Apuntes del Programa de Probabilidad y Estadística

Ricardo Ceballos Sebastián

2 de noviembre de 2020

Índice general

Capítulo 2

Variables aleatorias discretas y continuas

En este capítulo se estudiará el significado de las variables aleatorias y se mostrará como calcular cantidades relacionadas con éstas. En particular se estudiarán la media y la varianza, las cuales representan cantidades cuyos significados son relevantes dentro de la probabilidad y la estadística.

2.1. Variables aleatorias discretas y continuas

Las variables aleatorias surgen como una necesidad de cuantificar los resultados de un experimento aleatorio y con éstas realizar inferencias estadísticas sobre un conjunto de datos (población). Para tener una aproximación al concepto de las variables aleatorias, considérese un experimento sencillo, como el de extraer una tras otra tres esferas de una urna que contiene k esferas negras y $N-k$ esferas blancas. El espacio muestral de este experimento es

$$S = \{NNN, NNB, NBN, NBB, BNN, BNB, BBN, BBB\},$$

donde N significa que se extrajo una esfera negra y B que se extrajo una esfera blanca. El espacio muestral consta de resultados cualitativos (no numéricos); sin embargo, el interés podría centrarse en el número de esferas negras obtenidas en el experimento, de manera que resulta natural definir una función cuyo dominio sea el espacio muestral S y cuyo recorrido esté contenido en los reales. Estas funciones se conocen como variables aleatorias.

Definición 2.1.1 (Variables aleatorias) *Considérese un experimento aleatorio con espacio muestral S. Una variable aleatoria X es una función que* *asocia un número real con cada punto del espacio muestral S. Lo anterior se expresa en notación matemática de la siguiente manera,*

$$X : S \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

El recorrido de la variable aleatoria X, denotado por R_X, es un subconjunto de los números reales y se define como,

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : X(s) = x, \text{ y } s \in S\},$$

de manera gráfica se representa en la figura 2.1.

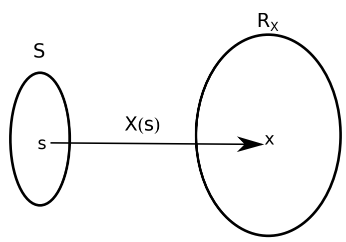


Figura 2.1: Recorrido o rango de X

En general, las variables aleatorias se denotan con una letra mayúscula como X, Y o Z, mientras que los valores que se encuentran dentro de sus recorridos se denotan por medio de letras minúsculas, como x, y o z, respectivamente.
En sentido estricto R_X representa también un espacio muestral y , naturalmente, pueden definirse probabilidades sobre este espacio, como se mostrará a continuación.

Ejemplo 2.1.1 *Considérese un lote que contiene 30 microcomputadoras de los cuales 5 son defectuosas. Si se extraen aleatoriamente y sin reemplazo, dos microcomputadoras para ser analizadas, entonces el espacio muestral es*

$$S = \{NN, ND, DN, DD\},$$

donde N significa que se extrajo una microcomputadora no defectuosa y D que se extrajo una microcomputadora defectuosa. Si el interés en este experimento se centra en el número de microcomputadoras defectuosas, entonces se debe definir a la variable aleatoria X como el número de microcomputadoras *defectuosas obtenidas en las dos extracciones. Los valores en el recorrido de la variable aleatoria* X *son:* $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. *De manera más explícita,*

$$\begin{aligned} X(NN) &= 0, \\ X(ND) &= 1, \\ X(DN) &= 1, \\ X(DD) &= 2. \end{aligned}$$

Si se define el evento B *como: obtener al menos un artículo defectuoso, entonces* $B = \{1, 2\}$. *De manera intuitiva se considera que* B *es equivalente*[1] *al evento* A *contenido en* S, *donde* $A = \{ND, DN, DD\}$. *Se infiere que* $P(A) = P(B)$ *para eventos equivalentes. Este hecho se establece en la siguiente definición.*

Definición 2.1.2 (Eventos equivalentes) *Considérese una variable aleatoria* X, *definida en un espacio muestral* S, *con recorrido* R_X. *Si* B *es un evento contenido en* R_X, *y el evento* A *que está contenido en* S *se define como*

$$A = \{s \in S : X(s) = x, \ \ y \ x \in B\},$$

entonces A *y* B *se conocen como eventos equivalentes y* $P(B) = P(A)$.

Ejemplo 2.1.2 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda equilibrada 2 veces. El espacio muestral de este experimento es* $S = \{CC, CX, XC, XX\}$, *donde* C *significa que se obtuvo cara y* X *que se obtuvo cruz. Ahora, sea* Y *la variable aleatoria que cuenta el número de caras en los dos lanzamientos, entonces* $R_Y = \{0, 1, 2\}$. *Si* B *es el evento: obtener menos de dos caras, entonces* $B = \{0, 1\}$. *El evento equivalente a* B *en el espacio muestral* S *es* $A = \{CX, XC, XX\}$. *De acuerdo con la definición 2.1.2,*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A), \\ &= P(CX) + P(XC) + P(XX), \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Definición 2.1.3 (Variables aleatorias discretas) *Una variable aleatoria* X *se conoce como discreta si su recorrido* R_X *es un conjunto finito o infinito numerable.*

[1] Obsérvese que A y B no son conjuntos iguales, ya que no son subconjuntos de un mismo conjunto.

Ejemplo 2.1.3 (Caso finito) *Considérese que se lanza un dado normal (seis caras y no sesgado) dos veces y que X es la variable aleatoria que se define como la suma de puntos obtenidos en los dos lanzamientos. En este caso el recorrido de la variable aleatoria X consta de todos los valores enteros que van desde 2 hasta 12; por lo tanto, la variable aleatoria X es una variable aleatoria discreta.*

Ejemplo 2.1.4 (Caso infinito numerable) *Supóngase que se lanza una moneda normal (con cara y cruz) de manera repetida hasta obtener la primer cara, entonces el espacio muestral es*

$$\{C, XC, XXC, XXXC, ...\}$$

donde C significa que se obtuvo cara y X que se obtuvo cruz. Si se define la variable aleatoria Y como aquella que cuenta el número de lanzamientos hasta obtener la primera cara, entonces $R_Y = \{1, 2, \ldots\}$. En este caso la variable aleatoria R_Y toma un número infinito numerable de valores.

Definición 2.1.4 (Variables aleatorias continuas) *Una variable aleatoria X se define como continua si R_X contiene tantos puntos como puntos hay en el intervalo (0,1) en los reales.*

Ejemplo 2.1.5 (Caso continuo) *Considérese el experimento aleatorio que consiste en determinar el tiempo que tarda una bombilla eléctrica en fallar (dejar de funcionar). En este experimento el interés radica en medir el tiempo T, con cierto grado de precisión, que tarda el dispositivo en fallar a partir de que se ha puesto en funcionamiento por primera vez. El tiempo que se obtenga caerá dentro de cierto intervalo, en los reales, y dado que dentro de este intervalo existen tantos puntos como en el intervalo (0,1) contenido en $\mathbb{R}$, entonces T es una variable aleatoria continua.*

Las variables aleatorias continuas surgen generalmente de procesos de medición; mientras que las variables aleatorias discretas surgen de procesos de conteo.

2.1.1. Función de masa de probabilidad

Supóngase que el recorrido de una variable aleatoria discreta X es

$$R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

Cada uno de los valores del recorrido tiene asociado una probabilidad, dicho de otra manera, la variable aleatoria X puede tomar cada valor x_i de su

recorrido con cierta pobabilidad.
Notación: La probabilidad de que una variable aleatoria discreta X pueda tomar el valor particular $x_i \in R_X$ se denota por: $P(X = x_i)$.

Ejemplo 2.1.6 *Considérese una vez más el ejemplo 2.1.1. Como se mencionó anteriormente, se cuenta con un lote de 30 microcomputadoras de las cuales 5 son defectuosas; además, se extraen sin reemplazo una tras otra dos microcomputadoras. La variable aleatoria X que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas en las 2 extracciones puede tomar los valores $x = 0, 1, 2$; es decir, $R_X = \{0, 1, 2\}$. Debido a que las dos extracciones son sin reemplazo,*

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{\binom{25}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{60}{87}, \\ P(X=1) &= \frac{\binom{5}{1}\binom{25}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{25}{87}, \\ P(X=2) &= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{2}{87}. \end{aligned}$$

Definición 2.1.5 (Función de masa de probabilidad) *Si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido es $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, se conoce como función de probabilidad, función de masa de probabilidad o función de distribución de probabilidad, a la función que asocia a cada punto $x_i \in R_X$ el valor $P(X = x_i)$. La función de probabilidad se representa como $f(x)$. En general, $f(x)$ será la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X si:*

1. $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in R_X$.
2. $\displaystyle\sum_{x \in R_X} f(x) = 1.$

La suma en el punto 2 toma todos los valores en el recorrido de X . De manera más explícita, si $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x \in R_X} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1. \tag{2.2}$$

Si R_X tiene infinitos elementos, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x \in R_X} f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.1.7 *Para el ejemplo 2.1.6 determínese la función de probabilidad para la variable aleatoria X.*

Solución: Se construirá una tabla para representar los valores de R_X y las probabilidades que les asigna $f(x)$.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Tabla 2.1: Función de probabilidad

Se observa en la tabla 2.1 que las dos condiciones de la definición 2.1.5 se satisfacen.

Ejemplo 2.1.8 *Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Determínese la función de probabilidad para la variable aleatoria X que cuenta el número de caras en los dos lanzamientos.*

Solución: El recorrido de la variable aleatoria X es $R_X = \{0, 1, 2\}$. Como los lanzamientos son independientes y la moneda es no sesgada,

$$\begin{aligned} f(0) &= P(X = 0) = \frac{1}{4}, \\ f(1) &= P(X = 1) = \frac{1}{2}, \\ f(2) &= P(X = 2) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La función de probabilidad re representa en la tabla 2.2

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tabla 2.2: Función de probabilidad

Definición 2.1.6 (Función de densidad de probabilidad) *Se dice que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad o simplemente la función de densidad de la variable aleatoria continua X, si la probabilidad del evento $a < X < b$ está determinada por*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \text{ para todo } -\infty < a < b < \infty, \tag{2.4}$$

donde la función f(x) satisface las siguientes condiciones.

1. $f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

La probabilidad del evento $X = a$ es cero, ya que si $a = b$, entonces

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0. \tag{2.5}$$

Por lo anterior, para las variables aleatorias continuas, es posible reemplazar los signos $>$ y $<$ por $\geq$ y $\leq$ sin que se afecte el resultado; es decir,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b). \tag{2.6}$$

+

Ejemplo 2.1.9 *a) Determine+ si la función $f(x)$ que se define a continuación representa una función de densidad para alguna variable continua X. b) Calcular la probabilidad de que X se encuentre entre -1 y 1.*

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución:

a) Como la función $f(x)$ es positiva para toda x, entonces $f(x)$ satisface la condición 1 de la definición 2.1.6 . Para concluir, se verificará la condición 2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx, \\
&= \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{\infty} (2e^{-2x})dx, \\
&= -\int_{0}^{\infty} (e^{-2x}(-2))dx, \\
&= -\left. e^{-2x}\right|_{0}^{\infty} = 1.
\end{aligned}$$

La función $f(x)$ satisface las condiciones 1 y 2; por lo tanto, es una función de densidad de probabilidad.

b) De acuerdo con la definición 2.1.6

$$\begin{aligned}
P(-1 < X < 1) &= \int_{-1}^{1} f(x)dx, \\
&= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx, \\
&= \int_{0}^{1} (2e^{-2x})dx, \\
&= -\left. e^{-2x}\right|_{0}^{1} = 1 - e^{-2} \\
&= 0.86
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.10 *Para la siguiente función:*

$$g(y) = \begin{cases} ky^3, & 0 < y < 2, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determínese el valor de k, de manera que f(x) sea una función de densidad para alguna variable aleatoria Y.

b) Calcúlese la probabilidad $P(0 < Y \leq 1)$.

Solución:

a) Se utilizará la condición 2 de la definición 2.1.6 para hallar el valor de

k.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} g(y)dy + \int_{0}^{2} g(y)dy + \int_{2}^{\infty} g(y)dy, \\ &= \int_{0}^{2} (ky^3)dy, \\ &= \frac{k}{4}\, y^4\Big|_0^2, \\ &= 4k. \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene, $k = \frac{1}{4}$.
b) De la definición 2.1.6

$$\begin{aligned} P(0 < Y < 1) &= \int_0^1 g(y)dy = \int_0^1 (\frac{y^3}{4})dy, \\ &= \frac{1}{16}\, y^4\Big|_0^1 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Interpretaciones Gráficas para $f(x)$

Si $f(x)$ es la función de densidad para una variable aleatoria continua X, entonces es posible representarla gráficamente en el plano cartesiano, haciendo $y = f(x)$. En la figura 2.2 se representan las características generales de la gráfica, las cuales se obtienen a partir de su definición.

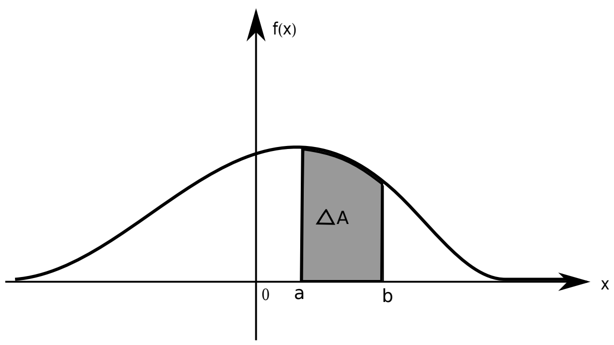


Figura 2.2: Gráfica de la función de densidad $f(x)$

Propiedades gráficas de la función de densidad $f(x)$.

1. $f(x) \geq 0$. Implica que la curva no cae por debajo del eje x.

2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \Delta A$. Corresponde al área bajo la curva entre los puntos a y b.

3. $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. El área total bajo la curva es 1.

2.1.2. Función de distribución acumulativa

Para el cálculo de probabilidades, ya sea para una distribución discreta o continua, resulta más práctico utilizar lo que se conoce como función de distribución acumulativa. De hecho, existen tablas para las funciones de distribución acumulativas que se presentan de manera más frecuente al modelar experimetos aleatorios. Las tablas de las distribuciones se presentan en el apéndice E y se utilizarán en el capítulo 3.

Definición 2.1.7 (Función de distribución acumulativa) *La función de distribución acumulativa, función de distribución acumulada o simplemente función de distribución de una variable aleatoria (discreta o continua) X se define como:*

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{2.7}$$

De manera más explícita:

Caso discreto:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \ \ para \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.8}$$

donde $f(x)$ es la función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X. La suma toma todos los valores $t \in R_X$ que satisfacen la relación $t \leq x$.

Caso continuo:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad para \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.9}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria continua X.

Ejemplos: Caso discreto

Ejemplo 2.1.11 *Considérese el ejemplo 2.1.7. Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria X que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas.*
Para el ejemplo al que se hace referencia, la función de probabilidad se representó mediante la tabla:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Aplicando el caso discreto de la definición 2.1.7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{60}{87}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{85}{87}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

La gráfica de $F(x)$ se muestra en la figura 2.3

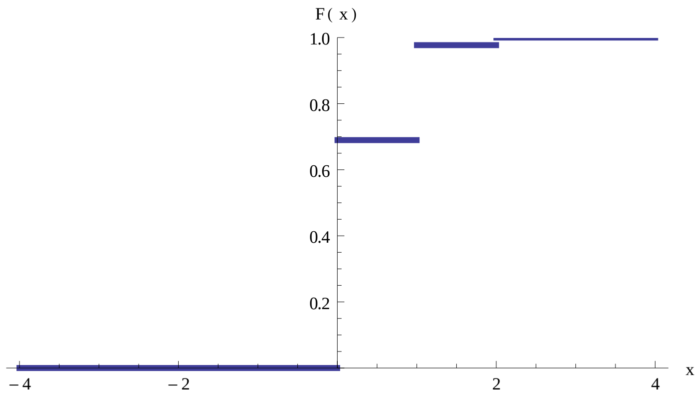


Figura 2.3: Función de distribución acumulada para el número de microcomputadoras defectuosas

Ejemplo 2.1.12 *Considérese el ejemplo 2.1.8. Determine la función de distribución acumulda para la variable aleatoria X que cuenta el número de caras en dos lanzamientos de una moneda.*
Para el ejemplo al que se hace referencia, la función de probabilidad se representó mediante la tabla:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

De acuerdo con la definición 2.1.7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

A continuación se muestra la gráfica.

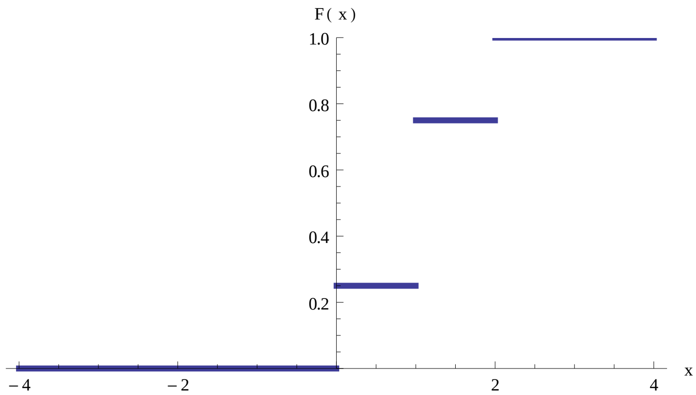


Figura 2.4: Función de distribución acumulada para el número de caras en el lanzamiento de una moneda

Ahora considérese que se conoce la función de distribución acumulada y se requiere calcular la probabilidad del evento $X = 1$ *mediante F(x). El procedimiento es el siguiente,*

$$\begin{aligned} F(1) &= f(0) + f(1), \\ F(0) &= f(0), \end{aligned}$$

por la tanto,

$$\begin{aligned} f(1) &= F(1) - F(0), \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En general, si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido consta de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en dicho orden, entonces su función de distribución acumulada se determina por,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ f(x_1), & x_1\le x<x_2,\\ f(x_1)+f(x_2), & x_2\le x<x_3,\\ \vdots & \vdots\\ 1, & x\ge x_n.\end{cases}$$

Si se conoce $F(x)$ y se desea calcular la probabilidad de un punto o de un intervalo, por ejemplo, $f(x_i)=P(X=x_i)$, entonces

$$f(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1}),\quad 2\le i\le n.$$

Si se requiere hallar la probabilidad de un intervalo, por ejemplo, $P(X>x_i)$, entonces

$$\begin{aligned}P(X>x_i) &= 1-P(X\le x_i),\\ &= 1-F(x_i),\quad 1\le i\le n.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.13 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado normal (de 6 caras y equilibrado) 2 veces. Si X es la variable aleatoria que determina el total en los dos lanzamientos:*

a) halle la función de distribución acumulada,

b) usando la función de distribución acumulada determine $P(X=7)$ y $P(X>7)$

Solución:

a)El recorrido de la variable aleatoria X es $R_X=\{2,3\ldots,12\}$. La distribución de probabilidad se representa en la siguiente tabla:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{1}{36}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{36}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{6}{36}, & 4 \leq x < 5, \\ \frac{10}{36}, & 5 \leq x < 6, \\ \frac{15}{36}, & 6 \leq x < 7, \\ \frac{21}{36}, & 7 \leq x < 8, \\ \frac{26}{36}, & 8 \leq x < 9, \\ \frac{30}{36}, & 9 \leq x < 10, \\ \frac{33}{36}, & 10 \leq x < 11, \\ \frac{35}{36}, & 11 \leq x < 12, \\ 1, & x \geq 12. \end{cases}$$

La gráfica de la función se muestra a continuación,

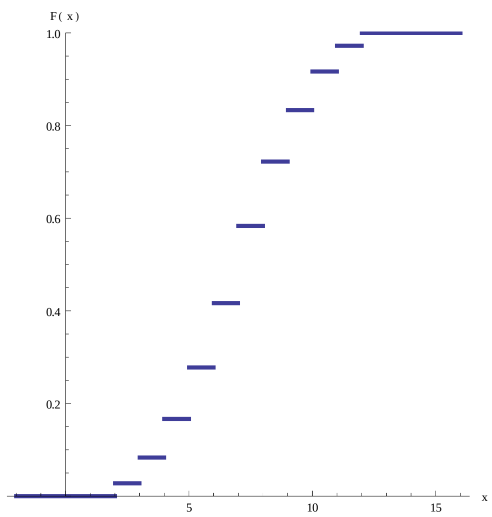


Figura 2.5: Función de distribución acumulada para el total en dos lanzamientos de un dado

b) Cálculo de las probabilidades requeridas:

$$\begin{aligned} P(X = 7) &= F(7) - F(6), \\ &= \frac{21}{36} - \frac{15}{36} = \frac{6}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 7) &= 1 - P(X \leq 7), \\ &= 1 - F(7), \\ &= 1 - \frac{21}{36} = \frac{15}{36}. \end{aligned}$$

Ejemplos: Caso continuo

Ejemplo 2.1.14 *Considérese la variable aleatoria continua X definida en el ejemplo 2.1.9. Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria X.*

Solución: La función de densidad está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De acuerdo con la definición 2.1.7,

i) Si $x \leq 0$, entonces $f(x) = 0$, y por lo tanto,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$$

ii) Si $x > 0$, entonces $f(x) = 2e^{-2x}$, luego

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt, \\ &= \int_{0}^{x} (2e^{-2t})dt = -\left. e^{-2t} \right|_0^x, \\ &= 1 - e^{-2x}. \end{aligned}$$

La función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de $F(x)$.

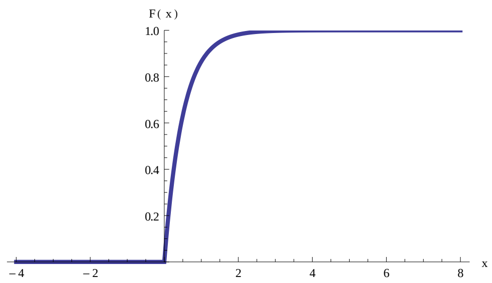


Figura 2.6: Función de distribución acumulada

Interpretaciones Gráficas para F(x)

Si $F(x)$ es la función de distribución acumulada para la variable aleatoria continua X, de manera análoga a como se interpretó $f(x)$, es posible representar gráficamente en el plano cartesiano a $y = F(x)$, mediante una curva tal como se muestra en la figura 2.7.

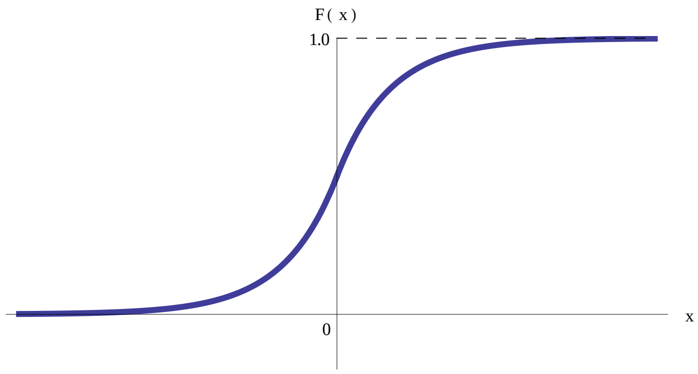


Figura 2.7: Curva de densidad de probabilidad

De la definición de la función de distribución acumulada se obtienen las siguientes propiedades generales de la curva:

a) Como $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, entonces $F(x)$ es una función monótonamente creciente.

b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$.

c) $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$.

Si se conoce la función de distribución acumulada $F(x)$, entonces es posible hallar la probabilidad de un intervalo (a, b) cualquiera, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} F(a) &= P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(u)du, \\ F(b) &= P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(u)du. \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_{-\infty}^{b} f(u)du - \int_{-\infty}^{a} f(u)du, \\ &= \int_{-\infty}^{a} f(u)du + \int_{a}^{b} f(u)du - \int_{-\infty}^{a} f(u)du, \\ &= \int_{a}^{b} f(u)du, \\ &= P(a < X < b). \end{aligned}$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \tag{2.10}$$

Una relación fundamental entre $f(x)$ y $F(x)$ se obtiene al aplicar el teorema fundamental del cálculo a la definición de $F(x)$, como se mostrará a continuación.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(u)du\right), \\ &= f(x). \end{aligned}$$

es decir,

$$f(x) = \frac{d}{dx}(F(x)) = F'(x). \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.1.15 *Considérese la variable aleatoria continua Y definida en el ejemplo 2.1.10.*

a) Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria Y.

b) Por medio de la función de distribución acumulada calcule $P(0 < Y < 1)$.

