TEORIA

CAMBIO DE BASE

Como lo mencionamos anteriormente, un espacio vectorial puede tener un número infinito de bases. Entonces ahora, nos enfocaremos a determinar la relación que existe entre las bases de un espacio vectorial dado.

Sea el conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base del espacio vectorial V. Entonces todo vector $u \in V$ se puede escribir en términos de los vectores de la base S, esto es,

$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n$ Definamos el siguiente vector columna, como,

$$[u]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \equiv \text{ vector de coordenadas de } u \text{ en términos de la base de } S.$$

Esta representación es única y corresponde a los coeficientes del desarrollo del vector u en términos de la base

$S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Sea $T = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ otra base del espacio vectorial V, entonces el vector $u \in V$ tiene otra representación distinta en términos de esta nueva base, esto es,

$$u = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \ldots + \beta_n w_n$$

donde ahora

$$[u]_T = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \equiv \text{ vector de coordenadas de } u \text{ en términos de la base de } T.$$

EJEMPLO: Si $u=(-1,2,-6,2)$ es un vector arbitrario de R^4, determinar $[u]_S$ donde $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ es una base de R^4 con, $v_1=(1,1,0,0)$, $v_2=(2,0,1,0)$, $v_3=(0,1,2,-1)$ y $v_4=(0,1,-1,0)$.

SOLUCIÓN: Escribimos al vector $u=(-1,2,-6,2)$ como combinación lineal de la base *S*, es decir,

$$u=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4 \quad \Rightarrow \quad [u]_S=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}$$

De manera que tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned}\alpha_1+2\alpha_2&=-1\\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4&=2\\ \alpha_2+2\alpha_3-\alpha_4&=-6\\ -\alpha_3&=2\end{aligned} \quad \text{resolviendo encontramos que la solución es,} \quad \begin{aligned}\alpha_1&=5\\ \alpha_2&=-3\\ \alpha_3&=-2\\ \alpha_4&=-1\end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector *u* en términos de la base *S* está dado por $[u]_S=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$

Procedimiento para obtener el cambio de base de un vector

Cuando escribimos un vector en términos de dos bases distintas, sus representaciones son también distintas y únicas, determinaremos entonces la relación que guardan ambas representaciones.

Sean $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ y $T=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ dosbasesdeunespaciovectorial V.

Escribimos al vector

$u\in V$ en términos de la base T, esto es,

$$u=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\alpha_3 w_3+\ldots+\alpha_n w_n \quad \Rightarrow \quad [u]_T=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

Ahora escribimos el vector u en términos de la base S:

$$\begin{aligned}[u]_S &= [\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \ldots + \alpha_n w_n]_S \\ &= [\alpha_1 w_1]_S + [\alpha_2 w_2]_S + \ldots + [\alpha_n w_n]_S = \alpha_1 [w_1]_S + \alpha_2 [w_2]_S + \ldots + \alpha_n [w_n]_S\end{aligned}$$

Los términos $[w_i]_S$, significan que debemos escribimos los vectores de la base T en términos de la base S, es

$$\begin{aligned}w_1 &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots + a_{n1} v_n \\ w_2 &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \ldots + a_{n2} v_n \\ &\cdots \\ w_n &= a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \ldots + a_{nn} v_n\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$[w_1]_S = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad [w_2]_S = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \ [w_n]_S = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sustituimos los vectores $[w_i]_S$ en la ecuación $[u]_S = \alpha_1 [w_1]_S + \alpha_2 [w_2]_S + \ldots + \alpha_n [w_n]_S$, esto es

$$[u]_S = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_n a_{1n} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_n a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_n a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

de donde observamos que

$$[u]_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} [u]_T$$

Esta ecuación relaciona al vector escrito en términos de la base *T*, $([u]_T)$ con el vector escrito en términos de la base *S*, $([u]_S)$, esta relación se hace mediante una matriz que definiremos como, Matriz de Cambio de Base o Matriz de transición, dada por,

$$P_{T\to S} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \text{ matriz de cambio de base (de la base } T \text{ a la base } S\text{)}$$

La matriz de transición de de la base S a la base T se obtiene realizando un proceso semejante al anterior o simplemente como,

$$Q_{S\to T} = P^{-1}{}_{T\to S} \equiv \text{ matriz de cambio de base (de la base } S \text{ a la base } T\text{).}$$

Utilizando esta matrices de cambio de base tenemos las siguientes relaciones,

$$[u]_S = P_{T\to S}[u]_T$$
$$[u]_T = Q_{S\to T}[u]_S$$

EJEMPLO: Determinar las matrices de cambio de base $P_{T\to S}$ y $Q_{S\to T}$, para las siguientes bases de R^3, sean $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases del espacio vectorial R^3 con, $v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = (1,1,1)$, $w_1 = (6,3,3)$, $w_2 = (4,-1,3)$ y $v_3 = (5,5,2)$.

