el punto P_0

$$\nabla \times (\phi f) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\oint_S ds \times f + \oint_S ds \phi \times f_0 \right)$$

$$= \phi_0 \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S ds \times f + \left(\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S ds \phi \right) \times f$$

$$= \phi_0 \nabla \times f + \nabla \phi \times f$$

$$= \nabla f \times \phi + \nabla \phi \times f$$