1ra Parte Primer Departamental



"Ecuaciones Diferenciales" Encarnación Salinas Hdez

na de

ınicas

a una

## 2.9.2. *Ejercicios de ecuaciones diferenciales de la forma* $y' = f(ax + by + c)$

Encontrar la solución general o particular, según sea el caso, para las siguientes ecuaciones diferenciales separables:

1. $\dfrac{dy}{dx} = 3\cos 7x$ *Solución.* $y = \dfrac{3}{7} sen 7x + C$

2. $\dfrac{dy}{dx} - 4xy = 0$ *Solución.* $Ce^{2x^2}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos y}{senx}$ *Solución.* $\sec y + \tan y = C(\csc x - \cot x)$

4. $x^3 y' = e^y$ $\phi_{I}$ *Solución.* $y = \ln\left|\dfrac{2x^2}{Cx^2+1}\right|$

5. $y' + x^2 seny = 0$ *Solución.* $3\ln|\csc y - \tan y| = C - x^3$

6. $(1+\cos\theta)\,dr = rsen\theta d\theta$ *Solución.* $r(1+\cos\theta) = C$

7. $xdy - ydx = 0;\quad y(1) = 1$ *Solución.* $y = x$

8. $\cos x dx + y dy = 0;\quad y(0) = -3$ *Solución.* $y = \pm\sqrt{9 - 2senx}$

9. *Problema de mayor esfuerzo*

   $y' = \tan(x+y)$ $\phi_{II}$ *Solución.* $\ln|1 + sen2(x+y)| + 2y - 2x = C$

10. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$ *Solución.* $\dfrac{e^{2x}}{2} - e^y - \arctan y - \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$

11. $y' + sen\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = sen\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ *Solución.* $2\ln\left|\tan\dfrac{y}{4}\right| + 4sen\dfrac{x}{2} = C$

12. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$ *Solución.* $-y^{-1} = \tan^{-1}(e^x) + C$

13. $x\sqrt{1-y^2}\,dx = dy$ *Solución.* $y = sen\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$

14. $\dfrac{dy}{dx} = senx\,(\cos 2y - \cos^2 y)$ *Solución.* $-\cot y = \cos x + C$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$ *Solución.* $\left(\dfrac{y+3}{x+4}\right)^5 = C_1 e^{y-x}$

16. $(y - yx^2)\dfrac{dy}{dx} = (y+1)^2$ *Solución.* $(y+1)^{-1} + \ln|y+1| = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + C$

17. $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$ *Solución.* $(e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = C$

18. $e^y sen 2x dx + \cos x(e^{2y} - y)dy = 0$ *Solución.* $-2\cos x + e^y + ye^{-y} + e^{-y} = C$

19. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$ *Solución.* $P = \dfrac{Ce^t}{1 + Ce^t}$

20. $y\ln x\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$ *Solución.* $\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 = \dfrac{y^2}{2} + 2y + \ln|y| + C$

21. La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto $(x, y)$ está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x + xy^2}{2y + x^2 y}$$

Encuentra la ecuación del miembro de la familia que pasa por (2,1):

*Solución.* $(x^2 + 2)(y^2 + 3) = 24$

22. $\dfrac{dU}{ds} = \dfrac{U + 1}{\sqrt{s} + \sqrt{sU}}$ *Solución.* $2\sqrt{U} + \ln|U+1| - 2\tan^{-1}\sqrt{U} = 2\sqrt{s} + C$

23. $x^3 e^{2x^2 + 3y^2} dx - y^3 e^{-x^2 - 2y^2} dy = 0$ *Solución.* $25(3x^2 - 1)e^{3x^2} + 9(5y^2 + 1)e^{-5y^2} = C$

24. $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{sen\phi + e^{2r} sen\phi}{3e^{r} + e^{r}\cos 2\phi}$; $\quad r = 0$ donde $\phi = \dfrac{\pi}{2}$

*Solución.* $2\tan^{-1} e^{r} + \tan^{-1}(\cos\phi) = \dfrac{\pi}{2}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$