SOLUCIÓN: Primero determinemos la matriz $P_{T\to S}$, expresamos los vectores de T en términos de los vectores de S, esto es,

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 \quad (1)$$
$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 \quad (2)$$
$$w_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 \quad (3)$$

donde deseamos determinar

$$[w_1]_S = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad [w_2]_S = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [w_3]_S = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

de tal manera que

$$P_{T\to S} = \left([w_1]_S \quad [w_2]_S \quad [w_3]_S\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Así que tenemos que resolver los sistemas de ecuaciones lineales que se generan, (1), (2) y (3).

MÉTODO A) Para el sistema (1) tenemos,

$$(6,3,3)=a_{11}(2,0,1)+a_{21}(1,2,0)+a_{31}(1,1,1)=(2a_{11}+a_{21}+a_{31},2a_{21}+a_{31},a_{11}+a_{31})$$

entonces

$$\begin{array}{l} 6=2a_{11}+a_{21}+a_{31} \\ 3=2a_{21}+a_{31} \\ 3=a_{11}+a_{31} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 1 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [w_1]_S=\begin{pmatrix} a_{11}=2 \\ a_{12}=1 \\ a_{13}=1 \end{pmatrix}$$

Para el sistema (2) ahora,

$$(4,-1,3)=a_{12}(2,0,1)+a_{22}(1,2,0)+a_{32}(1,1,1)=(2a_{12}+a_{22}+a_{32},2a_{22}+a_{32},a_{12}+a_{32})$$

de donde

$$\begin{array}{l} 4=2a_{12}+a_{22}+a_{32} \\ -1=2a_{22}+a_{32} \\ 3=a_{12}+a_{32} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_2 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ a_{22} & 0 & 1 & 0 \\ a_{32} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [w_2]_S=\begin{pmatrix} a_{12}=2 \\ a_{22}=-1 \\ a_{32}=1 \end{pmatrix}$$

Finalmente para el sistema (3),

$$(5,5,2)=a_{13}(2,0,1)+a_{23}(1,2,0)+a_{33}(1,1,1)=(2a_{13}+a_{23}+a_{33},2a_{23}+a_{33},a_{13}+a_{33})$$

con

$$\begin{array}{l} 5=2a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ 5=2a_{23}+a_{33} \\ 2=a_{13}+a_{33} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [w_3]_S=\begin{pmatrix} a_{13}=1 \\ a_{23}=2 \\ a_{33}=1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de transición $P_{T\to S}$ esta dada por

$$P_{T\to S}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MÉTODO B) Otra manera de resolver de manera simultanea los tres sistemas de ecuaciones lineales es, construyendo una matriz doble que contenga a los vectores de ambas bases y transformar a una de las matrices a la matriz identidad, esto es,

$$(v_1 \quad v_2 \quad v_3 | w_1 \quad w_2 \quad w_3) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I \mid P_{T \to S})$$

Para determinar la metro de cambio de base $Q_{S \to T}$ tenemos que hacer un desarrollo similar al anterior, es decir, resolver ahora los siguientes sistemas de ecuaciones,

$$v_1 = b_{11} w_1 + b_{21} w_2 + b_{31} w_3$$
$$v_2 = b_{12} w_1 + b_{22} w_2 + b_{32} w_3$$
$$v_3 = b_{13} w_1 + b_{23} w_2 + b_{33} w_3$$

donde ahora

$$Q_{S \to T} = ([v_1]_T \quad [v_2]_T \quad [v_3]_T) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Usando la matriz doble, definida anteriormente, tenemos

$$(v_1 \quad v_2 \quad v_3 | w_1 \quad w_2 \quad w_3) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3/2 & 1/2 & -5/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (Q_{S \to T} \mid I)$$

Por lo tanto la matriz de transición $Q_{S \to T}$ esta dada por

$$Q_{S \to T} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Además se debe de cumplir que $Q_{S \to T} = P^{-1}{}_{T \to S}$

Vemos que es mas práctico usar la representación matricial de los sistemas de ecuación es lineales, por lo cual a continuación daremos una forma de escribir un polinomio mediante una notación matricial.

