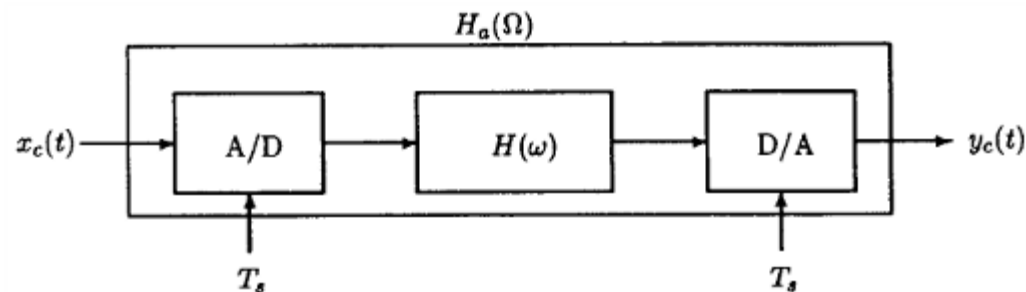


# Filtros Digitales – IIR

- ▶ Los filtros digitales se pueden clasificar en dos grandes grupos: aquellos que presentan una respuesta al impulso de duración infinita (IIR) y, por el contrario, los sistemas FIR o de respuesta al impulso finita.



## DISEÑO DE FILTROS IIR

Para sistemas IIR la relación entrada–salida viene establecida por la expresión:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

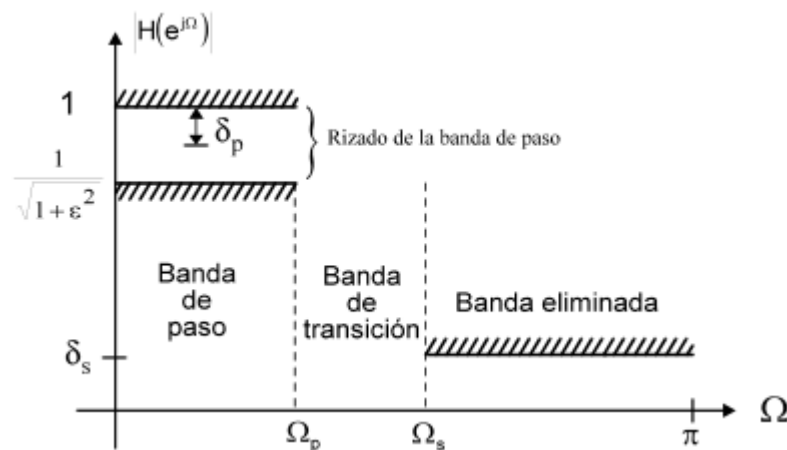
La función de sistema se rige por la expresión

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Los sistemas I.I.R. no van a poder presentar una característica de fase exactamente lineal si queremos que sean causales. La solución más habitual se basa en aproximar el módulo de la función de transferencia sin preocuparnos de la fase, bien porque no sea importante o bien porque se ajuste en una etapa posterior de tipo paso-todo.

Si los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  de  $H(z)$  son reales, los polos y los ceros aparecen por parejas conjugadas o son reales. Para que el sistema sea estable y causal todos los polos deben situarse exactamente en el interior de la circunferencia unidad (o ser coincidentes con ceros en dicha circunferencia), no habiendo restricción para los ceros.

## Especificaciones del filtro



Las frecuencias de corte se dan normalizadas con respecto a la frecuencia de muestreo, debiendo expresar las unidades correctamente.

## **Método de colocación de polos y ceros**

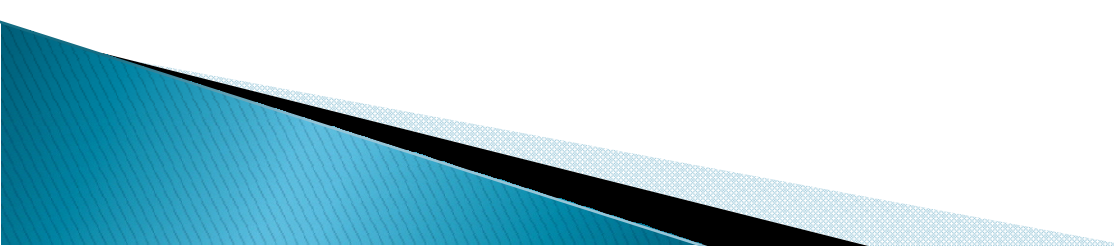
Este método se basa en la propia definición de polo y cero. Un cero es un punto del plano  $z$  en el que la función del sistema se hace nula, mientras que en un polo el valor de dicha función tiende a infinito. En puntos del plano  $z$  próximos a un polo, el valor del  $H(z)$  es elevado, mientras que en puntos cercanos a un cero el valor del  $H(z)$  se reduce.

