TEORIA

COMBINACIÓN LINEAL

Consideremos un conjunto de vectores $S=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ de un espacio vectorial V. Si un vector $u\in V$ se puede escribir en términos de los vectores de S, esto es,

$u=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots..+\alpha_n v_n$ donde $\alpha_i\in R$

, entonces se dice que el vector v es una Combinación Lineal de los vectores $v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n$, donde al menos uno de los α_i es distinto de cero.

EJEMPLO : Consideremos el espacio vectorial R^3, sea el conjunto de vectores $S=\{v_1, v_2, v_3\}$ donde $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(1,0,2)$ y $v_3=(1,1,0)$.

Escribir el vector $u=(2,1,5)$ como una combinación lineal de los vectores de S .

SOLUCIÓN: Escribimos $u=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\alpha_3\cdot v_3$, y determinamos los escalares α_i, esto es,

$$(2,1,5)=\alpha_1\cdot(1,2,1)+\alpha_2\cdot(1,0,2)+\alpha_3\cdot(1,1,0)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2)$$

esta igualdad genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, igualamos componente a componente,

$$\begin{matrix} 2=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ 1=2\alpha_1+\alpha_3 \\ 5=\alpha_1+2\alpha_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=2 \\ \alpha_3=-1 \end{matrix}$$

Esto significa que $u=(2,1,5)$, se puede expresar como combinación lineal de los vectores v_1,v_2,v_3, es decir, $u=1\cdot v_1+2\cdot v_2-1\cdot v_3$

EJEMPLO : Sea el espacio vectorial P_3, y el conjunto de vectores $S=\{v_1, v_2\}$ donde $v_1=1+x+x^3$ y $v_2=-x-x^2-x^3$.

Escribir el vector $u=-1+x^2$ como combinación lineal de los vectores de S .

SOLUCIÓN: Escribimos al vector $u=-1+x^2$ en términos de los vectores de S, esto es, $u=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2$ y determinamos si existen los escalares α_i, esto es,

$$u=-1+x^2=\alpha_1(1+x+x^3)+\alpha_2(-x-x^2-x^3)=\alpha_1+(\alpha_1-\alpha_2)x-\alpha_2 x^2+(\alpha_1-\alpha_2)x^3$$

esto genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, aquí igualamos los coeficientes que tengan potencias iguales,

$$\begin{aligned} -1 &= \alpha_1 \\ 0 &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ 1 &= -\alpha_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= -1 \end{aligned}$$

Entonces $u = -1 + x^2$, se puede expresar como combinación lineal de los vectores forma,

$$u = -1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2$$

ESPACIO GENERADO

Consideremos un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V. Si todo vector de V se puede escribir como combinación lineal del conjunto de vectores de S, entonces se dice que los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ Generan al espacio vectorial V.

En ortras palabras, si todo vector $u \in V$ se puede escribir como $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, entonces se dice que el conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un Conjunto Generador del espacio vectorial V.

EJEMPLO: Consideremos el espacio vectorial P_2 (polinomios de grado menor o igual a dos), y el conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ donde,

$$v_1 = 2x^2 + x + 2,\ v_2 = x^2 - 2x,\ v_3 = 5x^2 - 5x + 2 \text{ y } v_4 = -x^2 - 3x - 2.$$

¿Es $u = x^2 + x + 2$ combinación lineal de los vectores de S?

SOLUCIÓN: Escribimos al vector u como combinación de los vectores de S, esto es, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$ entonces, $x^2 + x + 2 = \alpha_1(2x^2 + x + 2) + \alpha_2(x^2 - 2x) + \alpha_3(5x^2 - 5x + 2) + \alpha_4(-x^2 - 3x - 2)$

$$= (2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 - \alpha_4)x^2 + (\alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3 - 3\alpha_4)x + (2\alpha_1 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4)$$

lo cual, al igualar coeficientes con potencias iguales, genera el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} 1 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 - \alpha_4 \\ 1 &= \alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3 - 3\alpha_4 \\ 2 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 \end{aligned}$$

El sistema no tiene solución

Como los escalares α_i no existen, por lo tanto, el vector u no se pude escribir como combinación lineal de los vectores de v_1, v_2, v_3, v_4. Entonces el conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ no es conjunto generador de P_2.

Un conjunto generador de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V es Linealmente Dependiente si existen escalares (no todos ceros), tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

El conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es Linealmente Independiente si en la ecuación,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

todos los escalares son iguales a cero, es decir, $\alpha_i = 0$ para toda i.

Podemos observar que para verificar si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente, siempre tenemos que construir la ecuación,

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n = 0$

esta relación vectorial genera un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, donde las incógnitas son las α_i, este sistema por ser homogéneo solo tiene dos posibles soluciones, estas son,

a) Solución única $\alpha_i = 0$ (la solución trivial), entonces los vectores son Linealmente Independientes
b) Soluciones infinitas, entonces los vectores son Linealmente Dependientes

Si un conjunto de vectores contiene al vector cero, entonces este conjunto es linealmente dependiente, ya que el coeficiente de este vector, será distinto de cero.

Si en un conjunto de vectores, alguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los restantes, es decir, si existen vectores múltiplos de otros, entonces el conjunto será linealmente dependiente.