Solución:

a)La función de probabilidad para la variable aleatoria Y está dada por,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}y^3, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De acuerdo con la definición 2.1.7,

i) Si $y \leq 0$, entonces $g(y) = 0$, y por lo tanto,

$$G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)dt = 0.$$

ii) Si $0 < y < 2$, entonces $g(y) = \frac{1}{4}y^3$, luego

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{y} g(t)dt, \\ &= \int_{0}^{y} g(t)dt = \int_{0}^{y} (\frac{1}{4}t^3)dt, \\ &= \frac{1}{16}\, t^4\Big|_0^y, \\ &= \frac{1}{16}y^4. \end{aligned}$$

iii) S $y \geq 2$, entonces $g(y) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{2} g(t)dt + \int_{2}^{y} g(t)dt, \\ &= \int_{0}^{2} g(t)dt = \int_{0}^{2} (\frac{1}{4}t^3)dt, \\ &= \frac{1}{16}\, t^4\Big|_0^2 = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de distribución acumulada está determinada por,

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{16}y^4, & 0 < y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de $G(Y)$. b) Cálculo de la probabilidad requerida.

$$\begin{aligned} P(0 < Y < 1) &= G(1) - G(0) = G(1), \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

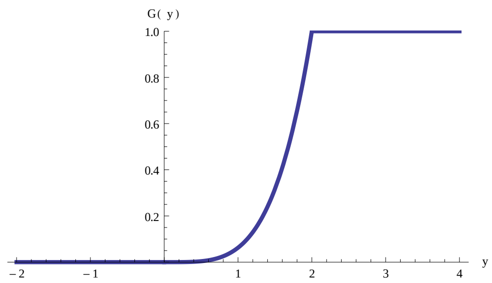


Figura 2.8: Función de distribución acumulada

Cambio de Variables

Teorema 2.1.1 (Cambio de variable-caso discreto) *Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es $f(x)$. Supóngase que la variable aleatoria Y se define en términos de X mediante $Y = \phi(X)$, donde para cada valor de X le corresponde un único valor de Y e inversamente (a cada valor de Y le corresponde un único valor de X), de manera que es posible determinar $X = \psi(Y)$. Entonces la función de probabilidad de Y está determinada por,*

$$g(y) = f(\psi(y)). \tag{2.12}$$

Demostración: Dado que a cada valor de y le corresponde un único valor de x y también viceversa, si $x = \psi(y)$ entonces los eventos $X = x$ y $Y = y$ son equivalentes, luego

$$g(y) = P(Y = y) = P(\phi(X) = y) = P(X = \psi(y)) = f(\psi(y)). \quad \blacksquare \tag{2.13}$$

Ejemplo 2.1.16 *Considérese una variable aleatoria discreta X, cuya función de probabilidad está dada por,*

$$f(x) = \begin{cases} 2(\frac{1}{3})^x, & x = 1, 2, 3\ldots \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.14}$$

a) Verifíquese que $f(x)$ sea una función de probabilidad.

b) Determínese la función de probabilidad para la variable aleatoria $Y = 4X - 1$.

Solución:

a) Todas las probabilidades asignadas por la ecuación 2.14 son positivas, por lo tanto, la propiedad 1 de la definición 2.1.5 se satisface. Aún queda por verificar que la suma de las probabilidades es igual a 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} f(x) &= 2\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}, \\
&= 2\left(1+\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1\right), \\
&= 2\left(\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1\right),
\end{aligned}$$

Se agregó y restó un 1 para identificar a la suma con la serie geométrica, para la cual se conoce que

$$\sum_{x=0}^{\infty} r^{x} = \frac{1}{1-r} \tag{2.15}$$

La convergencia de la suma está condicionada a que $|r| < 1$. Para el ejemplo que se está tratando, $r = \frac{1}{3}$, de manera que

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} f(x) &= 2\left(\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1\right), \\
&= 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1\right), \\
&= 2(3/2-1) = 1.
\end{aligned}$$

b) Cálculo de $g(y)$ para la variable aleatoria $Y = 4X - 1$.
Se observa que Y es una función que satisface las condiciones del teorema anterior (es una función biyectiva). Los valores en los recorridos de las variables aleatorias están relacionados por medio de las funciones,

$$y = 4x - 1 = \phi(x)$$

de donde se sigue que,

$$x = \frac{1}{4}(y+1) = \psi(y),$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
g(y) &= f(\psi(y)), \\
g(y) &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}(y+1)}, \quad y = 3, 7, 11, \ldots
\end{aligned}$$

Teorema 2.1.2 (Cambio de variable-caso continuo) *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, donde $f(x) > 0$ para algún intervalo, $a < x < b$. Si $Y = \phi(X)$ es una función de X estrictamente monótona(creciente o decreciente) y $y = \phi(x)$ es derivable para toda x. Entonces la función de densidad de probabilidad de Y está determinada por,*

$$g(y)|dy| = f(x)|dx|, \tag{2.16}$$

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(\psi(y))|\psi'(y)|. \tag{2.17}$$

Demostración: Considérese el caso en que $y = \phi(x)$ es una función monótona creciente; es decir, y se incrementa a medida que x se incrementa, como se muestra en la figura 2.9. De acuerdo con la definición 2.1.2,

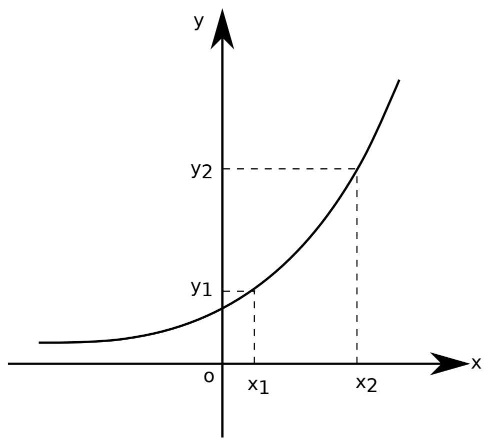


Figura 2.9: Gráfica de una función monótonamente creciente, $y = \phi(x)$.

$$\begin{aligned} P(y_1 < Y < y_2) &= P(x_1 < X < x_2), \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx, \\ &= \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y))\psi'(y)dy. \end{aligned} \tag{2.18}$$

La ecuación 2.18 se obtuvo como resultado del teorema del cambio de variables que se estudia en cursos de cálculo. Por otro lado, desarrollando el lado izquierdo de la ecuación 2.18 se obtiene,

$$P(y_1 < Y < y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y))\psi'(y)dy, \quad (2.19)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy = \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y))\psi'(y)dy. \quad (2.20)$$

La última ecuación puede expresarse como,

$$\int_{y_1}^{y_2} [g(y) - f(\psi(y)\psi'(y)dy]\, du = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación 2.21 se cumple para todo valor de y_1 y y_2 si y solo si,

$$[g(y) - f(\phi(y)\psi'(y)dy] = 0, \quad (2.22)$$

luego

$$g(y) = f(\psi(y))\psi'(y). \quad \blacksquare$$

El caso de una función monótona decreciente se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 2.1.17 *Considérese la variable aleatoria X que se describió en el ejemplo 2.1.9. Si Y es otra variable aleatoria definida como, $Y = 4X - 1$, hallar la función de densidad de la variable aleatoria Y.*

Solución: La función de densidad de la variable aleatoria X está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Los valores de las variables aleatorias X y Y se relacionan por medio de las funciones,

$$\begin{aligned} y &= 4x - 1 = \phi(x), \\ x &= \frac{1}{4}(y+1) = \psi(y). \end{aligned}$$

Derivando la última ecuación se obtiene,

$$\psi'(y) = \frac{1}{4}.$$

De acuerdo con el teorema anterior se concluye que

$$\begin{aligned} g(y) &= f(\psi(y))\psi'(y), \\ &= 2e^{-2(\frac{1}{4}(y+1))}(1/4), \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y+1)}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

Cálculo del recorrido de $g(y)$.
Dado que $g(x) \geq 0$, para $x > 0$, entonces $g(y)$ será diferente de cero para toda $x = \psi(y) > 0$, de manera que

$$\begin{aligned} x &> 0, \\ \psi(y) &> 0, \\ \frac{1}{4}(y+1) &> 0, \\ y+1 &> 0, \\ y &> -1. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y+1)}, & y > -1, \\ 0, & y \leq -1. \end{cases}$$

La gráfica de la función de densidad se muestra en la figura 2.10

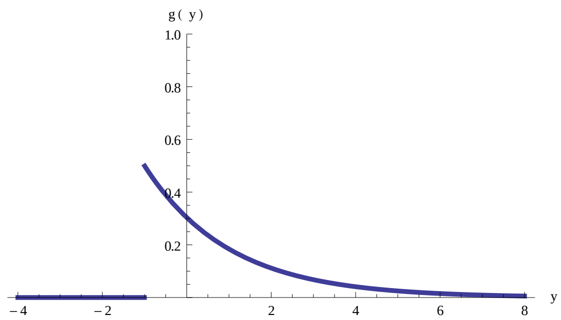


Figura 2.10: Gráfica de la función de densidad $g(y)$.

Teorema 2.1.3 *Si X es una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$, y sea $Y = X^2$, entonces la variable aleatoria Y tiene una función de densidad dada por*

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})). \tag{2.23}$$

Demostración: Para este caso no es aplicable el teorema anterior, ya que para cualquier $x \neq 0$ la función $\phi(x) = x^2$ asigna el mismo valor a x y a $-x$. Por lo anterior, se procederá de la siguiente manera: Se determinará la función de distribución acumulada $G(y)$, posteriormente se calculará $G'(y)$ lo que es igual a $g(y)$, de acuerdo con la ecuación 2.11.

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y), \\ &= P(X^2 \leq y), \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Al derivar la última ecuación se obtiene el resultado.

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y), \\ &= F'(\sqrt{y}) - F'(-\sqrt{y}), \\ &= f(\sqrt{y})\frac{d}{dy}(\sqrt{y}) - f(-\sqrt{y})\frac{d}{dy}(-\sqrt{y}), \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.18 *Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Si una nueva variable aleatoria se define como $Y = X^2$, determine la función de densidad $g(y)$ de esta variable aleatoria.

Solución: De acuerdo con el teorema anterior, para toda $y > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right), \\ &= \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función $g(y)$ se muestra en la figura 2.11

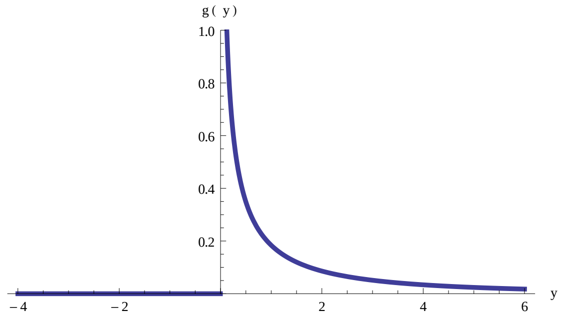


Figura 2.11: Gráfica de la función de densidad $g(y)$.

Para dar por terminada esta sección considérese la siguiente situación: Supóngase que se tiene una variable aleatoria X cuya función de densidad es conocida, y que se desea calcular la función de densidad de una variable aleatoria Z que puede expresarse como $Z = aX^2$, siendo a una constante. Lo recomendable es determinar la función de densidad $g(y)$ de la variable aleatoria $Y = X^2$, de acuerdo con el teorema 2.1.3 y posteriormente, hallar la función de densidad $h(z)$ de la variable aleatoria Z, observando que $Z = aY$ satisface las condiciones del teorema 2.1.2.

Ejemplo 2.1.19 *Considérese que el radio de una esfera es una variable aleatoria continua y supóngase que su función de densidad está determinada por*

$$f(r) = \begin{cases} 6r(1-r), & 0 < r < 1, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine la función de densidad para el área de la superficie que limita a la esfera.

Solución: La variable aleatoria S (área) está definida por la función $S = 4\pi R^2$. Se comenzará por hallar $g(y)$, donde $Y = X^2$. De acuerdo con el teorema 2.1.3 se obtiene,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right), \\ &= \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \\ &= \frac{6\sqrt{y}(1-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \\ &= 3(1-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$g(y) = \begin{cases} 3(1-\sqrt{y}), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora considérese que $S = 4\pi Y$. Las relaciones entre los valores de R_Y y R_S son:

$$\begin{aligned} s &= 4\pi y = \phi(y), \\ y &= \frac{s}{4\pi} = \psi(s). \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene,

$$\psi'(s) = \frac{1}{4\pi}. \tag{2.24}$$

Aplicando el teorema 2.1.2 se concluye que,

$$\begin{aligned} h(s) &= g(\psi(s))\psi'(s), \\ &= 3\left(1-\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)\frac{1}{4\pi}, \\ &= \frac{3}{4\pi}\left(1-\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right), \qquad 0 < s < 4\pi. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi}(1-\sqrt{\frac{s}{4\pi}}), & 0 < s < 4\pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2.2. Valor esperado de una variable aleatoria (discreta o continua)

El valor esperado de una variable aleatoria es una de las cantidades más importantes que se estudian en probabilidad y estadística. La media de una variable aleatoria constituye una medida de tendencia central; es decir, los valores en R_X tienden a concentrarse alrededor de la media. El teorema de Chebyshev, que se estudiará en el capítulo 3, permitirá dar una interpretación más precisa de este hecho.

Definición 2.2.1 (Valor esperado de una variable aleatoria) *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) se define la esperanza, el valor* *esperado o la media de la variable aleatoria X como:*

Caso discreto:

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x), \quad \text{donde } f(x) \text{ es la función de probabilidad de } X. \tag{2.25}$$

La suma anterior se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i). \tag{2.26}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i). \tag{2.27}$$

Caso continuo:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad \text{donde } f(x) \text{ es la función de densidad de } X. \tag{2.28}$$

La media existirá si la suma o la integral (según corresponda) converge absolutamente; es decir, si al sustituir x por $|x|$ en las ecuaciones 2.25 o 2.28 la suma o la integral correspondiente converge.

Ejemplo 2.2.1 (Caso discreto-finito) *Suponga que una variable aleatoria discreta X tiene función de probabilidad descrita en la siguiente tabla.*

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Determine el valor esperado de la variable aleatoria X.

Solución: R_X contiene un número finito de valores, de acuerdo con la definición 2.2.1,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = 0(\frac{60}{87}) + 1(\frac{25}{87}) + 2(\frac{2}{87}) = \frac{29}{87}.$$

Ejemplo 2.2.2 (Caso discreto-infinito) *Considérese la variable aleatoria X del ejemplo 2.1.16, cuya función de probabilidad está dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2(\frac{1}{3})^x, & x = 1, 2, 3 \ldots \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine el valor esperado de la variable aleatoria X.

Solución: De acuerdo con la definición 2.2.1,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = 2 \sum_{x=1}^{\infty} x (\frac{1}{3})^x.$$

Hasta aquí lo que se quiere mostrar es el sentido de la definición. El resultado de este ejercicio se desarrollará en la sección 2.4

Ejemplo 2.2.3 (Caso continuo) *Considéres una variable aleatoria continua X cuya función de densidad está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Determine el valor esperado de X.

Solución: A partir de la definición 2.2.1,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx + \int_{0}^{\infty} x f(x) dx, \\ &= \int_{0}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx, \end{aligned}$$

Mediante el método de integración por partes se obtiene,

$$u = x, \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx, \Rightarrow v = -e^{-x},$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

De manera que,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx, \\ &= - \lim_{b \to \infty} x e^{-x} \Big|_0^b + \int_0^{\infty} e^{-x} dx, \\ &= - \lim_{b \to \infty} \left(x e^{-x} \Big|_0^b + e^{-x} \Big|_0^b \right), \\ &= \lim_{b \to \infty} e^{-x}(x+1) \Big|_b^0 = 1. \end{aligned}$$

Teoremas sobre la media

Teorema 2.2.1 (Media de una función) *Sea X una variable aleatoria (discreta o continua), si se define una segunda variable aleatoria $Y = \phi(X)$, entonces*

Caso discreto:

$$E[Y] = E[\phi(X)] = \sum_x \phi(x)f(x), \tag{2.29}$$

La suma anterior se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)f(x_i). \tag{2.30}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(x_i)f(x_i). \tag{2.31}$$

donde $f(x)$ es la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

Caso continuo:

$$E[Y] = E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx, \tag{2.32}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria X.

Demostración: Se presentará un bosquejo de la demostración para el caso discreto. La demostración del caso continuo queda fuera de los objetivos de este trabajo.
Considérese una variable aleatoria X discreta cuyo recorrido sea finito, digamos, $R_X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ y sea $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ el recorrido de Y. Si $\phi(X)$ es uno a uno y sobre; es decir, a cada valor de X le corresponde un solo

valor de Y y también viceversa, entonces $m = n$, además, de acuerdo con el teorema 2.18 $g(y) = f(\psi(y))$, luego

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{n} y_i g(y_i) = \sum_{y=1}^{n} \phi(x_i) f(x_i). \tag{2.33}$$

Ahora supóngase que $\phi(X)$ no es uno a uno y sobre; es decir, $m < n$. Para simplificar, supóngase que para todo $1 \leq i \leq n-2$, $\phi(x_i) = y_i$ y que $\phi(x_{n-1}) = \phi(x_n) = y_{n-1}$, como se muestra en la siguiente tabla.

x	x_1	$\ldots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
$y = \phi(x)$	y_1	$\ldots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_{n-1}

Para este caso,

$$g(y_i) = f(x_i) \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

y

$$g(y_{n-1}) = f(x_{n-1}) + f(x_n),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i g(y_i), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} y_i g(y_i) + y_{n-1} g(y_n - 1), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} y_i f(x_i) + y_{n-1}(f(x_{n-1}) + f(x_n)), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} y_i f(x_i) + y_{n-1} f(x_{n-1}) + y_{n-1} f(x_n), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} \phi(x_i) f(x_i) + \phi(x_{n-1}) f(x_{n-1}) + \phi(x_n) f(x_n), \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) f(x_i).
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.4 *Considérese la variable aleatoria X que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas cuando que se extraen sin reemplazo, dos de ellas de manera aleatoria de un lote que contiene en 30 microcomputadoras, de las cuales 5 son defectuosas. Si Y es otra variable aleatoria definida en términos de X como $Y = (3X-1)^2$, determine el valor esperado de la variable aleatoria Y.*

Solución: La función de probabilidad de la variable aleatoria X se muestra en la siguiente tabla:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

De acuerdo con el teorema anterior,

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_x \phi(x) f(x), \\
&= \sum_x (3x-1)^2 f(x), \\
&= 1(\frac{60}{87}) + 4(\frac{25}{87}) + 25(\frac{2}{87}), \\
&= \frac{70}{29} = 2.41
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.2.5 *Sea X la variable aleatoria que se consideró en el ejemplo 2.1.17. Si Y es otra variable aleatoria que se define en términos de X por $Y = 4X - 1$, hallar el valor esperado de la variable aleatoria Y.*

Solución: La variable aleatoria X tiene función de densidad definida por

$$
f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}
$$

De acuerdo con el teorema 2.2.1,

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx, \\
&= \int_{-\infty}^{0} \phi(x) f(x) dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x) f(x) dx, \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} (4x-1) e^{-2x} dx.
\end{aligned}
$$

Desarrollando la integral, mediante el método de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
E(X) &= 2\int_0^{\infty}(4x-1)e^{-2x}dx,\\
&= 2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\,(4x-1)e^{-2x}\Big|_0^b\right)+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-2x}(4dx),\\
&= 2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}(4x-1)e^{-2x}-e^{-2x}\right)\Bigg|_0^b,\\
&= 2\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}(4x-1)+1\right)e^{-2x}\Bigg|_b^0,\\
&= \lim_{b\to\infty}\left((4x-1)+2\right)e^{-2x}\Big|_b^0,\\
&= \lim_{b\to\infty}(4x+1)\,e^{-2x}\Big|_b^0,\\
&= 1
\end{aligned}$$

El teorema 2.2.1 permite calcular la media de la función $Y=\phi(X)$, sin calcular previamente la función de densidad de la variable aleatoria Y, como se precisa de la definición de la media; sin embargo, la verdadera importancia de este teorema radica en los teoremas que se establecerán a continuación y que permiten calcular la media de funciones con mayor facilidad.

Teorema 2.2.2 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si C es una constante, entonces*

$$E(C)=C. \tag{2.34}$$

Demostración: Se desarrollará la demostración para una variable aleatoria discreta X. Para el caso continuo solo se requiere reemplazar sumas por integrales. De acuerdo con el teorema 2.2.1

$$E[C]=\sum_{x_i}Cf(x_i)=C\sum_{x_i}f(x_i)=C. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.2.3 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si C es una constante, entonces*

$$E(CX)=CE(X). \tag{2.35}$$

Demostración: De manera análoga al teorema anterior,

$$E[CX] = \sum_{x_i} Cx_i f(x_i) = C\sum_{x_i} x_i f(x_i) = CE(X). \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.4 (Media de la suma de variables dependientes) *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si Y es otra variabe aleatoria que depende de X; es decir, $Y = Y(X)$, entonces*

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y). \tag{2.36}$$

Demostración: Se demostrará el teorema para una variable aleatoria discreta X. Para el caso continuo solo se requiere reemplazar sumas por integrales. De acuerdo con el teorema 2.2.1,

$$\begin{aligned} E[Z(X)] &= \sum_{x_i} z(x_i)f(x_i), \\ &= \sum_{x_i}(x_i + y_i)f(x_i), \\ &= \sum_{x_i} x_i f(x_i) + \sum_{x_i} y_i f(x_i), \\ &= E(X) + E[Y]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.6 *Considérese el ejemplo 2.2.4. Obtenga la media requerida haciendo uso de los 3 teoremas anteriores.*

Solución: La variable aleatoria X tiene función de probabilidad dada por

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Se requiere calcular el valor esperado de $Y = (3x-1)^2$, de manera que desarrollando el binomio se obtiene,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(3X-1)^2], \\ &= E[9X^2 - 6X + 1], \\ &= E[9X^2] + E[-6X] + E[1], \quad \text{teorema 2.2.4}, \\ &= 9E[X^2] - 6E[X] + E[1], \quad \text{teorema 2.2.3}, \\ &= 9E[X^2] - 6E[X] + 1, \quad \text{teorema 2.2.2}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Calculando por separado $E[X]$ y $E[X^2]$ se obtiene,

$$E[X] = \sum_x xf(x) = 0(\frac{60}{87}) + 1(\frac{25}{87}) + 2(\frac{2}{87}) = \frac{29}{87}.$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) = 0(\frac{60}{87}) + 1(\frac{25}{87}) + 4(\frac{2}{87}) = \frac{33}{87}.$$

Sustituyendo $E[X]$ y $E[X^2]$ en la ecuación 2.37 se obtiene,

$$E[Y] = 9E[X^2] - 6E[X] + 1 = 9(\frac{33}{87}) - 6(\frac{29}{87}) + 1 = \frac{70}{29}. = 2.41$$

Ejemplo 2.2.7 *Sea X la variable aleatoria del ejemplo 2.2.5, si Y se define en términos de X por $Y = 4X - 1$, calcúlese el valor esperado de la variable aleatoria Y, ahora utilizando los tres teoremas anteriores.*

Solución: La variable aleatoria X tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Calculando el valor esperado de $Y = 4X - 1$, tal como en el caso anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(4X-1)], \\ &= E[4X] + E[-1], \quad \text{teorema 2.2.4}, \\ &= E[4X] - 1, \quad \text{teorema 2.2.2}, \\ &= 4E[X] - 1, \quad \text{teorema 2.2.3}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

Se calculará $E[X]$.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) = \int_0^{\infty} (2x)e^{-2x}dx.$$

Aplicando el método de integración por partes se obtiene,

$$\begin{aligned} E(X) &= -\lim_{b\to\infty} xe^{-2x}\Big|_0^b + \int_0^{\infty} e^{-2x}dx, \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^b, \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-2x}\Big|_b^0, \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo $E(X)$ en la ecuación 2.38 se obtiene,

$$E(Y) = 4(1/2) - 1 = 1.$$

2.3. Varianza de una variable aleatoria (discreta o continua)

Definición 2.3.1 (Varianza de una variable aleatoria) *Si una variable aleatoria X tiene media μ finita, se define la varianza de X como,*

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2], \tag{2.39}$$

de manera más precisa:

Caso discreto:

Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$ y media finita μ, se define la varianza de la variable aleatoria X como,

$$var(X) = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x), \tag{2.40}$$

siempre y cuando la suma converja absolutamente.
La suma se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria discreta X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 f(x_i). \tag{2.41}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-\mu)^2 f(x_i). \tag{2.42}$$

Caso continuo:

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ y media finita μ, se define la varianza de la variable aleatoria X como,

$$var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx, \tag{2.43}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

Definición 2.3.2 (Desviación estándar) *La raíz cuadrada positiva de la varianza se conoce como desviación estándar y se denota por σ; es decir,*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2)]}. \tag{2.44}$$

Obsérvese que $\sigma^2 = var(X)$, de hecho, es común usar σ^2 en lugar de $var(X)$ cuando no existe duda sobre la variable aleatoria a la cual se refiere.

Ejemplo 2.3.1 *Determine la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X del ejemplo 2.2.6.*

Solución: De acuerdo con los resultados del ejemplo 2.2.6 se tiene que $\mu = 29/87$. Nuevamente se requiere de la función de probabilidad

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

De acuerdo con la definición 2.3.1

$$\begin{aligned} var(X) &= \sum_x (x-\mu)^2 f(x), \\ &= \left(0 - \frac{29}{87}\right)^2 \left(\frac{60}{87}\right) + \left(1 - \frac{29}{87}\right)^2 \left(\frac{25}{87}\right) + \left(2 - \frac{29}{87}\right)^2 \left(\frac{2}{87}\right), \\ &= \frac{70}{261}. \end{aligned}$$

Finalmente, la desviación estándar es,

$$\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{\frac{70}{261}} = 0.5270$$

Ejemplo 2.3.2 *Determine la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X del ejemplo 2.2.7.*

Solución: Esta variable aleatoria tiene media $\mu = 1/2$, la cual se determinó en el ejemplo 2.2.7. Su función de densidad está definida como,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

De acuerdo con la definición 2.3.1,

$$\begin{aligned} var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx. \\ &= 2\int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-2x}dx. \end{aligned}$$

Desarrollando la integral, con el método de integración por partes, se obtiene

$$var(X) = \frac{1}{4}.$$

La desviación estándar es entonces,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Teoremas sobre la varianza

A continuación se demostrarán un conjunto de teoremas que permiten obtener la varianza de una variable aleatoria X de manera eficiente.