Consideremos un polinomio de grado *n*, esto es

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

este tiene una representación como un vector columna, la cual esta dada de la forma siguiente,

$$P(x) = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Sean $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = -x^2 + 2x - 3$ dos polinomio, escribirlos como vectores columna.

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Consideremos las siguientes bases del espacio vectorial P_1, $S = \{v_1, v_2\}$ y $T = \{w_1, w_2\}$ con,

$v_1 = x$, $v_2 = x - 3$, $w_1 = x - 1$ y $w_2 = x + 1$

Determinar las matrices de cambio de base $P_{T \to S}$ y $Q_{S \to T}$.

Escribir al polinomio $u = 5x + 1$ en términos de la base *T*, esto es, encontrar $[u]_T$ y mediante $P_{T \to S}$ determinar $[u]_S$.

SOLUCIÓN: Construimos la matriz doble con los elementos de ambas bases

$$\left(v_1 \quad v_2 \mid w_1 \quad w_2 \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Para $P_{T \to S}$ tenemos que $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right)$ por lo tanto $P_{T \to S} = \begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Para $Q_{S \to T}$ ahora es $\left(\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$ entonces tenemos que $Q_{S \to T} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

Ahora determinemos $[u]_T$, esto es, escribimos al vector *u* en términos de los vectores de la base *T*,

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad \text{donde} \quad [u]_T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

sustituyendo

$$5x + 1 = \alpha_1 (x - 1) + \alpha_2 (x + 1) = (\alpha_1 + \alpha_2) x + (-\alpha_1 + \alpha_2)$$

de donde obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 = 5 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \end{array}$$

entonces

$$[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para encontrar $[u]_S$ usamos la matriz de cambio de base $P_{T \to S}$, que transforma un vector en términos de la base *T*, a un vector en términos de la base *S*, esto es,

$$[u]_S = P_{T \to S} [u]_T = \begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

BASES ORTONORMALES

Entre todos los conjuntos de vectores que forman bases de un espacio vectorial, existen algunos que tienen ciertas propiedades o características muy particulares, ya sea por sus aplicaciones o por simplificar algunas cuestiones algebraicas. Estas bases son conocidas como bases ortonormales y a continuación analizaremos sus aspectos mas importantes.

En particula,r solo trataremos bases ortonormales de vectores en el espacio vectorial R^n y todos los subespacios que pueden obtenerse de el, esto es, en R^2, R^3, R^4, etc.

Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de el espacio vectorial R^n, es un conjunto ortogonal si los vectores

satisfacen la siguiente condición:

$v_i \cdot v_j = 0$ para $i \neq j$

en otras palabras, si los vectores son perpendiculares entre si. La operación $v_i \cdot v_j$ es el producto punto o escalar

común que conocemos de análisis vectorial, esto es,

$$u \cdot v = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

El conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ será un conjunto ortonormal de vectores si se cumple las condiciones siguientes,

$v_i \cdot v_j = 0$ para $i \neq j$

$v_i \cdot v_j = 1$ para $i = j$

es decir, si los vectores son perpendiculares y cada uno de ellos tiene longitud unitaria, $v_i = 1$, para toda i .

EJEMPLO: El conjunto de vectores canónicos de R^3, es un conjunto de vectores ortonormal. Tenemos que,

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{k} = (1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0$$
$$\hat{\jmath} \cdot \hat{k} = (0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$$

y además

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = 1$$
$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = 1$$
$$\hat{k} \cdot \hat{k} = (0,0,1) \cdot (0,0,1) = 1$$

Todo conjunto ortogonal de de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, se puede transformar en un conjunto ortonormal, únicamente tenemos que normalizar los vectores del conjunto S. Recordemos que normalizar un vector, significa hacerlo de longitud unitaria, esto se realiza, dividiendo al vector entre su norma (longitud).

EJEMPLO: Consideremos los vectores $u_1 = (1,0,2)$, $u_2 = (-2,0,1)$ y $u_3 = (0,1,0)$ del espacio vectorial R^3. Determinar un conjunto ortonormal a partir de ellos.