*Solución.* $(x-1)(y+3)^{5} = C(y-1)(x+3)^{5}$

26. $\dfrac{dy}{dx} = sen(x+y)$

*Solución.* $\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + C$

27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln(3x+y+2)+2} - 3$

*Solución.*

$5x + 2y + \left(3x + y + 2)[\ln(3x + y + 2) - 1]\right) = C$

28. $\dfrac{dy}{dx} = (x+y+1)^{2}$ $\phi_{\text{II}}$

*Solución.* $y = -x - 1 + \tan(x + C)$

29. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

*Solución.* $4(y - 2x + 3) = (x + C)^{2}$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^{2}(y + x)$

*Solución.* $2y - 2x + sen2(x + y) = C$

31. *Problema de mayor esfuerzo. a)* Muestra que la ecuación diferencial no separable $[F(x) + yG(xy)]dx + xG(xy)dy = 0$ se convierte en separable al cambiar la variable dependiente de $y$ a $v$ de acuerdo con la transformación $v = xy$; *b)* usa esto para resolver $(x^2 + ysen(xy))dx + xsen(xy)dy = 0$.

*Solución.* $x^{3} - 3\cos xy = C.$

32. *Problema de mayor esfuerzo.* Evalúa:

$$\int_0^{\infty} e^{-\left[t^2+\left(\frac{9}{t^2}\right)\right]} dt$$

*Sugerencia:* sea $I(x) = \int_0^{\infty} e^{-\left[t^2+\left(\frac{x}{t}\right)^2\right]} dt$. Obtén $I'(x)$ derivando bajo el sigo de integral con respecto a $x$ y luego escribe $u = \frac{x}{t}$. Demuestra que $I'(x) = 2I(x)$ y resuelve esta ecuación diferencial separable para obtener $I(x)$. Da por conocido el hecho de que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ para obtener la condición inicial $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y obtén la solución de la ecuación diferencial que satisfaga esta condición. Finalmente, observa que la integral que se pide es $I(3)$.

33. Demuestra que la ecuación $yF(xy)dx + xG(xy)dy = 0$ puede resolverse haciendo $v = xy$.

34. Resuelve las siguientes ecuaciones reducibles a separables.

*a)* $[x^2 + 1 + x^2y^3 + y]dx + x(x^2y^2 + 1)dy = 0$

*b)* $ye^{xy}dx + x(e^{xy} - 1)dy = 0$

## *2.9.3. Ejercios de ecuaciones homogéneas y de ecuaciones reducibles a homogéneas*

En los siguientes ejercicios, determina si la función dada es homogénea. De ser así, indica de qué grado es:

1. $f(x,y) = \ln x^2 - 2\ln y$ *Solución.* Homogénea de grado cero.

2. $f(x,y) = \cos\dfrac{x^2}{x+y}$ *Solución.* No homogénea.

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 \ln\dfrac{y}{x}, \quad x > 0, \quad y > 0$ *Solución.* Homogénea de grado 2.

4. $f(x,y) = \sqrt{y}\, sen\left(\dfrac{x}{y}\right)$ *Solución.* Homogénea de grado ½.

5. $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ *Solución.* Homogénea de grado cero.

6. $f(x,y) = x^2 + senx\cos y$ *Solución*. No homogénea.

7. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ *Solución*. Homogénea de grado ½.

8. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3xy + 2y^2}$ *Solución*. Homogénea de grado 1.

9. $f(x,y) = x^4 - 3x^3y + 5y^2x^2 - 2y^4$ *Solución*. Homogénea de grado 4.

10. $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2$ *Solución*. Homogénea de grado -2.

Resuelve la ecuación diferencial dada usando un cambio de variable apropiado, checando que sea una ecuación homogénea:

11. $(x^2 + xy - y^2)dx + xydy = 0$ *Solución*. $y + x = Cx^2e^{\frac{y}{x}}$

12. $\left(y + x\cot\dfrac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$ *Solución*. $x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = C$

13. $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4ye^{-2x/y}$ *Solución*. $e^{\frac{2x}{y}} = 8\ln|y| + C$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ *Solución*. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 2\ln|x| + C$

15. $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$ *Solución*. $4x = y(\ln|y| - C)^2$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$ *Solución*. $\ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = C$

Encuentra una familia uniparamétrica de soluciones para cada una de las siguientes ecuaciones. Asume en cada caso que el coeficiente de $dy \neq 0$:

17. $\left(xe^{\frac{y}{x}} - ysen\dfrac{y}{x}\right)dx + xsen\dfrac{y}{x}dy = 0$ *Solución*. $\ln x^2 - e^{\frac{-y}{x}}\left(sen\dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x}\right) = C$

18. $2ye^{\frac{x}{y}}dx + \left(y - 2xe^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$ *Solución.* $2e^{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$

19. $ydx + x\ln\frac{y}{x}dy - 2xdy = 0$ *Solución.* $y = C\left(1 + \ln\frac{x}{y}\right)$

20. $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{x}{y}sen\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)dy = 0$ *Solución.* $ysen\frac{y}{x} = C$

Encuentra una solución particular que satisfaga la condición inicial para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

21. $(x^2 + y^2)dx = 2xydy, \quad y(-1) = 0$ *Solución.* $y^2 = x^2 + x$

✓22. $\left(xe^{\frac{y}{x}} + y\right)dx = xdy, \quad y(1) = 0$ *Solución.* $\ln|x| + e^{-\frac{y}{x}} = 1$

✓23. $y' - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 0$ *Solución.* $\ln|x| - \cos\frac{y}{x} + 1 = 0$

24. $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0, \quad y(1) = 1$ *Solución.* $x = e^{\left(\frac{x}{y}\right)-1}$

25. *Problema de mayor esfuerzo.* Si $f(xy)$ es una función homogénea de grado $n$, prueba que:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

✓26. Supón que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación homogénea. Prueba que las sustituciones $x = r\cos\theta, y = rsen\theta$ reducen la ecuación a una de variables separables.

✓27. Supón que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación homogénea. Prueba que la sustitución $x = vy$ reduce la ecuación a una de variables separables.

28. $(x + \sqrt{y^2 - xy})\frac{dy}{dx} = y, \quad y(\frac{1}{2}) = 1$ *Solución.* $\ln|y| = -2\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}$

✓29. $(x + \sqrt{xy})\frac{dy}{dx} + x - y = x^{\frac{-1}{2}}y^{\frac{3}{2}}, \quad y(1) = 1$ *Solución.* $3x^{\frac{3}{2}}\ln x + 3x^{\frac{1}{2}}y + 2y^{\frac{3}{2}} = 5x^{\frac{3}{2}}$

Encuentra la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

30. $\dfrac{dy}{dx} = \left[\dfrac{2x+y-1}{x-2}\right]^2$ *Solución.*

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{7}(x-2)\tan\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\ln(x-2)+C\right)\right) - 3(x-2)\right] - 3$$

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3}{x+y-1}$ *Solución.* $(y-3)\ln|y-3| = C(y-3) + x + 2$

32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+2}{x-y+3}$ *Solución.* $(x-y)^2 + 6(x-y) = 2x + C$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-y-9}{x+y+1}$ *Solución.* $(x-y+1)^2 + 2\left[(x+y+1)(x-y+1)\right] = C$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \left[\dfrac{x-y+1}{2x-2y}\right]^2$ *Solución.* $\dfrac{4}{3}(x-y) + \ln\left[\dfrac{x-y-1}{(3x-3y+1)^{\frac{1}{9}}}\right] = x + C$

35. $(3x-2y+4)dx - (2x+7y-1)dy = 0$

*Solución.* $3x^2 - 4xy + 8x - 7y^2 + 2y = C$

36. *Problema de mayor esfuerzo.* Algunas veces es posible "provocar" la homogeneidad de una ecuación diferencial por medio de la introducción de nuevas variables $s$ y $t$, tales que $y = s^q$ y $x = t^p$, donde $q$ y $p$ son exponentes por determinar (precisamente de una elección adecuada de ellos es que podríamos obtener una ecuación diferencial homogénea para las variables $s$ y $t$).