Teorema 2.3.1 *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, entonces*

$$var(X) = E[X^2] - \mu^2. \tag{2.45}$$

Demostración: A partir de la definición 2.3.1 y aplicando las propiedades de la esperanza contenidas en los teoremas 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4 se obtiene en consecuencia,

$$\begin{aligned} var(X) &= E[(X-\mu)^2], \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2], \\ &= E[X^2] + E[-2\mu X] + E[\mu^2], \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2, \\ &= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2, \\ &= E[X^2] - \mu^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si C es una constante, entonces*

$$var[CX] = C^2 var[X] \tag{2.46}$$

Demostración: Defínase la variable aleatoria $Y = CX$ y aplíquese el teorema 2.3.1

$$\begin{aligned} var[CX] &= var[Y], \\ &= E[Y^2] - E^2[Y], \\ &= E[C^2X^2] - [E(CX)]^2, \\ &= C^2E(X^2) - [C\mu]^2, \\ &= C^2[E(X^2) - \mu^2], \\ &= C^2 var(X). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.3.3 *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, entonces y C es una constante, entonces*

$$var[X+C] = var[X] \tag{2.47}$$

Demostración: Defínase la variable aleatoria $Y = X + C$ y aplíquese el teorema 2.3.1

$$\begin{aligned} var[X+C] &= var[Y], \\ &= E[Y^2] - E^2[Y], \\ &= E[(X+C)^2] - [E(X+C)]^2. \end{aligned}$$

Finalmente, de las propiedades de la media se concluye que,

$$\begin{aligned} var[X+C] &= E[X^2 + 2CX + C^2] - [\mu + C]^2, \\ &= E(X^2) + 2C\mu + C^2 - [\mu^2 + 2\mu + C^2], \\ &= E(X^2) + 2C\mu + C^2 - \mu^2 - 2\mu C - C^2], \\ &= E(X^2) - \mu^2, \\ &= var(X). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.3 *Considérese la variable aleatoria X del ejemplo 2.3.2. Determine la varianza usando el teorema 2.3.1.*

Solución: La variable aleatoria tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema 2.3.1 se requieren $E(X)$ y $E(X^2)$. Para esta variable aleatoria la media se calculó en el ejemplo 2.2.2. A continuación se calculará $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \\ &= 2\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx. \end{aligned}$$

Desarrollando la integral, mediante el método de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= 2\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x}dx. \\
&= 2\left(-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\Big|_0^b + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}(2x)dx\right), \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\mu\right), \\
&= \mu = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, de acuerdo con el teorema 2.3.1 se tiene

$$var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

La desviación estándar es entonces,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.3.4 *Suponga que una variable aleatoria X tiene media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Determine las varianzas correspondientes de las siguientes funciones.*

a) $U = 3X$,

b) $V = X + 5$,

c) $W = \frac{3}{2}X + 2$.

Solución:

$$\begin{aligned}
a)\quad var(U) &= var(3X), \\
&= 3^2 var(X), \quad \text{teorema 2.3.2,} \\
&= 9.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\quad var(v) &= var(X + 5), \\
&= var(X), \quad \text{teorema 2.3.3,} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c)\quad var(W) &= var(\tfrac{3}{2}X + 2), \\
&= var(\tfrac{3}{2}X), \quad \text{teorema 2.3.3,} \\
&= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 var(X), \quad \text{teorema 2.3.2,} \\
&= \tfrac{9}{4}
\end{aligned}$$

Otras medidas de tendencia central

Definición 2.3.3 (La moda) *Para una variable aleatoria discreta la moda es el valor que ocurre con mayor frecuencia. Para una variable aleatoria continua la moda es el valor para el cual la función de densidad tiene un máximo local. Es común que una variable aleatoria, discreta o continua, tenga varias modas, en tales casos se dice que la función es multimodal.*

Definición 2.3.4 (La mediana) *La mediana es el valor x para el cual $P(X < x) = 1/2$ y $P(X > x) \leq 1/2$. Para una distribución continua se cumple que $P(X < x) = P(X > x) = 1/2$; es decir, la mediana separa a la curva de densidad en dos regiones con áreas iguales.*

Definición 2.3.5 (Los percentiles) *Si f(x) es la función de densidad de una variable aleatoria continua X, y si P define un porcentaje del área total bajo la curva de densidad, entonces el valor x_P de la variable aleatoria X que satisface la ecuación,*

$$P = \int_{-\infty}^{x_P} f(x)dx. \tag{2.48}$$

se conoce como percentil. (ver figura 2.12)

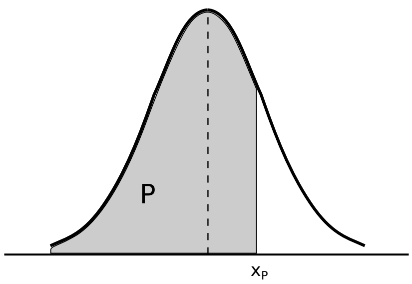


Figura 2.12: Los perdentiles

Si el área se divide en 10 partes iguales, entonces los valores de las órdenadas se conocen como deciles: $x_{0.10}, x_{0.20}, \ldots, x_{0.90}$, de manera que $x_{0.10}$ es el primer decil o décimo percentil, $x_0.20$ es el segundo decil o vigésimo percentil, y así sucesivamente.

2.4. Función generadora de momentos de una variable aleatoria (discreta o continua)

Definición 2.4.1 (Momentos alrededor de la media) *Dada una variable aleatoria X con media μ finita, se define el momento r-ésimo alrededor de la media como,*

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.49}$$

Si $f(x)$ es la función de probabilidad (o de densidad), entonces

Caso discreto:

$$\mu_r = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^r f(x), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.50}$$

siempre que la sumatoria converja absolutamente.
La suma se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria discreta X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.51}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-\mu)^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.52}$$

Caso continuo:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x) dx, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.53}$$

siempre que la integral converja absolutamente.

Obsérvese que los primeros momentos alrededor de la media son:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Definición 2.4.2 (Momentos alrededor del origen) *Dada una variable aleatoria X, el momento r-ésimo alrededor del origen se define como,*

$$\mu'_r = E[(X^r] \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.54}$$

Si $f(x)$ es la función de probabilidad (o de densidad) entonces

a) Caso discreto

$$\mu'_r = \sum_{x \in R_X} x^r f(x), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.55}$$

siempre que la sumatoria converja absolutamente.

Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$\mu'_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.56}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$\mu'_r = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.57}$$

b) Caso continuo

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.58}$$

siempre que la integral converja absolutamente.

Obsérvese que los primeros mometos alrededor del origen son:

$$\begin{aligned} \mu'_0 &= 1, \\ \mu'_1 &= \mu, \\ \mu'_2 &= E(X^2). \end{aligned}$$

Teorema 2.4.1 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad (o de densidad) $f(x)$, según corresponda, cuyos momentos alrededor de la media y alrededor del origen son μ_r y μ'_r, respectivamente, entonces*

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu^j \mu'_{r-j} \tag{2.59}$$

Demostración: Considérese la definición 2.4.1,

$$\mu_r = E[(X-\mu)]^r \quad r = 0, 1, 2, \dots \tag{2.60}$$

El desarrollo de $(X-\mu)^r$ mediante el binomio Newton permite establecer,

$$(X-\mu)^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu^j X_{r-j}. \tag{2.61}$$

Al sustituir la ecuación 2.61 en la ecuación 2.60 y, además, aplicando las propiedades de la media se obtiene,

$$\begin{aligned}
\mu_r &= E\left[\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu^j X_{r-j}\right], \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu^j E[X_{r-j}], \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu^j \mu'_{r-j}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1 *Desarrolle la ecuación 2.59 para $r = 2$.*

Solución: La ecuación 2.59 para $r = 2$ se expresa como:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} \mu^j \mu'_{2-j}, \\
&= \binom{2}{0} \mu^0 \mu'_2 - \binom{2}{1} \mu^1 \mu'_1 + \binom{2}{2} \mu^2 \mu'_0, \\
&= \mu'_2 - 2\mu^1 \mu'_1 + \mu^2 \mu'_0 \\
&= \mu'_2 - 2\mu^2 + \mu^2, \\
&= \mu'_2 - \mu^2,
\end{aligned}$$

Es importante destacar que la última ecuación coincide con el resultado del teorema 2.3.1. En efecto, $\mu_2 = var(X)$, $\mu'_2 = E(X^2)$. Al reescribir esta ecuación en estos términos se obtiene, $var(X) = X^2 - \mu^2$.

Definición 2.4.3 (Función generadora de momentos) *La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como,*

$$M_X(t) = E(e^{tX}). \tag{2.62}$$

Si $f(x)$ es la función de probabilidad (o de densidad) entonces *a) Caso discreto*

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x), \tag{2.63}$$

siempre que la sumatoria converja absolutamente. La suma se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria discreta X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.64}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.65}$$

b) Caso continuo

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, \tag{2.66}$$

siempre que la integral converja absolutamente.

Teorema 2.4.2 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad (o de densidad) $f(x)$ y si $M_X(t)$ es su función generadora de momentos, entonces*

$$\mu'_r = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \bigg|_{t=0}$$

Demostración: La demostración que se desarrollará corresponde al caso continuo. Para el caso discreto se requiere reemplazar las integrales por sumas.
De acuerdo con la definición 2.4.3:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx,$$

Ahora, tomando la derivada *r-ésima* de la función generadora de momentos se establece,

$$\frac{d^r}{dt^r}(M_X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{dt^r} e^{tx} f(x) dx. \tag{2.67}$$

Por otro lado,

$$\frac{d^r}{dt^r}(e^{tx}) = x^r e^{tx}, \tag{2.68}$$

de manera que

$$\frac{d^r}{dt^r}(x^r e^{tx})\bigg|_{t=0} = x^r. \tag{2.69}$$

Sustituyendo la ecuación 2.68 en la ecuación 2.67 y evaluando en $t = 0$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)\bigg|_{t=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)dx\bigg|_{t=0}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, \\ &= \mu_r'. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.2 *Considérese la variable aleatoria X que se describió en el ejemplo 2.2.2.*

$$f(x) = \begin{cases} 2(\frac{1}{3})^x, & x = 1, 2, 3 \ldots \\ 0. & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la función generadora de momentos, la media y la varianza de X.

Solución: De la definición 2.4.3

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}], \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} f(x), \\ &= 2\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (\frac{1}{3})^x, \\ &= 2\sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{3}e^t)^x, \\ &= 2\left(\sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{3}e^t)^x - 1\right), \end{aligned}$$

La suma puede identificarse con la serie geométrica la cual converge si $(\frac{1}{3}e^t) < 1$. En este caso la suma converge para, $0 < t < \ln 3$, y por lo tanto,

$$M_X(t) = 2\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^t} - 1\right) = 2\left(\frac{e^t}{3 - e^t}\right). \tag{2.70}$$

Acontinuación se determinarán los momentos alrededor del origen μ_1' y μ_2'. Para hallar el primer momento alrededor del origen se debe calcular la primera derivada de $M_X(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_X(t) &= 2\left(\frac{e^t}{3-e^t}\right), \\
&= 2\left(\frac{(3-e^t)e^t - e^t(-e^t)}{(3-e^t)^2}\right), \\
&= 2\left(\frac{3e^t - e^{2t} + e^{2t}}{(3-e^t)^2}\right), \\
&= \frac{6e^t}{(3-e^t)^2},
\end{aligned}$$

Al evaluar en $t = 0$ se obtiene,

$$\mu_1' = \frac{d}{dt}M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{6e^t}{(3-e^t)^2}\bigg|_{t=0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Para hallar el segundo momento alrededor del origen es necesario calcular la segunda derivada de $M_X(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}M_X(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right), \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{6e^t}{(3-e^t)^2}\right), \\
&= 6\left(\frac{(3-e^t)^2e^t - 2e^t(3-e^t)(-e^t)}{(3-e^t)^4}\right), \\
&= 6\left(\frac{(3-e^t)e^t + 2e^{2t}}{(3-e^t)^3}\right), \\
&= 6\left(\frac{3e^t - e^{2t} + 2e^{2t}}{(3-e^t)^3}\right), \\
&= 6\left(\frac{3e^t + e^{2t}}{(3-e^t)^3}\right).
\end{aligned}$$

Al evaluar en $t = 0$ se obtiene,

$$\mu_2' = \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\bigg|_{t=0} = 6\,\frac{3e^t + e^{2t}}{(3-e^t)^3}\bigg|_{t=0} = \frac{24}{8} = 3.$$

Finalmente, la media y la varianza de X son, respectivamente,

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1' = \frac{3}{2}\\ \sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

A continuación y para finalizar este capítulo, se presentan algunos resultados importantes relacionados con la función generadora de momentos, cuyas implicaciones serán de gran utilidad para el desarrollo de los capítulos 4 y 5.

Teorema 2.4.3 (Teorema de unicidad) *Si X y Y son variables aleatorias con funciones generadoras de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$, respectivamente, y si además, $M_X(t) = M_Y(t)$ para todos los valores de t, entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.*

La importancia de este teorema radica en que, si se conoce la función generadora de momentos, la distribución de probabilidad queda determinada de manera única. Es decir, la función generadora de momentos y la función de distribución de probabilidad (o de densidad) son características que definen de manera única a la variable aleatoria X.

Teorema 2.4.4 *Si X es una variable aleatoria con función generadora de momentos $M_X(t)$; si además, a es una constante, entonces*

$$\begin{aligned}&a)\quad M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t),\\ &b)\quad M_{aX}(t) = M_X(at).\end{aligned}$$

Demostración: A partir de la definición 2.4.3 se obtiene,

$$\begin{aligned}a)\quad M_{X+a} &= E\left(e^{t(X+a)}\right),\\ &= e^{ta}E(e^{tX}) = e^{ta}M_X(t).\end{aligned}$$

$$b)\quad M_{aX} = E(e^{(ta)X}) = M_X(ta). \qquad \blacksquare$$

Capítulo 3

Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas y continuas

En este capítulo se estudian las distribuciones de probabilidad, tanto discretas como continuas, que se presentan con mayor frecuencia en el estudio de los fenómenos aleatorios. El conocimiento de sus propiedades será de gran utilidad práctica para modelar una amplia gama de fenómenos aleatorios. Para el cálculo de las probabilidades se usarán las tablas estadísticas de las distribuciones, que se incluyen en el apéndice E.

3.1. Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas

Definición 3.1.1 (Ensayos de Bernoulli) *Si un experimento aleatorio puede repetirse cuantas veces se necesite y en cada repetición, o ensayo simple, es posible seleccionar un evento particular, el cual se busca analiza. Cada vez que el evento seleccionado ocurre se dice que se obtuvo un éxito. Por otro lado, si dicho evento no ocurre, se dice que se obtuvo fracaso. Si la probabilidad de éxito se mantiene constante de un ensayo simple a otro y cada repetición es indepentiente de las anteriores, entonces cada ensayo o prueba simple se conoce como prueba o ensayo de Bernoulli.*

Ejemplo 3.1.1 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda equilibrada dos veces. Si se define el evento éxito(E) como obtener cara, entonces el evento complementario (obtener cruz) se conoce como fracaso(F). En cada uno de los dos ensayos la probabilidad de éxito es 1/2,* *además, cada ensayo es independiente. De acuerdo con la definición 3.1.1, cada repetición es un ensayo de Bernoulli.*

Ejemplo 3.1.2 *Supóngase que se tiene una urna con 5 bolas negras y 7 bolas blancas. Si se extraen aleatoriamente de la urna tres bolas, una tras otra con reemplazo, y se define el evento N como extraer una bola negra, entonces en cada extracción la probabilidad de extraer una bola negra es 5/12, además, cada extracción es independiente de las anteriores, por lo tanto, cada extracción es un ensayo de Bernoulli*[1]*.*

3.1.1. Distribución geométrica

Definición 3.1.2 *Considérese un experimento aleatorio que consiste en ensayos de Bernoulli y sea E el evento que se requiere estudiar y p la probabilidad de ocurrencia de E en cada ensayo simple. Si X es la variable aleatoria que determina el número del ensayo en el cual ocurre el primer éxito; es decir, la primera ocurrencia del evento E, entonces se dice que X es una variable aleatoria con distribución geométrica. En general, X es una variable aleatoria con distribución geométrica si su función de probabilidad está determinada por*

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

donde $q = 1 - p$ es la probalidad de fracaso; es decir, que el evento E no ocurra.

Es conveniente representar a la función anterior como $g(x; p)$,

$$g(x; p) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.2}$$

donde g hace referencia a la distribución geométrica. Los argumentos de g son: x, los valores en el recorrido de la variable aleatoria X y p, el parámetro más importante de esta distribución. Nótese que la variable x se separa del parámetro p por un punto y coma, mientras que cuando la función tenga más de un parámetro, éstos se separarán entre sí por medio de una coma simple.

Ejemplo 3.1.3 *Supóngase que se lanzan un par de dados equilibrados repetidamente. Si se define el evento E(éxito) como obtener un total de 7, y si X se define como la variable aleatoria que determina el número del ensayo en el*

[1]Nótese que si las extracciones se realizan sin reemplazo, las extracciones ya no son independientes y la probabilidad tampoco permanece constante.

cual ocurre el primer éxito, entonces X es una variable aleatoria con distribución geométrica. El recorrido de la variable aleatoria X consta los valores 1, 2, 3, ... Si se requiere hallar la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor particular 3; es decir, se busca calcular la probabilidad de que el primer éxito (se obtenga un total de 7 por primera vez) ocurra en el tercer lanzamiento, entonces en los dos lanzamientos anteriores debieron obtenerse fracasos, de manera que,

$$f(3) = P(X = 3) = qqp = q^2p = (5/6)^2(1/6),$$

donde $p = 1/6$ y $q = 5/6$ son las probabilidades del éxito y del fracaso, respectivamente.

La función generadora de momentos

Una vez que se conoce la función de probabilidad se calcula la función geradora de momentos y con ésta, la media y la varianza.

De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}), \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} g(x;p), \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (1-p)^{x-1} p, \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (1-p)^x, \\
&= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^x, \\
&= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^x, \\
&= \frac{p}{q} \left(\sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x - 1 \right).
\end{aligned}$$

En la última ecuación se ha sumado y restado la unidad, de manera que la suma se lleve a cabo desde $x = 0$. Esto permite identificar la suma considerada con la serie geomética, la cual converge si $|r| = |qe^t| < 1$. Lo anterior permite obtener,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-qe^t}-1\right), \\ &= \frac{pe^t}{1-qe^t}, \quad 0<t<\ln(1/q). \end{aligned}$$

La media y la varianza

Para hallar la media y la varianza se deben determinar los primeros momentos alrededor del origen.

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\Big|_{t=0}, \\ &= \left(\frac{d}{dt}\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\Big|_{t=0}, \\ &= \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\Big|_{t=0}, \\ &= \frac{p}{(1-q)^2}, \\ &= \frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}. \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} \mu_2' &= \left(\frac{d^2}{dt^2}(M_X(t))\right)\Big|_{t=0}, \\ &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\right)\Big|_{t=0}, \\ &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\right)\Big|_{t=0}, \\ &= \left(\frac{pe^t+pqe^{2t}}{(1-qe^t)^3}\right)\Big|_{t=0}, \\ &= \frac{p+pq}{(1-q)^3}=\frac{p+pq}{p^3}, \\ &= \frac{1+q}{p^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, la media es

$$\mu=\mu_1'=\frac{1}{p} \tag{3.3}$$

y la varianza

$$\begin{aligned} var(X) &= \mu_2' - \mu^2, \\ &= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}, \\ &= \frac{q}{p^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.1.4 *Tres jóvenes juegan un disparejo. El juego consiste en que cada uno de ellos lanza una moneda no sesgada. Ganará el juego quien obtenga un resultado diferente al de los otros 2. Si los tres obtienen el mismo resultado las monedas se lanzan nuevamente. El afortunado ganador será quien invite los cafés. Determine la probabilidad de que se requieran a lo más 4 lanzamientos.*

Solución: El espacio muestral que corresponde al lanzamiento de 3 monedas tiene ocho puntos muestrales, todos con la misma probabilidad. El fracaso en este experimento consistirá en obtener 3 caras o tres cruces, mientras que el éxito se obtiene con cualquier otro resultado. La probabilidad de fracaso en un lanzamiento de las 3 monedas es $1/4$, mientras que la probabilidad de éxito es $3/4$. Ahora defínase la variable aleatoria X como aquella que cuenta el número de lanzamientos necesarios hasta que se obtiene el primer éxito. Se busca hallar $P(X \leq 4)$ para una variable aleatoria X que tiene una distribución geomética con parámetro $p = 3/4$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \sum_{x=1}^{4} g(x; 3/4), \\ &= \sum_{x=1}^{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \left(\frac{3}{4}\right), \\ &= \frac{255}{256} = 0.9961. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.5 *Se lanzan un par de dados repetidamente.*

a) *¿Cuál es la probilidad de obtener un 7 por primera vez en el cuarto lanzamiento?*

b) *¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos para que la probabilidad sea mayor a 0.90?*

Solución: Defínase la variable aleatoria X como aquella que cuenta el número del lanzamiento de los dos dados en el cual se obtiene el primer 7. Entonces X es una variable aleatoria con distribución geométrica. En este caso, la probabilidad de éxito es 1/6, mientras que la probabilidad de fracaso es 5/6.

a) Se requiere determinar la probabilidad de que $X = 4$; de manera que,

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= g(4; 1/6), \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right), \\ &= \frac{125}{1296} = 0.0965. \end{aligned}$$

b) En este caso se quiere determinar el valor de n tal que $P(X \leq n) > 0.90$.
Se despeja n.

$$\begin{aligned} P(X \leq n) &= \sum_{x=1}^{n} g(x; p), \\ &= \sum_{x=1}^{n} pq^{x-1}, \\ &= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{n} q^x, \\ &= \frac{p}{q} \left(\sum_{x=o}^{n} q^x - 1 \right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

La suma anterior se deja como ejercicio al lector.

$$S_n = \sum_{x=0}^{n} q^x = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{3.6}$$

Sustituyendo la ecuación 3.6 en la 3.5 se obtiene,

$$\begin{aligned} P(X \leq n) &= \frac{p}{q} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1 \right), \\ &= 1 - q^n, \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} 1 - q^n &> 0.90, \\ 1 - 0.90 &> q^n, \\ q^n &< 0.10, \end{aligned}$$

Considerando que el logaritmo es una función creciente y que $0 < q < 1$, se obtiene,

$$n > \frac{\ln 0.10}{\ln(\frac{5}{6})} = 12.63.$$

Por último, n debe ser un entero mayor que 12, en consecuencia, el menor entero es 13.

3.1.2. Distribución binomial

Definición 3.1.3 (Distribución Binomial) *Considérese un experimento que consiste en n ensayos de Bernoulli. Si X es la variable aleatoria que determina el número de éxitos en los n ensayos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial. En general, si X es una variable aleatoria con distribución binomial, entonces su función de probabilidad está determinada por*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

donde n es el número de ensayos de Bernoulli.

Resulta conveniente representar a la función de probabilidad para una variable aleatoria X con distribución binomial como $b(x; n, p)$; es decir,

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Es claro que b hace referencia a la distribución binomial y, n y p son los parámetros representativos de dicha distribución.

Ejemplo 3.1.6 *Supóngase que se lanzan un par de dados equilibrados 5 veces, y defínase el evento éxito como obtener un total de 7. Si X es la variable aleatoria que determina el número de éxitos en los 5 lanzamientos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial. El recorrido de la variable aleatoria X es $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si se requiere hallar la probabilidad de que X tome el valor particular 3; es decir, se requiere calcular la probabilidad de obtener 3 éxitos(3 veces un total de 7) en 5 lanzamiento, entonces*

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3},$$

donde $p = 1/6$ y $q = 5/6$ son las probabilidades de éxito y de fracaso, respectivamente.

La función de distribución (acumulada)

La función de distribución (acumulada) está definida por,

$$F(x;n,p)=\sum_{u\leq x}b(u;n,p)=\sum_{u\leq x}\begin{pmatrix} n \\ u \end{pmatrix}p^u q^{n-u},\quad -\infty<x<\infty. \tag{3.8}$$

La tabla 1 del apéndice E contiene las funciones distribuciones acumuladas para diversos valores de los parámetros n y p.

La función generadora de momentos

A continuación se determinan la función generadora de momentos y con ésta, la media y la varianza.

De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}), \\ &= \sum_{x=1}^{n} e^{tx} b(x;n,p), \\ &= \sum_{x=1}^{n} e^{tx}\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}p^x q^{n-x}, \\ &= \sum_{x=1}^{n}\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}(pe^t)^x q^{n-x}, \\ &= (pe^t+q)^n. \end{aligned}$$

La media y la varianza

A continuación se calculan los primeros momentos alrededor del origen.