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$u_1 \cdot u_2 = (1,0,2) \cdot (-2,0,1) = 0$$
$$u_1 \cdot u_3 = (1,0,2) \cdot (0,1,0) = 0$$
$$u_2 \cdot u_3 = (-2,0,1) \cdot (0,1,0) = 0$$

por lo tanto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es un conjunto ortogonal de vectores en R^3.

Ahora normalizamos los vectores, esto es,

$$w_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{(1,0,2)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$
$$w_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{(-2,0,1)}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$
$$w_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = (0,1,0)$$

esto nuevo conjunto de vectores satisface las condiciones,

$$w_1 \cdot w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$$
$$w_1 \cdot w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \cdot (0,1,0) = 0$$
$$w_2 \cdot w_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \cdot (0,1,0) = 0$$

y

$$w_1 \cdot w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 1$$
$$w_2 \cdot w_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 1$$
$$w_3 \cdot w_3 = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = 1$$

Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{w_1, w_2, w_3\}$ es un conjunto ortonormal en R^3.

Si $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es un conjunto ortonormal de vectores, entonces los vectores de S son linealmente independientes. Para mostrar esto, consideremos la siguiente ecuación,

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n=0$$

multiplicamos la ecuación anterior por el vector v_1, con lo cual obtenemos:

$$\alpha_1(v_1\cdot v_1)+\alpha_2(v_2\cdot v_1)+\ldots+\alpha_n(v_n\cdot v_1)=0$$

como los vectores v_i son ortonormales entonces $v_i\cdot v_j=0$ para $i\neq j$ y $v_i\cdot v_j=1$ para $i=j$, así tenemos que,

$$\alpha_1(v_1\cdot v_1)+\alpha_2(v_2\cdot v_1)+\ldots+\alpha_n(v_n\cdot v_1)=\alpha_1(v_1\cdot v_1)=\alpha_1\cdot 1=0$$

por lo tanto $\alpha_1=0$.

Realizamos este mismo procedimiento para cada uno de los vectores $v_i\in S$, esto es, ahora multiplicamos la ecuación por cada uno de los vectores v_i, esto es,

$$\alpha_1(v_1\cdot v_i)+\alpha_2(v_2\cdot v_i)+\ldots+\alpha_i(v_i\cdot v_i)+\ldots+\alpha_n(v_n\cdot v_i)=0$$

por condiciones de ortonormalidad el único término que contribuye es,

$$\alpha_i(v_i\cdot v_i)=\alpha_i\cdot 1=0$$

esto implica que $\alpha_i=0$ para toda $i=1,2,...,n$.

Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ es linealmente independiente.

Si $S=\{v, v, ..., v\}$ es un conjunto ortonormal de n vectores en el espacio vectorial R^n, cuya dimensión es n,

entonces S es una base ortonormal de V. Esto se justifica por que, el número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial es igual a la dimensión del espacio vectorial.

Sea $S=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de un espacio vectorial V, entonces todo vector $u\in V$ lo podemos escribir en términos de esta base, esto es,

$$u=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_n\cdot v_n$$

donde como ya sabemos

$$[u]_S=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

multiplicamos la ecuación vectorial anterior por v_i, entonces tenemos,

$$u\cdot v_i=\alpha_1(v_1\cdot v_i)+\alpha_2(v_2\cdot v_i)+\ldots+\alpha_i(v_i\cdot v_i)+\ldots+\alpha_n(v_n\cdot v_i)$$

como los vectores son ortonormales entonces

$$u\cdot v_i=\alpha_i(v_i\cdot v_i)=\alpha_i\cdot 1=\alpha_i$$

En otras palabras, para obtener los coeficientes del desarrollo de un vector en términos de los vectores de una base, solo necesitamos multiplicar al vector que deseamos desarrollar por cada uno de los vectores de la base, y cada producto será igual aun coeficiente.

EJEMPLO: Sea $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base ortonormal del espacio vectorial R^3, donde los vectores están dados por, $v_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $v_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ y $v_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Si $u=(3,4,5)$ es un vector arbitrario de R^3, determinar $[u]_S$.