EJEMPLO: Consideremoslossiguientesvectores v_1, v_2, v_3, v_4 delespaciovectorial R^4 donde, $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,-1,2)$, $v_3 = (0,2,2,1)$ y $v_4 = (1,0,0,1)$.

¿Estos vectores son linealmente dependientes o independientes?

SOLUCIÓN: Escribimos la ecuación vectorial $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n = 0$

sustituimos los vectores anteriores, esto es,

$\alpha_1 (1, 0, 1, 0) + \alpha_2 (0, 1, -1, 2) + \alpha_3 (0, 2, 2, 1) + \alpha_4 (1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$

como sabemos esta ecuación genera un sistema de ecuaciones lineales homogéneo,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo por regla de Kramer tenemos que,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\,, \quad |\Delta_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \quad |\Delta_2| = |\Delta_3| = |\Delta_4| = 0 \quad \text{(ya que es homogéneo)}$$

entonces la solución es

$$\alpha_1 = \frac{|\Delta_1|}{|A|}, \alpha_2 = \frac{|\Delta_2|}{|A|}, \alpha_3 = \frac{|\Delta_3|}{|A|}, \alpha_4 = \frac{|\Delta_4|}{|A|}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad \text{Solución única (trivial)}$$

Por lo tanto, los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente independientes.

EJEMPLO: Mostrar que elconjunto $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ de P_3 es un conjunto de vectores linealmente independiente.

SOLUCIÓN: Escribimos la ecuación, $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 = 0$

Si $\alpha_i = 0 \;\; \forall i \;\; \Rightarrow$ son linealmente independientes

Si $\alpha_i \neq 0$ para algún $i \;\; \Rightarrow$ son linealmente dependientes

La ecuación anterior debe ser válida para toda $x \in R$, así generamos las ecuaciones siguientes,

Para $x = 0$: $\alpha_1 \cdot 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha_1 = 0$

Para $x = 1$: $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$

Para $x = -1$: $-\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$

Para $x = 2$: $2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 8\alpha_4 = 0$

Resolviendo el sistema homogéneo anterior por regla de Kramer encontramos,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Solución única: } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Por lo tanto, los vectores $1, x, x^2, x^3$ son linealmente independientes.

EJEMPLO: Sea (R^2 ,R,+,·) espaciovectorial A={(4,1);(2,3)}

Determinamos la dependencia e independencia lineal utilizando la ecuación:

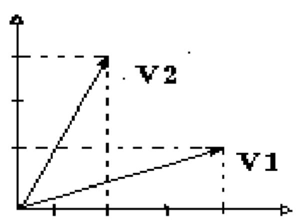
$$\alpha_1 (4 , 1) + \alpha_2 (2 , 3) = (0 . 0)$$

SOLUCIÓN : Realizando las operaciones respectivas se tiene :

$$(4\alpha_1 +2\alpha_2 , \alpha_1 +3\alpha_2)=(0,0)$$

que proporciona el sistema homogéneo.

$$4\alpha_1 +2\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 +3\alpha_2 = 0$$



La solución del sistema por cualquier método es $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$. Por consiguiente el conjunto A es linealmente independiente.

EJERCICIOS

1. En cada caso, vea si el vector dado está en el espacio generado por

   u = (2,5,8) y **S** = { (1,1,1) ; (-1,0,1) }

   u = (1,5,1) y **S =** { (1,1,1) ; (1,0,1) }

2. ¿El vector (3,-1,0,-1) pertenece al subespacio generado por los vectores

   (2,-1,3,2) ; (-1,1,1,-3) ; (1,1,9,-5) ?

3. Considere el espacio vectorial $\mathbf{M_{2x2}}$ de matrices reales de orden 2x2.

$$\text{Sea} \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

¿Cuál es el subespacio generado por S ? o combinación lineal donde $u = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

4. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos en R^2 ó R^3 son linealmente independientes?

   a) S={(-2,1,1);(3,1,-1)}

   b) S = {(1, 1); (3, 3)}

   c) S = {(1, 1, 1); (1, 2, 0)}

5. ¿Es $\underline{v}$ una combinación lineal de los vectores dados?

   a) $\underline{v} = (2,1,5)$; $\quad \underline{v}_1 = (1,2,1)$, $\quad \underline{v}_2 = (1,0,2)$, $\quad \underline{v}_3 = (1,1,0)$

   b) $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$; $\quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Determina si los vectores son linealmente independientes (l.i) o linealmente dependientes (l.d.).
   a) $v_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-2, 0, 1, 1)$
   b) $v_1 = (1, 0, 1, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1, 3)$,
   c) $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (1, -2, 1)$, $v_3 = (-3, 2, -1)$, $v_4 = (2, 0, 0)$
   d) $P = t^2 + t + 2$, $Q = 2t^2 + t$, $R = 3t^2 + 2t + 2$
   e) $x_1 = (1, 2, 0, 1)$, $x_2 = (1, 0, -1, 1)$, $x_3 = (1, 6, 2, 0)$

7. Determina si los conjuntos siguientes son l.i. o l.d.

   a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right\}$