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \left.\left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\right|_{t=0}, \\ &= \left.\left(\frac{d}{dt}(pe^t+q)^n\right)\right|_{t=0}, \\ &= \left.\left(np(pe^t+q)^{n-1}e^t\right)\right|_{t=0}, \\ &= np(p+q)^{n-1}, \\ &= np. \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
\mu_2' &= \left(\frac{d^2}{dt^2}(M_X(t))\right)\Bigg|_{t=0}, \\
&= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\right)\Bigg|_{t=0}, \\
&= np\left(\frac{d}{dt}\left(e^t(pe^t+q)^{n-1}\right)\right)\Bigg|_{t=0}, \\
&= np\left[(e^t(pe^t+q)^{n-1}) + (n-1)p(pe^t+q)^{n-2}e^{2t}\right]\Big|_{t=0}, \\
&= np(1+(n-1)p), \\
&= np + n(n-1)p^2, \\
&= np + n^2p^2 - np^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, la media es

$$\mu = \mu_1' = np. \tag{3.9}$$

y la varianza

$$\begin{aligned}
var(X) &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2, \\
&= np - np^2, \\
&= np(1-p), \\
&= npq. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.7 *De acuerdo con la oficina de emisión de licencias para conducir de la ciudad de Westlake, Ohio; el 10 % de los solicitantes no superan la prueba de manejo. Si 15 personas realizan el examen, ¿cuál es la probabilidad de que más de 3 de ellas no obtengan su licencia de conducir?*

Solución: Si la variable aleatoria X se define como aquella que determina el número de solicitantes que fallan en la prueba de manejo, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros $p = 0.10$, $n = 15$. Se requiere determinar $P(X > 3)$.

$$\begin{aligned}
P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3), \\
&= 1 - F(3),
\end{aligned}$$

De la tabla 1 del apéndice E se obtiene, $F(3) = 0.9444$; por lo tanto,

$$P(X > 3) = 1 - 0.9444 = 0.0556.$$

Ejemplo 3.1.8 *Cierto tipo de componente electrónico tiene una probabilidad p=0.20 de pasar con éxito una prueba de durabilidad. Si 20 componentes electrónicos seleccionados aleatoriamente son sometidos a la prueba,*

a) Determine la probabilidad de que al menos la mitad supere la prueba.

b) Determine el número esperado y la varianza para el número de componentes electrónicos que superan la prueba.

Solución: La variable aleatoria X que cuenta el número de componentes que superan la prueba tiene una distribución binomial con parámetros p =0.20 y n =20.

a) Se requiere determinar $P(X \geq 10)$, de modo que,

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10), \\ &= 1 - P(X \leq 9), \\ &= 1 - F(9). \end{aligned}$$

De la tabla 1 del apéndice E se obtiene, $F(9) = 0.9944$, de manera que,

$$P(X \geq 10) = 1 - 0.9994 = 0.0006.$$

b) La media y la varianza para una distribución binomial son:

$$\begin{aligned} \mu &= np = 20(0.20) = 4.0, \\ \sigma^2 &= npq = 20(0.20)(0.80) = 3.2. \end{aligned}$$

3.1.3. Distribuciones hipergeométricas y de Poisson

Definición 3.1.4 (Distribución Hipergeométrica) *Considérese que se tiene un lote con N artículos, los cuales pueden ser clasificados en dos grupos, de acuerdo con cierta propiedad (o característica) definida, de tal manera que k de dichos artículos poseen la propiedad y $N - k$ no la poseen. Supóngase que se extraen de manera aleatoria y sin remplazo n artículos del lote. Si el artículo extraído del lote posee la propiedad definida se dice que se obtuvo un éxito, en caso contrario se dice que se obtuvo fracaso. Si X es la variable aleatoria que determina el número de éxitos en las n extracciones, entonces X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica. En general, si X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, donde $n \leq k$, entonces su función de probabilidad está definida por*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \qquad \textit{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Los parámetros que aparecen en la distribución hipergeméotrica se conocen como:
N *: Tamaño de la población.*
k *: Número de éxitos en la población.*
n*: Tamaño de la muestra.*

Resulta conveniente representar a la función de probabilidad para una variable aleatoria X con distribución hipergeométrica como $h(x; N, n, k)$; es decir,

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{3.11}$$

La letra h hace referencia a la distribución hipergeométrica y, N, n y k son los parámetros representativos de la distribución.

La tabla 3 del apéndice E contiene las funciones distribución (acumuladas) para diversos valores de los parámetros.

Ejemplo 3.1.9 *Considérese que una urna contiene 10 bolas blancas y 15 bolas negras. Si se extraen de la urna una tras otra y sin reemplazo 3 bolas, y si* X *determina el número de bolas negras extraídas, entonces* X *es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica. En este ejemplo,* $N = 25$*,* $k = 10$ *y* $n = 3$*. El recorrido de la variable aleatoria* X *es* $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$*. La función de probabilidad está determinada por*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{15}{3-x}}{\binom{15}{3}}, \quad x = 0, 1, 2, 3. \tag{3.12}$$

Ejemplo 3.1.10 *Considérese un lote de 50 microcomputadoras de las cuales 10 son defectuosas. Supóngase que se extraen sin reemplazo 5 microcomputadoras. Si* X *es la variable aleatoria que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas en la muestra, entonces* X *es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, cuya función de probabilidad está determinada por*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{40}{5-x}}{\binom{50}{5}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3.13}$$

La media y la varianza

En este caso, la función de probabilidad no facilita el cálculo de la función generadora de momentos, de manera que, para esta distribución se procederá a determinar la media y la varianza de la variable aleatoria X mediante las definiciones básicas.

La media
De acuerdo con la definición 2.2.1

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_x xf(x), \\ &= \sum_{x=0}^{n} xb(x;N,n,k), \\ &= \sum_{x=0}^{n} x\frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \end{aligned}$$

dado que el primer término de la sumatoria es nulo,

$$\mu = \sum_{x=1}^{n} x\frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}. \tag{3.14}$$

Ahora considérese la siguiente propiedad de las coeficientes binomiales:

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m}{n}\begin{pmatrix} m-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

La propiedad anterior permite establecer:

$$\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix} = \frac{k}{x}\begin{pmatrix} k-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

y

$$\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{m}{n}\begin{pmatrix} N-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.16 y 3.17 en la ecuación 3.14 se obtiene,

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{x=1}^{n} x \left[\frac{\frac{k}{x}\begin{pmatrix} k-1 \\ x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\frac{N}{n}\begin{pmatrix} N-1 \\ n-1 \end{pmatrix}} \right], \\
&= \frac{nk}{N}\sum_{x=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} k-1 \\ x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N-1 \\ n-1 \end{pmatrix}}. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Ahora cámbiese el índice de la suma x por $y = x - 1$. Con este cambio la ecuación 3.18 se transforma en,

$$\mu = \frac{nk}{N}\sum_{y=0}^{n-1} \frac{\begin{pmatrix} k-1 \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (N-1)-(k-1) \\ (n-1)-y \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N-1 \\ n-1 \end{pmatrix}}. \qquad (3.19)$$

Los términos que aparecen en la sumatoria de la ecuación 3.19 corresponden a una distribución hipergeométrica con parámetros:
Tamaño de la población: $N' = N - 1$,
Tamaño de la muestra: $n' = n - 1$,
Número de éxitos en la población: $k' = k - 1$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{nk}{N}\sum_{y=0}^{n-1} h(y; N-1, n-1, k-1), \\
&= \frac{nk}{N}\sum_{y=0}^{n'} h(y; N', n', k'), \\
&= \frac{nk}{N}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

La varianza
Para calcular la varianza considérese la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(X^2) - E^2(X), \\
&= E(X^2) - E^2(X) + E(X) - E(X), \\
&= E(X^2) - E(X) - E^2(X) + E(X), \\
&= E(X^2 - X) + E(X) - E^2(X), \\
&= E(X(X-1)) + \mu - \mu^2. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Puesto que ya se conoce la media de la variable aleatoria X, para obtener la varianza solo falta calcular el primer término en la ecuación 3.21.
De acuerdo con el teorema 2.2.1

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{x} x(x-1)f(x), \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)b(x;N,n,k), \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},
\end{aligned}
$$

como los términos primero y segundo de la suma son nulos, entonces

$$
E(X(X-1)) = \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}. \qquad (3.22)
$$

Aplicando recursivamente la propiedad de los coeficientes binomiales expresada en la ecuación 3.15 se obtiene,

$$
\binom{m}{n} = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m-1}{n-1}\right)\binom{m-2}{n-2} \qquad (3.23)
$$

De la propiedad anterior se sigue,

$$
\binom{k}{x} = \left(\frac{k}{x}\right)\left(\frac{k-1}{x-1}\right)\binom{k-2}{x-2} \qquad (3.24)
$$

y

$$
\binom{N}{n} = \left(\frac{N}{n}\right)\left(\frac{N-1}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2} \qquad (3.25)
$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.24 y 3.25 en la ecuación 3.22 se obtiene,

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\left[\frac{\left(\frac{k}{x}\right)\left(\frac{k-1}{x-1}\right)\binom{k-2}{x-2}\binom{N-2}{k-2}}{\left(\frac{N}{n}\right)\left(\frac{N-1}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2}}\right], \\
&= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{\binom{k-2}{x-2}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N-2}{n-2}} \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Cambiando el índice x de la suma por $y = x - 2$, la ecuación 3.26 se transforma en,

$$E(X(X-1)) = \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} \sum_{y=0}^{n-2} \frac{\begin{pmatrix} k-2 \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (N-2)-(k-2) \\ (n-2)-y \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N-2 \\ n-2 \end{pmatrix}}$$

Los términos que aparecen en la sumatoria de la ecuación anterior corresponden a una distribución hipergeométrica con parámetros:
Tamaño de la población: $N'' = N - 2$,
Tamaño de la muestra: $n'' = n - 2$,
Número de éxitos en la población: $k'' = k - 2$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} \sum_{y=0}^{n-2} h(y; N-2, n-2, k-2), \\ &= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} \sum_{y=0}^{n''} h(y; N'', n'', k''), \\ &= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.20 y 3.27 en la ecuación 3.21 se obtiene,

$$\sigma^2 = \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} + \frac{nk}{N} - \frac{n^2k^2}{N^2}.$$

Realizando el álgebra se obtiene,

$$\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1} \right) n \left(\frac{k}{n} \right) \left(1 - \frac{k}{n} \right). \tag{3.28}$$

Ejemplo 3.1.11 *Una compañía utiliza un sistema de control para la aceptación de los artículos producidos antes de ser embarcados. Se preparan cajas de 15 artículos para embarques y se selecciona una muestra de 3 para verificar si tienen algún artículo defectuoso. Si se encuentra un artículo defectuoso, entonces la caja entera se regresa para verificarla al 100 %. Si no se encuentran artículos defectosos, entonces la caja se embarca. ¿Cuál es la probabilidad de que se embarque una caja que contiene 2 artículos defectuosos?*

Solución: Si la variable aleatoria X cuenta el número de artículos defectuosos en la muestra, entonces X tiene una distribución hipergeométrica con parámetros $N = 15$, $k = 2$, $n = 3$. Se requiere calcular $P(X = 0)$, ya que solo en el caso de no encontrar artículos defectuosos en la muestra el embarque de la caja procedería. Por lo anterior,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= h(0; 20, 3, 2), \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}}, \\ &= \frac{22}{35}, \\ &= 0.6286. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.12 *Un viajero ha colocado en cada uno de tres frascos idénticos 6 píldoras de narcóticos y 10 de vitaminas, las cuales son en apariencia idénticas. ¿Cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de drogas si,*

a) el agente de aduanas revisa una muestra de 3 píldoras de un solo frasco?

b) el agente toma muestras de 3 píldoras en 2 de los tres frascos?

Solución:

a) La variable aleatoria X que cuenta el número de narcóticos en la muestra tiene una distribución hipergeométrica con parámetros $N = 16$, $n = 3$, $k = 6$. Se requiere la probabilidad de que al menos un narcótico aparezca en la muestra.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0), \\ &= 1 - h(0; 20, 3, 6), \\ &= 1 - \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}}, \\ &= 1 - \frac{3}{14}, \\ &= \frac{11}{14} = 0.7857. \end{aligned}$$

b) Para cada uno de los tres frascos la probabilidad de obtener al menos una píldora de narcótico en una muestra aleatoria de tamaño 3 es una constante. Si Y es la variable aleatoria que cuenta el número de éxitos (obtener al menos un narcótico en la muestra) en 2 ensayos, la variable aleatoria Y tiene distribución binomial con parámetros $n = 2$, $p = 0.7857$. El viajero será arrestado si $Y \geq 1$; es decir, si se obtiene al menos un éxito en los 2 ensayos; por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0), \\
&= 1 - b(0; 2, 0.7857), \\
&= 1 - \binom{2}{0} p^0 q^2, \\
&= 1 - \left(\frac{3}{14}\right)^2, \\
&= \frac{187}{196} \\
&= 0.9541.
\end{aligned}
$$

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson surge del proceso que lleva el mismo nombre y es de gran utilidad para modelar eventos que ocurren en un determinado intervalo de tiempo o en una región determinada. El parámetro más importante para una variable aleatoria con distribución de Poisson es la media, como se mostrará más adelante. A continuación se define el proceso de Poisson y en el apéndice B se muestra la deducción de la función de probabilidad.

Proceso de Poisson

Las tres propiedades que definen el proceso de Poisson y que se enuncian a continuación, están descritas en términos de un *tiempo específico*; sin embargo, en todas las propiedades es posible reemplazar tiempo específico por *espacio específico*(longitud, área, volumen) y los enunciados siguen siendo válidos.
Propiedades que definen el proceso de Poisson.

1. Los eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

2. La probabilidad de que un evento sencillo ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional a la longitud del intervalo.

3. La probabilidad de que más de un evento sencillo ocurra en un intervalo pequeño de tiempo es despreciable.

Definición 3.1.5 (Distribución de Poisson) *Una variable aleatoria X que surge del proceso de Poisson se conoce como variable aleatoria con distribución de Poisson y su función de probabilidad está definida por,*

$$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.29}$$

La tabla 2 del apéndice E contiene las funciones de distribución para diversos valores de la media.

La función generadora de momentos

A continuación se calcula la función generadora de momentos y con ésta la media y la varianza. De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned}
M_X(u) &= E(e^{uX}), \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{ux} p(x; \lambda t), \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{ux} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{ux}(\lambda t)^x}{x!}, \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[\lambda t e^u]^x}{x!}, \\
&= e^{-\lambda t} e^{[\lambda t e^u]}, \\
&= e^{\lambda t(e^u - 1)}, \\
&= exp[\lambda t(e^u - 1)].
\end{aligned}$$

La media y la varianza

A continuación se determinan los primeros momentos alrededor del origen.

$$\begin{aligned}
\mu_1' &= \left(\frac{d}{du}(M_X(u))\right)\Bigg|_{u=0}, \\
&= \left(\frac{d}{du}e^{\lambda t(e^u-1)}\right)\Bigg|_{u=0}, \\
&= e^{\lambda t(e^u-1)}[\lambda t e^u]\big|_{u=0}, \\
&= \lambda t.
\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
\mu_2' &= \left(\frac{d^2}{du^2}(M_X(u))\right)\Bigg|_{u=0}, \\
&= \left(\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(M_X(t))\right)\right)\Bigg|_{u=0}, \\
&= \left(\frac{d}{du}\left(e^{\lambda t(e^u-1)}(\lambda t e^u)\right)\right)\Bigg|_{u=0}, \\
&= \lambda t\frac{d}{du}e^{[\lambda t(e^u-1)+u]}\Bigg|_{u=0}, \\
&= \lambda t e^{[\lambda t(e^u-1)+u]}[\lambda t(e^u)+1]\big|_{u=0}, \\
&= \lambda t(\lambda t+1).
\end{aligned}$$

Finalmente, la media es

$$\mu = \mu_1' = \lambda t. \tag{3.30}$$

y la varianza

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= \lambda t(\lambda t+1) - (\lambda t)^2, \\
&= \lambda t. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

La media es el parámetro más importante en una distribución de Poisson. Es conveniente reescribir la función de probabilidad para una distribución de Poisson en términos de la media.

$$p(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.32}$$

Ejemplo 3.1.13 *Las llamadas telefónicas que entran a un centro de atención a clientes tiene una distribución de Poisson con una media de 3 llamadas por minuto. Determine la probabilidad de que en un minuto cualquiera,* *a) No se reciba llamada alguna.*

b) Se reciba al menos una llamada.

b) Se reciban más de tres llamadas.

Solución: Los datos necesarios para resolver este problema pueden consultarse en la tabla 2.

a) Se debe calcular $P(X = 0)$ para una distribución de Poisson con parámetro $\mu = 3$ llamadas por minuto.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= p(0; 3), \\ &= F(0), \\ &= 0.0498. \end{aligned}$$

b) Se requiere determinar $P(X \geq 1)$. Este evento es el complemento del evento determinado en el inciso a) de manera que,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0), \\ &= 1 - 0.0498, \\ &= 0.9502. \end{aligned}$$

c) Por último se necesita calcular $P(X > 3)$.

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3), \\ &= 1 - F(3), \\ &= 1 - 0.6472, \\ &= 0.3528. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.14 *Un pequeño productor de alimentos produce 15 unidades de un jamón especial cada mes. Si el producto no se vende dentro de un mes, debe descartarse. Supóngase que la demanda (pequeña) X del producto, es una variable aleatoria distribuida de Poisson con parámetro 9. Si se obtiene una utilidad de 1000 pesos en cada unidad vendida, mientras que ocurre una pérdida de 300 pesos en cada unidad que debe ser descartada. Calcúlese la utilidad esperada que el productor puede obtener en un mes con 15 unidades producidas.*

Solución: La utilidad es una función de la variable aleatoria X cuya distribución es de Poisson. La utilidad se define como:

$$U(X) = \begin{cases} 1000X - 300(15 - X), & x = 0, 1, 2 \ldots, 15. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El valor esperado de la variable aleatoria U es,

$$
\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{x=0}^{\infty} u(x)f(x), \\
&= \sum_{x=0}^{15} u(x)f(x), \\
&= \sum_{x=0}^{15} (1300x - 4500)p(x;9), \\
&= 6,814.00 \text{ pesos.}
\end{aligned}
$$

3.1.4. Aproximación entre las distribuciones binomial y de Poisson

La forma de la función de probabilidad para una distribución binomial resulta difícil de evaluar cuando n, el número de ensayos, es muy grande; sin embargo, cuando n es muy grande y p es pequeña, de manera que la media np permanece constante, es posible evaluar una distribución binomial mediante una distribución de Poisson. A continuación se demuestra por qué es posible hacer esta aproximación.

Para comenzar considérese una variable aleatoria X con distribución binomial; es decir, su función de probabilidad está dada por,

$$
b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n.
$$

Desarrollando el coeficiente binomial y sustituyendo el parámetro $p = \frac{\mu}{n}$ se obtiene,

$$
\begin{aligned}
b(x;n,p) &= \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}, \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^x\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!}\frac{\mu^x}{n^x}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-(x+1))(n-x)!}{x!(n-x)!}\frac{\mu^x}{n^x}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-(x+1))}{x!}\frac{\mu^x}{n^x}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{\mu^x}{x!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{x+1}{n})\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x},
\end{aligned}
$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, p tiende a cero, y x y μ permanecen constantes se obtiene

$$
\lim_{n\to\infty} b(x;n,p) = \frac{\mu^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{x+1}{n})\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}\right]. \tag{3.33}
$$

Considerando el límite del producto por separado,

$$
\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{x+1}{n})\right] = 1 \tag{3.34}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)\right]^{-x} = 1. \tag{3.35}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right]^{-\mu}, \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{\mu}}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right]^{-\mu}, \\
&= e^{-\mu}.
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.34, 3.35 y 3.36 en la ecuación 3.33 se concluye,

$$
\lim_{n\to\infty} b(x;n,p) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = p(x;\mu), \quad x = 0,1,2\ldots n. \tag{3.37}
$$

Ejemplo 3.1.15 *Considérese que se lanzan un par de dados 200 veces. Defínase como éxito al evento que ocurre cuando se obtiene un total de 7. Determine la probabilidad de obtener 40 sietes, usando la distribución binomial y mediante la aproximación de Poisson a la binomial.*

Solución: Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de 7 en los 200 lanzamientos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial, cuyos parámetros son: $n = 200$ y $p = \frac{1}{6}$ =0.17. Su función de probabilidad es

$$b(x;n,p) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x q^{n-x}, \quad x = 1,2,3,\ldots,100.$$

La probabilidad de obtener 40 sietes en los 200 lanzamientos se expresa mediante,

$$\begin{aligned} P(x=40) &= b(40;200,0.17), \\ &= \left(\begin{array}{c} 200 \\ 40 \end{array} \right) (0.17)^{40}(0.83)^{160}, \\ &= 0.0382 \end{aligned}$$

De acuerdo con la aproximación de Poisson a la binomial,

$$\begin{aligned} b(40;200,0.17) &\approx p(40;34), \\ &\approx \frac{e^{-34}(34)^{40}}{40!}, \\ &\approx 0.0381. \end{aligned}$$

Aunque los programas de cómputo actuales permiten calcular los dos valores, es claro que el segundo proceso requiere de mucho menos recursos, y en esto radica la importancia de la aproximación de la binomial mediante una distribución de Poisson.

3.2. Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas

En esta sección se presentarán las distribuciones continuas, sus propiedades y sus aplicaciones, mismas que serán relevantes para el desarrollo del capítulo 5 de este curso.

3.2.1. Distribución exponencial y gama

Distribución Exponencial

Definición 3.2.1 (Distribución exponencial) *Una variable aleatoria continua X tiene distribución exponencial si para algún $\alpha > 0$, su función de densidad está definida por,*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & si\ x > 0, \\ 0, & si\ x \leq 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

La función de distribución acumulada

La función de distribución acumulada para la distribución exponencial se determina a continuación.
De acuerdo con la definición 2.1.7,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

a) Si $x \leq 0$, entonces F(u)=0.
b) Si $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \alpha e^{-\alpha u} du, \\ &= \alpha \int_0^x e^{-\alpha u} du, \\ &= -e^{-\alpha u}\Big|_0^x, \\ F(x) &= 1 - e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

A continuación se calcularán la media y la varianza mediante la función generadora de momentos.

La función generadora de momentos

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x) dx, \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{tX} \alpha e^{-\alpha x} dx, \\
&= \alpha \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha - t)x} dx, \; \text{[la integral converge si } \alpha - t > 0], \\
&= -\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right) \lim_{b \to \infty} e^{-(\alpha - t)x}\Big|_0^b, \qquad (3.40) \\
M_X(t) &= \frac{\alpha}{\alpha - t}, \quad t < \alpha. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Primer momento alrededor del origen

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)\right)\Big|_{t=0}, \\
&= \frac{\alpha}{(\alpha - t)^2}\Big|_{t=0}, \\
\mu_1' &= \frac{1}{\alpha}. \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

Segundo momento alrededor del origen

$$
\begin{aligned}
\mu_2' &= \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)\right)\Big|_{t=0}, \\
&= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{(\alpha - t)^2}\right)\right)\Big|_{t=0}, \\
&= \frac{2\alpha}{(\alpha - t)^3}\Big|_{t=0}, \\
\mu_2' &= \frac{2}{\alpha^2}. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

La media

La media corresponde al primer momento alrededor del origen,

$$\mu = \frac{1}{\alpha}. \tag{3.44}$$

La varianza

Como se demostró en el capítulo 1, la varianza es

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}, \\
\sigma^2 &= \frac{1}{\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Ejemplo 3.2.1 *Un tipo de fusible tiene una duración T distribuida exponencialmente, con media igual a 700 días. Determine la probabilidad de que un determinado fusible tenga una duración mayor a su media.*

Solución: La variable aleatoria continua T tiene una distribución exponencial, de manera que su función de distribución acumulada es,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{700}t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Se quiere determinar $P(T > 700)$; de modo que,

$$\begin{aligned}
P(T > 700) &= 1 - P(T \leq 700), \\
&= 1 - F(700), \\
&= 1 - (1 - e^{-1}), \\
&= e^{-1}, \\
&= 0.3678.
\end{aligned}$$

Nótese que este resultado es de un carácter mucho más general; es decir, el resultado no depende de la media particular.

Ejemplo 3.2.2 *Supóngase que la duración de un componente electrónico es una variable aleatoria continua T con una distribución exponencial. El proceso de fabricación garantiza una duración esperada de 100 horas (esto es, el parámetro $\alpha = 100^{-1}$). Suponiendo que el proceso de producción tiene un costo de 1000 pesos si el dispositivo dura más de 150 horas, mientras que si el dispositivo dura menos de 150 horas, se agrega una pérdida de 500 pesos en contra del fabricante. ¿Cuál es el costo esperado de producción por cada componente electrónico?*

Solución: Sea C la variable aleatoria que determina el costo por fusible, entonces:

$$C(T) = \begin{cases} 1000, & \text{si } T > 150, \\ 1500, & \text{si } T \leq 150. \end{cases}$$

Además, la función de distribución acumulada es

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{100}}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Ahora se requiere calcular el valor esperado del costo por unidad producida.

$$\begin{aligned} E(C) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(t)f(t)dt, \\ &= 1500\int_{0}^{150} f(t)dt + 1000\int_{150}^{\infty} f(t)dt, \\ &= 1000P(T > 150) + 1500P(T \leq 150), \\ &= 1000(1 - P(T \leq 150)) + 1500(P(T \leq 150)), \\ &= 1000(1 - F(150)) + 1500F(150), \\ &= 1000 + 500F(150), \\ &= 1000 + 500(1 - e^{-\frac{150}{100}}), \\ &= 1000 + 500(1 - e^{-\frac{3}{2}}), \\ &= 1388.43 \text{ pesos.} \end{aligned}$$

La distribución Gama

Antes de comenzar con un desarrollo de la distribución gama, será necesario hacer una discusión breve de la función gama, la cual tiene aplicaciones en muchas ramas de las matemáticas.

Definición 3.2.2 (La función Gama) *Si p es un número real positivo la función gama, denotada por Γ, se define mediante la integral impropia,*

$$\Gamma(p) = \int_{0}^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx. \tag{3.46}$$

Puede demostrarse que la integral converge para todo $p > 0$.

