*Tarea 1.2*
*Probabilidad y Estadística*
*Segunda lista de ejercicios*
*Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián*

## Espacios muestrales y cálculo de probabilidades

1. Suponga que el conjunto universal consta de los enteros positivos del 1 al 10. Sean $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$. Anote los elementos de los siguientes conjuntos.

   *a)* $\overline{A} \cap B$.
   *b)* $\overline{A} \cup B$.
   *c)* $\overline{\overline{A} \cap B}$.
   *d)* $\overline{A \cap (\overline{B \cap C})}$.
   *e)* $\overline{A \cap (B \cup C)}$.

2. Suponga que el conjunto universal $U$ está dado por $U = \{x|0 \leq x \leq 2\}$. Sean los conjuntos $A$ y $B$ definidos como sigue: $A = \{1/2 < x \leq 1\}$ y $B = \{x|1/4 \leq x < 1/2\}$. Describa los conjuntos siguientes:

   *a)* $\overline{A \cup B}$.
   *b)* $A \cup \overline{B}$.
   *c)* $\overline{A \cap B}$.
   *d)* $\overline{A} \cap B$.

3. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas?

   *a)* $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
   *b)* $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$
   *c)* $\overline{A} \cap B = A \cup B$
   *d)* $\overline{(A \cup B)} \cap C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
   *e)* $(A \cap B) \cap (\overline{B} \cap C) = \phi$

4. Suponga que el conjunto universal consta de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas son enteros y quedan dentro o sobre el contorno del cuadrado acotado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 6$, $y = 6$. Indique los elementos de los conjuntos siguientes.

   *a)* $A = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 6\}$
   *b)* $B = \{(x, y)|y \leq x^2\}$
   *c)* $C = \{(x, y)|x \leq y^2\}$
   *d)* $B \cap C$
   *e)* $(B \cup A) \cap C$

5. Use los diagramas de Venn para establecer las siguientes relaciones.

   *a)* $A \subset B$ y $B \subset C$ implica que $A \subset C$
   *b)* $A \subset B$ implica que $A = A \cap B$
   *c)* $A \subset B$ implica $\overline{B} \subset \overline{A}$
   *d)* $A \subset B$ implica que $A \cup C = B \cup C$

e) $A \cup B = \phi$ y $C \subset A$ implica que $B \cap C = \phi$

6. Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican en defectuosos(D) y no defectuosos(N). Se observan los artículos y se anota su condición. Este proceso se continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o se hayan verificado cuatro artículos, cualesquiera que ocurra primero. Describir un espacio muestral para este experimento.

7. a) Una caja con N bombillas tiene r($r < N$) unidades con filamentos rotos. Éstas se prueban una por una, hasta que se encuentra una defectuosa. Describir un espacio muestral para este experimento.

   b) Suponga que las bombillas anteriores se prueban una por una, hasta que se prueban todas las defectuosas. Describir el espacio muestral para este experimento.

8. Considere cuatro objetos a,b,c y d. Suponga que el onden en el cual se anotan esos objetos representa los resultados de un experimento. Sean A y B los eventos definidos como sigue: $A = \{$a está en el primer lugar$\}$, $B = \{$b está en el segundo lugar$\}$.

   a) Anote todos los elementos del espacio muestral.

   b) Anote todos los elementos de los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.

9. Un lote contiene artículos que pesan $5, 10, 15, \ldots, 50$ libras. Suponga que al menos dos artículos del mismo peso se encuentran allí. Se eligen dos artículos del lote. Identifique por $X$ el peso del primer artículo elegido y a $Y$ el peso del segundo artículo. Así el par de números $(X, Y)$ representa un solo resultado del experimento.Usando el plano $XY$, indique el espacio muestral y los eventos siguientes:

   a) $\{X = Y\}$

   b) $\{X > Y\}$

   c) El segundo artículo pesa el doble que el primero.

   d) El primer artículo pesa 10 libras menos que el segundo.

   e) El promedio de peso de los dos artículos es menos de 30 libras.

10. En un período de 24 horas, en un momento $X$, un interruptor se pone en la posición .$^{\text{en}}$cendido". Posteriormente, en un momento $Y$ (todavía en el mismo período de 24 horas) el interruptor se pone en la posición de .$^{\text{a}}$pagado". Suponga que $X$ y $Y$ se miden en horas en el eje del tiempo con el comienzo en el período como origen. El resultado del experimento consta del par de números $(X, Y)$.

    a) Describa el espacio muestral.

    b) Describa y dibuje los siguientes sucesos en el plano XY.

       i) El circuito funciona durante una hora o menos.

       ii) El circuito funciona en el tiempo z donde z es algún intervalo durante el período dado de 24 horas.

       iii) El circuito empieza a funcionar antes del tiempo $t_1$ y deja de funcionar después del tiempo $t_2$ (en donde otra vez, $t_1 < t_2$ son dos intervalos de tiempo durante el período especificado).

       iv) El circuito funciona lo doble de lo que será interrumpido.

