II.-Caso en que las raices son repetidas: $(a_1 - a_2)^2 - 4a_1a_0 = 0$. En dicha situación se aplica la formula de reducción de orden

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}$$

de la expresion $\circledast$, se puede ver que $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1}{a_2x}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{a_2x^2}y = 0$ entonces $P(x) = \frac{a_1}{a_2x}$, $m_1 = \frac{-(a_1 - a_2)}{2a_0}$

$$y_z = x^{m_1} \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_2x}dx}}{x^{2[\frac{-(a_1-a_2)}{2a_2}]}}dx = x^{m_1} \int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_2}\int \frac{dx}{x}}}{x^{\frac{-a_1}{a_2}+1}}dx$$

$$y_z = x^{m_1} \int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_2}Lnx}}{xx^{\frac{-a_1}{a_2}}}dx = x^{m_1} \int \frac{e^{Lnx^{-\frac{a_1}{a_2}}}}{x^{\frac{-a_1}{a_2}}x}dx$$

$$= x^{m_1} \int \frac{\cancel{x^{-\frac{a_1}{a_2}}}}{\cancel{x^{-\frac{a_1}{a_2}}}x}dx = x^{m_1} \int \frac{dx}{x} = x^{m_1} Lnx$$

$$y_z = x^{m_1} Lnx$$

es decir la solución general para este caso es

$$y_h(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}Lnx$$

III.-Caso en que las raices son complejas $(a_1 - a_2)^2 - 4a_1a_0 < 0$

$$m_1 = \frac{-(a_1 - a_2) + \sqrt{4a_2a_0 - (a_1 - a_2)^2}}{2a_2}$$

$$m_2 = \frac{-(a_1 - a_2) - \sqrt{4a_2a_0 - (a_1 - a_2)^2}}{2a_2}$$

Si definimos nuevos parametros $\alpha = \frac{-(a_1 - a_2)}{2a_2}$, $\beta = \sqrt{4a_2a_0 - (a_1 - a_2)^2}2a_2$ $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$

$\therefore y_h(x) = c_1x^{\alpha+i\beta} + c_2x^{\alpha-i\beta}$, con c_1 y $c_2 \in \mathbb{C}$

$$= c_1x^\alpha x^{i\beta} + c_2x^\alpha x^{-i\beta}$$

$$= x^\alpha[c_1x^{i\beta} + c_2x^{-i\beta}]$$

$$= x^\alpha[c_1e^{Lnx^{i\beta}} + c_2e^{Lnx^{-i\beta}}]$$

$$= x^\alpha[c_1e^{i\beta Lnx} + c_2e^{-i\beta Lnx}]$$

al palicar la formula de Euler $e^{\pm i\theta} = Cos\theta \pm iSin\theta$

$y_h = x^\alpha[c_1(Cos(\beta Lnx) + iSin(\beta Lnx)) + c_2(Cos(\beta Lnx) - iSin(\beta Lnx))]$
$= x^\alpha[(c_1 + c_2)Cos(\beta Lnx) + i(c_1 - c_2)Sin(\beta Lnx)]$

entonces al escoger adecuadamente c_1 y c_2, tenemos que

$$y_h = x^\alpha[ACos(\beta Lnx) + BSin(\beta Lnx)]$$