SOLUCIÓN: Nos piden escribir al vector *u* en términos de la base *S*, es decir, tenemos que resolver la ecuación

$$u=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\alpha_3\cdot v_3$$

de esta forma podemos encontrar,

$$[u]_S=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

Para determinar los coeficientes α_i, podemos resolver el sistema de ecuaciones lineales correspondiente, esto es,

$$\begin{aligned}3&=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_3\\4&=-\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3\\5&=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3\end{aligned}$$

Pero como los vectores v_1,v_2,v_3 son ortonormales, entonces tenemos que los coeficientes están dados por $\alpha_i=u\cdot v_i$, de donde

$$\alpha_1=u\cdot v_1=(3,4,5)\cdot\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=1$$

$$\alpha_2=u\cdot v_2=(3,4,5)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\alpha_3=u\cdot v_3=(3,4,5)\cdot\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=7$$

Por lo tanto

$$[u]_S=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}$$

Si $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ es una base arbitraria del espacio vectorial R^n, entonces esta base se puede convertir en una base ortonormal del espacio vectorial R^n.

A continuación describiremos el proceso para convertir una base arbitraria de vectores en una base ortonormal de vectores para el espacio vectorial R^n, este procedimiento es importante ya que se han mostrado algunas ventajas y utilidades de trabajar con bases ortonormales en lugar de usar cualquier otra base.

Proceso de Ortonormalización de Gram – Schmidt

El procedimiento general consiste, en construir conjuntos de vectores ortogonales en el espacio vectorial R^n, a partir de ciertos vectores dados.

Consideremos un subespacio vectorial W del espacio vectorial R^n, $W \subseteq R^n$, el cual tiene una base conocida cuyos vectores forman el conjunto $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, entonces existe una base ortonormal $T = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ para el subespacio W.

Determinemos esta base ortonormal. Elegimos un vector arbitrario del conjunto $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, por lo general siempre se elige al primer vector, esto es, sea

$$w_1 = u_1$$

entonces tenemos que u_1 y u_2 generan un subespacio W_1 de W, esto es,

$$W_1 = gen\{u_1, u_2\} = gen\{w_1, u_2\} \subseteq W$$

buscamos un vector w_2 en W_1 que sea ortogonal a w_1, este debe ser de la forma

$$w_2 = c_1 w_1 + c_2 u_2$$

determinamos el valor de los coeficientes c_1 y c_2 de tal manera que $w_1 \cdot w_2 = 0$, por ser vectores ortogonales,

$$w_1 \cdot w_2 = w_1 \cdot (c_1 w_1 + c_2 u_2) = c_1 (w_1 \cdot w_1) + c_2 (w_1 \cdot u_2) = 0$$

de donde

$$c_1 = -c_2 \frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1}, \qquad \text{si } \ c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1}$$

entonces escribimos al vector w_2 como,

$$w_2 = -\frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1} w_1 + u_2$$

tenemos así que $\{w_1, w_2\}$ es un conjunto ortogonal de W_1.

Ahora buscamos un vector w_3 en $W_2 = gen\{w_1, w_2, u_3\} \subseteq W$ que sea perpendicular a w_1 y w_2, entonces

$$w_3 = d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 u_3$$

nuevamente determinamos los coeficientes d_1, d_2 y d_3 de tal forma que, $w_1 \cdot w_3 = 0$ y $w_2 \cdot w_3 = 0$, así que

$$w_1 \cdot w_3 = w_1 \cdot (d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 u_3) = d_1 (w_1 \cdot w_1) + d_2 (w_1 \cdot w_2) + d_3 (w_1 \cdot u_3) = 0$$

$$w_2 \cdot w_3 = w_2 \cdot (d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 u_3) = d_1 (w_2 \cdot w_1) + d_2 (w_2 \cdot w_2) + d_3 (w_2 \cdot u_3) = 0$$

como w_1 y w_2 son ortogonales entonces $w_1 \cdot w_2 = 0$, lo cual reduce las ecuaciones a

$$w_1 \cdot w_3 = w_1 \cdot (d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 u_3) = d_1 (w_1 \cdot w_1) + d_3 (w_1 \cdot u_3) = 0$$

$$w_2 \cdot w_3 = w_2 \cdot (d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 u_3) = d_2 (w_2 \cdot w_2) + d_3 (w_2 \cdot u_3) = 0$$

de esta manera, los coefientes son

$$d_1 = -d_3 \frac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1}, \quad d_2 = -d_3 \frac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2}, \quad \text{si } d_3 = 1 \quad \Rightarrow d_1 = -\frac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1} \text{ y } d_2 = -\frac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2}$$

escribimos al vector w_3 como,

$$w_3 = -\frac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 + u_3$$

por lo tanto, el conjunto de vectores $\{w_1, w_2, w_3\}$ es ortogonal en W_2.