11. Sean A,B y C, tres sucesos asociados con un experimento. Exprese las siguientes proposiciones verbales en notación de conjuntos.

    a) Al menos uno de los sucesos ocurre.

*b*) Exactamente uno de los sucesos ocurre.

*c*) Exactamente dos de los sucesos ocuren.

*d*) No ocurren más de dos sucesos simultáneamente.

12. Demostrar que para dos sucesos cualesquiera $A_1$ y $A_2$, tenemos

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

13. Demuestre que para n sucesos cualesquiera $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tenemos

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

14. La proposición siguiente trata de que exactamente uno de los sucesos A o B ocurra. Demostrar que

$$P[(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

15. Cierto tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los cojinetes, por combustión del embobinado o por desgaste de las escobillas. Suponga que la probabilidad de la obstrucción es el doble de la combustión, la cual es cuatro veces más probable que la inutilización de las escobillas. ¿Cuál es la probabilidad de que el fallo sea por cada uno de esos tres mecanismos?

16. Suponga que A y B son sucesos para los cuales $P(A) = x$, $P(B) = y$, y $P(A \cap B = z)$. Expresar cada una de las probabilidades siguientes en términos de x, y y z.

    *a*) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$,

    *b*) $P(\overline{A} \cap B)$,

    *c*) $P(\overline{A} \cup B)$,

    *d*) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

17. Suponga que A,B y C son sucesos tales $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0\cap$, Y $P(A \cap C) = 1/8$. Calcular la probabilidad de que al menos uno de los sucesos A,B, o C ocurra.

18. Una instalación consta de dos calderas y un motor. Sea A el suceso de que el motor está en buenas condiciones, mientras los sucesos $B_k$ (k=1,2) son los sucesos de que la k-ésima caldera esté en buenas condiciones. El suceso C es que la instalación pueda funcionar. Si la instalación funciona cada vez que el motor y al menos una caldera funcione, exprese C y $\overline{C}$ en función de A y de los sucesos $B_i$.

19. Un mecanismo tiene dos tipos de repuestos, digamos I y II. Suponga que hay dos del tipo I y tres del tipo II. Definir los sucesos $A_k$, $k = 1, 2$ y $B_j$ $j = 1, 2, 3$ como sigue: $A_k$ : la k-ésima unidad del tipo I está funcionando correctamente. $B_j$ : la j-ésima unidad del tipo II está funcionando correctamente. Finalmente, C representa el suceso: El mecanismo funciona. Dado que el mecanismo funciona si al menos una unidad del tipo I dos unidades del tipo II funcionan, exprese el suceso C en función de los $A_k$ y $B_j$.

**Cálculo de probabilidades**

20. En una habitación se encuentra el siguiente grupo de personas: 5 hombres mayores de 21, 4 hombres menores de 21, 6 mujeres mayores de 21 y 3 mujeres menores de 21. Se elige una persona al azar. Se definen los siguientes sucesos: A={la persona es mayor de 21 años}; B={la persona es menor de 21 años}; C={la persona es hombre}; D={la persona es mujer}. Evaluar lo siguiente:

a) $P(AUD)$
b) $P(AUC)$

21. En una habitación 10 personas tienen insignias numeradas del 1 al 10. Se eligen tres personas y se les pide que dejen la habitación inmediatamente y se anotan los números de las insignias.
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insignias sea 5?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor de las insignias sea 5?

22. a) Suponga que se escriban tres dígitos, 1, 2 y 3 en un orden aleatorio ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un dígito ocupe un lugar propio?
    b) Lo mismo que en a), pero con los dígitos 1, 2 , 3 y 4.
    c) Lo mismo que en a), pero con los dígitos 1, 2 , 3,. . . , n.
    d Discutir la respuesta de c) si n es grande.

23. Un cargamento de 1500 lavadoras contiene 400 defectuosas y 1100 no defectuosas. Se eligen al azar 200 lavadoras(sin sustitución) y se clasifican.
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren exactamente 90 artículos defectuosos?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos 2 artículos defectuosos?

24. Diez fichas numeradas del 1 al 10 se mezclan en una palangana. Se sacan de la palangana dos fichas numeradas $(X, Y)$ una y otra vez sin sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que $X + Y = 10$?

25. Un lote consta de 10 artículos buenos, 4 con pequeños defectos, y dos con defectos graves. Se elige un artículo al azar. Encontran la probabilidad de que:
    a) no tenga defectos,
    b) tenga un defecto grave,
    c) que sea bueno o que tenga un defecto grave.