Mediante el método de integración por partes se obtiene la siguiente propiedad, conocida como **fórmula recursiva**

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1). \tag{3.47}$$

Para un entero n la aplicación sucesiva de la fórmula recursiva permite establecer,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1), \tag{3.48}$$

además,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1. \tag{3.49}$$

Sustituyendo la ecuación 3.49 en la 3.48 se obtiene

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{3.50}$$

A continuación se prueba la siguiente propiedad,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{3.51}$$

De acuerdo con la definición de la función gama (definición 3.2.2),

$$\Gamma(1/2) \;=\; \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx.$$

Mediante el cambio de variable, $x = \frac{u^2}{2}$, $dx = udu$, de manera que

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx,\\ &= \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du,\\ &= \sqrt{2}I,\end{aligned}$$

donde

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La integral anterior se desarrolla en el apéndice C.1.
Finalmente,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Definición 3.2.3 (La distribución gama) *Una variable aleatoria continua X tiene distribución gama si para $r > 0$ y $\alpha > 0$, su función de densidad de probabilidad puede expresarse como,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, & x > 0\\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

En la figura 3.1 se muestran las gráficas que corresponden a la distribución gama para $\alpha = 1/2$ y valores de $r = 1, 2, 3, 4$. Se observa que para $r = 1$ la distribución gama se reduce a una distribución exponencial; en otras palabras, la distribución exponencial corresponde a una distribución gama con parámetro $r = 1$. En la siguiente sección se discute el significado de este parámetro.

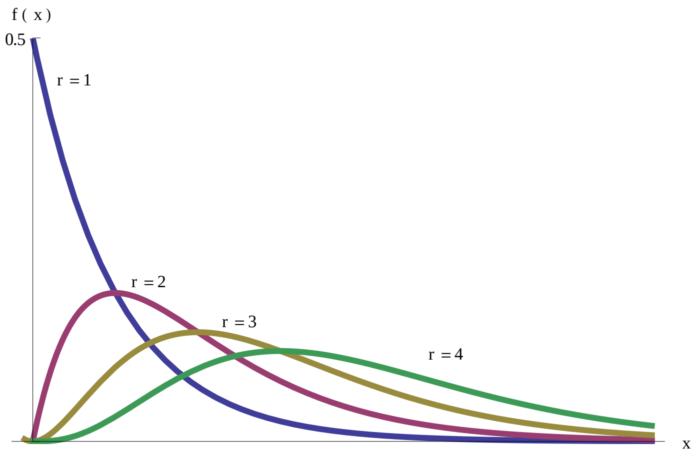


Figura 3.1: Distribución Gama

Función generadora de momentos para una variable aleatoria con distribución Gama

A continuación se determina la función generadora de momentos para una variable aleatoria X con distribución gama.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}), \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^\infty (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} e^{tx} dx, \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^\infty (\alpha x)^{r-1} e^{-(\alpha - t)x} dx. \end{aligned}$$

Haciendo $\beta = \alpha - t$ se obtiene,

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^\infty (\alpha x)^{r-1} e^{-\beta x} dx.$$

La integral converge si $\beta = \alpha - t > 0$; es decir, si $t < \alpha$. Mediante el cambio de variables $y = \beta x$ se obtiene,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\alpha^r}{\beta^r\Gamma(r)}\int_0^\infty y^{r-1}e^{-y}dx, \\ &= \frac{\alpha^r}{\beta^r}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$M_X(t) = \frac{\alpha^r}{(\alpha - t)^r}, \quad t < \alpha. \tag{3.53}$$

Primer momento alrededor del origen

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\alpha^r}{(\alpha - t)^r}\right)\bigg|_{t=0}, \\ &= \frac{r\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}}\bigg|_{t=0}, \\ \mu_1' &= \frac{r}{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Segundo momento alrededor del origen

$$\begin{aligned} \mu_2' &= \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\alpha^r}{(\alpha - t)^r}\right)\right)\bigg|_{t=0}, \\ &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{r\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}}\right)\right)\bigg|_{t=0}, \\ &= \frac{r(r+1)\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+2}}\bigg|_{t=0}, \\ \mu_2' &= \frac{r(r+1)}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

La media

La media corresponde al primer momento alrededor del origen.

$$\mu = \frac{r}{\alpha}. \tag{3.56}$$

La varianza

Como se demostró en el capítulo 1, la varianza está dada por,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2,\\ &= \frac{r(r+1)}{\alpha^2} - \frac{r^2}{\alpha^2},\\ \sigma^2 &= \frac{r}{\alpha^2}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

La distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución Gama y su relación con la distribución de Poisson

A continuación se determina la función de distribución acumulada para una variable aleatoria X con distribución Γ.
Si $x \leq 0$, $F(x) = 0$. Si $x > 0$,entonces

$$\begin{aligned}F(x) &= P(X \leq x),\\ &= 1 - P(X > x),\\ &= 1 - \int_x^\infty \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha y)^{r-1}e^{-\alpha y}dy,\\ &= 1 - I,\end{aligned}$$

donde

$$I = \int_x^\infty \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha y)^{r-1}e^{-\alpha y}dy.$$

Mediante el cambio de variable $u = \alpha y$, se obtiene $du = \alpha dy$, luego la integral se transforma en,

$$\begin{aligned}I &= \int_{\alpha x}^\infty \frac{1}{\Gamma(r)}u^{r-1}e^{-u}du,\\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{\alpha x}^\infty u^{r-1}e^{-u}du,\\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{\mu}^\infty u^{r-1}e^{-u}du.\end{aligned}$$

Si se hace $\mu = \alpha x$ y se considera que r es un entero, entonces

$$I = \frac{1}{(r-1)!}\int_\mu^\infty u^{r-1}e^{-u}du.$$

Esta integral se desarrolla en el apéndice C.2, el resultado es

$$I = \frac{1}{(r-1)!}\int_{\mu}^{\infty} u^{r-1}e^{-u}du = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}, \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} P(Y = k), \end{aligned} \tag{3.58}$$

donde Y es una variable aleatoria de Poisson con media $\mu = \alpha x$.
El hecho de que la función de distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución gama, pueda calcularse mediante la distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución de Poisson no es una casualidad, como se demostrará a continuación.
Sea X una variable aleatoria que surge del proceso de Poisson; es decir, X mide el número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo fijo $(0, t)$ y satisface todas las hipótesis que el proceso de Poisson requiere. La función de probabilidad está determinada por $p(x; \alpha t)$, donde α es el valor esperado de eventos que ocurren en el intervalo fijo de tiempo t. Si se fija el número de los eventos que ocurren, por decir k, y se define la variable aleatoria T como el tiempo necesario para que k eventos ocurran, entonces la función de distribución acumulada de la variable aleatoria T está definida por,

$$H(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t),$$

Si k eventos ocurren en el tiempo $T \leq t$, entonces en $T > t$ ocurren menos de k eventos. Esta probabilidad se calcula mediante la distribución de Poisson como se muestra en seguida.

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 - P(T > t), \\ &= 1 - P(X < k), \\ &= 1 - P(X \leq k-1), \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{k-1} p(x; \alpha t), \end{aligned}$$

El caso más sencillo se observa cuando $k = 0$. En este supuesto, la probabilidad de que ningún evento ocurra en $(0, t)$ está determinada por

$$p(0; \alpha t) = e^{-\alpha t}.$$

Si se define la variable aleatoria T como aquella que mide el tiempo necesario para que un evento ocurra, entonces su función de distribución acumulada está determinada por

$$\begin{aligned} G(t) &= P(T \leq t) \\ &= 1 - P(T > t), \\ &= 1 - P(X \leq 0), \\ &= 1 - e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Derivando $G(t)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} g(t) &= G'(t), \\ &= \alpha e^{-\alpha t} \quad x > 0. \end{aligned}$$

Por lo que T es una variable distribuida exponencialmente.

Ejemplo 3.2.3 *Supóngase que las llamadas telefónicas que entran a un conmutador en particular, siguen el proceso de Poisson con un promedio de 6 llamadas por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que pase hasta un minuto antes de que entren 4 llamadas?*

Solución: Se define la variable aleatoria T como el tiempo necesario para que ocurran 4 eventos. T tiene una distribución gama con parámetros $r = 4$ y $\alpha = 6$ y se requiere calcular $F(1) = P(T \leq 1)$. De acuerdo con la ecuación 3.58,

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-6}(6)^k}{k!}, \\ &= 1 - \frac{118}{3e^5}, \\ &= 0.7349. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.4 (La distribución chi-cuadrado o ji-cuadrado) *Una distribución de gran interés en la estadística se obtiene al sustituir los parámetros $\alpha = 1/2$ y $r = n/2$ (donde n es un entero positivo), en la distribución gama descrita por la ecuación 3.52. La familia de funciones que se obtienen corresponden a variables aleatorias cuya distribución se conoce como chi-cuadrado*[2] *y se denota por (χ^2).*

a) Determine la función de densidad para una variable Z con distribución χ^2

[2]Algunos autores prefieren llamarla ji-cuadrado.

b) Determine la media, la varianza y la función generadora de momentos de la variable aleatoria Z.

Solución:

a) Considérese la ecuación 3.52

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Sustituyendo $\alpha = 1/2$, $r = n/2$ y $x = z$ en la ecuación anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\Gamma(n/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{z}{2}}, \quad z > 0, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1}e^{-\frac{z}{2}}, \quad z > 0. \end{aligned}$$

De manera más precisa, se dice que una variable aleatoria Z tiene distribución χ^2 con n grados de libertad si su función de densidad de probabilidad está definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1}e^{-\frac{z}{2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases} \tag{3.59}$$

En la figura 3.2 se muestran las gráficas de $f(z)$ para $n = 1, 2, 3$, y en la tabla 5 del apéndice E se determinan las funciones de distribución acumuladas para diversos valores de n.

b) Dado que la distribución chi-cuadrado es un caso particular de la distribución gama, cuya media y varianza están definidas por las ecuaciones 3.56 y 3.57, entonces

$$\mu = n, \tag{3.60}$$
$$\sigma^2 = 2n, \tag{3.61}$$
$$M_Z(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}. \tag{3.62}$$

En la tabla 5 del apéndice E se muestran los valores cuantiles χ^2_p, (para diferentes valores del parámetro n) los cuales deben interpretarse como:

$$p = \int_0^{\chi^2_p} f(z)dz. \tag{3.63}$$

Como se muestra en la figura 3.3.

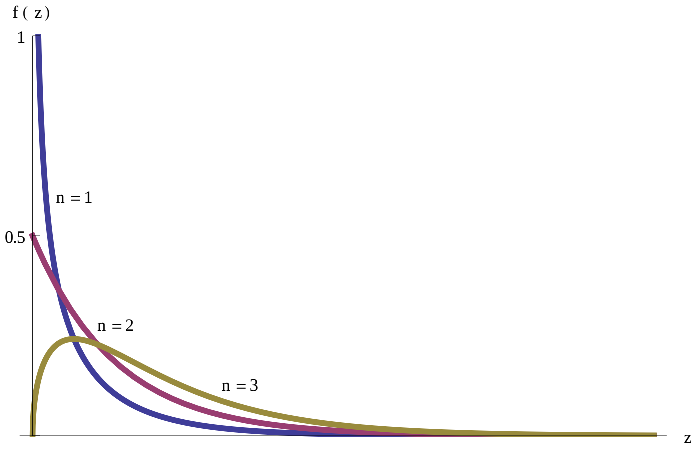


Figura 3.2: Distribución χ^2

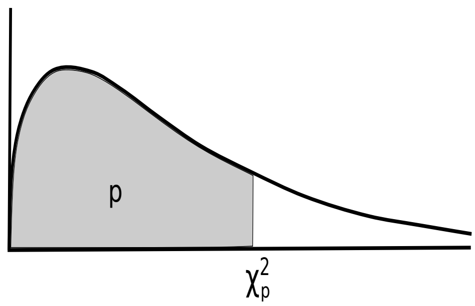


Figura 3.3: Valores cuantiles de χ^2

3.2.2. La distribución normal

Definición 3.2.4 (La distribución normal) *Una variable aleatoria continua X tiene distribución normal si para dos números reales μ y σ, con $\sigma > 0$, su función de densidad puede expresarse como*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3.64}$$

A continuación se verificará que la integral de $f(x)$ sobre todo el dominio es igual a la unidad.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,
\end{aligned}
$$

Mediante el cambio de variable, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, se obtiene, $dx = \sigma dz$, manera que

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}I = 1.
\end{aligned}
$$

La integral denotada como I se desarrolla en el apéndice C.1.
Ahora será necesario hacer un análisis de las propiedades de la función de densidad para tener un conocimiento general de su comportamiento.

Máximos y mínimos
Derivando $f(x)$ e igualando a cero se obtiene,

$$
f'(x) = -\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)f(x) = 0.
$$

De la ecuación anterior se concluye que $f(x)$ tiene un punto crítico en $x = \mu$. Calculando la segunda derivada y evaluando en este punto se comprueba que se trata de un máximo (ya que la concavidad es negativa). En efecto, la segunda derivada puede expresarse de manera conveniente como,

$$
f''(x) = -\frac{f(x)}{\sigma^2}\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + 1\right).
$$

Puntos de inflexión
Igualando a cero la ecuación anterior se encuentra que la gráfica tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.

Simetría
Otra característica de $f(x)$ es la simetría respecto a la recta $x = \mu$; es decir, para todo $\epsilon > 0$, $f(x+\epsilon) = f(x-\epsilon)$.

Asíntota
Por último,

$$
\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,
$$

de manera que la recta $y = 0$ constituye una asíntota.
En la figura 3.4 se muestra la gráfica de $f(x)$ para los valores de $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. La distribución se conoce como distribución normal estándar y se denota por $N(0,1)$.

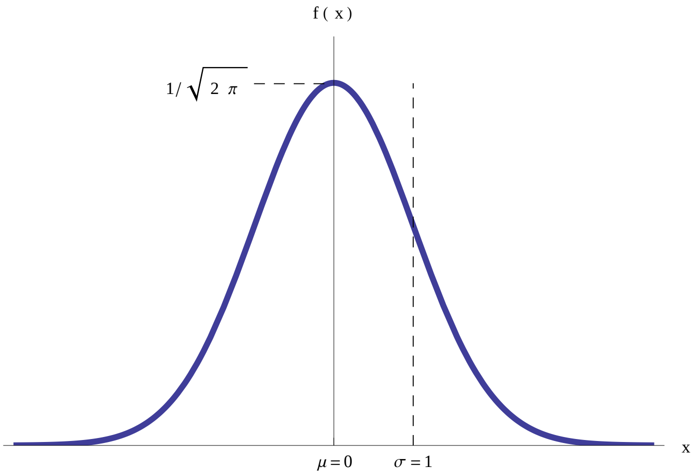


Figura 3.4: Distribución normal estándar

Función generadora de momentos

De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tx}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{tx} dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

De aquí en adelante el procedimiento consistirá en extraer de la integral los términos que no dependen de la variable x. En el proceso se requerirá de completar un trinomio cuadrado perfecto, como se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
exp\left[tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] &= exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\mu)^2-2\sigma^2tx\right)\right],\\
&= exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2tx\right)\right],\\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2-2(\mu+\sigma^2t)x\right]\right],
\end{aligned}
$$

Sea $\alpha=\mu+\sigma^2t$, entonces

$$
exp\left[tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2\alpha x\right)\right],
$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto se debe sumar y restar α^2.

$$
\begin{aligned}
exp\left[tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] &= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2\alpha x+\alpha^2-\alpha^2\right)\right],\\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\alpha)^2-\alpha^2\right)\right],\\
&= exp\left(\frac{-\mu^2+\alpha^2}{2\sigma^2}\right)exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\alpha)^2\right].
\end{aligned}
$$

Mediante el cambio de variable $z=\frac{x-\alpha}{\sigma}$ se obtiene, $dx=\sigma dz$ y la integral se transforma en

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= exp\left(\frac{-\mu^2+\alpha^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\\
&= exp\left(\frac{-\mu^2+\alpha^2}{2\sigma^2}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituyendo $\alpha=\mu+\sigma^2t$ se obtiene

$$
M_X(t)=exp\left(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right). \tag{3.65}
$$

La media y la varianza

A continuación se calculan los primeros momentos alrededor del origen.

Primer momento alrededor del origen

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \left(\frac{d}{dt} exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right)\Big|_{t=0}, \\
&= \left((exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)(\mu + \sigma^2 t)\right)\Big|_{t=0}, \\
&= \left(M_X(t)(\mu + \sigma^2 t)\right)\big|_{t=0}, \\
&= \mu.
\end{aligned}
$$

Segundo momento alrededor del origen

$$
\begin{aligned}
\mu_2' &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} M_X(t)\right)\right)\Big|_{t=0}, \\
&= \left(\frac{d}{dt}\left(M_X(t)(\mu + \sigma^2 t)\right)\right)\Big|_{t=0}, \\
&= \left(M_X'(t)(\mu + \sigma^2 t) + M_X(t)(\sigma^2)\right)\big|_{t=0}, \\
&= \mu^2 + \sigma^2.
\end{aligned}
$$

La media

La media corresponde al primer momento alrededor del origen, de manera que,

$$E(X) = \mu \tag{3.66}$$

La varianza

$$
\begin{aligned}
var(X) &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{3.67}
$$

En general, una variable aleatoria distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2 se denota por $N(\mu, \sigma^2)$.

3.2.3. Estandarización y cálculo de probabilidades utilizando las tablas normales

En la figura 3.5 se muestran las gráficas de las funciones de densidad para tres valores diferentes de las varianzas. Puede observarse que una varianza menor tiene un máximo más pronunciado; es decir, la curva se vuelve más aguda. Las integrales que involucran a una distribución normal se vuelven

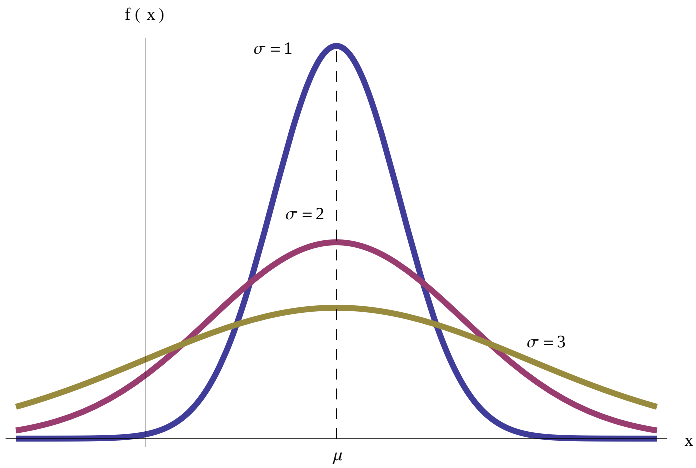


Figura 3.5: Distribuciones normales con media μ y varianzas diferentes

complejas y, de hecho, se puede demostrar que no existe una función analítica para la función de distribución acumulada. Debido a este inconveniente y teniendo en cuenta la importancia que esta distribución representa para la estadística, se vuelve prioritario contar con tablas de las funciones de distribución acumulada para determinar las probabilidades en las que interviene dicha distribución. En principio se requieren tantas tablas como parejas de números permitidos μ y σ existan. Afortunadamente, esto no será necesario y, como se mostrará a continuación, bastará con la tabla que nos proporcione los valores de la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar, para calcular las probabilidades de cualquier distribución normal.
Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Si se define la variable aleatoria Z como

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \tag{3.68}$$

entonces la variable aleatoria Z tiene media 0 y varianza 1. Las variables que se definen de esta manera se conocen como variables aleatorias estandarizadas. Todas las variables estandarizadas tienen media cero y varianza 1.
La función de densidad de una variable aleatoria estandarizada, depende de la función de densidad de la variable aleatoria X. A continuación se determinará la función de densidad de la variable aleatoria Z, considerando que, en este caso, X tiene distribución normal.

De acuerdo con el teorema 2.4.4 la función generadora de momentos de la variable aleatoria Z está dada por

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} M_X(\frac{t}{\sigma}), \\ &= e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} e^{\left(\frac{\mu t}{\sigma}+\frac{1}{2}t^2\right)}, \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

La función generadora de momentos de la variable aleatoria Z corresponde a una distribución normal estándar y de acuerdo con el teorema 2.4.3 la variable aleatoria Z tiene función de densidad definida por la ecuación,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty.$$

Por otro lado, la ecuación 3.68 cumple con los supuestos del teorema 2.1.2; por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right), \\ &= P(z_1 < Z < z_2), \\ &= F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

La tabla 4 del apéndice E contiene la función de distribución acumulada para la distribución normal estándar. Aun cuando no existe una primitiva para la función $F(x)$ el área bajo la curva normal estándar se calcula mediante métodos de integración numérica. Los valores en la tabla deben interpretarse como:

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{z} f(u)du. \tag{3.69}$$

Como se muestra en la figura 3.6

Ejemplo 3.2.5 *Determine el área bajo la curva normal estándar entre los puntos $z_1 = -1.52$ y $z_2 = 1.52$.*

Solución: El área que se busca determinar se muestra en la figura 3.7 y corresponde a:

$$P(-1.52 < Z < 1.52) = F(1.52) - F(-1.52),$$

De acuerdo con la tabla 4 del apéndice E, $F(-1.52) = 0.0643$ y $F(1.52) = 0.9357$.

$$P(-1.52 < Z < 1.52) = F(1.52) - F(-1.52) = 0.8714.$$

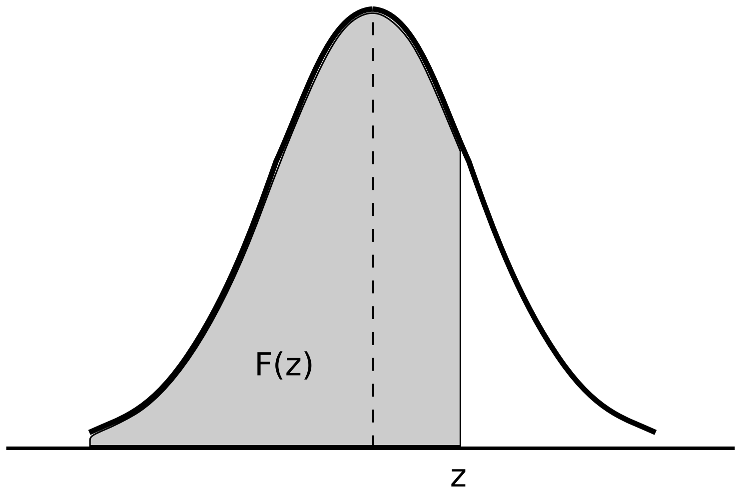


Figura 3.6: Área bajo la curva normal estándar

Ejemplo 3.2.6 *Para el ejemplo anterior,*

a) determine el área a la derecha de z_2,

b) determine el área a la izquierza de z_1.

Solución:

a) El área a la derecha de z_2 corresponde a $P(Z > z_2)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Z > z_2) &= 1 - P(Z \leq z_2), \\ &= 1 - F(z_2), \\ &= 1 - F(1.52), \\ &= 1 - 0.9357, \\ &= 0.0643. \end{aligned}$$

b) El área a la izquierda de z_1 corresponde a $P(Z \leq z_1)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Z \leq z_1) &= P(Z \leq z_1), \\ &= F(z_1), \\ &= F(-1.52), \\ &= 0.0643. \end{aligned}$$

Obsérvese que la suma de las áreas de las tres regiones es igual a 1, como debe corresponder al área bajo la curva de una función de densidad.

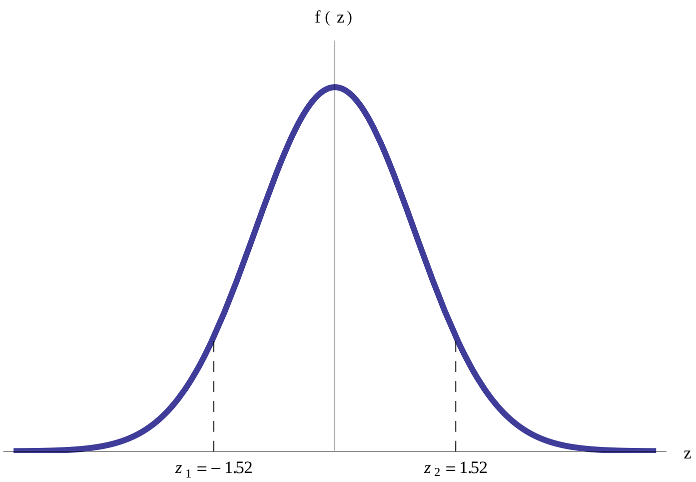


Figura 3.7: Distribuciones normales

Ejemplo 3.2.7 *Determine el valor de z de tal manera que* $P(Z < z) = 0.75$

Solución: Directamente de la tabla 4 del apéndice E se busca el valor de z tal que $F(z)$ sea lo más cercano a 0.75. Las áreas que se aproximan son 0.7485 y 0.7517, los valores de z correspondientes son, $z_1 = 0.67$ y $z_2 = 0.68$, respectivamente. Se recomienda tomar como valor de z a la media aritmética de z_1 y z_2, en este caso, $z = 0.675$.

Ejemplo 3.2.8 *El diámetro de un cable está distribuido normalmente con media 0.8 y varianza 0.0004.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro sea mayor 0.81 pulgadas?

b) Suponiendo que el cable se considere defectuoso si el diámetro se diferencia de su media en 0.025 pulgadas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cable defectuoso?