Este método se emplea en contadas ocasiones y para funciones de sistema extremadamente simples

## **Diseño de filtros IIR a partir de prototipos analógicos**

Es la forma tradicional de diseño de sistemas I.I.R. por varias razones:

- El diseño de filtros analógicos es un problema muy estudiado.
- En bastantes aplicaciones interesan filtros digitales que simulen el funcionamiento de un filtro analógico.
- Los métodos de aproximación convencionales funcionan bien en los filtros analógicos pero no dan lugar a fórmulas sencillas de diseño cuando se aplican directamente a los sistemas discretos.



La especificación de partida se hará siempre en el dominio discreto. Aprovechando que el diseño de filtros analógicos es un campo bien estudiado, se traslada el problema de la aproximación al dominio s. De aquí se obtendrá una función del sistema analógico  $H(s)$ .

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k \cdot s^k} = \frac{\prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

Una vez que se han obtenido los coeficientes  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\alpha_k\}$  o bien los ceros y los polos  $\{c_k\}$ ,  $\{d_k\}$ , del filtro analógico, se emplean algunas transformaciones para convertirlo en un filtro digital. Esta técnica será efectiva si tiene las siguientes propiedades:

- a. El eje " $j\omega$ " del plano s debería transformarse en la circunferencia unidad del plano z. De esta forma la transformación conserva en lo esencial el comportamiento en frecuencia del sistema continuo.
- b. La transformación debe conservar la estabilidad del sistema. Cada punto del semiplano izquierdo del plano s debería transformarse en otro interior a la circunferencia unidad.

## Diseño de filtros mediante la Técnica de Invarianza al Impulso

Se basa en tomar como respuesta al impulso del filtro digital una versión muestreada de la respuesta al impulso del sistema de tiempo continuo empleando un período de muestreo  $T$

$$h[n] = k \cdot h_a(n \cdot T)$$

Cuando empleamos la transformación invariante de impulso para diseñar un sistema de tiempo discreto a partir de una especificación de su respuesta en frecuencia, es especialmente importante la relación entre las respuestas en frecuencia de los sistemas de tiempo continuo y discreto. Si prescindimos del solapamiento (suponiendo espectros limitados en banda muestreados a suficiente velocidad), las frecuencias de los sistemas de tiempo discreto y de tiempo continuo se relacionan de forma lineal como se indica en la expresión.

$$\Omega = \omega \cdot T$$

Dado que no hay sistemas analógicos limitados en banda el solapamiento será inevitable. En primer lugar se desarrolla en fracciones simples la función de sistema, donde las constantes  $A_k$  se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(s - d_k)}$$

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{d_k \cdot t} \cdot u(t)$$

$$h[n] = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{d_k \cdot T \cdot n} \cdot u[n]$$

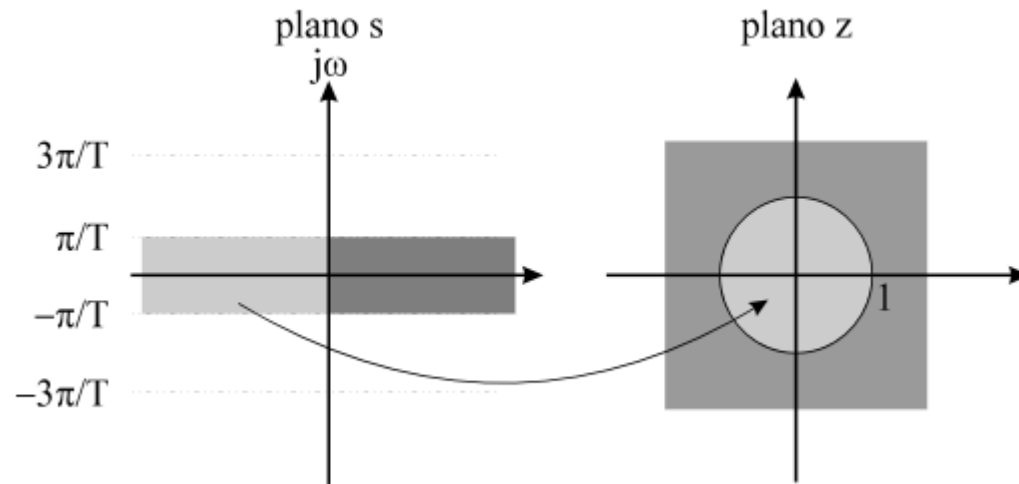
La función del sistema se obtiene calculando la Transformada Z de la respuesta al impulso  $h[n]$ .

