Nombre: Brayan Ramirez Benítez

Grupo: 1CM7

1. ¿Qué es una serie de potencias?

Una expresión de la forma

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

recibe el nombre de *serie de potencias* centrada en c.

Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

cuyo dominio es el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie es convergente y el valor de $f(x)$ es, precisamente, la suma de la serie en ese punto x.

2. (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se determina?

Sea

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n.$$

Entonces es cierta una, y solo una, de las tres afirmaciones siguientes:

1. La serie sólo converge en $x = c$.
2. Existen $R > 0$ de manera que la serie converge (absolutamente) si $|x - c| < R$ y diverge si $|x - c| > R$.
3. La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, el dominio o campo de convergencia de una serie de potencias es siempre un intervalo, ocasionalmente un punto, que llamaremos intervalo de convergencia. Notar que el teorema precedente no afirma nada respecto de la convergencia en los extremos del intervalo, c−R y c+R.

Al número R se le llama Radio de convergencia de la serie.

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ y sea $A := \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n}$
Entonces,

- $A = 0 \quad \Rightarrow \quad R = +\infty$
- $A = +\infty \quad \Rightarrow \quad R = 0$
- $0 < A < +\infty \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{A}$

- Si existe $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = A \Rightarrow R = \frac{1}{A}$
- Si existe $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A \Rightarrow R = \frac{1}{A}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ si $L < 1$

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}} \right| = \left| \frac{\sqrt{n}\, \cancel{x^n}\, x}{\cancel{x^n} \sqrt{n+1}} \right| = \left| \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = \left| x \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right|$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot |x| = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\, |x| = |x| = L < 1$$

$\Rightarrow \quad |x| < 1 = \boxed{-1 < x < 1}$ intervalo de convergencia

$\boxed{R = 1}$ radio de convergencia

para $x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}} =$ diverge

para $x = -1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} =$ converge

$\Rightarrow \quad \boxed{-1 \leq x < 1}$ intervalo de convergencia

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

$$\left| \frac{\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}} \right| = \left| \frac{n^3 \cancel{(-1)^n} \cancel{x^n} x}{\cancel{(-1)^n} (-1)^{-1} \cancel{x^n} (n+1)^3} \right| = \frac{(-1)n^3}{(n+1)^3} |x|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} |x| = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \right)^3 |x| = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} \right)^3 |x|$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} 1 \right)^3 |x| = 1^3 |x| = |x| = L$$

$$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\boxed{R = 1}$$

para $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1^n}{n^3} = \text{converge}$$

para $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-1)^n}{n^3} = \text{converge}$$

$$\therefore \boxed{-1 \leq x \leq 1}$$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{n!\, x^n x^1}{x^n (n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} |x|$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 \cdot |x| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |x| \cdot 0 < 1$$

$$\boxed{-\infty < x < \infty}$$

$$\boxed{R = \infty}$$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

$$\Rightarrow \left| \frac{(-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)^2 x^{n+1}}{2^{n+1}}}{(-1)^n \dfrac{n^2 x^n}{2^n}} \right| = \left| \frac{\cancel{2^n} \cancel{(-1)^n} (-1) (n+1)^2 \cancel{x^n} x}{\cancel{2^n} 2 \cancel{(-1)^n} \cancel{n^2} \cancel{x^n}} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1) \cdot (n+1)^2 x}{2 n^2} \right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{1}{2} |x| = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{2} |x|$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{2} |x| = \frac{1}{2} |x| = L < 1$$

$$\Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow \boxed{R = 2}$$

para $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (2)^n}{2^n} = \text{diverge}$$

para $x = -2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) n^2 (-2)^n}{2^n} = \text{diverge}$$

$$\boxed{\therefore -2 < x \leq 2}$$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

$$\left| \frac{\frac{(-2)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}}}{\frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}} \right| = \left| \frac{\cancel{(-2)^n}(-2)\cancel{x^n}x \sqrt[4]{n}}{\cancel{(-2)^n}\cancel{x^n}\sqrt[4]{n+1}} \right|$$

$$= \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}}\ 2|x|$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}}\ 2|x| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}}\ 2|x| = 2|x| = L < 1$$