Resolver la ecuación:

$y' = \dfrac{3x^5 + 3x^2y^2}{2x^3y - 2y^3}$ *Solución.* $x^6 + y^4 = Ke^{2\,Arc\tan\left(\frac{y^2}{x^3}\right)}$

37. Resolver la ecuación:

$\left(y + y\sqrt{x^2y^4+1}\right)dx + 2xdy = 0$ *Solución.* $\sqrt{1+x^2y^4} = Kx^2y^2 - 1$

38. Problema de mayor esfuerzo. Demuestra que si en la ecuación homogénea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se realiza el cambio de coordenadas a polares, la solución de ésta se vería como:

$$r = C\exp\int \frac{\tan\theta M(\cos\theta, sen\theta) - N(\cos\theta, sen\theta)}{M(\cos\theta, sen\theta) + \tan\theta N(\cos\theta . sen\theta)}$$

39. Usa el resultado del ejercicio anterior para resolver:

*a)* $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

*b)* $(3x-y)dx + (x-2y)dy = 0$

40. Resuelve:

$$\left[2xsen\frac{y}{x} + 2x\tan\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} - y\sec^2\frac{y}{x}\right]dx + \left[x\cos\frac{y}{x} + x\sec^2\frac{y}{x}\right]dy = 0$$

*Solución.* $x^2\left(sen\dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}\right) = C$

41. Resuelve:

*a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$ *Solución.* $x + \sqrt{x^2 - y^2} = C$

*b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+\sqrt{x-y}}{1-\sqrt{x-y}}$ *Solución.* $x - y - 2\sqrt{x-y} = 2x + C;$

*Solución singular* $y = x$

## 2.9.4. *Ejercicios. Ecuaciones diferenciales lineales*

En los ejercicios del 1 al 20, resuelve la ecuación lineal correspondiente por el método de variación de parámetros $y = y_h + y_p$.

1. $y' + y\cos x = senx\cos x$ *Solución.* $y = senx - 1 + Ce^{-senx}$

LISTA DE EJERCICIOS 2da PARTE 1er DEP.
"ECUACIONES DIFERENCIALES"

Prof. Encarnación Salinas Hdez

14. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$ — *Solución.* $(\sec\theta + \tan\theta)r = \theta - \cos\theta + C$

15. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}$ — *Solución.* $y = e^{-x}\ln(e^{x}+e^{-x}) + Ce^{-x}$

16. $ydx - 4(x+y^{6})dy = 0$ — *Solución..* $x = 2y^{6} + Cy^{4}$

17. $x^{2}y' + x(x+2)y = e^{x}$ — *Solución.* $y = \dfrac{1}{2x^{2}}e^{x} + \dfrac{C}{x^{2}}e^{-x}$

18. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^{3} - x$ — *Solución.* $y = \dfrac{1}{7}x^{3} - \dfrac{1}{5}x + Cx^{-4}$

19. $x^{2}y' + xy = 1$ — *Solución.* $y = x^{-1}\ln x + Cx^{-1}$

20. $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = \dfrac{senx}{x^{2}}, \quad x \neq 0$ — *Solución.* $x^{3}y = -\cos x + C$

En los problemas del 21 a 27, resuelve la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se da.

21. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-x}, \quad y(5) = 2$ — *Solución.* $x = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{8}{y}$

22. $x(x-2)y' + 2y = 0, \quad y(3) = 6$ — *Solución.* $y = \dfrac{2x}{x-2}$

23. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$ — *Solución.* $(x+1)y = x\ln x - x + 21$

24. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$; $L, R$ y $E$ constantes. $i(0) = i_0$ — *Solución.* $i = \dfrac{E}{R} + \left(i_o - \dfrac{E}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$

25. $y' + (\tan x)y = \cos^{2} x, \quad y(0) = -1$ — *Solución.* $y = sen\,x\cos x - \cos$

26. $y' + \dfrac{5y}{9x} = 3x^{3} + x, \quad y(-1) = 4$ — *Solución.* $y = \dfrac{27}{41}x^{4} + \dfrac{9}{23}x^{2} - \dfrac{2782}{943}x^{-\frac{5}{9}}$

27. $y' + \dfrac{1}{x-2}y = 3x; \quad y(3) = 4$ *Solución.* $y = x^2 - x - 2$

28. Sean $y_1$ y $y_2$ dos soluciones distintas de la ecuación:

$$y' + P(x)y = 0$$

Demuestra que existe una constante $C$ tal que $y_1 = Cy_2$.

29. *Problema de mayor esfuerzo*. Sean $y_1$ y $y_2$ dos soluciones distintas de la ecuación:

*a*) Demuestra que $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ es la solución general de la misma ecuación.