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_k \cdot (e^{d_k \cdot T})^n \cdot z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{d_k \cdot T} \cdot z^{-1})^n = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - e^{d_k \cdot T} \cdot z^{-1})}$$

Un polo en  $s = d_k$  en el plano  $s$  se transforma en un polo en  $z = e^{d_k T}$ , siendo los residuos de los desarrollos en fracciones simples iguales.

La figura muestra la transformación del plano  $s$  en el plano  $z$ . Cada banda horizontal del plano  $s$  de anchura  $2\pi/T$  se transforma en todo el plano  $z$ . Por tanto, para que el filtro digital se corresponda exactamente con el analógico de partida es necesario que este último sea de banda limitada, es decir, que  $H_a(\omega) = 0$  para  $|\omega| > \pi/T$ .



- La respuesta al impulso del filtro discreto es idéntica a la del filtro analógico en los instantes  $t=nT$ .
- La frecuencia de muestreo afecta a la respuesta en frecuencia del filtro invariante al impulso. Se necesita una frecuencia muy alta para que el sistema discreto sea igual que el analógico.
- El método debe usarse para filtros paso bajo con banda de transición muy reducida, y empleando una frecuencia de muestreo elevada. No puede emplearse para filtros paso alto o filtros banda eliminada, pues el solapamiento en estos es inevitable.



# Transformación bilineal

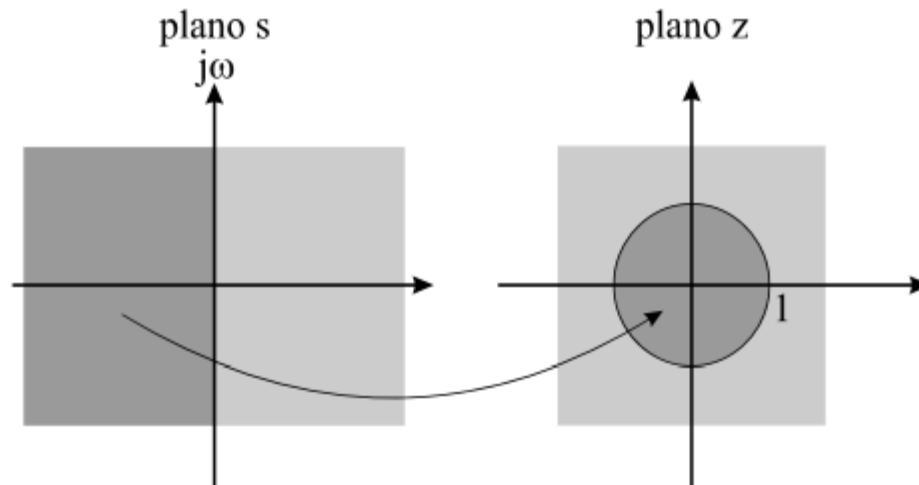
La transformación de cada tramo de longitud  $2\pi/T$  del eje  $j\omega$  del plano  $s$  en toda la circunferencia de radio unidad va a conllevar en ocasiones un solapamiento, de forma que la técnica es impracticable en algunos tipos de filtros. Con la transformación bilineal evitamos esos problemas.

$$s = \frac{2}{T} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})} \quad z = \frac{\left(1 + \frac{T}{2}s\right)}{\left(1 - \frac{T}{2}s\right)}$$

Esta transformación conserva el comportamiento en frecuencia del sistema de tiempo continuo, ya que si  $s=j\omega$ , se tiene el cociente de dos números complejos conjugados, luego  $|z|=1$  para cualquier valor de  $\omega$ . Con esto se demuestra que el eje  $j\omega$  se transforma en la circunferencia unidad del plano  $z$ . Cada uno de los valores de  $\omega$  se transforma en un solo punto de  $\Omega$ , de forma que  $-\pi < \Omega \leq \pi$ . Podemos establecer que si  $s \rightarrow \infty$ , en el plano  $z$  tenemos  $z = -1$ . Si  $s=0$ , el nuevo punto es  $z = 1$ .