El siguiente vector w_4 en $W_3 = gen\{w_1, w_2, w_3, u_4\} \subseteq W$ ortogonal a los vectores w_1, w_2 y w_3 esta dado por,

$$w_4 = -\frac{w_3 \cdot u_4}{w_3 \cdot w_3} w_3 - \frac{w_2 \cdot u_4}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{w_1 \cdot u_4}{w_1 \cdot w_1} w_1 + u_4$$

El procedimiento termina hasta usar el último vector del conjunto $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, con lo cual obtendremos una base ortogonal $T' = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ del subespacio W.

Si ahora normalizamos los vectores de esta base, es decir, sean

$$v_i = \frac{w_1}{|w_i|} \quad \text{para } i = 1,2,3,...,n.$$

Entonces el conjunto de vectores $T = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ será una base ortonormal del subespacio vectorial W, donde

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

$$v_i \cdot v_j = 1 \quad \text{para } i = j$$

En resumen tenemos que, dada una base arbitraria $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de un espacio vectorial $V \subseteq R^n$, el proceso de ortonormalización consiste en obtener los siguientes vectores,

$$w_1 = u_1$$

$$w_2 = u_2 - \frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1} w_1$$

$$w_3 = u_3 - \frac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2} w_2$$

$$w_4 = u_4 - \frac{w_1 \cdot u_4}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot u_4}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{w_3 \cdot u_4}{w_3 \cdot w_3} w_3$$

$$\cdots$$

$$w_n = u_n - \frac{w_1 \cdot u_n}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot u_n}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \ldots - \frac{w_{n-1} \cdot u_n}{w_{n-1} \cdot w_{n-1}} w_{n-1}$$

donde el conjunto de vectores $\{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ es ortogonal, entonces si los normalizamos

$$v_i = \frac{w_i}{|w_i|} \quad \text{para} \quad i = 1,2,3,...,n.$$

Obtendremos una base ortonormal del espacio vectorial V, dada por el conjunto de vectores

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

EJEMPLO: Si los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman un una base del espacio vectorial R^3, donde $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (-2,3-1)$ y $u_3 = (1,2,-4)$, determinar a partir de ellos una base ortonormal para R^3.

SOLUCIÓN: Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt para ortonormalizar los vectores de la base, esto es, Sea

$$w_1 = u_1 = (1,-1,1)$$

luego

$$w_2 = u_2 - \frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (-2,3,-1) - \frac{(1,-1,1)\cdot(-2,3,-1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = (-2,3,-1) - \frac{-6}{3}(1,-1,1)$$
$$= (-2,3,-1) - (-2,2,-2) = (0,1,1)$$

ahora

$$w_3 = u_3 - \frac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2} w_2 = (1,2,-4) - \frac{(1,-1,1)\cdot(1,2,-4)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) - \frac{(0,1,1)\cdot(1,2,-4)}{(0,1,1)\cdot(0,1,1)}(0,1,1)$$
$$= (1,2,-4) - \frac{-5}{3}(1,-1,1) - \frac{-2}{2}(0,1,1) = (1,2,-4) + (5/3,-5/3,5/3) + (0,1,1) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

tenemos que el conjunto de vectores $\{w_1, w_2, w_3\}$ es ortogonal, por lo que normalizamos cada uno de estos vectores, es decir,

$$v_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$v_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$v_3 = \frac{w_3}{|w_3|} = \sqrt{\frac{3}{32}}\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal para el espacio vectorial R^3.

EJERCICIOS

1. Calcula el vector de coordenadas $[\mathrm{P}]_{\mathrm{B}}$ a partir de la base B y el vector P.
   a) $B=\{-7+4x\ ,\ 2-3x\}$, $\qquad \mathrm{P}=17-6x$
   b) $B=\{1+2x\ +2x^2,\ 2x-x^2\ ,\ -1-2x\}$, $\qquad \mathrm{P}=-1+6x-8x^2$

2. Sea $\mathrm{B}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right\}$ una base de M_{2x2} Calcula:
   a) M si $[\mathrm{M}]_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 8\\ 10\end{pmatrix}$
   b) El vector de coordenadas de M si: $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -4 & -4\end{pmatrix}$

