Problema 3.81

Hallar la derivada direccional de $\phi(x,y,z) = z^2 y + y^2 z + z^2 x$ en $(1,1,1)$ en la dirección C representada por $r(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$

$P(1,1,1)$ $\qquad \dfrac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot T$

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dx}\hat{\imath} + \frac{d\phi}{dy}\hat{\jmath} + \frac{d\phi}{dz}\hat{k} = \frac{d(z^2y+y^2z+z^2x)}{dx}\hat{\imath} + \frac{d(z^2y+y^2z+z^2x)}{dy}\hat{\jmath} + \frac{d(z^2y+y^2z+z^2x)}{dz}$$

$$\nabla\phi = z^2\hat{\imath} + (z^2+2yz)\hat{\jmath} + (2zy + y^2 + 2zx)\hat{k}$$

evaluando en el punto solicitado P

$$\nabla\phi(P) = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

para tomar la derivada direccional hacemos el producto punto

$$\nabla\phi P \cdot r(t) =$$

$$(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}) \cdot \left(\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{1+t^4+t^6}} + \frac{3t\,\hat{\jmath}}{\sqrt{1+t^4+t^6}} + \frac{5t^2\,\hat{k}}{\sqrt{1+t^4+t^6}} \right)$$

$$= \boxed{\frac{1 + 3t + 5t^2}{\sqrt{1+t^4+t^6}}}$$

Problema 3. 82

si $\phi(x, y, z) = xy + zy + zx$, hallar

(a) $\nabla\phi$ en $(1, 1, 3)$

(b) $\frac{d\phi}{ds}$ en $(1, 1, 3)$ en la dirección de $[1, 1, 1]$

(c) la derivada normal $\frac{d\phi}{dn} = \nabla\phi \cdot n$ en $(1, 1, 3)$, donde n es un vector unitario normal a la superficie S definida por una constante $\phi(x, y, z)$

Para el inciso (a)

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dx}\hat{\imath} + \frac{d\phi}{dy}\hat{\jmath} + \frac{d\phi}{dz}\hat{k} = \frac{d(xy + yz + zx)}{dx}\hat{\imath} + \frac{d(xy + yz + zx)}{dy}\hat{\jmath} + \frac{d(xy + yz \ldots}{dz}$$

$$= (y + z)\hat{\imath} + (x + z)\hat{\jmath} + (y + x)\hat{k}$$

evaluando en $1, 1, 3$

$$\nabla\phi = (1+3)\hat{\imath} + (1+3)\hat{\jmath} + (1+1)\hat{k}$$

$$= 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k} = \boxed{[4, 4, 2]}$$

Para el inciso (b)

$$T = \frac{\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}}{[1^2+1^2+1^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}}{\sqrt{3}} = \left[\frac{1\hat{\imath}}{\sqrt{3}}, \frac{1\hat{\jmath}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\nabla\phi \cdot T = \frac{d\phi}{ds}$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}\right) \cdot (4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k})$$

$$= \boxed{\frac{10}{\sqrt{3}}}$$

Para el inciso (c)

para encontrar n

$$n = \frac{4\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+2\hat{k}}{[4^2+4^2+2^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+2\hat{k}}{\sqrt{36}} = \frac{2\hat{\imath}}{3} + \frac{2}{3}\hat{\jmath} + \frac{\hat{k}}{3}$$

como $\frac{d\phi}{n} = \nabla\phi \cdot n$, entonces

$$(4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}) \cdot \left(\tfrac{2}{3}\hat{\imath} + \tfrac{2}{3}\hat{\jmath} + \tfrac{\hat{k}}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = \boxed{6}$$