$$\Rightarrow 2|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

para $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (\frac{1}{2})^n}{\sqrt[4]{n}} = \text{converge}$$

para $x = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (-\frac{1}{2})^n}{\sqrt[4]{n}} = \text{converge}$$

$$\boxed{\therefore\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}}$$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{4^{n+1} \ln(n+1)}}{\frac{(-1)^n x^n}{4^n \ln n}} \right| = \left| \frac{\cancel{4^n} \ln n \cancel{(-1)^n} (-1) \cancel{x^n} x}{\cancel{4^n}\, 4 \ln(n+1) \cancel{(-1)^n} \cancel{x^n}} \right|$$

$$= \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \frac{1}{4}|x|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \frac{1}{4}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{4}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{4}|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{1}{4}|x| = \frac{1}{4}|x| = L < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}|x| < 1 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$$

$$\boxed{R = 4}$$

Para $x = 4$

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{4^n \ln n}$ = converge

Para $x = -4$

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(-4)^n}{4^n \ln n}$ = diverge

$$\boxed{\therefore \; -4 < x \leq 4}$$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

$$\left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{(x-2)^n}{n^2+1}} \right| = \frac{(n^2+1)\cancel{(x-2)^n}(x-2)}{\cancel{(x-2)^n}((n+1)^2+1)} = \frac{n^2+1}{((n+1)^2+1)}|x-2|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n^2+2n+2)}|x-2| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} |x-2|$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 \; |x-2| = |x-2| = L < 1$$

$$\Rightarrow |x-2|<1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

$\boxed{R = 2}$

para $x = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n^2+1} = \text{converge}$$

para $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \text{converge}$$

$$\boxed{\therefore \quad 1 \le x \le 3}$$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

$$\left| \frac{\frac{3^{n+1}(x+4)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}} \right| = \left| \frac{\sqrt{n}\, \cancel{3^n}\, 3\, \cancel{(x+4)^n}\, (x+4)}{\cancel{3^n}\, \cancel{(x+4)^n}\, \sqrt{n+1}} \right| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\, 3|x+4|$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, 3|x+4| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}}\, 3|x+4| = 3|x+4|$$

$$\Rightarrow 3|x+4| < 1 \Rightarrow |x+4| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x+4 < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -4-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}-4 \Rightarrow -\frac{13}{3} < x < -\frac{11}{3}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{3}}$$

para $x = -\frac{13}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{13}{3}+4\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n}} = \text{diverge}$$

para $x = -\frac{11}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{11}{3}+4\right)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n}} = \text{diverge}$$

$\therefore\ -\frac{13}{3} < x < -\frac{11}{3}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

$$\left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n^n}} \right| = \left| \frac{n^n \cancel{(x-2)^n} (x-2)}{\cancel{(x-2)^n} (n+1)^n (n+1)} \right| = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} |x-2|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} |x-2| = 0 \cdot |x-2| = L < 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \cdot |x-2| < 1$$

$$\boxed{-\infty < x < \infty}$$

$$\boxed{\therefore \quad R = \infty}$$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n, \; b>0$

$$\left| \frac{\frac{(n+1)}{b^{(n+1)}}(x-a)^{n+1}}{\frac{n}{b^n}(x-a)^n} \right| = \left| \frac{(n+1)\cancel{(x-a)^n}(x-a)\, b^n}{n\, b^n\, b\, \cancel{(x-a)^n}} \right|$$

$$= \left| \frac{(n+1)(x-a)}{n \quad b} \right| = \frac{n+1}{n}\frac{1}{|b|}|x-a|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{b}|x-a| = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{1}{b}|x-a| = \frac{1}{b}|x-a| < 1$$

$$\Rightarrow |x-a| < b \quad \Rightarrow -b < x-a < b \Rightarrow a-b < x < b+a$$

$$\boxed{R=b}$$

para $x = b+a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(b+a-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(b)^n = \text{diverge}$$

para $x = a-b$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(a-b-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(-b)^n = \text{diverge}$$

$$\boxed{\therefore \; a-b < x < b+a}$$