Actividad 2 correspondiente a la Unidad 4 de Cálculo Aplicado

Nombre: Brayan Ramirez Benítez

Fecha: 18/06/2020

Instrucciones: resuelve los ejercicios de acuerdo a lo que se solicite en cada bloque.

1. Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, calcule la suma.

12. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

Como $\sum_0^\infty ar^{n-1}$, entonces

$$\frac{1}{8} = a \quad , \quad \frac{-1}{4} = ar \quad , \quad \frac{1}{2} = ar^2 \quad , \quad -1 = ar^3$$

Implica que

r = -2

Puesto que

$$\frac{1}{8} = a \quad , \quad \frac{-1}{4} = \frac{1}{8}(-2) \quad , \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(-2)^2 \quad , \quad -1 = \frac{1}{8}(-2)^3$$

Ahora, como

$$r = -2$$

$$|\, r \,| > 1$$

Por lo tanto, Diverge

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

Como $\sum_0^\infty ar^{n-1}$, entonces

$$\sum_0^\infty 10\frac{10^{n-1}}{(-9)^{n-1}} = \sum_0^\infty 10(\frac{-10}{9})^{n-1}$$

pero

$$r = -\frac{10}{9} \qquad \text{y} \qquad |\, r \,| > 1$$

Por lo tanto, Diverge

2. Exprese el número como una razón de enteros.

$0.\overline{73} = 0.73737373...$

como

$$\frac{73}{10^2} + \frac{73}{10^4} + \frac{73}{10^6} + \frac{73}{10^8} + \cdots$$

Implica que

$$a = \frac{73}{10^2} \quad y \quad r = \frac{1}{10^2}$$

Puesto que

$$\frac{73}{10^2} + \frac{73}{10^2}(\frac{1}{10^2})^1 + \frac{73}{10^2}(\frac{1}{10^2})^2 + \frac{73}{10^2}(\frac{1}{10^2})^3 + \cdots$$

Además

$$|\, r \,| < 1$$

Por tanto

$$0.73 = \frac{\frac{73}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{\frac{73}{100}}{\frac{99}{100}} = \mathbf{\frac{73}{99}}$$

$3.\overline{417} = 3.417417417...$

como

$$3 + \frac{417}{10^3} + \frac{417}{10^6} + \frac{417}{10^9} + \cdots$$

Implica que

$$a = \frac{417}{10^3} \quad y \quad r = \frac{1}{10^3}$$

Puesto que

$$3 + \frac{417}{10^3} + \frac{417}{10^3}(\frac{1}{10^3})^1 + \frac{73}{10^3}(\frac{1}{10^3})^2 + \cdots$$

Además

$$|\, r \,| < 1$$

Por tanto

$$3.417 = 3 + \frac{\frac{417}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 3 + \frac{\frac{417}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{2997}{999} + \frac{417}{999} = \frac{3414}{999} = \mathbf{\frac{1138}{333}}$$

$6.2\overline{54} = 6.2545454...$

como

$$6.2 + \frac{54}{10^3} + \frac{54}{10^5} + \frac{54}{10^7} + \cdots$$

Implica que

$$a = \frac{54}{10^3} \quad y \qquad r = \frac{1}{10^2}$$

Puesto que

$$\frac{62}{10} + \frac{54}{10^3} + \frac{54}{10^3}(\frac{1}{10^2})^1 + \frac{54}{10^3}(\frac{1}{10^2})^2 + \cdots$$

Además

$$|\, r \,| < 1$$

Por tanto

$$6.254 = \frac{62}{10} + \frac{\frac{54}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{62}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{62}{10} + \frac{54}{990} = \frac{61920}{9900} = \mathbf{\frac{6880}{1100}}$$

3. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{15} + \frac{1}{12} + \frac{2}{35} \ldots + n$$

$$s1 = \frac{2}{3} \quad , \quad s2 = \frac{11}{12} \quad , \quad s3 = \frac{21}{20} \quad , \quad s4 = \frac{17}{15} \quad , \quad s5 = \frac{37}{35}$$

Por tanto

$$\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{11}{12} \quad , \quad \frac{21}{20} \quad , \quad \frac{17}{15} \quad , \quad \frac{37}{35}$$

pero

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{A}{n-1} + \frac{b}{n+1} = \frac{A(n+1) + B(n-1)}{(n-1)(n+1)}$$

$$0 = n(A+B)$$

$$2 = A - B$$

➔ A=1 y B=-1

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto

$$sn = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

Así

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Es convergente

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{15} + \frac{1}{12} + \frac{2}{35} + \cdots + n$$

$$s1 = \frac{1}{4} \quad , \quad s2 = \frac{23}{60} \quad , \quad s3 = \frac{7}{15} \quad , \quad s4 = \frac{11}{21}$$