La transformación bilineal también mantiene la estabilidad del sistema, ya que si  $s < 0$  (cualquier punto del semiplano izquierdo de  $s$ ) se obtiene que  $|z| < 1$ . Esto significa que dicho plano izquierdo de  $s$  se transforma en el interior de la circunferencia unidad del plano  $z$ .

$$z = \frac{\left(1 + \frac{T}{2}(\sigma + j\omega)\right)}{\left(1 - \frac{T}{2}(\sigma + j\omega)\right)} = \frac{\left(\left(1 + \frac{T}{2}\sigma\right) + j\omega\frac{T}{2}\right)}{\left(\left(1 - \frac{T}{2}\sigma\right) - j\omega\frac{T}{2}\right)}$$



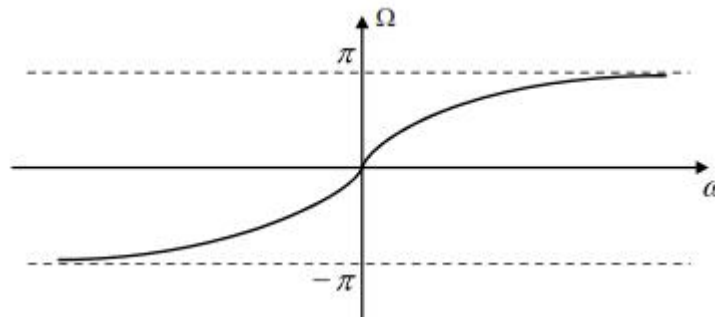
La función del sistema del filtro digital se obtiene mediante un cambio de variable en la función de sistema del filtro analógico.

$$H(z) = H(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}$$

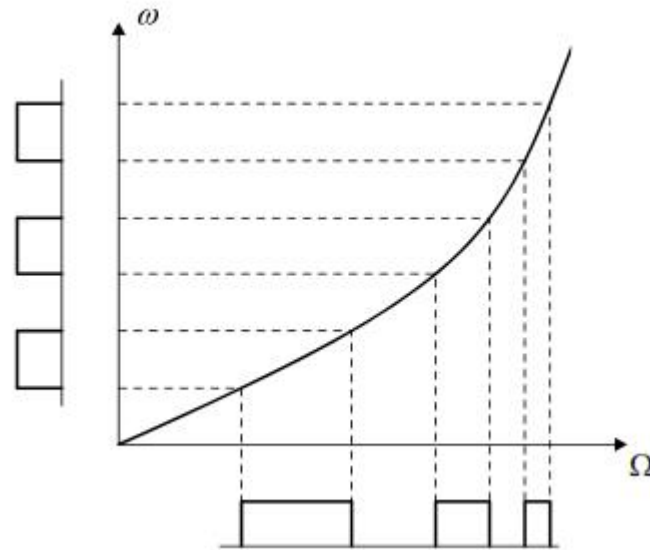
La Transformación Bilineal presenta como inconveniente que aparece distorsión en el eje de frecuencia digital  $\Omega$ . Si se estudia la relación entre los dos ejes de frecuencia se podrá corregir la distorsión en la etapa de diseño del filtro. Esta relación se puede obtener comprobando en qué se transforma el eje  $j\omega$ :

$$j\omega \rightarrow \frac{2}{T} \left( \frac{1 - e^{j\Omega}}{1 + e^{j\Omega}} \right) = \frac{2}{T} \cdot j \cdot \frac{\sin(\Omega/2)}{\cos(\Omega/2)} = \frac{2}{T} \cdot j \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$
$$\omega \cdot T = 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

En la figura se puede observar el efecto que trae consigo la relación no lineal que existe entre la frecuencia analógica y la digital. Esta no linealidad limita la aplicación de la Transformación Bilineal a respuestas en frecuencia analógicas idealmente formadas por tramos constantes, caso en el que se mantienen las características del diseño analógico (decrecimiento monótono, rizado constante, etc.).