Solución:

a) Sea X la variable aleatoria que mide el diámetro del cable, se requiere calcular $P(X > 0.81)$. Por lo discutido anteriormente,

$$P(X > 0.81) = P(Z > z_1),$$

donde,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Sustituyendo $x_1 = 0.81$, $\mu = 0.80$ y $\sigma = \sqrt{0.0004} = 0.02$ se obtiene,

$$z_1 = \frac{0.81 - 0.80}{0.02} = 0.29,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} P(X > 0.81) &= P(Z > 0.29), \\ &= 1 - P(Z \leq 0.29), \\ &= 1 - F(0.29), \\ &= 1 - 0.6141, \\ &= 0.3859. \end{aligned}$$

b) La probabilidad de obtener un cable defectuoso está determinado por,

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| > 0.025) &= 1 - P(|X - \mu| \leq 0.025), \\ &= 1 - P(-1.25 \leq Z \leq 1.25), \\ &= 1 + F(-1.25) - F(1.25), \\ &= 1 + 0.1056 - 0.8944, \\ &= 0.2112. \end{aligned}$$

3.2.4. Aproximación normal a la binomial

Teorema 3.2.1 (Aproximación normal a la binomial) *Sea X una variable aleatoria binomial con media y con desviación estándar determinados por*

$$\begin{aligned} \mu &= np, \\ \sigma &= \sqrt{np(1-p)}, \end{aligned}$$

respectivamente, entonces la variable aleatoria estandarizada

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}, \tag{3.70}$$

tiene una función de distribución que tiende a la distribución normal estándar cuando $n \to \infty$.

Demostración: La demostración que se presentará se basa en el hecho de que la función generadora de momentos define de manera única la distribución de una variable aleatoria; por lo tanto se calculará la función generadora de momentos de la variable aleatoria Y y se analizará su comportamiento

límite.
Considerando que X tiene una distribución binomial, entonces $\mu = np$ y $\sigma = npq$; además su función generadora de momentos está definida por,

$$M_X(t) = (q + pe^t)^n \tag{3.71}$$

Por otro lado, la variable aleatoria Y corresponde a una variable aleatoria estandarizada; es decir,

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \tag{3.72}$$

para los valores de μ y σ que corresponden a la variable aleatoria X. La función generadora de momentos de la variable aleatoria Y se determina, de acuerdo con el teorema 2.4.4, de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma})}(t), \\ &= e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} M_X(\frac{t}{\sigma}). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Evaluando la ecuación 3.73 mediante la ecuación 3.72 se obtiene,

$$M_Y(t) = e^{-\frac{\mu t}{\sigma}}(q + pe^{\frac{t}{\sigma}})^n \tag{3.74}$$

Sustituyendo $\mu = np$ en la ecuación anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= e^{-\frac{npt}{\sigma}}(q + pe^{\frac{t}{\sigma}})^n, \\ &= \left(e^{-\frac{pt}{\sigma}}(q + pe^{\frac{t}{\sigma}})\right)^n, \\ &= \left(qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{t}{\sigma}(1-p)}\right)^n, \\ &= \left(qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}}\right)^n, \end{aligned} \tag{3.75}$$

Ahora considere el desarrollo de las exponenciales, de acuerdo con el desarrollo de Taylor de la función exponencial,

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots,$$

$$qe^{-\frac{pt}{\sigma}} = q\left(1 - \frac{pt}{\sigma} + \frac{p^2t^2}{2\sigma^2} + \ldots\right), \tag{3.76}$$

$$pe^{\frac{qt}{\sigma}} = p\left(1 + \frac{qt}{\sigma} + \frac{q^2t^2}{2\sigma^2} + \ldots\right). \tag{3.77}$$

Sumando las ecuaciones 3.76 y 3.77 se obtiene,

$$\begin{aligned} qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}} &= q\left(1 - \frac{pt}{\sigma} + \frac{p^2t^2}{2\sigma^2} + \dots\right) + p\left(1 + \frac{qt}{\sigma} + \frac{q^2t^2}{2\sigma^2} + \dots\right), \\ &= (p+q) + \frac{pq(p+q)t^2}{2\sigma^2} + \dots, \\ &= 1 + \frac{pqt^2}{2\sigma^2} + \dots \end{aligned} \tag{3.78}$$

Los términos de orden superior son de la forma $(\frac{1}{n})^{\frac{k}{2}}, \quad k \geq 3$, los cuales tienden rápidamente a cero a medida n aumenta. Sustituyendo $\sigma^2 = npq$ en la ecuación 3.78 se obtiene,

$$qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}} = 1 + \frac{t^2}{2n} + \dots \tag{3.79}$$

Finalmente, al considerar el limite cuando $n \to \infty$ en la ecuación 3.75 se obtiene,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} M_Y(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}}\right)^n, \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{2n}\right)^n, \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

De acuerdo con la ecuación 3.65, la ecuación 3.80 corresponde a la función generadora de momentos de una distribución normal estándar; además, de acuerdo con el teorema 2.4.3 la variable aleatoria Y tiene en sí misma una distribución normal estándar. ∎

Ejemplo 3.2.9 *Considérese el experimento de lanzar un par dados. Determine la probabilidad de obtener 40 totales de 7 en 200 lanzamientos.*

Solución: Si X es la variable aleatoria cuenta el número de sietes que ocurren en los 200 lanzamientos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial, cuyos parámetros son $n = 200$ y $p = \frac{1}{6}$ =0.17. El cálculo mediante la distribución binomial se realizó en el problema 3.1.15.

La probabilidad de obtener 40 sietes en los 200 lanzamientos se expresa mediante,

$$\begin{aligned} P(x = 40) &= b(40; 200, 0.17), \\ &= \binom{200}{40}(0.17)^{40}(0.83)^{160}, \\ &= 0.0382. \end{aligned}$$

Para aplicar la aproximación de la distribución normal a la distribución binomial se requiere conocer la media y la desviación estándar de X.

$$\begin{aligned}\mu &= np = 200(0.17) = 34,\\ \sigma &= \sqrt{npq} = \sqrt{200(0.17)(0.83)} = 5.31.\end{aligned}$$

La probabilidad de un punto no puede obtenerse mediante una distribución continua, lo que se hará es determinar la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo: $39.5 < X < 40.5$. Este intervalo está centrado en 40 y tiene ancho 1. Se procederá a determinar los extremos del intervalo de la variable aleatoria estandarizada.

$$\begin{aligned}z &= \frac{x-\mu}{\sigma},\\ z_1 &= \frac{39.5-34}{5.31} = 1.04,\\ z_2 &= \frac{40.5-34}{5.31} = 1.22.\end{aligned}$$

Debido a que Z tiene distribución normal estándar, entonces de acuerdo con la tabla 4 del apéndice E

$$\begin{aligned}P(X=40) &\approx P(39.5 < X < 40.5),\\ &\approx P(1.04 < Z < 1.22),\\ &\approx F(1.22) - F(1.04),\\ &\approx 0.8888 - 0.8508,\\ &\approx 0.0380.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.10 *Un antibiótico determinado tiene una probabilidad de 0.07 de causar una reacción alérgica. Si 100 personas se someten a un tratamiento con este antibiótico, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 12 personas presenten reacciones alérgicas?*

Solución: La variable aleatoria X que cuenta el número de personas que muestran reacciones alérgicas al medicamento, es una variable aleatoria con distribución binomial. Se requiere determinar la probabilidad de que la variable aleatoria X esté entre 0 y 12; es decir, $P(X \leq 12)$. De manera exacta esta probabilidad está determinada por

$$P(X \leq 12) = \binom{100}{x} \sum_{x=0}^{12} (0.07)^x (0.93)^{50-x}$$

Si se usa la aproximación de la normal a la binomial, entonces se debe tener el cuidado de calcular $P(-0.5 < X < 12.5)$. De manera análoga que en el ejemplo anterior,

$$\begin{aligned}\mu &= np = 100(0.07) = 7,\\ \sigma &= \sqrt{npq} = \sqrt{100(0.03)(0.97)} = 2.55.\end{aligned}$$

Los extremos del intervalo de la variable aleatoria estandarizada son:

$$\begin{aligned}z &= \frac{x-\mu}{\sigma},\\ z_1 &= \frac{-0.5-7}{2.55} = -2.94,\\ z_2 &= \frac{12.5-7}{2.55} = 2.15.\end{aligned}$$

Se sabe que si Z tiene distribución normal estándar, entonces

$$\begin{aligned}P(-0.5 \leq X \leq 2.5) &= P(-2.94 < Z < 2.15),\\ &= F(2.15) - F(-2.94).\end{aligned}$$

De acuerdo con la tabla 4 del apéndice E,

$$\begin{aligned}P(-0.5 \leq X \leq 2.5) &= 0.9846 - 0.0016,\\ &= 0.9830.\end{aligned}$$

Finalmente, usando la aproximación de la normal a la binomial se concluye que,

$$\begin{aligned}P(X \leq 12) &\approx P(-0.5 \leq X \leq 2.5),\\ &\approx 0.9830.\end{aligned}$$

3.3. Teorema de Chebyshev

Teorema 3.3.1 (Teorema de Chebyshev) *Si X es una variable aleatoria discreta o continua con media μ y varianza σ^2, ambas finitas, entonces para todo $\epsilon > 0$ se satisface,*

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{3.81}$$

de manera equivalente para el evento complementario,

$$P(|X-\mu| < \epsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{3.82}$$

Si se sustituye $\epsilon = k\sigma$ en las desigualdades anteriores se obtienen dos formas equivalentes más de expresar el teorema de Chebyshev,

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \tag{3.83}$$

de manera equivalente para el evento complementario,

$$P(|X-\mu| < k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2} \tag{3.84}$$

Demostración: Se demostrará el teorema para el caso continuo.
Considérese una variable X con función de densidad $f(x)$. Para esta variable aleatoria su varianza está determinada por,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx. \tag{3.85}$$

La integral puede descomponerse en dos regiones como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx, \\
&= \int_{-\infty}^{\mu-\epsilon} (x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu-\epsilon}^{\mu+\epsilon} (x-\mu)^2 f(x)dx + \\
&\quad \int_{\mu+\epsilon}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx, \\
&= \int_{|X-\mu|<\epsilon} (x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{|X-\mu|\geq\epsilon} (X-\mu)^2 f(x)dx \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

Como consecuencia de que σ^2 es la suma de dos términos positivos, de acuerdo con la ecuación 3.86, entonces σ^2 es mayor o igual que cualquiera de los dos términos; por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &\geq \int_{|X-\mu|\geq\epsilon} (X-\mu)^2 f(x)dx, \\
&\geq \epsilon^2 \int_{|X-\mu|\geq\epsilon} f(x)dx, \\
&\geq \epsilon^2 P(|X-\mu| \geq \epsilon). \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

Reescribiendo la desigualdad expresada en 3.87 se obtiene,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 P(|X-\mu| \geq \epsilon) &\leq \sigma^2, \\ P(|X-\mu| \geq \epsilon) &\leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 3.3.1 *Si X es una variable aleatoria discreta o continua, entonces sin importar la distribución de la que se trate,*

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) > \frac{3}{4}. \tag{3.88}$$

Demostración: Sustituyendo $k=2$ en la desigualdad de Chebyshev expresada mediante la ecuación 3.84 se obtiene el resultado. Este resultado implica que en un ancho de 2σ alrededor de la media se concentra al menos el 75 % de los datos.

Ejemplo 3.3.1 *Considérese una variable aleatoria X con distribución exponencial y parámetro $\alpha = 2$; es decir, X tiene media, $\mu = \frac{1}{2}$ y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{4}$. Determine $P(|X-\mu| < 2\sigma)$ y compare el resultado con la cota inferior establecida mediante el teorema de Chebyshev.*

Solución: La función de densidad de la variable aleatoria X está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

La función de distribución acumulada se determina por,

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Se requiere calcular, $P(|X-\frac{1}{2}| > 1)$, de manera que,

$$\begin{aligned} P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right| < 1\right) &= P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right), \\ &= F(3/2) - F(-1/2), \end{aligned}$$

Evaluando se obtiene,

$$P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right| < 1\right) = F(3/2) = 1-e^{-\frac{3}{2}} = 0.7769.$$

Este resultado es acorde con el teorema de Chebyshev, o más específicamente, con el corolario que garantiza una cota inferior para la probabilidad de 0.75.

Apéndices

Apéndices A

Sobre la baraja inglesa

Entre los juegos de azar, aquellos en los que se reparten cartas son de los preferidos por los jugadores. En este trabajo el interés por las cartas se centra solo en los problemas que estos juegos plantean a las técnicas de conteo y a la probabilidad en sí misma. Por lo anterior, se pondrán algunos términos en contexto.
En general, una baraja consta de un conjunto de cartas (o naipes) de diferentes colores, figuras, números, e incluso letras. Existen dos tipos de barajas que son las más comunmente usadas: La baraja inglesa y la española. Solo se describirá la baraja inglesa: La baraja inglesa consta de cuatro clases diferentes de figuras, las cuales se conocen como palos: corazones, diamantes, tréboles y picas. Las figuras que aparecen en estas cartas tienen estas formas. Las cartas de los palos corazones y diamantes son de color rojo; mientras que las cartas de los palos tréboles y picas son de color negro. Cada palo contiene 13 cartas. Las primeras 9 de ellas están numeradas del 2 hasta el 10. Las 4 cartas restantes se conocen como figuras y se designan mediante letras: J(Jack-jota o sota), Q(Queen-reina), K(King-rey) y A(As), como se muestra en la figura A.1.

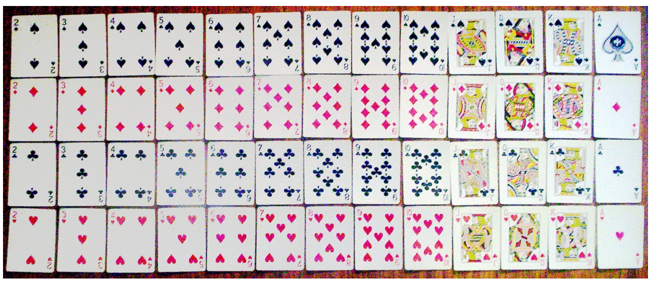


Figura A.1: Baraja inglesa

Los juegos más comunes con la baraja inglesa son: el *poker*, el *bridge* y la *canasta*. Solo se especificará aquí algunos términos propios del juego de **poker**.
En el juego de *poker* cada jugador recibe 5 cartas. Las cinco cartas que un jugador recibe se conocen como manos. Las más codiciadas, por su valor en el juego, son:
Escalera: Cinco cartas consecutivas, sin importar el palo de las mismas.
Escalera de color: Cinco cartas consecutivas del mismo palo.
Escalera real: La mejor mano posible en *poker*. Escalera desde el Diez al As, del mismo palo.

Estos datos son los que interesan para los objetivos de este trabajo.

Apéndices B

Distribución de Poisson

Conidérese las tres propiedades que definen el proceso de Poisson.

1. Los eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

2. La probabilidad de que un evento sencillo ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional a la magnitud del intervalo.

3. La probabilidad de que más de un evento sencillo ocurra en un intervalo pequeño de tiempo es despreciable.

Para deducir la función de probabilidad para una variable aleatoria de Poisson a partir del proceso de Poisson, considérese la siguiente notación:

$$P_0(t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_x(t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_0(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo } \Delta t$$

$$P_x(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo } \Delta t.$$

El interés se centra en determinar $P_x(\Delta t)$, a partir del proceso de Poisson, para tal fin, se comenzará por determinar $P_x(\Delta t)$ para los primeros valores de X y finalmente se propondrá la fórmula general que podrá ser probada mediante el método de inducción matemática.

i) Para X=0:
Considérese el siguiente esquema, el cual permite tener una imagen del proceso.

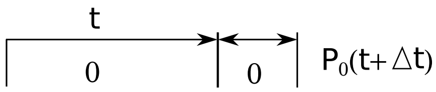


Figura B.1:

La probabilidad de ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo $t + \Delta t$ solo puede ocurrir de una manera: 0 eventos en t y 0 eventos en Δt. Como los intervalos t y Δt son disjuntos, entonces, de acuerdo con el punto 1, los eventos que en estos intervalos ocuren son independientes, por lo tanto

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t). \tag{B.1}$$

Por otro lado, los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios, ya que de acuerdo con el punto 3, la probabilidad de que más de un evento ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es cero, por lo anterior

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t). \tag{B.2}$$

Sustituyendo la ecuación B.2 en la ecuación B.1 se obtiene

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.3}$$

Ahora considérese el punto 2, el cual especifica que la probabilidad de un evento simple ocurra en Δt es proporcional a este intervalo pequeño. Sea λ la constante de proporcionalidad, entonces

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.4}$$

Sustituyendo la ecuación B.4 en la ecuación B.3 se obtiene

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda \Delta t). \tag{B.5}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t). \tag{B.6}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.6

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= -\lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\ \frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t). & \qquad \text{(B.7)}\end{aligned}$$

En este punto es necesario recurrir a los métodos de solución para ecuaciones diferenciales. La ecuación anterior es separable, de modo que,

$$\begin{aligned}\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} &= -\lambda t, \\ \ln P_0(t) &= -\lambda t + \ln c_0. \qquad \text{(B.8)}\end{aligned}$$

De la ecuación B.8 se obtiene

$$\begin{aligned}P_0(t) &= e^{-\lambda t + \ln c_0}, \\ &= e^{\ln c} e^{-\lambda t}, \\ &= c e^{-\lambda t}. \qquad \text{(B.9)}\end{aligned}$$

Finalmente, se evaluará $P_0(t)$ en $t = 0$ para determinar la constante c_0. Dado que la probabilidad de que ningún evento ocurra en $t = 0$ es el evento seguro, entonces

$$P_0(0) = c_0 = 1, \qquad \text{(B.10)}$$

de manera que

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \qquad \text{(B.11)}$$

ii)Para X=1

Considérese el esquema siguiente:

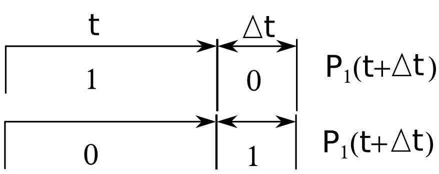


Figura B.2:

Existen dos eventos mutuamente excluyentes mediante los cuales se puede generar un evento en el intervalo de tiempo $t + \Delta t$. De acuerdo con el axioma 3 de la probabilidad y el punto 1 del proceso de Poisson se tiene

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_1(t). \qquad \text{(B.12)}$$

Como los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios (de acuerdo con el punto 3), entonces

$$P_0(\Delta t) = (1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.13}$$

Sustituyendo la ecuación B.13 en la ecuación B.12 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + (1 - P_1(\Delta t))P_1(t), \tag{B.14}$$

además, por el punto 2 se tiene que

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.15}$$

Sustituyendo la ecuación B.15 en la ecuación B.14 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = \lambda P_0(t)\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)P_1(t). \tag{B.16}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). \tag{B.17}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.17

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_1(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\ \frac{d}{dt} P_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). & \qquad \text{(B.18)} \end{aligned}$$

La ecuación B.18 representa una ecuación diferencial cuya solución se obtiene mediante el método conocido como: método del factor integrante, el cual consiste en hallar una función $u(t)$ tal que al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 por esta función, el lado izquierdo se convierta en

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right).$$

Para la acuación anterior se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lambda u(t)P_0(t) &= u(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + \lambda u(t)P_1(t), & \text{(B.19)} \\ &= u_1(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + P_1(t)\frac{d}{dt}\left(u(t)\right), & \text{(B.20)} \\ &= \frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right). & \text{(B.21)} \end{aligned}$$

Para que las tres ecuaciones anteriores sean consistentes, se debe satisfacer que:

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right) = \lambda u(t).$$

Esta ecuación es separable y su solución es:

$$u(t) = ce^{\lambda t}.$$

Considérese la constante $c = 1$, ya que para cualquier $c \neq 0$ su valor específico es irrelevante, ya que, al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 ésta se anula por todas partes. De manera que

$$u(t) = e^{\lambda t}. \tag{B.22}$$

Sustituyendo B.22 en la ecuación B.21 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_0(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \tag{B.23}$$

donde $P_0(t)$ es la función que se determinó en el inciso i. Sustituyendo $P_0(t)$ en la ecuación B.23 se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \\ \lambda &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right). \end{aligned} \tag{B.24}$$

Integrando la ecuación B.24 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \lambda t + c_1,$$

de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t}$$

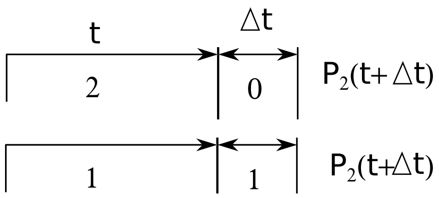
Finalmente evaluando en $t = 0$ se obtiene, el evento imposible $P_1(0) = 0$, lo que permite concluir que $c_1 = 0$, de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t)e^{-\lambda t}. \tag{B.25}$$

iii) Para X=2

Nuevamente, se tienen dos eventos mutuamente excluyentes que generan dos eventos en el intervalo $t + \Delta t$, como se muestra en el siguiente esquema. De la misma manera como se procedió en los incisos anteriores se obtiene para este caso:

$$P_2(t + \Delta t) = P_1(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_2(t). \tag{B.26}$$



Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos anteriores se obtiene

$$P_2(t+\Delta t) = \lambda P_1(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_2(t). \tag{B.27}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). \tag{B.28}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.28

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_2(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_1(t), \\ \frac{d}{dt} P_2(t) + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). & \qquad \text{(B.29)} \end{aligned}$$

Al aplicar el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$P_2(t) = \left(\frac{(\lambda t)^2}{2} + c_2\right) e^{-\lambda t}.$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$ se obtiene el evento imposible $P_2(0) = 0$, lo que permite concluir que $c_2 = 0$, de manera que

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}. \tag{B.30}$$

iv) Para X=x
A partir de los resultados anteriores resulta razonable proponer la siguiente expresión general para la distribución de Poisson.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{B.31}$$

Para terminar este apartado, se probará validez de la ecuación B.31 mediante el método de inducción matemática.

a) Evaluando la fórmula para x=0, se obtiene

$$f(0) = e^{-\lambda t}, \tag{B.32}$$

lo que coincide con $P_0(t)$ dado por la ecuación B.11.

b) Supóngase que la fórmula es válida para el entero $x \geq 0$; es decir

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.33}$$

c) Demuéstrese que la fórmula dada es válida para x+1.
Una vez más, considérese el siguiente esquema. Nuevamente, se tienen dos

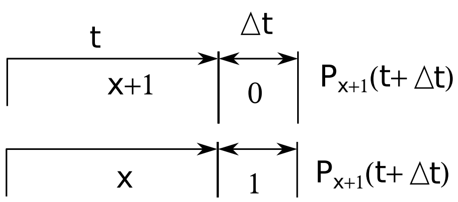


Figura B.3:

eventos mutuamente excluyentes que generan 2 eventos en el intervalo $t+\Delta t$, manera que

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = P_x(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.34}$$

Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos i) y ii) de la primera parte,

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = \lambda P_x(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.35}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_x(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). \tag{B.36}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.36

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{x+1}(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_{x+1}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_x(t), \\ \frac{d}{dt}P_{x+1}(t) + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). & \quad \text{(B.37)} \end{aligned}$$

Mediante el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt}(u(t)P_{x+1}(t)) = \lambda u(t)P_x(t). \tag{B.38}$$

Al sustituir $u(t) = e^{\lambda t}$ y la ecuación B.33 en la ecuación B.38 se obtiene

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_{x+1}(t)) = \frac{\lambda(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.39}$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} P_{x+1}(t) &= \left(\frac{\lambda^{x+1}t^{x+1}}{(x+1)x!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}, \\ &= \left(\frac{(\lambda t)^{x+1}}{(x+1)!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{B.40}$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$ se obtiene el evento imposible $P_{x+1}(0) = 0$, lo cual permite concluir que $c_{x+1} = 0$, de manera que

$$P_{x+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{x+1}e^{-\lambda t}}{(x+1)!}. \tag{B.41}$$

Se observa que la ecuación B.41 coincide con lo que la fórmula B.31 genera al evaluarla en $x + 1$, por lo tanto, la fórmula general queda demostrada.

