Tarea # 2.1 de Probabilidad y Estadística
Prof. Ricardo Ceballos Sebastián

Primera parte

1. Sea W una variable aleatoria que da el número de caras menos el número de cruces en tres lanzamientos de una moneda. Indique los elementos del espacio muestral S para los tres lanzamientos de la moneda y asigne un valor w de la variable W a cada punto muestral.

2. Determine el valor de c de tal manera que cada una de las siguientes funciones sirva como una distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X:

   a) $f(x) = cx^4$ para $x = 0, 1, 2, 3.$

   b) $f(x) = c\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}$ para $x = 0, 1, 2.$

3. Una caja contiene 4 monedas de 1000 pesos y 2 de 500. Se seleccionan 3 al azar sin reemplazo. Determine la distribución de probabilidad para el total de las 3 monedas. Exprese gráficamente la distribución de probabilidad como un histograma.

4. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria W del problema 1. Suponga que la moneda está cargada de tal manera que una cara tiene dos veces más la posibilidad de ocurrir que una cruz.

5. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de discos de jazz cuando 4 discos se seleccionan al azar de una colección que consiste de 5 discos de jazz, 2 de música clásica y 3 de polka. Exprese el resultado por medio de una fórmula.

6. De un paquete de cartas se sacan tres en sucesión sin reemplazo. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de cartas que son espadas.

7. Encuentre la distribución acumulada para la variable aleatoria W del problema 1. Utilizando $F(w)$, encuentre:

   a)$P(W > 0)$ *b*)$P(1 \leq W < 3)$ c)Dibuje una gráfica de la distribución acumulada.

8. Una firma de inversiones ofrece a sus clientes bonos municipales que vencen después de diferente número de años. Dado que la distribución acumulada de T(el número de años para el vencimiento de un bono seleccionado aleatoriamente) es:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1/4, & 1 \leq t < 3 \\ 1/2, & 3 \leq t < 5 \\ 3/4, & 5 \leq t < 7 \\ 1, & t \geq 7 \end{cases}$$

encuentre,

$$a)P(T = 5), \qquad b)P(T > 3), \qquad c)P(1{,}4 < T < 6).$$

9. Una variable aleatoria continua X que puede asumir valores entre $x = 2$ y $x = 5$ tiene una función de densidad:

$$f(x) = \frac{2}{27}(1 + x)$$

encuentre,

a) $P(X < 4)$, b) $P(3 < X < 4)$.

10. La porción de personas que contestan cierta encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Demuestre que $P(0 < X < 1) = 1$,

b) Encuentre la probabilidad de que más de 1/4 pero menos de 1/2 de las personas en contacto respondan a este tipo de encuesta.

11. Considere la función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Evalúe k.

b) Encuentre $F(x)$ y utilícela para evaluar $P(0{,}3 < X < 0{,}6)$.

12. El tiempo de vida útil, en días, de frascos de una cierta medicina es una variable aleatoria que tiene la función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20{,}000}{(x+100)^3}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que un frasco de este medicamento tenga una vida útil de ,

a) al menos 200 días,

b) cualquier duración entre 80 y 120 días.

13. El tiempo de espera, en horas, que tarda un radar en detectar dos conductores sucesivos a alta velocidad es una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-8x}, & x > 0. \end{cases}$$

    Encuentre la probabilidad de esperar menos de 12 minutos entre dos conductores sucesivos:

    a) utilizando la distribución acumulada de X,

    b) utilizando la distribución de densidad de X.

14. La distribucción de probabilidad de X, el número de defectos por cada 10 metros de una tela sintética en rollos continuos de ancho uniforme es,

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

    Dibuje la distribución acumulada de X.

15. La duración en horas de un componente eléctrico es una variable aleatoria con una función de distribución acumulada,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/50}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    a) Determine la función de densidad de probabilidad.

    b) Determine la probabilidad de que la duración de tal componente exceda las 70 horas.

16. Encuentre la media, la varianza y la desviación estándar para el total de las tres monedas en el problema 3.

17. Una moneda se carga de tal manera que una cara es tres veces más probable de ocurrir que una cruz. Encuentre el número esperado de cruces cuando esta moneda se lanza dos veces.

18. Con referencia al problema 14, determine el número esperado de fallas por cada 10 metros de tela.

19. Por invertir en unas acciones en particular, una persona puede obtener ganancias de \$4000 con una probabilidad de 0.3, o una pérdida de \$1000 con una probabilidad de 0.7. ¿Cuál es la ganancia que espera esta persona?

20. En un juego de azar una persona ganará \$3 si saca una sota o una reyna y \$5 si saca un rey o un as, de un paquete común de 52 cartas. Si se saca cualquier otra carta, pierde. ¿Cuánto deberá pagar si el juego debe ser justo?

21. Un tazón contiene 5 fichas que no pueden distinguirse unas de otras. Tres de las fichas están marcadas con \$2 y las dos restantes con \$4. Un jugador saca del tazón dos fichas al azar sin remplazo, y se le paga con una cantidad igual a la suma de los valores indicados en las dos fichas. Si el costo por jugar es \$5.60, ¿es justo el juego?

22. Un piloto privado desea asegurar su avión pos \$50,000. La compañía aseguradora estima que una pérdida total puede ocurrir con una probabilidad de 0.002, un 50 % de pérdida con una probabilidad de 0.01 y un 25 % de pérdida con una probabilidad de 0.1. Ignorando todas las otras pérdidas parciales,¿qué prima deberá cobrar anualmente la compañía aseguradora para tener una utilidad promedio de \$500?

23. La función de densidad de las mediciones codificadas del diámetro del hilo de un encaje es,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de X.

24. Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

x	-3	6	9
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Encuentre $E(g(X))$, donde $g(X) = (2X + 1)^2$.

25. Una variable aleatoria continua X tiene la función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de $g(X) = e^{2X/3}$

26. Suponga que el período X en minutos de un tipo particular de conversación telefónica es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    a) Determine el promedio de este tipo de conversación,
    b) encuentre la varianza y la desviación estándar de X,
    c) encuentre $E((X+5)^2)$

27. El período de hospitalización, en días, para pacientes que siguen un tratamiento para cierto tipo de desorden renal es una variable aleatoria $Y = X + 4$, donde X tiene la función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{32}{(x+4)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    Encuentre el número promedio de días que una persona está hospitalizada para seguir el tratamiento contra este desorden.

28. El período de tiempo, en minutos que un aeroplano espera vía libre para aterrizar en un cierto aeropuerto es una variable aleatoria $Y = 3X - 2$, donde X tiene la función de densidad,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    Encuentre la media y la varianza de la variable aleatoria Y.

29. Una variable aleatoria X tiene una media $\mu = 12$, una varianza $\sigma^2 = 9$, y una distribución de probabilidad conocida. Utilizando el teorema de Chebyshev, encuentre:

    a) $P(6 < X < 18)$,
    b) $P(3 < X < 21)$.

30. Una variable aleatoria X tiene una media $\mu = 10$ y una varianza $\sigma^2 = 4$. Utilizando el teorema de Chebyshev, encuentre:

    a) $P(|X - 10| \geq 3)$,

b) $P(|X - 10| < 3)$,

c) $P(5 < X < 15)$,

d) el valor de la constante c de tal manera que $P(|X-10| \geq c) \leq 0{,}04$.

31. Calcule la $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$, donde X tiene la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y compárela con el resultado dado en el teorema de Chebyshev.