*b*) ¿Cuál debería ser la relación entre las constantes $C_1$ y $C_2$ para que la combinación lineal $C_1y_1 + C_2y_2$ fuese la solución general de la ecuación dada?

*c*) Demuestra que si $y_3$ es una tercera solución distinta de $y_1$ y $y_2$, entonces $\dfrac{(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)}$ es constante.

30. Demuestra que la ecuación diferencial:

$$y' + P(x)y = Q(x)y\ln y$$

Puede resolverse haciendo $\ln y = v$. Resuelve:

$y' + 3y = x^2 y \ln y$ *Solución.* $\ln y = e^{\frac{1}{3}x^3}\left[C - 3\int e^{-\frac{1}{3}x^3}\,dx\right]$

31. Resuelve la siguiente ecuación diferencial: $\cos y\dfrac{dy}{dx} + seny == x^2$

*Sugerencia.* $\dfrac{d}{dx}seny = \cos y\dfrac{dy}{dx}$ *Solución.* $seny = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$

## 2.9.5. *Ejercios (ecuaciones de Bernoulli, Riccati, Lagrange y Clairaut)*

En los problemas del 1 al 6, resuelve la ecuación de Bernoulli dada.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$ *Solución.* $y^3 = 1 + Cx^{-3}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$ *Solución.* $y^{-3} = x + \dfrac{1}{3} + Ce^{3x}$

3. $x^2 \dfrac{dy}{dx} + y^2 = xy$ *Solución.* $e^{\frac{x}{y}} = Cx$

4. $y' + xy = \dfrac{x}{y^3} \quad y \neq 0$ *Solución.* $y^4 = 1 + Ce^{-2x^2}$

5. $y' + y = xy^3$ *Solución.* $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x} + x + \dfrac{1}{2}$

6. $(1 - x^3)\dfrac{dy}{dx} - 2(1 + x)y = y^{\frac{5}{2}}$ *Solución.* $y^{-3/2} = -\dfrac{3}{4(1+x+x^2)} + \dfrac{C(1-x)^2}{1+x+x^2}$

En los problemas del 7 al 10, resuelve la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica.

7. $x^2 \dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$ *Solución.* $y^{-3} = -\dfrac{9}{5}x^{-1} + \dfrac{49}{5}x^{-6}$

8. $xy(1 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad y(1) = 0$ *Solución.* $x^{-1} = 2 - y^2 - e^{-\frac{y^2}{2}}$; la ecuación es de Bernoulli en la variable $x$.

9. $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{y^2}{x}, \quad y(-1) = 1$ *Solución.* $y = 1$

10. $2\cos x dy = (y sen x - y^3)dx, \quad y(0) = 1$ *Solución.* $\sec x = y^2(\tan x + 1)$

En los problemas del 11 al 19, resuelve la ecuación de Riccati dada; $\varphi(x)$ es una solución particular de la ecuación.

11. $y' = x^3 + \dfrac{2}{x}y - \dfrac{1}{x}y^2, \quad \varphi(x) = -x^2$ *Solución.* $y = -x^2 + \dfrac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2} + C}$

12. $y' = 2\tan x \sec x - y^2 sen x, \ \varphi(x) = \sec x$ *Solución.* $y = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{3\cos^2 x}{C - \cos^3 x}$

13. $y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} - y^2, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ *Solución.* $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{Cx^3 - x}$

14. $y' = 1 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}, \quad \varphi(x) = x$ *Solución.* $y = x + \dfrac{2x}{Cx^2 - 1}$

15. $y' = -2 - y + y^2 \quad \varphi(x) = 2$ *Solución.* $y = 2 + \dfrac{1}{ce^{-3x} - \dfrac{1}{3}}$

16. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x}$ *Solución.* $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{cx^{-3} - \dfrac{x}{4}}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2, \; \varphi(x) = -e^x$ *Solución.* $y = -e^x + \dfrac{1}{ce^{-x} - 1}$

18. $y' = \dfrac{1}{x}y^2 + \dfrac{1}{x}y - \dfrac{2}{x}, \quad \varphi(x) = 1$ *Solución.* $y = \dfrac{2x^3 + K}{K - x^3}$

