Primer examen de Cálculo

Funciones y límites

Nombre:____ **Grupo**_______

Instrucciones: Resuelva los problemas propuestos a continuación de tal manera que el puntaje máximo sea 7. Desarrolle todos los pasos intermedios y explique cada uno de ellos.

1. (1 Pt.) Determine el conjunto solución que satisfacen las siguientes desigualdades

   a) $x^2 - 5x + 6 < 0$ b) $|x-2| \leq |2x+3|$

2. (1 Pt.) a) Sea $f_0(x) = 1/(2-x)$. Encuentre el dominio y el recorrido de la función. Luego, determine si la función es par, impar o ninguna de ellas.
   b) Si $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, ...$, encuentre una fórmula general para $f_n(x)$.

3. (2 Pt.)

   (a) Calcular el siguiente límite algebraico

   $$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h\sqrt{1+h}} - \frac{1}{h} \right)$$

   (b) Halle todos los valores de c para los que el límite existe. Luego, calcule el valor de dicho límite.

   $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{c}{x^3-1} \right)$$

4. (2 Pt.) Calcular los siguientes límites en el infinito

   $$a) \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3+1} \qquad b) \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}$$

5. (2 Pt.)

   (a) Demuestre que $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$ utilizando métodos algebraicos. Utilizando el resultado anterior demuestre que

   $$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$$

   (b) Aplique el resultado del inciso anterior para demostrar que si $m \neq 0$,

   $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(m\theta) - 1}{\theta^2} = -\frac{m^2}{2}$$

6. (1 Pt.) Hallar el valor de a y b que hace a f continua en todas partes

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si} \quad x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

7. (2 Pt.) Dibujar la gráfica de la función calculando el dominio, contradominio, intersecciones con los ejes, simetría y asíntotas.

   $$f(x) = \frac{4x^2}{x^2-9} + \frac{1}{2}$$

1. (1 Pt.) Determine el conjunto solución que satisfacen las siguientes desigualdades

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

Solución.

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-2) < 0$$

Así, estudiaremos el valor del polinomio en los intervalos

$$(-\infty, 2) \qquad (2,3) \qquad (3,\infty)$$

Evaluando en un punto intermedio de cada intervalo obtenemos que la desigualdad $x^2 - 5x + 6 < 0$ se cumple en $(2,3)$. Por lo tanto

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \text{en el intervalo abierto} \quad (2,3)$$

Otra forma de resolver este problema es darse cuenta de que $(x-3)(x-2) < 0$ si se cumplen las dos siguientes opciones

$$I) x - 3 < 0 \quad \text{y} \quad x - 2 > 0, \qquad \text{o} \qquad II) x - 3 > 0 \quad \text{y} \quad x - 2 < 0.$$

De la primera posibilidad obtenemos

$$x < 3 \quad y \quad x > 2 \qquad \Rightarrow \qquad x \in (2,3).$$

De la segunda posibilidad obtenemos

$$x > 3 \quad y \quad x < 2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{No hay solución.}$$

Por lo tanto $x^2 - 5x + 6 < 0$ sólo se cumple en el intervalo abierto $(2,3)$.

b) $|x-2| \le |2x+3|$

Solución. Por definición de valor absoluto obtenemos que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si} \quad x-2 \ge 0 \\ 2-x, & \text{si} \quad x-2 < 0 \end{cases} \qquad |2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & \text{si} \quad 2x+3 \ge 0 \\ -2x-3, & \text{si} \quad 2x+3 < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si} \quad x \ge 2 \\ 2-x, & \text{si} \quad x < 2 \end{cases} \qquad |2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & \text{si} \quad x \ge -3/2 \\ -2x-3, & \text{si} \quad x < -3/2 \end{cases}$$

De todo lo anterior, se obtiene los siguientes casos de estudio: I) $(-\infty, -3/2)$, II) $(-3/2, 2)$, III) $(2, \infty)$.

