Actividad 3 de la Unidad 2

Tema longitud de arco

Nombre: Brayan Ramirez Benítez

Fecha: 07/05/2020

Instrucciones: Resuelve los tres ejercicios que aparecen, recuerda revisar qué método emplearás para integrar.

1. Usa la fórmula de longitud de arco para hallar la longitud de la curva $y = 2x - 5, \quad 1 \leq x \leq 3$. Compruebe su respuesta observando que la curva es un segmento de recta y calcule su longitud mediante la fórmula de la distancia.

Debemos trabajar con X, así que utilizando

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Donde a = 1 y b = 3

Además, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

Por lo tanto

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 \; + (2)^2}\, dx$$

$$L = \int_1^3 \sqrt{5}\, dx$$

$$L = (\sqrt{5}x) \;\Big|_1^3$$

$$L = \left(\sqrt{5}(3)\right) - (\sqrt{5}(1))$$

$$L = 2\sqrt{5}$$

Ahora para utilizar la formula de la distancia necesitamos dos puntos, asi que evaluaremos la función en el intervalo

Para x = 3

$$y = 2(3) - 5$$
$$y = 6 - 5$$
$$y = 1$$

Para x = 1

$$y = 2(1) - 5$$
$$y = 2 - 5$$
$$y = -3$$

Entonces tenemos los puntos

P (3,1) y Q (1,-3)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - (-3))^2}$$

$$d = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$$
$$d = \sqrt{20}$$
$$d = \sqrt{(5)(4)}$$
$$d = 2\sqrt{5}$$

2. Calcular la longitud de arco de la función dada en el intervalo señalado

$y = 3x^{2/3} - 10$ de $A(8,2)$ a $B(27,17)$

Primero comprobaremos si la función esta definida en el intervalo 8<x<27

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f'(8) = \frac{2}{\sqrt[3]{8}}$$

$$f'(8) = 1$$

$$f'(27) = \frac{2}{\sqrt[3]{27}}$$

$$f'(27) = \frac{2}{3}$$

Debemos trabajar con X, así que utilizando

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Donde a = 8 y b = 27

Además, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{\frac{-1}{3}}$$

Por lo tanto

$$L = \int_8^{27} \sqrt{1 + (\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}})^2}\, dx$$

$$L = \int_8^{27} \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + 4}{x^{\frac{2}{3}}}}\, dx$$

$u = x^{\frac{2}{3}} + 4 \quad du = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} dx$

Sustituyendo en la integral

$$L = \int \sqrt{\frac{u}{x^{\frac{2}{3}}}} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{3}} du$$

$$L = \frac{3}{2}\int \sqrt{u}du$$

$$L = \frac{3}{2}(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})$$

Simplificando y regresando el cambio de variable

$$L = (x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} |_8^{27}$$

Evaluando de 8 a 27

$$L = ((27)^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} - ((8)^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}}$$

$$L = (9 + 4)^{\frac{3}{2}} - (4 + 4)^{\frac{3}{2}}$$

$$L = 13(13)^{\frac{1}{2}} - 16(2)^{\frac{1}{2}}$$

3. $y = \frac{X^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 2$

Primero comprobaremos si la función está definida en el intervalo

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$f'(1) = \frac{3}{4}$$

$$f'(2) = 4 - \frac{1}{16}$$

$$f'(2) = \frac{63}{16}$$

Debemos trabajar con X, así que utilizando

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Donde a = 1 y b = 2

Además, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

Por lo tanto

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (x^2 - \frac{1}{4x^2})^2}\, dx$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{x^4 + \frac{1}{16x^4} + \frac{1}{2}}\, dx$$

Simplificando

$$L = \int_{1}^{2} \sqrt{\frac{8x^4 + 16x^8 + 1}{16x^4}}\, dx$$

$$L = \int_{1}^{2} \frac{\sqrt{(2x^2 + 2x + 1)^2 (2x^2 - 2x + 1)^2}}{\sqrt{16x^4}}\, dx$$

$$L = \frac{1}{4}\int_{1}^{2} \frac{(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)}{x^2}\, dx$$

$$L = \frac{1}{4}\int_{1}^{2} \frac{4x^4 + 1}{x^2}\, dx$$

$$L = \frac{1}{4}\int_{1}^{2} 4x^2 + \frac{1}{x^2}\, dx$$

Integrando

$$L = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{x}\right) \Big|_{1}^{2}$$

$$L = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right) \Big|_{1}^{2}$$

Evaluando en el intervalo

$$L = \left(\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{4(2)}\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4(1)}\right)$$

$$L = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$L = \frac{7}{3} + \frac{1}{8}$$

$$L = \frac{59}{24}$$