Apéndices C

Cálculo de las integrales usadas

C.1. Integral para la normal estándar

Verifique que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Sea

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx = \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

entonces,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right), \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy. \end{aligned}$$

Para continuar se hace un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta, &\qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ y = r\operatorname{sen}\theta, &\qquad 0 \leq r < \infty. \end{aligned}$$

El jacobiano correspondiente es

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}, \\ &= r. \end{aligned}$$

Considerando lo anterior,

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy, \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\theta dr, \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr, \\
&= -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^b = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, extrayendo la raíz cuadrada se obtiene

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C.2. Integral para la distribución gama

Verifique que

$$I = \frac{1}{(r-1)!}\int_{\mu}^{\infty} u^{r-1} e^{-u} du = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}.$$

Multiplicando por $(r-1)!$ se obtiene,

$$I^* = (r-1)! I = \int_{\mu}^{\infty} u^{r-1} e^{-u} du$$

Se procede mediante el método de integración por partes:
Si

$$w = u^{r-1} \quad \text{y} \quad dz = e^{-u} du,$$

entonces

$$dw = (r-1)u^{(r-2)} du \quad \text{y} \quad z = -e^{-u}$$

El método de integración por partes nos conduce a

$$\begin{aligned}
I^* &= -\, u^{r-1} e^{-u}\Big|_{\mu}^{\infty} + (r-1)\int_{\mu}^{\infty} u^{r-2} e^{-u} du, \\
&= e^{-\mu}\mu^{r-1} + (r-1)\int_{\mu}^{\infty} u^{r-2} e^{-u} du,
\end{aligned}$$

La última integral es del tipo inicial, de manera que integrando por partes $(r-1)$ veces se obtiene el último término, ya que r es un entero; por lo tanto,

$$(r-1)(r-2)\ldots 1\int_{\mu}^{\infty} e^{-u}du = (r-1)!e^{-\mu}$$

Por lo anterior,

$$I^* = e^{-\mu}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \ldots + (r-1)!\right).$$

Finalmente, al dividir entre $(n-1)!$ obtiene I.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{I^*}{(r-1)!} \\
&= \frac{e^{-\mu}}{(r-1)!}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \ldots + (r-1)!\right), \\
&= e^{-\mu}\left(\frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{\mu^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots + 1\right), \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Apéndices D

Las distribuciones t y F

D.1. La distribución t de Student

Teorema D.1.1 *Sea (Z,V) una variable aleatoria bidimensional, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, mientras que V es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrada (con n grados de libertad). Supóngase que la función de densidad conjunta de Z y V está determinada por*[1]

$$f(z,v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} v^{n/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & -\infty < z < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.1}$$

Si T es una variable aleatoria que se define en términos de Z y V mediante

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}, \tag{D.2}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria T está determinada por

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{D.3}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario **??** se definen,

$$\begin{aligned} t &= \frac{Z}{\sqrt{\frac{v}{n}}} = \phi_1(z,v), \quad -\infty < z < \infty, \\ u &= v = \phi_2(z,v), \qquad 0 < v < \infty. \end{aligned} \tag{D.4}$$

[1]Esto significa que Z y V son variables aleatorias independientes.

La aplicación anterior asigna a cada pareja ordenada (z, v) en el intervalo especificado, una y solo una pareja (t, u) en el intervalo, $-\infty < z < \infty$ y $0 < v < \infty$. También se satisface que a cada pareja ordenada (t, u) en el intervalo, $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$ le corresponde una y solo una pareja ordenada (z, v) en el intervalo $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$. Lo anterior significa que la aplicación es invertible y la aplicación inversa es:

$$\begin{array}{ll} z = \sqrt{\frac{v}{n}}t = \psi_1(t, v), & -\infty < z < \infty, \\ v = u = \psi_2(t, v), & \quad 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.5}$$

De acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} J &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t, u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_1(t, u) \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi_2(t, u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_2(t, u) \end{array} \right|, \\ &= \left| \begin{array}{cc} \sqrt{\frac{u}{n}} & \frac{1}{2}\frac{T}{\sqrt{nu}} \\ 0 & 1 \end{array} \right|, \\ &= \sqrt{\frac{u}{n}}. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables T y U se determina de acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} g(t, u) &= f(\psi_1(t, u), \psi_2(t, u))|J|, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{ut^2}{2n}} e^{-\frac{u}{2}} \left(\sqrt{\frac{u}{n}}\right), \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{n/2-1/2} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}. \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(t, u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, & -\infty < t < \infty, \\ & \quad 0 < u < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.6}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T corresponde a la marginal de T que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(t, u)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{-\infty} g(t, u)du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})} du, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $w = ku$ donde $k = \frac{1}{2}(1 + \frac{t^2}{n})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} (\frac{w}{k})^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-w} \frac{1}{k} dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} \int_0^\infty w^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-w} dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} \Gamma(\frac{n+1}{2}), \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} (\frac{1}{k})^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T se expresa como,

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.7}$$

En la figura D.1 se muestran las gráficas de $g(t)$ para los valores $n = 2$ y $n = 5$. En ésta se ha denotado a la normal estándar como $n = \infty$. A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución t de Student.

1. Es simétrica respecto a la recta $y = 0$.

2. Su media es cero.

3. Su varianza es,
$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

4. La distribución t de Student tiende a la distribución normal cuando n tiende a infinito.

5. $t_{1-p} = -t_p$

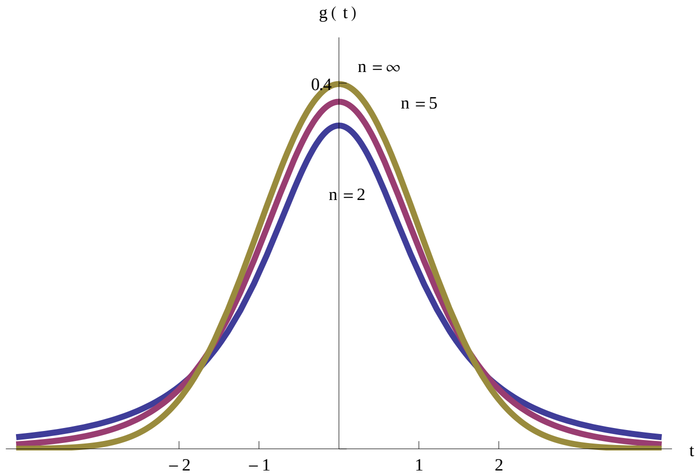


Figura D.1: La distribución t de Student

D.2. La distribución F

Teorema D.2.1 *Sea (U, V) una variable aleatoria bidimensional, donde U y V son variables aleatorias con distribución gama cada una con n y m grados de libertad, respectivamente. Supóngase que la función de densidad conjunta de U y V está determinada por*[2]

$$h(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} v^{m/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & 0 < u < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.8}$$

Si F es una variable aleatoria que se define en términos de U y V mediante

$$F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}, \tag{D.9}$$

entonces la función de densidad $g(f)$ de la variable aleatoria F está determinada por

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.10}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario **??**

$$\begin{aligned} f &= \frac{\frac{u}{n}}{\frac{v}{m}} = \phi_1(u,v), \quad 0 < u < \infty, \\ w &= v = \phi_2(u,v), \quad 0 < v < \infty. \end{aligned} \tag{D.11}$$

[2]Esto corresponde a la hipótesis de independencia entre U y V.

Las funciones inversas son:

$$\begin{array}{ll} u = \frac{nwf}{m} = \psi_1(f,w), & -\infty < z < \infty, \\ v = w = \psi_2(t,v), & 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.12}$$

De acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} J &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial f}\psi_1(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_1(f,w) \\ \frac{\partial}{\partial f}\psi_2(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_2(f,w) \end{array} \right|, \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{n}{m}w & \frac{n}{m}f \\ 0 & 1 \end{array} \right|, \\ &= \frac{n}{m}w. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables F y W se determina de acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} g(f,w) &= f(\psi_1(f,w),\psi_2(f,w))|J|, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{nwf}{2m}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}}\left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{nwf}{2m}}e^{-\frac{w}{2}}\left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right), \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(f,w) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right), & 0 < f < \infty, \\ & 0 < w < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.13}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F corresponde a la marginal que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(f,w)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(f) &= \int_0^{-\infty} g(f,w)du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right)dw, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $z = kw$ donde $k = \frac{1}{2}(1 + \frac{nf}{m})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(f) &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \int_0^\infty \left(\frac{nfz}{km}\right)^{n/2-1} \left(\frac{z}{k}\right)^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{mk}\right) \frac{1}{k} dz, \\
&= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty \left(\frac{nfz}{m}\right)^{n/2-1} z^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{m}\right) dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty (fz)^{n/2-1} z^{m/2-1} e^{-z} z dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty z^{n/2-1} z^{m/2-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty z^{\frac{n+m}{2}-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}}, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}},
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F se expresa como,

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.14}$$

La función $g(f)$ no solo depende de los valores de sus parámetro n y m, sino que también depende del orden en que éstos se tomen. Por lo anterior, es necesario tener presente que n se definió como los grados de libertad de la variable U, que corresponde al numerador en la ecuación **??**. De la misma manera, m se definió como los grados de libertad de la variable aleatoria V, que corresponde al denominador en la ecuación **??**.
En la figura D.2 se muestran las gráficas de $g(f)$ para las parejas de valores $(n, m) = (6, 10)$ y $(n, m) = (6, 30)$

A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución F.

1. Tiene un único máximo en
$$\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{m}{m+2}\right) \quad n > 2.$$

2. Su media es
$$E(F) = \frac{m}{m-2} \quad m > 2.$$

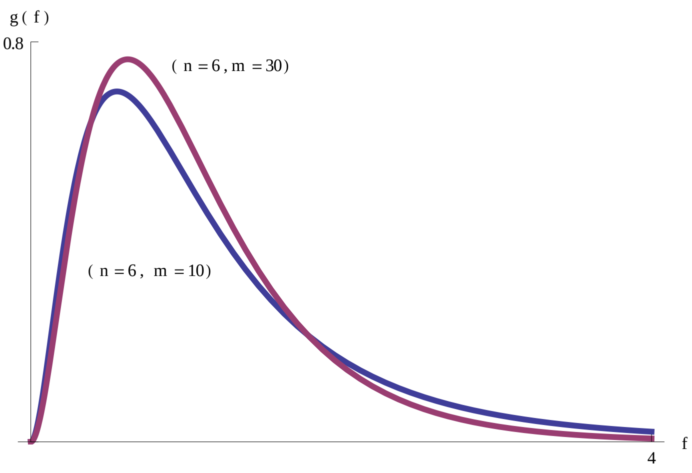


Figura D.2: La distribución F

3. Su varianza es,

$$\sigma^2 = \frac{m^2(2m+2n-4)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad m > 4.$$

4.

Teorema D.2.2 *Demuestre la validez de la propiedad* $F_{1-p,n,m} = \frac{1}{F_{p,m,n}}$.

Demostración: Considérese que F se define de acuerdo con la ecuación D.9, se ha probado que F tiene distribución dada por la ecuación D.14. Si ahora se define la variable aleatoria $F' = 1/F$, entoces

$$F' = \frac{1}{F} = \frac{\frac{V}{m}}{\frac{U}{n}} \tag{D.15}$$

La variable aleatoria F' tiene distribución F con m y n grados de libertad. Nótese que los indíces, están invertido. Ahora considérense los cuantiles, denotados por $1-\alpha$, para F, donde $\alpha > 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
P(F \leq f_{1-\alpha}(n,m)) &= 1-\alpha, \\
P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= 1-\alpha, \\
P\left(\frac{1}{F} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha, \\
P\left(F' \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha \qquad \text{(D.16)}
\end{aligned}$$

Por otro lado, los cuantiles α de F', están dados por,

$$P(F' \leq f'_\alpha(m,n)) = \alpha, \quad \alpha > 0. \tag{D.17}$$

Como las escuaciones D.16 y D.17 son equivalentes, entonces

$$f'_\alpha(m,n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)} \quad \blacksquare \tag{D.18}$$

Apéndices E

Tablas de las distribuciones

TABLAS ESTADÍSTICAS.

Tabla 1

Función de Distribución Binomial

		P										
n	***X***	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
2	**0**	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	**0**	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	**0**	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	**0**	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	**0**	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9985	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	1.0000	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	1.0000	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	**0**	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9980	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	1.0000	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	1.0000	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	**0**	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9973	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9999	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	1.0000	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9966	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9999	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	1.0000	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461

							P					
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	**6**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	**0**	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9957	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9999	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	1.0000	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	1.0000	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	**0**	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.9948	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9998	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	1.0000	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	1.0000	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	**0**	0.8864	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.9938	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9998	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	1.0000	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	1.0000	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1.0000	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	**0**	0.8775	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.9928	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9997	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	1.0000	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	1.0000	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1.0000	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

						P						
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
14	**0**	0.8687	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.9916	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9997	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	1.0000	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	1.0000	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	**0**	0.8601	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9904	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9996	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	1.0000	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	1.0000	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	1.0000	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	**0**	0.8515	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.9891	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003
	2	03.9995	0.9571	0.7893	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021
	3	1.0000	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106
	4	1.0000	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384
	5	1.0000	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051
	6	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	**0**	0.8429	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.9877	0.7922	0.48l8	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001
	2	0.9994	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012
	3	1.0000	0.9912	0.9l74	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064
	4	1.0000	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245
	5	1.0000	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717
	6	1.0000	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662

						P						
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
17	**7**	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936
	14	1,0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	**0**	0.8345	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9862	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001
	2	0.9993	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007
	3	1.0000	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038
	4	1.0000	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154
	5	1.0000	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481
	6	1.0000	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9916	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	**0**	0.8262	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9847	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.9991	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004
	3	1.0000	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022
	4	1.0000	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096
	5	1.0000	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318
	6	1.0000	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	**0**	0.8179	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9831	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9990	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	1.0000	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
	4	1.0000	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059

n	*X*	*P* 0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
20	**5**	1.0000	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
	6	1.0000	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
	7	1.0000	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	**0**	0.7778	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9742	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9980	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.9999	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
	4	1.0000	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
	5	1.0000	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
	6	1.0000	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
	7	1.0000	1.0000	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 2

Función de Distribución de Poisson

l

X	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4338	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.988!
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

					l					
X	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	.0.2650
4	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6664	0.6510	0.6335	0.6160
6	0.8787	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767	0.7622
7	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9050	0.8960	0.8867	0.8769	0.8666
8	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382	0.9319
9	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717	0.9682
10	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880	0.9863
11	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953	0.9945
12	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980
13	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**5.7**	**5.8**	**5.9**	**6.0**
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0-0030	0.0027	0.0025
1	0.0372	0.0342	0.0314	0.0289	0.0266	0.0244	0.0224	0.0206	0.0189	0.0174
2	0.1165	0.1088	0.1016	0.0948	0.0884	0.0824	0.07&8	0.0715	0.0666	0.0620
3	0.2513	0.2381	0.2254	0.2133	0.2017	0.1906	0.1801	0.1700	0.1604	0.1512
4	0.4231	0.4061	0.3895	0.3733	0.3575	0.3422	0.3272	0.3127	0.2987	0.2&51
5	0.5984	0.5809	0.5635	0.5461	0.5289	0.5119	0.4950	0.4783	0.4619	0.4457
6	0.7474	0.7324	0.7171	0.7017	0.6860	0.6703	0.6544	0.6384	0.6224	0.6063
7	0.8560	0.8449	0.8335	0.8217	0.8095	0.7970	0.7842	0.7710	0.7576	0.7440
8	0.9252	0.9181	0.9106	0.9027	0.8944	0.8857	0.8766	0.8672	0.8574	0.8472
9	0.9644	0.9603	0.9559	0.9512	0.9462	0.9409	0.9352	0.9292	0.9228	0.9161
10	0.9844	0.9823	0.9800	0.9775	0.9747	0.9718	0.9686	0.9651	0.9614	0.9574
11	0.9937	0.9927	0.9916	0.9904	0.9890	0.9875	0.9859	0.9841	0.9821	0.9799
12	0.9976	0.9972	0.9967	0.9962	0.9955	0.9949	0.9941	0.9932	0.9922	0.9912
13	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980	0.9977	0.9973	0.9969	0.9964
14	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9990	0.9988	0.9986
15	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

X	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**	**6.6**	**6.7**	**6.8**	**6.9**	**7.0**
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0159	0.0146	0.0134	0.0123	0.0113	0.0103	0.0095	0.0087	0.0080	0.0073
2	0.0577	0.0536	0.0498	0.0463	0.0430	0.0400	0.0371	0.0344	0.0320	0.0296
3	0.1425	0.1342	0.1264	0.1189	0.1119	0.1052	0.0988	0.0928	0.0871	0.0818
4	0.2719	0.2592	0.2469	0.2351	0.2237	0.2127	0.2022	0.1920	0.1823	0.1730
5	0.4298	0.4141	0.3988	0.3837	0.3690	0.3547	0.3407	0.3270	0.3137	0.3007
6	0.5902	0.5742	0.5582	0.5423	0.5265	0.5108	0.4953	0.4799	0.4647	0.4497
7	0.7301	0.7160	0.7018	0.6873	0.6728	0.6581	0.6433	0.6285	0.6136	0.5987
8	0.8367	0.8259	0.8148	0.8033	0.7916	0.7796	0.7673	0.7548	0.7420	0.7291
9	0.9090	0.9016	0.8939	0.8858	0.8774	0.8686	0.8596	0.8502	0.8405	0.8305
10	0.9531	0.9486	0.9437	0.9386	0.9332	0.9274	0.9214	0.9151	0.9084	0.9015
11	0.9776	0.9750	0.9723	0.9693	0.9661	0.9627	0.9591	0.9552	0.9510	0.9467
12	0.9900	0.9887	0.9873	0.9857	0.9840	0.9821	0.9801	0.9779	0.9755	0.9730
13	0.9958	0.9952	0.9945	0.9937	0.9929	0.9920	0.9909	0.9898	0.9885	0.9872
14	0.9984	0.9981	0.9978	0.9974	0.9970	0.9966	0.9961	0.9956	0.9950	0.9943
15	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9984	0.9982	0.9979	0.9976
16	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990
17	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1 0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

					l					
X	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**7.5**	**7.6**	**7.7**	**7.8**	**7.9**	**8.0**
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0067	0.0061	0.0056	0.0051	0.0047	0.0043	0.0039	0.0036	0.0033	0.0030
2	0.0275	0.0255	0.0236	0.0219	0.0203	0.0188	0.0174	0.0161	0.0149	0.0138
3	0.0767	0.0719	0.0674	0.0632	0.0591	0.0554	0.0518	0.0485	0.0453	0.0424
4	0.1641	0.1555	0.1473	0.1395	0.1321	0.1249	0.1181	0.1117	0.1055	0.0996
5	0.2881	0.2759	0.2640	0.2526	0.2414	0.2307	0.2203	0.2103	0.2006	0.1912
6	0.4349	0.4204	0.4060	0.3920	0.3782	0.3646	0.3514	0.3384	0.3257	0.3134
7	0.5838	0.5689	0.5541	0.5393	0.5246	0.5100	0.4956	0.4812	0.4670	0.4530
8	0.7160	0.7027	0.6892	0.6757	0.6620	0.6482	0.6343	0.6204	0.6065	0.5926
9	0.8202	0.8097	0.7988	0.7877	0.7764	0.7649	0.7531	0.7411	0.7290	0.7166
10	0.8942	0.8867	0.8788	0.8707	0.8622	0.8535	0.8445	0.8352	0.8257	0.8159
11	0.9420	0.9371	0.9319	0.9265	0.9208	0.9148	0.9085	0.9020	0.8952	0.8881
12	0.9703	0.9673	0.9642	0.9609	0.9573	0.9536	0.9496	0.9454	0.9409	0.9362
13	0.9857	0.9841	0.9824	0.9805	0.9784	0.9762	0.9739	0.9714	0.9687	0.9658
14	0.9935	0.9927	0.9918	0.9908	0.9897	0.9886	0.9873	0.9859	0.9844	0.9827
15	0.9972	0.9969	0.9964	0.9959	0.9954	0.9948	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918
16	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9974	0.9971	0.9967	0.9963
17	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989	0.9988	0.9986	0.9984
18	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
19	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0028	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0018	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012
2	0.0127	0.0118	0.0109	0.0100	0.0093	0.0086	0.0079	0.0073	0.0068	0.0062
3	0.0396	0.0370	0.0346	0.0323	0.0301	0.0281	0.0262	0.0244	0.0228	0.0212
4	0.0941	0.0887	0.0837	0.0789	0.0744	0.0701	0.0660	0.0621	0.0584	0.0550
5	0.1823	0.1736	0.1653	0.1573	0.1496	0.1422	0.1352	0.1284	0.1219	0.1157
6	0.3013	0.2896	0.2781	0.2670	0.2562	0.2457	0.2355	0.2256	0.2160	0.2068
7	0.4391	0.4254	0.4119	0.3987	0.3856	0.3728	0.3602	0.3478	0.3357	0.3239
8	0.5786	0.5647	0.5508	0.5369	0.5231	0.5094	0.4958	0.4823	0.4689	0.4557
9	0.7041	0.6915	0.6788	0.6659	0.6530	0.6400	0.6269	0.6137	0.6006	0.5874
10	0.8058	0.7956	0.7850	0.7743	0.7634	0.7522	0.7409	0.7294	0.7178	0.7060
11	0.8807	0.8731	0.8652	0.8571	0.8487	0.8400	0.8311	0.8220	0.8126	0.8030
12	0.9313	0.9261	0.9207	0.9150	0.9091	0.9029	0.8965	0.8898	0.8829	0.8758
13	0.9628	0.9595	0.9561	0.9524	0.9486	0.9445	0.9403	0.9358	0.9311	0.9262
14	0.9810	0.9791	0.9771	0.9749	0.9726	0.9701	0.9675	0.9647	0.9617	0.9585
15	0.9908	0.9898	0.9887	0.9875	0.9862	0.9848	0.9832	0.9816	0.9798	0.9780
16	0.9958	0.9953	0.9947	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918	0.9909	0.9899	0.9889
17	0.9982	0.9979	0.9977	0.9973	0.9970	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947
18	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9981	0.9978	0.9976
19	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989
20	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996
21	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

					l					
X	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**	**9.5**	**9.6**	**9.7**	**9.8**	**9.9**	**10.0**
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0011	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005
2	0.0058	0.0053	0.0049	0.0045	0.0042	0.0038	0.0035	0.0033	0.0030	0.0028
3	0.0198	0.0184	0.0172	0.0160	0.0149	0.0138	0.0129	0.0120	0.0111	0.0103
4	0.0517	0.0486	0.0456	0.0429	0.0403	0.0378	0.0355	0.0333	0.0312	0.0293
5	0.1098	0.1041	0.0987	0.0935	0.0885	0.0838	0.0793	0.0750	0.0710	0.0671
6	0.1978	0.1892	0.1808	0.1727	0.1650	0.1575	0.1502	0.1433	0.1366	0.1301
7	0.3123	0.3010	0.2900	0.2792	0.2687	0.2584	0.2485	0.2388	0.2294	0.2202
8	0.4426	0.4296	0.4168	0.4042	0.3918	0.3796	0.3676	0.3558	0.3442	0.3328
9	0.5742	0.5611	0.5480	0.5349	0.5218	0.5089	0.4960	0.4832	0.4705	0.4579
10	0.6941	0.6820	0.6699	0.6576	0.6453	0.6330	0.6205	0.6081	0.5956	0.5830
11	0.7932	0.7832	0.7730	0.7626	0.7570	0.7412	0.7303	0.7193	0.7081	0.6968
12	0.8684	0.8607	0.8529	0.8448	0.8364	0.8279	0.8191	0.8101	0.8009	0.7916
13	0.9210	0.9156	0.9100	0.9042	0.8981	0.8919	0.8853	0.8786	0.8716	0.8645
14	0.9552	0.9517	0.9480	0.9441	0.9400	0.9357	0.9312	0.9265	0.9216	0.9165
15	0.9760	0.9738	0.9715	0.9691	0.9665	0.9638	0.9609	0.9579	0.9546	0.9513
16	0.9878	0.9865	0.9852	0.9838	0.9823	0.9806	0.9789	0.9770	0.9751	0.9730
17	0.9941	0.9934	0.9927	0.9919	0.9911	0.9902	0.9892	0.9881	0.9870	0.9857
18	0.9973	0.9969	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947	0.9941	0.9935	0.9928
19	0.9988	0.9986	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9975	0.9972	0.9969	0.9965
20	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9986	0.9984
21	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993
22	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**	**19.0**	**20.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0-3715	0.2867	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437
22	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9S94	0.9317	0.8933	0.&432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878
26	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9?05	0.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882	0.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930	0.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960	0.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

Tabla 3

Función de Distribución y de Probabilidad Hipergeométrica.

