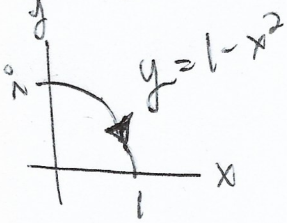
Nombre: Brayan Ramirez Benitez Fecha: 22/12/2020

1. $\int_C (z^2 - z + 2)\, dz$ desde i a 1



solución:

en C $\quad y = 1 - x^2$, $\quad 0 \leq x \leq 1$, $z = x + i(1 - x^2)$

$\Rightarrow dz = 1 - 2xi$

por tanto

$$\int_C (z^2 - z + 2)\, dz = \int_0^1 (-5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 1)\, dx + i \int_0^1 (2x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 1)\, dx$$

$$= \left[-x^5 + \frac{x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x \right]\Big|_0^1 + i \left[\frac{x^6}{3} - 2x^4 + x^3 - x \right]\Big|_0^1$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) + i \left[\frac{1}{3} - 2 + 1 - 1 \right]$$

$$= \frac{4}{3} - i\left[\frac{5}{3}\right]$$

2. $\oint_C \frac{1}{z^2-2i}\,dz \quad z=-6i \text{ a } z=6i$

Solución:

en C

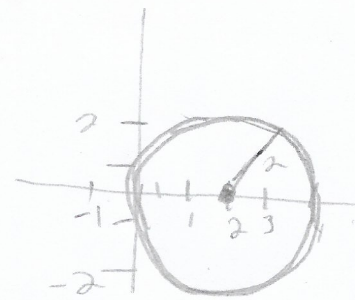
$$\left|\frac{1}{z^2-2i}\right| \leq \frac{1}{|z|^2-|2i|} = \frac{1}{34}$$

de esta manera

$$\left|\oint_C \frac{1}{z^2-2i}\,dz\right| \leq \left(\frac{1}{34}\right)\frac{1}{2}(12\pi) = \frac{3\pi}{17}$$

7. C es el circulo $|z-2|=2$

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z-3}\,dz$$



solución:

como el denominador $z^2-2z-3=(z-3)(z+1)$

$z=-1$ no esta dentro del contorno C, circulo centrado en $z=2$ y $r=2$

$$\frac{5z+7}{z^2-2z-3}=\frac{A}{(z-3)}+\frac{B}{(z+1)}=\frac{\frac{11}{2}}{(z-3)}-\frac{\frac{1}{2}}{(z+1)}$$

$$A(z+1)+B(z-3)=5z+7$$

$A+B=5 \Rightarrow A=5-B$

$A-3B=7 \Rightarrow 5-B-3B=7 \Rightarrow -2=4B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

$A=\frac{10}{2}+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

entonces

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z-3}\,dz=\frac{11}{2}\oint_C\frac{1}{z-3}\,dz-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z+1}\,dz$$

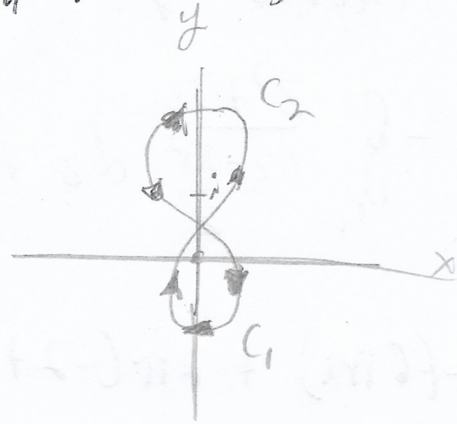
por el teorema de Cauchy-Goursat

$$=\frac{11}{2}(2\pi i)-\frac{1}{2}(0)$$

$$=11\pi i$$

4. Evaluar la integral dada a lo largo del contorno

$$\oint \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$



solución:

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = \oint_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$

$$= -\oint_{C_1} \frac{\frac{z^2+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz$$

notamos que $z_0=0$ y $f(z)=\frac{(z^3+3)}{(z-i)^2}$

por tanto para

$$\oint_{C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = -6\pi i$$

ademas $z_0 = i$, $n=1$ y $f(z) = \frac{z^3+3}{z} \Rightarrow f'(z) = \frac{2z^3-3}{z^2}$

por tanto para

$$\oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = 2\pi i(3+2i) = 2\pi(-2+3i)$$

sustituyendo, tenemos que

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = -\oint_{C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz$$

$$= -(6\pi i) + 2\pi(-2+3i)$$

$$= 4\pi(-1+3i)$$

5. desarrollo de la serie de taylor de la función

$f(z) = \dfrac{z-7}{z^2-2z-3}$ alrededor de $z=0$

$\uparrow$
serie de maclaurin

solución

$$f(z) = \frac{z-7}{z^2-2z-3} = \frac{z-7}{(z-3)(z+1)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-3)}$$

$$A(z-3) + B(z+1) = z-7$$

$A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B$

$-3A + B = -7 \Rightarrow -3 + 3B + B = -7 \Rightarrow 4B = -4 \Rightarrow B = -1$

$\Rightarrow A = 2$

$$f(z) = \frac{2}{(z+1)} - \frac{1}{z-3}$$

$$= 2\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = 2(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{17}{9}z + \frac{55}{27}z^2 - \frac{161}{81}z^3 + \cdots$$

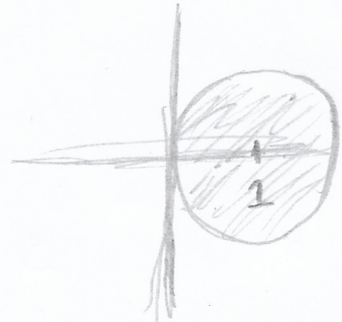
donde
el radio de convergencia es el mismo que

$$\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

6. obtenga el desarrollo en serie de laurent desarrollado en el dominio

$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3}$

$0 < |z-1| < 1$



solución:

necesitamos potencias de $z-1$ asi que expresamos $z-2$ en termino de $z-1$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3} \cdot \frac{1}{-1+(z-1)} = -\frac{1}{(z-1)^3} \cdot \frac{1}{-1+(z-1)}$$

donde usamos la serie geometrica

$$-\frac{1}{(z-1)^3}\left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} - 1 - (z-1) - \cdots$$