Tema :

[redacted] Variación de parámetros ([redacted])

Sea la siguiente ecuacióndiferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

Ahora supongase que $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ son las soluciones a la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \ldots \circledast$$

¿Cómo hallar la solución particular?
Sol.
Sea $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \ldots \circledcirc$
donde $u_1 = u_1(x) y u_2 = u_2(x)$ son parámetros a encontrar derivemos a $\circledcirc$
$y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$
$y_p'' = u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$
sustituyendo lo anterior en $\circledast$
$u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + P(x)[u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'] + Q(x)[u_1 y_1 + u_2 y_2] = f(x)$

$u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + P(x)(u_1' y_1 + u_2' y_2) + u_1(y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1) + u_2(y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2) = f(x)$

$(u_1' y_1 + u_2' y_2)' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + P(x)[u_1' y_1 + u_2' y_2] = f(x)$

ahora bien,impongamos que se cumpla:
$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \ldots I$
$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \ldots II$

resulta ser un sistema de ecuaciones en las que las variables u_1' y u_2', al aplicar la regla de Cramer, tenemos que:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \ , \ u_2' = \frac{W_2}{W}$$

donde

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \ , \ W_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{bmatrix} \ , \ W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{bmatrix}$$

$$\therefore u_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx \ , \ u_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx$$

Por lo tanto la solución particular será:

$$y_p(x) = y_1 \int \frac{W_1}{W} dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} dx$$