19. $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1, \quad \varphi(x) = x$ *Solución.* $y = \dfrac{Cx - x^2 - 1}{C - x}$

20. Resuelve el siguiente problema de valor inicial: $y' = -e^{-x}y^2 + y + e^x$, $y(0) = 6$

*Sugerencia.* $\varphi(x) = -e^x$. *Solución.* $y = -e^x + \left(-\dfrac{5}{14}e^{-3x} + \dfrac{1}{2}e^{-x}\right)^{-1}$

21. *Problema de mayor esfuerzo.* Demostrar que la ecuación de Bernoulli:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0,1$$

podría ser resuelta haciendo $y = u(x)v(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones por determinar. Usa esta idea para resolver:

$$(2\,sen x)y' + (\cos x)y = (x\cos x - sen x)y^3$$

22. *Problema de mayor esfuerzo*. Demuestra que si se conocen dos soluciones, digamos $y_1$, $y_2$, la solución general de la ecuación de Riccati:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

Entonces la solución general viene dada por:

$$\frac{(y - y_1)}{(y - y_2)} = Ce^{\int Q(y_2 - y_1)dx}$$

23. *Problema de mayor esfuerzo*. Demuestra que si $y_1$, $y_2$ y $y_3$ son tres soluciones distintas de la ecuación de Riccati:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

Entonces la solución general viene dada por:

$$\frac{(y - y_1)(y_2 - y_3)}{(y - y_2)(y_1 - y_3)} = C$$

En los problemas del 24 al 26, resuelve las siguientes ecuaciones tipo Lagrange:

24. $y = 2xy' + seny'$ *Solución.* $y = \left[\frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p}\right] - senp$, $x = \frac{C}{p^2} - \frac{senp}{p} - \frac{\cos p}{p^2}$

25. $y = -x(y')^2 + (y')^2 + 1$

26. $y(y')^2 + (2x - 1)y' = y$

En los problemas del 27 al 29, resuelve la ecuación de Clairaut dada. Obtén una solución singular.

27. $y = xy' + 1 - \ln y'$ *Solución.* $y = cx + 1 - \ln c$, $\quad y = 2 + \ln x$

28. $y = x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ *Solución.* $y = cx - c^3$; $\quad 27y^2 = 4x^3$

29. $xy' - y = e^{y'}$ *Solución.* $y = cx - e^c$; $\quad y = x\ln x - x$

## 2.9.6. *Ejercicios. Ecuación exacta y reducible a exacta. Factor integrante*

En los problemas del 1 al 15, resuelve la ecuación diferencial comprobando primero si es exacta.

1. $(2y^2+ye^{xy})dx+(4xy+xe^{xy}+2y)dy=0$ *Solución.* $2xy^2+e^{xy}+y^2=C$

2. $y+e^x+x\dfrac{dy}{dx}=0$ *Solución.* $xy+e^x=C$

3. $(4xy+2x^2y)dx+(2x^2+3y^2)dy=0$ *Solución.* No es exacta.

4. $senh(x)senh(y)+\cosh(x)\cos(y)\dfrac{dy}{dx}=0$ *Solución.* $\cosh(x)senh(y)=C$

5. $e^x sen(y^2)+xe^x sen(y^2)+[2xye^x\cos(y^2)+e^y]\dfrac{dy}{dx}=0$

6. $\dfrac{1}{x}+y+(3y^2+x)\dfrac{dy}{dx}=0$ *Solución.* $y^3+xy+\ln|x|=C$

7. $\cos(4y^2)dx-8xysen(4y^2)dy=0$ *Solución.* $x\cos(4y^2)=C$

8. $\dfrac{2s^3+2st^2-t}{s^2+t^2}ds+\dfrac{s}{s^2+t^2}dt=0$ *Solución.* $-\arctan\left(\dfrac{s}{t}\right)+s^2=C$

9. $(2xt-e^t)dx+(x^2-t^2)dt=0$ *Solución.* No es exacta.