26. Si del mismo lote de artículos descritos en el problema anterior se escogen dos artículos (sin sustitución) encuentre la probabilidad de que: a) ambos sean buenos, b) ambos tengan defectos graves, c)a lo menos uno sea bueno, d)a lo más uno sea bueno, e) exactamente uno sea bueno, f) ninguno tenga defectos graves, g) ninguno sea bueno.

27. Supongamos que de $N$ objetos elegimos $n$ al azar(con sustitución).¿Cuál es la probabilidad de que ningún objeto sea elegido más de una sola vez?(suponga que $N < n$)

28. Una caja contiene esferas numeradas $1, 2, \ldots, n$. Se escogen dos esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos si,
    a) las esferas se escogen sin sustitución.
    b) las esferas se escogen con sustitución.

29. Entre los números $1, 2, \ldots, 50$ se escoge un número al azar.¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8?

30. De 6 números positivos y 8 negativos, se eligen 4 números al azar (sin sustitución) y se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?

31. Un lote contiene $n$ artículos. Si se sabe que $r$ artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que el $k$-ésimo artículo (con $k \geq r$) inspeccionado sea el último defectoso en el lote?

32. r números ($0 < r < 10$) se escogen al azar(con sustitución) entre los números $0, 1, 2, \ldots, 9$. ¿Cuál es la probabilidad de que dos no sean iguales?

33. En dos lanzamientos de un par de dados balanceados, encuentre la probabilidad de obtener un puntaje de 7 a) una vez, b) al menos una vez, c) dos veces.

34. Se sacan una tras otra dos cartas de un naipe común y bien barajado de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que a) la primera carta no sea un 10 de tréboles o un as, b) la priomera carta sea un as, pero la segunda no, c) al menos una carta sea diamantes, d) las cartas no sean del mismo palo, e) no más de una carta sea figura (jota, reyna o rey), f) la segunda carta no sea figura, g) la segunda carta no sea figura dado que la primera sí lo fue, h) las cartas sean figuras o picas, o ambas.

35. Una caja contiene 9 boletas numeradas del 1 al 9. Si se sacan una a una tres boletas de la caja, encuentre la probabilidad de que de manera alternada sean impares, pares, impares o pares, impares, pares.

36. Las apuestas a favor de que A le gane a B un juego de ajedrez están 3:2. Si se van a jugar tres partidas, ¿Cuáles serán las apuestas a) a favor de que A gane al menos dos de tres juegos, b) en contra de A perdiendo los dos primeros juegos contra B?

37. En un juego de bridge, cada uno de los cuatro jugadores recibe 13 cartas de un juego de naipes bien barajado de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que un jugador reciba a) 7 diamantes, 2 tráboles, 3 corazones y una carta de picas, b) un palo completo.

38. De una urna que contiene 6 canicas rojas y 8 azules, se retiran al azar 5 canicas sin reemplazo. Encuentre la probabilidad de que 3 sean rojas y 2 azules.

39. a) Encuentre la probabilidad de obtener la suma de 7 en al menos 1 de 3 lanzamientos de un par de dados balanceados. b) ¿Cuántos lanzamientos se necesitan para que la probabilidad en a)sea mayor que 0.95?

40. Se sacan tres cartas de un naipe común de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que a) todas las cartas sean de un mismo palo, b) al menos se saquen dos ases.

41. Encuentre la probabilidad de que un jugador de bridge reciba a) 9 cartas de un mismo palo b) al menos 9 cartas de un mismo palo.

42. Un espacio muestral consta de tres puntos muestrales con probabilidades asociadas dadas por $p, p^2$ y $4p - 1$. Encuentre el valor de $p$.

43. Se escagen al azar cuatro números entre 0 y 9. Encuentre la probabilidad de que a) todas sean diferentes, b) no más de dos sean iguales.

44. Se lanza un par de dados repetidamente. Encuentre la probabilidad de que por primera vez ocurra un 11 en el sexto lanzamiento.

45. ¿Cuál es el menor número de lanzamientos necesarios en el problema anterior de manera que la probabilidad de obtener 11 sea mayor de a) 0.5, b) 0.95?

46. Encuentre la probabilidad de obtener en un juego de póker a) una escalera flor: la cual conste de 10, jota,reyna, rey y as del mismo palo, b) un fuljan: que conste de tres cartas de un valor y dos de otro(como tres jotas y dos 10), c) todas las cartas diferentes, d) 4 ases.

47. La probabilidad de que un hombre acierte al blanco es 2/3. Si él dispara al blanco hasta que acierta por primera vez, encuentre la probabilidad de que le tomen 5 disparos para acertar al blanco.

48. Encuentre la probabilidad de que en un juego de bridge a) dos, b) tres, c) los cuatro jugadores tengan un palo completo.