Caso I) $(-\infty, -3/2)$. En este caso la desigualdad original queda como sigue

$$2 - x \le -2x - 3 \qquad \Rightarrow \qquad x \le -5$$

Caso II) $(-3/2, 2)$. En este caso obtenemos

$$2 - x \le 2x + 3 \qquad \Rightarrow \qquad 3x \ge -1 \qquad \Rightarrow \qquad x \ge -1/3$$

Caso III) $(2,\infty)$. Aquí se obtiene

$$x-2\le 2x+3 \qquad \Rightarrow \qquad x\ge -5$$

Tomando valores de prueba de cada uno de los casos nos damos cuenta que sólo los casos I) y II) son válidos. Por lo tanto, la solución final es

$$x\le -5 \qquad \text{y} \qquad x\ge -1/3, \qquad \Rightarrow \qquad (-\infty,-5)U(-1/3,\infty).$$

2. (1 Pt.) a) Sea $f_0(x)=1/(2-x)$. Encuentre el dominio y el recorrido de la función. Luego, determine si la función es par, impar o ninguna de ellas.
b) Si $f_{n+1}=f_0\circ f_n$ para $n=0,1,2,...$, encuentre una fórmula general para $f_n(x)$.

Solución. a) El dominio de $f_0(x)$ es $D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Para obtener el contradominio obtenemos la función inversa

$$y(2-x)=1 \quad \Rightarrow \quad -yx=1-2y \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2y-1}{y}.$$

Por lo tanto, dado que la función inversa se indetermina en $y=0$ obtenemos que el contradominio de $f_0(x)$ es $C=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Para verificar si la función es par o impar evaluamos la función en $f_0(-x)$

$$f_0(-2)=\frac{1}{2-(-x)}=\frac{1}{2+x}$$

Así, dado que $f_0(-x)\neq f_0(x)$ y $f_0(-x)\neq -f_0(x)$ podemos concluir que la función $f_0(x)$ no es par ni impar.

b) De acuerdo a la fórmula $f_{n+1}=f_0\circ f_n$ para $n=0,1,2,...$ obtenemos que

$$f_1(x)=f_0(x)\circ f_0(x)=\frac{1}{2-\frac{1}{2-x}}=\frac{2-x}{3-2x}$$

$$f_2(x)=f_0(x)\circ f_1(x)=\frac{1}{2-\frac{2-x}{3-2x}}=\frac{3-2x}{4-3x}$$

$$f_3(x)=f_0(x)\circ f_2(x)=\frac{1}{2-\frac{3-2x}{4-3x}}=\frac{4-3x}{5-4x}$$

$$f_4(x)=f_0(x)\circ f_3(x)=\frac{1}{2-\frac{4-3x}{5-4x}}=\frac{5-4x}{6-5x}$$

Por lo tanto, de todos los resultados anteriores se puede proponer la siguiente fórmula general para $f_n(x)$

$$f_n(x)=f_0(x)\circ f_{n-1}(x)=\frac{(n+1)-nx}{(n+2)-(n+1)x}.$$

3. (2 Pt.)

(a) Calcular el siguiente límite algebraico

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h\sqrt{1+h}}-\frac{1}{h}\right)$$

Solución.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h\sqrt{1+h}}-\frac{1}{h}\right)&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+h}}{1+\sqrt{1+h}}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-(1+h)}{h\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-h}{h\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})}\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) Halle todos los valores de c para los que el límite existe. Luego, calcule el valor de dicho límite.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right)$$

Solución.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1-c}{x^3-1}\right).$$

Para que el límite pueda existir requerimos que el numerador se haga cero en $x=1$. Así, en $x=1$ obtenemos que $x^2+x+1-c=0 \Rightarrow 3-c=0$. Por lo tanto, para que el límite exista $c=3$. Con este valor el límite original se convierte en

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)&=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{x^3-1}\right)\\&=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)=1\end{aligned}$$

4. (2 Pt.) Calcular los siguientes límites en el infinito

$$a)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}\left(\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{x^6}}}{\frac{1}{x^3}}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{\frac{9x^6-x}{x^6}}}{\frac{x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{9-\frac{1}{x^5}}}{1+\frac{1}{x^3}}=-3\end{aligned}$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\left(\frac{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+ax)-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{ax-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}\\&=\frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

5. (2 Pt.)

(a) Demuestre que $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$ utilizando métodos algebraicos. Utilizando el resultado anterior demuestre que

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

Solución. Multiplicando el primer límite por su conjugado obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\\ &= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\sin\theta\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\\ &= (1)(0)\left(\frac{1}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

De manera similar, para el segundo límite obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\\ &= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\\ &= (1)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Aplique el resultado del inciso anterior para demostrar que si $m \neq 0$,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(m\theta)-1}{\theta^2} = -\frac{m^2}{2}$$