10. $\dfrac{t}{z^2}dt-\dfrac{t^2}{z^3}dz=0$ *Solución.* $t^2=Cz^2$

11. $(y\ln y-e^{-xy})dx+\left(\dfrac{1}{y}+x\ln y\right)dy=0$ *Solución.* No es exacta

12. $x\dfrac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$ *Solución.* $xy-2xe^x+2e^x-2x^3=C$

13. $\left(1-\frac{3}{x}+y\right)dx+\left(1-\frac{3}{y}+x\right)dy=0$ *Solución.* $x+y+xy-3\ln|xy|=C$

14. $\left(x^2y^3-\frac{1}{1+9x^2}\right)\frac{dx}{dy}+x^3y^2=0$ *Solución.* $x^3y^3-\tan^{-1}(3x)=C$

15. $(\tan x - sen(x)sen(y))dx+\cos x\cos y dy=0$

*Solución.* $-\ln|\cos x|+\cos x seny=C$

En los problemas del 16 al 20, resuelve la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica.

16. $(y^2\cos x-3x^2y-2x)dx+(2ysenx-x^3+\ln y)dy=0, \quad y(0)=e$

*Solución.* $y^2senx-x^3y-x^2+y\ln|y|-y=0$

17. $e^y+(xe^y-1)\frac{dy}{dx}=0; \quad y(5)=0$ *Solución.* $xe^y-y=5$

18. $2x-ysen(xy)+[3y^2-xsen(xy)]\frac{dy}{dx}=0; \ y(0)=2$

*Solución.* $x^2+y^3+\cos(xy)=9$

19. $ye^{xy}-8x+(2y+xe^{xy})\frac{dy}{dx}=0; \ y(2)=-6$ *Solución.* $-4x^2+e^{xy}+y^2=20+e^{-12}$

20. $2y-y^2\sec^2(xy^2)+[2x-2xy\sec^2(xy^2)]\frac{dy}{dx}=0; \quad y(1)=2$

*Solución.* $2xy-\tan(xy^2)=4-\tan(4)$

21. *Problema de mayor esfuerzo.* Supóngase que $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0$ es homogénea y exacta, y que:

$$xM(x,y)+yN(x,y)$$

no es constante. Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial está definida de manera implícita por la ecuación:

$$xM(x,y) + yN(x,y) = C$$

22. Hallar el valor de $K$ de modo que sea exacta la siguiente ecuación diferencial:

$(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + Ke^x - 1)\,dy = 0$ *Solución.* $K = 1$

23. Obtén una función $M(x,y)$ de tal manera que sea exacta la siguiente ecuación diferencial:

$M(x,y)dx + \left[xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x}\right]dy = 0$ *Solución.* $M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \left(\dfrac{y}{x^2}\right) + h(x)$

24. *Problema de mayor esfuerzo.* Demuestra que cualquier ecuación diferencial separable de primer orden de la forma $h(y)dy - g(x)dx = 0$ también es exacta.

*Solución.* Se puede escribir una ecuación diferencial de primer orden separable $h(y)dy - g(x)dx = 0$. Identificando $M(x,y) = -g(x)$ y $N(x,y) = h(y)$ se encuentra que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Realiza lo que se te pide en los problemas del 25 al 30. *a*) Muestra que la ecuación dada no es exacta. *b*) Obtén un factor de integración. *c*) Encuentra una expresión para la solución general de la ecuación diferencial original; y *d*) Revisa la solución por derivación.

25. $x + y + \dfrac{dy}{dx} = 0$ *Solución.* $\mu(x) = e^x$; $(x + y - 1)e^x = C$

26. $(2y^2 - 9xy)dx + (3xy - 6x^2)dy = 0$ *Solución.* $\mu(x) = xy$; $x^2y^3 - 3x^3y^2 = C$

27. $1 + (3x - e^{-2y})\dfrac{dy}{dx} = 0$ *Solución.* $\mu(y) = e^{3y}$; $xe^{3y} - e^y = C$

28. $(2xy^2 + 2xy)dx + (x^2y + x^2)dy = 0$ *Solución.* $\mu(y) = \dfrac{1}{y+1}$; $x^2y = C$ o $y = -1$

29. $(6xy + 2y + 8)dx + xdy = 0$ *Solución.* $\mu(x) = xe^{6x}$; $e^{6x}(9x^2y + 12x - 2) = C$

30. $2x - 2y - x^2 + 2xy + (2x^2 - 4xy - 2x)\dfrac{dy}{dx} = 0$