3. Encuentra la matriz de transición o cambio de base de $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\}$ a $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2\}$ si $\mathrm{v}_1=(1,1)$, $\mathrm{v}_2=(1,2)$, $\mathrm{w}_1=(1,3)$ y $\mathrm{w}_2=(1,4)$

4. Si $S=\{(-1,2,1),(0,1,1),(-2,2,1)\}$ y $T=\{(-1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ son bases para $\mathbb{R}^3$ y si $[v]_S=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
   a) Encuentra $T_{T\to S}$ y $T_{S\to T}$
   b) Usando a) encuentra $[v]_T$
   c) ¿Cuánto vale $(T_{T\to S})(T_{S\to T})$?

5. Si $S=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2\}$ y $T=\{\mathrm{t},\mathrm{t}+1\}$ son dos bases para P_1 y la matriz de transición de S a T es $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ encuentra los vectores de S.

6. Usando el método de Gram-Schmidt determina una base ortonormal para V si:

   a) $V=gen\left\{\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 5\end{pmatrix}\right\}$ $\qquad$ **b)** $V=gen\left\{\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -2\\ 2\end{pmatrix}\right\}$

7. Construye una base ortonormal para R^3 que contenga los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Sean S = $\{v_1, v_2, v_3\}$ y T = $\{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases del espacio vectorial R3, donde w1 = (0, 1, 1), w2 = (1, 0, 0) y w3 = (1, 1, 0). Si la matriz de cambio de la base T a la base S esta dada por:

$$P_{T\to S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ Cuáles son los vectores de la base S

9. Si S = $\{t^2 + t + 1, t^2 + 2t + 3, t^2 + 1\}$ y T= $\{t + 1, t^2, t^2 + 1\}$ son dos bases del espacio vectorial P2, determinar las matrices de transici´on de la base T a la base S ($P_{T\to S}$) y de la base S a la base T ($Q_{S\to T}$).

10. Considere las siguientes bases del espacio vectorial R^3, S = {(0,−2,3),(0,1,1),(1,1,0)} y T = {(0, −1, 1), (0, 3, 0), (1, −1, 1)}. Sean $[u]_T$ = (2, 1, 3) y $[v]_S$ = (−1, 4, 1) dos vectores escritos en terrminos de las bases S y T respectivamente.
a) Determine la matriz de transici´on de la base T a la base S.
b) Encuentre $[u]_S$.
c) Determine la matriz de transici´on de la base S a la base T .
d) Encuentre $[v]_T$.

11. Sean S = {v1, v2, v3} y T = {w1, w2, w3} dos bases del espacio vectorial R3, donde v1 = (1, 0, 1), v_2 = (−1,0,0) y v_3 = (0,1,2). Si la matriz de cambio de la base T a la base S esta dada por

$$P_{T\to S} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar los vectores de la base T.

12. Considere el conjunto de vectores E = $\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}$, vectores base en coordenadas esférica, y C = $\{e_\rho, e_\varphi, e_z\}$, vectores base en coordenadas cilíndricas, ambos conjuntos son bases del espacio vectorial R^3, donde e_r = (senθ cosφ , senθ senφ, cosθ),

$e_\theta = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta\ \mathrm{sen}\varphi, -\mathrm{sen}\theta)$, $e_\varphi = (-\mathrm{sen}\varphi, \cos\varphi, 0)$, $e_\rho = (\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi, 0)$, $e_\varphi = (-\mathrm{sen}\varphi, \cos\varphi, 0)$ y $e_Z = (0, 0, 1)$.determinar los vectores de la base T.

Detreminar las matrices de transición o de cambio de base, de coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas y viceversa.

13. Encuentre una base ortonormal para el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homog´eneo siguiente

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + 2x_4 = 0\\
&-2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\\
&x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\\
&4x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 = 0
\end{aligned}$$

14. Considere el siguiente conjunto de vectores $S = \{(1, -2, 3), (-2, 2, 2), (5/7, 4/7, 1/7)\}$, el cual es una base ortognonal de R^3. Escriba al vector $u = (12, -6, 6) \in R^3$

15. Dada la base $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ del espacio vectorial R^3, donde $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-2, 3, -1)$ y $v_3 = (1, 2, -4)$. Determine una base ortonormal de R^3 usando la base de vectores de S.