Solución. Multiplicando este límite por su conjugado obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(m\theta)-1}{\theta^2} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(m\theta)-1}{\theta^2}\left(\frac{\cos(m\theta)+1}{\cos(m\theta)+1}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2(m\theta)-1}{\theta^2(\cos(m\theta)+1)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin^2(m\theta)}{\theta^2(\cos(m\theta)+1)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin^2(m\theta)}{\theta^2(\cos(m\theta)+1)}\left(\frac{m^2}{m^2}\right)\\ &= -m^2\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(m\theta)}{m\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(m\theta)}{m\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos(m\theta)+1}\right)\\ &= -m^2(1)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{m^2}{2}\end{aligned}$$

6. (1 Pt.) Hallar el valor de a y b que hace a f continua en todas partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si} \quad x < 2\\ ax^2 - bx + 3, & \text{si} \quad 2 \le x < 3\\ 2x - a + b, & \text{si} \quad x \ge 3\end{cases}$$

Solución. Para que la función $f(x)$ sea continua vamos a pedir que se cumpla lo siguiente

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

Luego, procedemos a calcular cada uno de los límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 4,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax^2 - bx + 3 = 4a - 2b + 3,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} ax^2 - bx + 3 = 9a - 3b + 3,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2x - a + b = 6 - a + b.$$

Así, de igualar los límites laterales en 2 y 3 obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{lcl} 4a - 2b + 3 = 4 & \Rightarrow & 4a - 2b = 1 \\ 9a - 3b + 3 = 6 - a + b & \Rightarrow & 10a - 4b = 3. \end{array}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos finalmente que $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$, con lo cual

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3, & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 2x, & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

7. (2 Pt.) Dibujar la gráfica de la función calculando el dominio, contradominio, intersecciones con los ejes, simetría y asíntotas.

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2-9} + \frac{1}{2}$$

Solución. Dado que la función no está bien definida en $x = \pm 3$, el dominio es $D = \mathbb{R}\backslash\{3, -3\}$. Para calcular el contradominio calculamos la función inversa de $f(x)$

$$\frac{4x^2}{x^2-9} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 9) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{9}{2} - y\right)x^2 = 9\left(\frac{1}{2} - y\right).$$

Por lo tanto, la función inversa es

$$x = \pm 3\sqrt{\frac{1-2y}{9-2y}}.$$

Esta función inversa no está bien definida en $y = \frac{9}{2}$. Para obtener el dominio completo nos damos cuenta que debido a la raíz cuadrada se debe cumplir

$$\frac{1-2y}{9-2y} \geq 0.$$

Por lo tanto hay que estudiar las siguientes dos posibilidades

$$I) 1 - 2y \geq 0 \quad \text{y} \quad 9 - 2y \geq 0, \qquad \text{o} \qquad II) 1 - 2y < 0 \quad \text{y} \quad 9 - 2y < 0.$$

De la primera posibilidad obtenemos

$$y \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y \leq \frac{9}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y \leq \frac{1}{2}.$$

De la segunda posibilidad obtenemos

$$y > \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y > \frac{9}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y > \frac{9}{2}.$$

Por lo tanto el contradominio de la función original $f(x)$ es $C = (-\infty, \frac{1}{2}]U(\frac{9}{2}, \infty)$.

Ahora, para estudiar las intersecciones con los ejes x y y, hacemos $x = 0$ y $y = 0$. De aquí se obtiene que $f(0) = \frac{1}{2}$. De igual forma, haciendo $f(x) = 0$ obtenemos

$$\frac{4x^2}{x^2-9} + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 9) \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ corta al eje x en ± 1 y al eje y en $\frac{1}{2}$. Para estudiar la simetría de la gráfica vemos si la función es par o impar. Así, dado que

$$f(-x) = \frac{4(-x)^2}{(-x)^2 - 9} + \frac{1}{2} = \frac{4x^2}{x^2-9} + \frac{1}{2},$$

obtenemos que la función es par.

Por último estudiaremos las asíntotas horizontales y verticales. Tal como se mencionó al inicio, la función no está bien definida en $x = \pm 3$, con lo cual las rectas $x = 3$ y $x = -3$ son asíntotas verticales de $f(x)$. Sin embargo, para saber el comportamiento de la función en estas asíntotas verticales necesitamos estudiar los siguientes límites laterales

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty.$$

Para estudiar la asíntota horizontal calculamos el siguiente límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{x^2 - 9} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{x^2 - 9} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{1 - \frac{9}{x^2}} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Además, dado que $f(x)$ es par, la asíntota horizontal es la misma para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$. Con toda la información anterior se obtiene finalmente que la gráfica de $f(x)$ es