Así

$$\frac{1}{4} \quad , \quad \frac{23}{60} \quad , \quad \frac{7}{15} \quad , \quad \frac{11}{21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} = \frac{A(n+3)+B(n+1)}{(n+1)(n+3)}$$

$$0 = n(A+B)$$

$$2 = 3A + B$$

➔ A=1 y B=-1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

Por lo tanto

$$sn = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3} = \mathbf{\frac{5}{6}}$$

Es convergente

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} = \frac{3}{4} + \frac{3}{10} + \frac{3}{18} + \frac{3}{28} + \cdots + n$$

$$s1 = \frac{3}{4} \quad , \quad s2 = \frac{21}{20} \quad , \quad s3 = \frac{73}{60} \quad , \quad s4 = \frac{139}{105}$$

Así

$$\frac{3}{4} \;\; , \;\; \frac{21}{20} \; , \; \frac{73}{60} \; , \; \frac{139}{105}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n+3)} = \frac{A(n+3)+Bn}{n(n+3)}$$

$$0 = n(A+B)$$

$$3 = 3A$$

- ➔ A=1 y B=-1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{7}) + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$

Por lo tanto

$$sn = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} = \mathbf{\frac{11}{6}}$$

Es convergente

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ln \frac{n}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) - \ln(n+1)$$

$$Sn = (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + (\ln(3) - \ln(4)) + (\ln(4) - \ln(5)) + \cdots + (\ln(n) - \ln\,(n+1))$$

$$Sn = \ln\,(1) - \ln\,(n+1)$$

$$Sn = -\ln\,(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty} -\ln(n+1) = \infty$$

Por lo tanto, es divergente

4. ¿Cuál es el valor de *c* si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2?$$

Como $\sum_0^\infty ar^{n-1}$, entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+c)^n} = \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+c)^3} + \frac{1}{(1+c)^4} + \frac{1}{(1+c)^5}$$

$$\frac{1}{(1+c)^2} = a \quad , \quad \left(\frac{1}{(1+c)^2}\right)\left(\frac{1}{(1+c)}\right) = ar \quad , \quad \left(\frac{1}{(1+c)^2}\right)\left(\frac{1}{(1+c)}\right)^2 = ar^2$$

$$\left(\frac{1}{(1+c)^2}\right)\left(\frac{1}{(1+c)}\right)^3 = ar^3 \quad , \quad \left(\frac{1}{(1+c)^2}\right)\left(\frac{1}{(1+c)}\right)^{n-1} = ar^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+c)^2} = \mathrm{a} \quad \mathrm{y} \quad \frac{1}{(1+c)} = \mathrm{r}$$

Además, sabemos que $\left|\frac{1}{(1+c)}\right| < 1$ ya que es convergente

Por lo tanto

$$\sum_0^\infty ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{(1+c)^2}}{1 - \frac{1}{(1+c)}} = \frac{\frac{1}{(1+c)^2}}{\frac{c}{(1+c)}} = \frac{1}{c(1+c)} = 2$$

$$\frac{1}{c(1+c)} = 2$$

Despejando

$$1 = 2c^2 + 2c$$

$$0 = 2c^2 + 2c - 1$$

Dado que $\left|\frac{1}{(1+c)}\right| < 1$, por lo tanto

$$\boldsymbol{c = \sqrt{2} - 1}$$

5. Encuentre el valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

Como $\sum_0^{\infty} ar^{n-1}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = e^{(0)c} + e^{(1)c} + e^{(2)c} + e^{(3)c}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 1 + e^{c} + e^{2c} + e^{3c}$$

$$1 = a \quad , \quad e^{c} = ar \quad , \quad 1\left(e^{c}\right)^{2} = ar^{2} \quad , \quad 1\left(e^{c}\right)^{3} = ar^{3} \quad , \quad 1\left(e^{c}\right)^{n-1} = ar^{n-1}$$

➔ $1 = a \quad y \quad e^{c} = r$

Además, sabemos que $e^{c} < 1$ ya que es convergente

Por lo tanto

$$\sum_{0}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-e^{c}} = 10$$

$$\frac{1}{1-e^{c}} = 10$$

Despejando e^{c}

$$\frac{9}{10} = e^{c}$$

Aplicando ln en ambos lados

$$\frac{9}{10} = e^{c}$$

$$Ln(\frac{9}{10}) = Ln(e^{c})$$

$$Ln(\frac{9}{10}) = c$$

$$\mathbf{Ln(9) - ln\ (10) = c}$$