*Transformación del eje de frecuencias de tiempo continuo en la circunferencia de radio unidad.*



*Representación del efecto de la no linealidad en la aplicación de la transformación bilineal.*

Se puede resumir el método de la transformación bilineal en los pasos siguientes:

- Especificar el conjunto de frecuencias críticas  $\{\Omega_k\}$  del filtro digital deseado. No hay limitación para el número de estas frecuencias.
- Predistorsionar dichas frecuencias críticas para obtener las frecuencias críticas  $\omega_k$

$$\omega_k = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_k}{2}\right)$$

- Diseñar un filtro analógico con las frecuencias críticas analógicas calculadas. Las aproximaciones más utilizadas en esta fase son las de Butterworth, Chebyshev o elíptica.
- Obtener la función del sistema discreto empleando la transformación bilineal

Cuando no interesa mantener la respuesta al impulso o la fase de la respuesta en frecuencia del filtro analógico, la transformación bilineal siempre resulta mejor que la invariante de impulso debido a que no tiene problemas de solapamiento.

## Diseño de un filtro digital mediante la técnica de Invarianza al Impulso

%filtro analogico y su comparacion con los filtros copiados con  
%invarianza al impulso (dos frecuencias de muestreo 200 Hz (rojo) y  
20 Hz (verde)) -*InvarianzaComp.m*

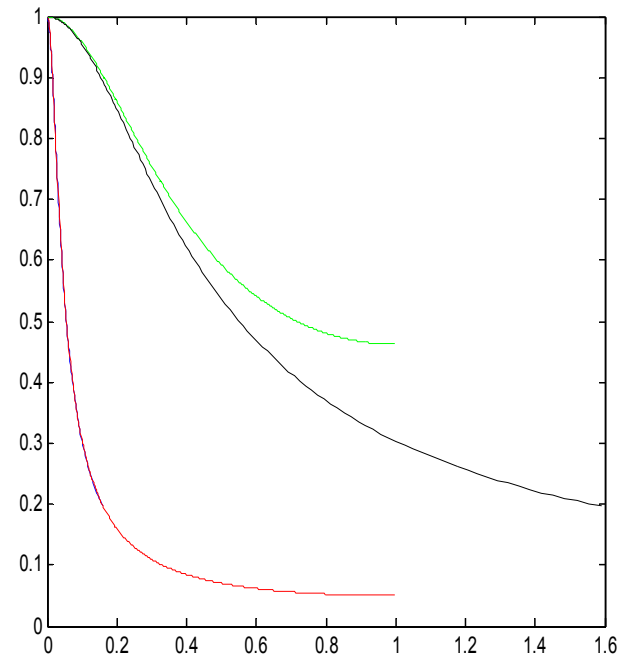
```
% H(s)=20/(s+20)
```

```
B=[0 20];  
A=[1 20];  
T=(0.005);  
T1=0.05;  
[H w]=freqs(B,A);
```

```
Bz=[20*0.005 0];  
Az=[1 -0.9048];  
[Hz,wz]=freqz(Bz,Az);
```

```
Bc=[20/31.641 0];  
Ac=[1 -0.3679];  
[Hc wc]=freqz(Bc,Ac);
```

```
plot(w*T/pi,abs(H)) % se cambia el eje de frecuencias para poder  
comparar -se multiplica por T  
hold on  
plot(wz/pi,abs(Hz)/Hz(1),'r')  
plot(wc/pi,abs(Hc),'g')  
plot(w*T1/pi,abs(H),'k')
```



# Diseño de un filtro digital mediante la Transformación bilineal

%Comparacion filtro analogico y su implementacion digital con TB

%H(s)=20/(s+20) --BilinearComp.m

T=0.005;

wq=(2/T)\*tan(0.1\*pi);

B=9\*[20\*T 20\*T];

A=[20\*T (20\*T-2)];

[H w]=freqz(B,A); %polinomios num y den sin prewarpear

plot(w/pi,20\*log10(abs(H/H(1)))) % digital (azul)

B1=[0 20];

A1=[1 20];

hold on

[H1 w1]=freqs(B1,A1);

plot(w1\*T,20\*log10(abs(H1)), 'r') %

Bc=[0 wq];

Ac=[1 wq];

[Hc wc]=freqs(Bc,Ac);

figure

B2=[wq\*T wq\*T]; %130=tan(wd/2)\*2/T

A2=[wq\*T (wq\*T-2)];

[H2 w2]=freqz(B2,A2);

plot(w2/pi,20\*log10(abs(H2)/1.8571),'g')

hold on

plot(2\*atan(wc\*T/2)/pi,20\*log10(abs(Hc)), 'b')