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
2	1	1	0	0.500000	0.500000
2	1	1	1	1.000000	0.500000
3	1	1	0	0.666667	0.666667
3	1	1	1	1.000000	0.333333
3	2	1	0	0.333333	0.333333
3	2	1	1	1.000000	0.666667
3	2	2	1	0.666667	0.666667
3	2	2	2	1.000000	0.333333
4	1	1	0	0.750000	0.760000
4	1	1	1	1.000000	0.250000
4	2	1	0	0.500000	0.500000
4	2	1	1	1.000000	0.500000
4	2	2	0	0.166667	0.166667
4	2	2	1	0.833333	0.666667
4	2	2	2	1.000000	0.166667
4	3	1	0	0.250000	0.250000
4	3	1	1	1.000000	0.750000
4	3	2	1	0.500000	0.500000
4	3	2	2	1.000000	0.500000
4	3	3	2	0.750000	0.750000
4	3	3	3	1.000000	0.250000
5	1	1	0	0.800000	0.800000
5	1	1	1	1.000000	0.200000
5	2	1	0	0.600000	0.600000
5	2	1	1	1.000000	0.400000
5	2	2	0	0.300000	0.300000
5	2	2	1	0.900000	0.600000
5	2	2	2	1.000000	0.100000
5	3	1	0	0.400000	0.400000
5	3	1	1	1.000000	0.600000
5	3	2	0	0.100000	0.100000
5	3	2	1	0.700000	0.600000
5	3	2	2	1.000000	0.300000
5	3	3	1	0.300000	0.300000
5	3	3	2	0.900000	0.600000
5	3	3	3	1.000000	0.100000
5	4	1	0	0.200000	0.200000
5	4	1	1	1.000000	0.800000
5	4	2	1	0.400000	0.400000
5	4	2	2	0.000000	0.600000
5	4	3	2	0.600000	0.600000
5	4	3	3	1.000000	0.400000
5	4	4	3	0.800000	0.800000
5	4	4	4	1.000000	0.200000
6	1	1	0	0.833333	0.833333
6	1	1	1	1.000000	0.166667
6	2	1	0	0.666667	0.666667
6	2	1	1	1.000000	0.333333
6	2	2	0	0.400000	0.400000
6	2	2	1	0.933333	0.533333
6	2	2	2	1.000000	0.066667
6	3	1	0	0.500000	0.500000
6	3	1	1	1.000000	0.500000
6	3	2	0	0.200000	0.200000
6	3	2	1	0.800000	0.600000
6	3	2	2	1.000000	0.200000
6	3	3	0	0.050000	0.050000
6	3	3	1	0.500000	0.450000
6	3	3	2	0.950000	0.450000
6	3	3	3	1.000000	0.050000
6	4	1	0	0.333333	0.333333
6	4	1	1	1.000000	0.666667
6	4	2	0	0.066667	0.066667
6	4	2	1	0.600000	0.533333
6	4	2	2	1.000000	0.400000
6	4	3	1	0.200000	0.200000
6	4	3	2	0.800000	0.600000
6	4	3	3	1.000000	0.200000
6	4	4	2	0.400000	0.400000
6	4	4	3	0.933333	0.533333
6	4	4	4	1.000000	0.066667
6	5	1	0	0.166667	0.166667
6	5	1	1	1.000000	0.833333
6	5	2	I	0.333333	0.333333
6	5	2	2	1.000000	0.666667
6	5	3	2	0.500000	0.500000
6	5	3	3	1.000000	0.500000
6	5	4	3	0.666667	0.666667
6	5	4	4	1.000000	0.333333
6	5	5	4	0.833333	0.833333
6	5	5	5	1.000000	0.166667
7	1	1	0	0.857143	0.857143
7	1	1	1	1.000000	0.142857
7	2	1	0	0.714286	0.714286
7	2	1	1	1.000000	0.285714
7	2	2	0	0.476190	0.476190
7	2	2	1	0.952381	0.476190
7	2	2	2	1.000000	0.047619
7	3	1	0	0.571429	0.571429
7	3	1	1	1.000000	0.428571
7	3	2	0	0.285714	0.285714
7	3	2	1	0.857143	0.571429
7	3	2	2	1.000000	0.142857
7	3	3	0	0.114286	0.114286
7	3	3	1	0.628571	0.514286
7	3	3	2	0.971428	0.342857
7	3	3	3	1.000000	0.028571
7	4	1	0	0.428571	0.428571
7	4	1	1	1.000000	0.571429
7	4	2	0	0.142857	0.142857
7	4	2	1	0.714286	0.571429
7	4	2	2	1.000000	0.285714
7	4	3	0	0.025571	0.028571
7	4	3	1	0.371429	0.342857
7	4	3	2	0.885714	0.514286
7	4	3	3	1.000000	0.114286
7	4	4	1	0.114286	0.114286
7	4	4	2	0.628571	0.514286

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
7	4	4	3	0.971428	0342857
7	4	4	4	1.000000	0.028571
7	5	1	0	0.285714	0.285714
7	5	1	1	1.000000	0.714286
7	5	2	0	0.047619	0.047619
7	5	2	1	0.523809	0.476190
7	5	2	2	1.000000	0.476190
7	5	3	1	0.142857	0.142857
7	5	3	2	0.714286	0.571429
7	5	3	3	1.000000	0.285714
7	5	4	2	0.285714	0.285714
7	5	4	3	0.857143	0.571429
7	5	4	4	1.000000	0.142857
7	5	5	3	0.476190	0.476190
7	5	5	4	0.952381	0.476190
7	5	5	5	1.000000	0.047619
7	6	1	0	0.142857	0.142857
7	6	1	1	1.000000	0.857143
7	6	2	1	0.285714	0.285714
7	6	2	2	1.000000	0.714286
7	6	3	2	0.428571	0.428571
7	6	3	3	1.000000	0.571429
7	6	4	3	0.571429	0.571429
7	6	4	4	1.000000	0.428571
7	6	5	4	0.714286	0.714286
7	6	5	5	1.000000	0.285714
7	6	6	5	0.857143	0.857143
7	6	6	6	1.000000	0.142857
8	1	1	0	0.875000	0.875000
8	1	1	1	1.000000	0.125000
8	2	1	0	0.750000	0.750000
8	2	1	1	1.000000	0.250000
8	2	2	0	0.535714	0.535714
8	2	2	1	0.964286	0.428571
8	2	2	2	1.000000	0.035714
8	3	1	0	0.625000	0.625000
8	3	1	1	1.000000	0.375000
8	3	2	0	0.357143	0.357143
8	3	2	1	0.892857	0.535714
8	3	2	2	1.000000	0.107143
8	3	3	0	0.178571	0.178571
8	3	1	1	0.714286	0.535714
8	3	3	2	0.982143	0.267857
8	3	3	3	1.000000	0.017857
8	4	1	0	0.500000	0.500000
8	4	1	1	1.000000	0.500000
8	4	2	0	0.214286	0.214286
8	4	2	1	0.785714	0.571429
8	4	2	2	1.000000	0.214286
8	4	3	0	0.071429	0.071429
8	4	3	1	0.500000	0.428571
8	4	3	2	0.928571	0.428571
8	4	3	3	1.000000	0.071429
8	4	4	0	0.014286	0.014286
8	4	4	1	0.242857	0.228571
8	4	4	2	0.757143	0.5142S6
8	4	4	3	0.985714	0.228571
8	4	4	4	1.000000	0.014286
8	5	1	0	0.375000	0.375000

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
8	5	1	1	1.000000	0.625000
8	5	2	0	0.107143	0.107143
8	5	2	1	0.642857	0.5357Í4
8	5	2	2	1.000000	0.357143
8	5	3	0	0.017857	0.017857
8	5	3	1	0.285714	0.267857
8	5	3	2	0.821429	0.535714
8	5	3	3	1.000000	0.178571
8	5	4	1	0.071429	0.071429
8	5	4	2	0.500000	0.428571
8	5	4	3	0.928571	0.428571
8	5	4	4	1.000000	0.071429
8	5	5	2	0.178571	0.178571
8	5	5	3	0.714286	0.535714
8	5	5	4	0.982143	0:267857
8	5	5	5	1.000000	0.017857
8	6	1	0	0.250000	0.250000
8	6	1	1	1.000000	0.750000
8	6	2	0	0.035714	0.035714
8	6	2	1	0.464286	0.428571
8	6	2	2	1.000000	0.535714
8	6	3	1	0.107143	0.107143
8	6	3	2	0.642857	0.535714
8	6	3	3	1.000000	0.357143
8	6	4	2	0.214286	0.214286
8	6	4	3	0.785714	0.571429
8	6	4	4	1.000000	0.214286
8	6	5	3	0.357143	0.357143
8	6	5	4	0.892857	0.535714
8	6	5	5	1.000000	0.107143
8	6	6	4	0.535714	0.535714
8	6	6	5	0.964286	0.428571
8	6	6	6	1.000000	0.035714
8	7	1	0	0.125000	0.125000
8	7	1	1	1.000000	0.875000
8	7	2	1	0.250000	0.250000
8	7	2	2	1.000000	0.750000
8	7	3	2	0.375000	0.375000
8	7	3	3	1.000000	0.625000
8	7	4	3	0.500000	0.500000
8	7	4	4	1.000000	0.500000
8	7	5	4	0.625000	0.625000
8	7	5	5	1.000000	0.375000
8	7	6	5	0.750000	0.750000
8	7	6	6	1.000000	0.250000
8	7	7	6	0.875000	0.875000
8	7	7	7	1.000000	0.125000
9	1	1	0	0.888889	0.888889
9	1	1	1	1.000000	0.111111
9	2	1	0	0.777778	0.777778
9	2	1	1	1.000000	0.222222
9	2	2	0	0.583333	0.583333
9	2	2	1	0.972222	0.388889
9	2	2	2	1.000000	0.027778
9	3	1	0	0.666667	0.666667
9	3	1	1	1.000000	0.333333
9	3	2	0	0.416667	0.416667
9	3	2	1	0.916667	0.500000
9	3	2	2	1.000000	0.083333

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
9	3	3	0	0.238095	0.238095
9	3	3	1	0.773809	0.535714
9	3	3	2	0.988095	0.214286
9	3	3	3	1.000000	0.011905
9	4	1	0	0.555556	0.555556
9	4	1	1	1.000000	0.444444
9	4	2	0	0.277778	0.277778
9	4	2	1	0.833333	0.555556
9	4	2	2	1.000000	0.166667
9	4	3	0	0.119048	0.119048
9	4	3	1	0.595238	0.476190
9	4	3	2	0.952381	0.357143
9	4	3	3	1.000000	0.047619
9	4	4	0	0.039683	0.039683
9	4	4	1	0.357143	0.317460
9	4	4	2	0.833333	0.476190
9	4	4	3	0.992063	0.158730
9	4	4	4	1.000000	0.007936
9	5	1	0	0.444444	0.444444
9	5	1	1	1.000000	0.555556
9	5	2	0	0.166667	0.166667
9	5	2	1	0.722222	0.555556
9	5	2	2	1.000000	0.277778
9	5	3	0	0.047619	0.047619
9	5	3	1	0.404762	0.357143
9	5	3	2	0.880952	0.476190
9	5	3	3	1.000000	0.119048
9	5	4	0	0.007936	0.007936
9	5	4	1	0.166667	0.158730
9	5	4	2	0.642857	0.476190
9	5	4	3	0.960317	0.317460
9	5	4	4	1.000000	0.039683
9	5	5	1	0.039683	0.039683
9	5	5	2	0.357143	0.317460
9	5	5	3	0.833333	0.476190
9	5	5	4	0.992063	0.158730
9	5	5	5	1.000000	0.007936
9	6	1	0	0.333333	0.333333
9	6	1	1	1.000000	0.666667
9	6	2	0	0.083333	0.083333
9	6	2	1	0.583333	0.500000
9	6	2	2	1.000000	0.416667
9	6	3	0	0.011905	0.011905
9	6	3	1	0.226190	0.214286
9	6	3	2	0.761905	0.535714
9	6	3	3	1.000000	0.238095
9	6	4	1	0.047619	0.047619
9	6	4	2	0.404762	0.357143
9	6	4	3	0.880952	0.476190
9	6	4	4	1.000000	0.119048
9	6	5	2	0.119048	0.119048
9	6	5	3	0.595238	0.476190
9	6	5	4	0.952381	0.357143
9	6	5	5	1.000000	0.047619
9	6	6	3	0.238095	0.238095
9	6	6	4	0.773809	0.535714
9	6	6	5	0.988095	0.214286
9	6	6	6	1.000000	0.011905
9	7	1	0	0.222222	0.222222
9	7	1	1	1.000000	0.777778
9	7	2	0	0.027778	0.027778

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
9	7	2	1	0.416667	0.388889
9	7	2	2	1.000000	0.583333
9	7	3	1	0.083333	0.083333
9	7	3	2	0.583333	0.500000
9	7	3	3	1.000000	0.416667
9	7	4	2	0.166667	0.166667
9	7	4	3	0.722222	0.555556
9	7	4	4	1.000000	0.277778
9	7	5	3	0.277778	0.277778
9	7	5	4	0.833333	0.555556
9	7	5	5	1.000000	0.166667
9	7	6	4	0.416667	0.416667
9	7	6	5	0.916667	0.500000
9	7	6	6	1.000000	0.833333
9	7	7	5	0.583333	0.583333
9	7	7	6	0.972222	0.388889
9	7	7	7	1.000000	0.027778
9	8	1	0	0.111111	0.111111
9	8	1	1	1.000000	0.888889
9	8	2	1	0.222222	0.222222
9	8	2	2	1.000000	0.777778
9	8	3	2	0.333333	0.333333
9	8	3	3	1.000000	0.666667
9	8	4	3	0.444444	0.444444
9	8	4	4	1.000000	0.555556
9	8	5	4	0.555556	0.555556
9	8	5	5	1.000000	0.444444
9	8	6	5	0.666667	0.666667
9	8	6	6	1.000000	0.333333
9	8	7	6	0.777778	0.777778
9	8	7	7	1.000000	0.222222
9	8	8	7	0.888889	0.888889
9	8	8	8	1.000000	0.111111
10	1	1	0	0.900000	0.900000
10	1	1	1	1.000000	0.100000
10	2	1	0	0.800000	0.800000
10	2	1	1	1.000000	0.200000
10	2	2	0	0.622222	0.622222
10	2	2	1	0.977778	0.355556
10	2	2	2	1.000000	0.022222
10	3	1	0	0.700000	0.700000
10	3	1	1	1.000000	0.300000
10	3	2	0	0.466667	0.466667
10	3	2	1	0.933333	0.466667
10	3	2	2	1.000000	0.066667
10	3	3	0	0.291667	0.291667
10	3	3	1	0.816667	0.525000
10	3	3	2	0.991667	0.175000
10	3	3	3	1.000000	0.008333
10	4	1	0	0.600000	0.600000
10	4	1	1	1.000000	0.400000
10	4	2	0	0.333333	0.333333
10	4	2	1	0.866667	0.533333
10	4	2	2	1.000000	0.133333
10	4	3	0	0.166667	0.166667
10	4	3	1	0.666667	0.500000
10	4	3	2	0.966667	0.300000
10	4	3	3	1.000000	0.033333
10	4	4	0	0.071429	0.071429
10	4	4	1	0.452381	0.380952
10	4	4	2	0.880952	0.428571

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
10	4	4	3	0.995238	0.114286
10	4	4	4	1.000000	0.004762
10	5	1	0	0.500000	0.500000
10	5	1	1	1.000000	0.500000
10	5	2	0	0.222222	0.222222
10	5	2	1	0.777778	0.555556
10	5	2	2	1.000000	0.222222
10	5	3	0	0.083333	0.083333
10	5	3	1	0.500000	0.416667
10	5	3	2	0.916667	0.416667
10	5	3	3	1.000000	0.083333
10	5	4	0	0.023810	0.023810
10	5	4	1	0.261905	0.238095
10	5	4	2	0.738095	0.476190
10	5	4	3	0.976190	0.238095
10	5	4	4	1.000000	0.023810
10	5	5	0	0.003968	0.003968
10	5	5	1	0.103175	0.099206
10	5	5	2	0.500000	0.396825
10	5	5	3	0.896825	0.396825
10	5	5	4	0.996032	0.099206
10	5	5	5	1.000000	0.003968
10	6	1	0	0.400000	0.400000
10	6	1	1	1.000000	0.600000
10	6	2	0	0.133333	0.133333
10	6	2	1	0.666667	0.533333
10	6	2	2	1.000000	0.333333
10	6	3	0	0.033333	0.033333
10	6	3	1	0.333333	0.300000
10	6	3	2	0.833333	0.500000
10	6	3	3	1.000000	0.166667
10	6	4	0	0.004762	0.004762
10	6	4	1	0.119048	0.114286
10	6	4	2	0.547619	0.428571
10	6	4	3	0.928571	0.380952
10	6	4	4	1.000000	0.071429
10	6	5	1	0.023810	0.023810
10	6	5	2	0.261905	0.238095
10	6	5	3	0.738095	0.476190
10	6	5	4	0.976190	0.238095
10	6	5	5	1.000000	0.023810
10	6	6	2	0.071429	0.071429
10	6	6	3	0.452381	0.380952
10	6	6	4	0.880952	0.428571
10	6	6	5	0.995238	0.114286
10	6	6	6	1.000000	0.004762
10	7	1	0	0.300000	0.300000
10	7	1	1	1.000000	0.700000
10	7	2	0	0.066667	0.066667
10	7	2	1	0.533333	0.466667
10	7	2	2	1.000000	0.466667
10	7	3	0	0.008333	0.008333
10	7	3	0	0.008333	0.008333

Tabla 4

Función de Distribución Normal (0,1)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0-7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Tabla 5

Función de Distribución c^2

	p									
g.l.	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.64	7.90
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.60	5.99	7.38	9.22	10.59
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.82	9.36	11.32	12.82
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.15	13.28	14.82
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.84	15.09	16.76
6	0.67	0.87	1.24	1.63	2.20	10.65	12.60	14.46	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.02	18.47	20.27
8	1.34	1.64	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.55	20.08	21.94
9	1.73	2.09	2.70	3.32	4.17	14.69	16.93	19.03	21.65	23.56
10	2.15	2.55	3.24	3.94	4.86	15.99	18.31	20.50	23.19	25.15
11	2.60	3.05	3.81	4.57	5.58	17.28	19.68	21.93	24.75	26.71
12	3.06	3.57	4.40	5.22	6.30	18.55	21.03	23.35	26.25	28.25
13	3.56	4.10	5.01	5.89	7.04	19.81	22.37	24.75	27.72	29.88
14	4.07	4.65	5.62	6.57	7.79	21.07	23.69	26.13	29.17	31.38
15	4.59	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	.27.50	30.61	32.86
16	5.14	5.81	6.90	7.96	9.31	23.55	26.30	28.86	32.03	34.32
17	5.69	6.40	7.56	8.67	10.08	24.77	27.59	30.20	33.43	35.77
18	6.25	7.00	8.23	9.39	10.86	25.99	28.88	31.54	34.83	37.21
19	6.82	7.63	8.90	10.11	11.65	27.21	30.15	32.87	36.22	38.63
20	7. 42	8.25	9.59	10.85	12.44	28.42	31.42	34.18	37.59	40.05
21	8.02	8.89	10.28	11.59	13.24	29.62	32.68	35.49	38.96	41.45
22	8.62	9.53	10.98	12.34	14.04	30.82	33.93	36.79	40.31	42.84
23	9.25	10.19	11.69	13.09	14.85	32.01	35.18	38.09	41.66	44.23
24	9.87	10.85	12.40	13.84	15.66	33.20	36.42	39.38	43.00	45.60
25	10.50	11.51	13.11	14.61	16.47	34.38	37.66	40.66	44.34	46.97
26	11.13	12.19	13.84	15.38	17.29	35.57	38.89	41.94	45.66	48.33
27	11.79	12.87	14.57	16.15	18.11	36.74	40.12	43.21	46.99	49.69
28	12.44	13.55	15.30	16.92	18.94	37.92	41.34	44.47	48.30	51.04
29	13.09	14.24	16.04	17.70	19.77	39.09	42.56	45.74	49.61	52.38
30	13.77	14.94	16.78	18.49	20.60	40.26	43.78	46.99	50.91	53.71
35	17.16	18.49	20.56	22.46	24.79	46.06	49.81	53.22	57.36	60.31
40	20.67	22.14	24.42	26.51	29.06	51.80	55.75	59.34	63.71	66.80
45	24.28	25.88	28.36	30.61	33.36	57.50	61.65	65.41	69.98	73.20
50	27.96	29.68	32.35	34.76	37.69	63.16	67.50	71.42	76.17	79.52
60	35.50	37.46	40.47	43.19	46.46	74.39	79.08	83.30	88.40	91.98
70	43.25	45.42	48.75	51.74	55.33	85.52	90.53	95.03	100.44	104.24
80	51.14	53.52	57.15	60.39	64.28	96.57	101.88	106.63	112.34	116.35
90	59.17	61.74	65.64	69.13	73.29	107.56	113.14	118.14	124.13	128.32
100	67.30	70.05	74.22	77.93	82.36	118.49	124.34	129.56	135.82	140.19

Tabla 6

Función de Distribución t-Student

	p						
g.l.	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.999**
1	1.376	3.078	6.31	12.70	31.82	63.65	318.39
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.32
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.183
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601	3.131
500	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
1000	0.842	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098

Esta distribución es simétrica: $t_{n,p} = t_{n,1-p}$

Tabla 7

Función de Distribución F de Snedecor

P = 0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.79	2.75	2.72	2.70
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	3.18	2.81	2.61	2.48	1.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
35	2.85	2.46	2.25	2.11	2.02	1.95	1.90	1.85	1.82	1.79
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66
200	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63
500	2.72	2.31	2.09	1.96	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64	1.61
1000	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61

P=0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	60.47	60.71	61.22	61.74	62.06	62.26	62.53	62.69	63.00	63.29
2	9.40	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.22	5.22	5.20	5.19	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.91	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.78	3.76
5	3.28	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.13	3.11
6	2.92	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.75 2	2.72
7	2.68	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.50 2	2.47
8	2.52	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32 2	2.30
9	2.40	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.19	2.16
10	2.30	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.09	2.06
11	2.23	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.00	1.98
12	2.17	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.94	1.91
13	2.12	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.88	1.85
14	2.07	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.83	1.80
15	2.04	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.79	1.76
16	2.01	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.76	1.72
17	1.98	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.73	1.69
18	1.95	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.70	1.66
19	1.93	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.67	1.64
20	1.91	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.65	1.61
21	1.90	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.63	1.59
22	1.88	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.61	1.57
23	1.87	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.59	1.55
24	1.85	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.58	1.54
25	1.84	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.56	1.52
26	1.83	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.55	1.51
27	1.82	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.54	1.50
28	1.81	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.53	1.48
29	1.80	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.52	1.47
30	1.79	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.51	1.46
35	1.76	1.74	1.69	1.63	1.60	1.57	1.53	1.51	1.47	1.42
40	1.74	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.43	1.38
50	1.70	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.39	1.33
60	1.68	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.36	1.30
80	1.65	1.63	1.57	1.51	1.47	1.44	1.40	1.38	1.32	1.25
100	1.64	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.29	1.22
200	1.60	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.24	1.16
500	1.58	1.56	1.50	1.44 .	1.39	1.36	1.31	1.28	1.21	1.11
1000	1.58	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.20	1.08

P=0.95

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161.4	199.50	215.7	224.5	230.1	233.9	236.7	238.8	240.5	241.8
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.97
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.73
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

P=0.95

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	242.9	243.9	245.9	248.0	249.2	250.0	251.1	251.7	253.0	254.1
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.76	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.74	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.70	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.60	3.57	3.'5)	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.31	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.10	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.94	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.82	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.46	2.41
12	2.72	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.63	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.57	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
15	2.51	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.46	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
17	2.41	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.02	1.97
18	2.37	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.34	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.31	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
21	2.28	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.88	1.82
22	2.26	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
23	2.24	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.82	1.76
24	2.22	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
25	2.20	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.78	1.72
26	2.18	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
27	2.17	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.74	1.68
28	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
29	2.14	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.71	1.65
30	2.13	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
35	2.07	2.04	1.96	1.88	1.82	1.79	1.74	1.70	1.63	1.57
40	2.04	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
50	1.99	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.52	1.45
60	1.95	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
80	1.91	1.88	1.79	1.70	1.64	1.60	1.54	1.51	1.43	1.34
100	1.89	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
200	1.84	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.32	1.21
500	1.81	1.77	1.69	1.59	1.53	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1000	1.80	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.83	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
1000	5.02	3.69	3.12	2.79	2.59	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1								
gl_2	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**1000**
1	976.7	978.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	39.41	39.43	39.45	39.45	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.39	2.32	2.26	1.19
19	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
1000	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.50	27.34	27.22
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6,93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
2	99.41	99.42	99.43	99.45	99.46	99.46	99.47	99.48	99.49	99.51
3	27.12	27.03	26.85	26.67	26.58	26.50	26.41	26.35	26.24	26.14
4	14.45	14.37	14.19	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.58	13.48
5	9.96	5.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.30	9.24	9.13	9.03
6	7.79	7.7.2	7.56	7.40	7.29	7.23	7.15	7.09	6.99	6.89
7	6.54	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.75	5.66
8	5.73	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	4.96	4.87
9	5.18	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.41	4.32
10	4.77	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.01	3.92
11	4.46	4.40	4.25	4.10	4.00	3.94	3.86	3.81	3.71	3.61
12	4.22	4.Í6	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.47	3.37
13	4.02	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.27	3.18
14	3.86	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.11	3.02
15	3.73	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	2.98	2.88
16	3.62	.3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.86	2.76
17	3.52	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.76	2.66
18	3.43	'3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.68	2.58
19	3.36	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.60	2.50
20	3.29	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.54	2.43
21	3.24	3.17	3.03	2.88	2.78	2.72	2.64	2.58	2.48	2.37
22	3.18	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.42	2.32
23	3.14	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.37	2.27
24	3.09	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.33	2.22
25	3.06	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.29	2.18
26	3.02	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.25	2.14
27	2.99	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.22	2.11
28	2.96	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.19	2.08
29	2.93	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.16	2.05
30	2.91	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.24	2.13	2.02
35	2.80	2.74	2.60	2.44	2.35	2.28	2.19	2.14	2.02	1.90
40	2.73	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	1.94	1.82
50	2.62	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.82	1.70
60	2.56	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.75	1.62
80	2.48	2.42	2.27	2.12	2.01	1.94	1.85	1.79	1.65	1.51
100	2.43	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.60	1.45
200	2.34	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.48	1.30
500	2.28	2.22	2.07	1.92	1.81	1.74	1.63	1.57	1.41	1.20
1000	2.27	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.38	1.16

Referencias

[1] Paul L. Meyer, Probabilidad y Aplicaciones Estadística, Segunda Edición, Editorial Fondo Educativo Interamericano, S. A., México(1973).

[2] Murray R. Spiegel & John J. Schiller & R. Alu Srinivasan, Probabilidad y Estadística, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(2003).

[3] Ronald E. Walpole & Raymond H. Myers, Probabilidad y Estadística, Cuarta Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1992).

[4] George C. Canavos, Probabilidad y Estadística, Primera Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1988).

[5] Diccionario enciclopédico , Tercera edición, Editorial Espasa-Calpe , España(1986).

[6] Real academia de la lengua española.(2018).*azar*. 8 de febrero de 2018, de RAE Sitio web: http://dle.rae.es/?id=4dukUoz

[7] Universidad de Jaén. *TABLAS ESTADÍSTICAS*. 26 de noviembre de 2017. de Sitio web: http://www4.ujaen.es/ mpfrias/TablasDistribucionesI.pdf