1ª PARTE LISTA DE EJERCICIOS SEGUNDO DEPARTAMENTAL

ECUACIONES DIFERENCIALES

Cd de Mexico a 1° de Octubre del 2019

eramosm1400@alumno.ipn.mx

PROF. ENCARNACION SALINAS HDEZ

En los problemas 11 a 14 compruebe que el operador diferencial mencionado anula la función indicada.

11. D^4; $y = 10x^3 - 2x$
12. $2D - 1$; $y = 4e^{x/2}$
13. $(D - 2)(D + 5)$; $y = e^{2x} + 3e^{-5x}$
14. $D^2 + 64$; $y = 2\cos 8x - 5\,\text{sen}\, 8x$

En los problemas 15 a 26, determine un operador diferencial lineal que anule la función dada.

15. $1 + 6x - 2x^3$
16. $x^3(1 \quad 5x)$
17. $1 + 7e^{2x}$
18. $x + 3xe^{6x}$
19. $\cos 2x$
20. $1 \quad \text{sen}\, x$
21. $13x + 9x^2 - \text{sen}\, 4x$
22. $8x - \text{sen}\, x + 10\cos 5x$
23. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$
24. $(2 - e^x)^2$
25. $3 + e^x \cos 2x$
26. $e^{-x}\,\text{sen}\, x - e^{2x}\cos x$

En los problemas 27 a 34, determine funciones linealmente independientes que anulen el operador diferencial dado.

27. D^5
28. $D^2 + 4D$
29. $(D - 6)(2D + 3)$
30. $D^2 - 9D - 36$
31. $D^2 + 5$
32. $D^2 - 6D + 10$
33. $D^3 - 10D^2 + 25D$
34. $D^2(D - 5)(D - 7)$

En los problemas 35 a 64 resuelva la respectiva ecuación diferencial por el método de los coeficientes indeterminados.

35. $y'' - 9y = 54$
36. $2y'' - 7y' + 5y = -29$
37. $y'' + y' = 3$
38. $y''' + 2y'' + y' = 10$
39. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$
40. $y'' + 3y' = 4x - 5$
41. $y''' + y'' = 8x^2$
42. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$
43. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$
44. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$
45. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$
46. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$
47. $y'' + 25y = 6\,\text{sen}\, x$
48. $y'' + 4y = 4\cos x + 3\,\text{sen} x - 8$
49. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$
50. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$
51. $y'' - y = x^2e^x + 5$
52. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$
53. $y'' - 2y' + 5y = e^x\,\text{sen}\, x$
54. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\,\text{sen} 3x - \cos 3x)$
55. $y'' + 25y = 20\,\text{sen}\, 5x$
56. $y'' + y = 4\cos x - \text{sen}\, x$
57. $y'' + y' + y = x\,\text{sen}\, x$
58. $y'' + 4y = \cos^2 x$
59. $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$
60. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$
61. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

62. $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
63. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$ 64. $y^{(4)} - 4y'' = 5x^2 - e^{2x}$

Resuelva la ecuación diferencial de cada uno de los problemas 65 a 72, sujeta a las condiciones iniciales dadas.

65. $y'' - 64y = 16$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
66. $y'' + y' = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
67. $y'' - 5y' = x - 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
68. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
69. $y'' + y = 8\cos 2x - 4\,\text{sen}\,x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
70. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$
71. $y'' - 4y' + 8y = x^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$
72. $y^{(4)} - y''' = x + e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$

Problema para discusión

73. Suponga que L es un operador diferencial lineal factorizable, pero que tiene coeficientes variables. ¿Los factores de L se conmutan? Defienda su aseveración.

4.6 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

- *Forma reducida de una ecuación diferencial lineal, no homogénea y de segundo orden*
- *Una solución particular con parámetros variables*
- *Determinación por integración de parámetros variables*
- *El wronskiano* ■ *Ecuaciones diferenciales de orden superior*

El procedimiento que seguimos en la sección 2.3 para llegar a una solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{1}$$

en un intervalo se aplica también a ecuaciones lineales de orden superior. Para adaptar el método de **variación de parámetros** a una ecuación diferencial de segundo orden,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{2}$$

comenzaremos igual que en la sección 4.2; es decir, llevaremos la ecuación diferencial a su forma reducida

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{3}$$

en donde W es el wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y W_k es el determinante obtenido al sustituir la k-ésima columna del wronskiano por la columna

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x). \end{matrix}$$

Cuando $n = 2$ se obtiene (6).

Observación

i) El método de variación de parámetros tiene una clara ventaja sobre el de los coeficientes indeterminados, porque siempre llega a una solución particular, y_p, cuando se puede resolver la ecuación homogénea relacionada. Este método no se limita a una función $f(x)$ que sea una combinación de los cuatro tipos de funciones de la página 121. En las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables también se puede aplicar el método de la variación de parámetros, así el de los coeficientes indeterminados.

ii) En los problemas que siguen, no se debe vacilar en simplificar la forma de y_p. De acuerdo con la forma en que se haya llegado a las antiderivadas de u_1' y u_2', quizá el lector no llegue a la misma y_p que aparece en la parte de respuestas; por ejemplo, en el problema 3 tanto $y_p = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$ como $y_p = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$ son respuestas válidas. En cualquiera de los casos, la solución general $y = y_c + y_p$ se simplifica a $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$. ¿Por qué?

EJERCICIOS 4.6

Resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 a 24 por variación de parámetros. Proponga un intervalo en que la solución general esté definida.

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + y = \tan x$
3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$
4. $y'' + y = \sec x \tan x$
5. $y'' + y = \cos^2 x$
6. $y'' + y = \sec^2 x$
7. $y'' - y = \cosh x$
8. $y'' \quad y = \operatorname{senh} 2x$
9. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$
10. $y'' - 9y = \dfrac{9x}{e^{3x}}$
11. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
12. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^x}$
13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$
14. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$
15. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$
17. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$
18. $y'' + 10y' + 25y = \dfrac{e^{-10x}}{x^2}$
19. $3y'' - 6y' + 30y = e^x \tan 3x$
20. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

21. $y''' + y' = \tan x$

22. $y''' + 4y' = \sec 2x$

23. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$

24. $2y''' - 6y'' = x^2$

En los problemas 25 a 28 resuelva por variación de parámetros la ecuación respectiva, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

25. $4y'' - y = xe^{x/2}$

26. $2y'' + y' - y = x + 1$

27. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

28. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

29. Si $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ y $y_2 = x^{-1/2}$ sen x forman un conjunto fundamental de soluciones de $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ en $(0, \infty)$, determine la solución general de

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}.$$

30. Si $y_1 = \cos(\ln x)$ y $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$ son soluciones conocidas, linealmente independientes, de $x^2y'' + xy' + y = 0$, en $(0, \infty)$, determine una solución particular de

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x).$$

Problemas para discusión

31. Determine la solución general de la ecuación diferencial del problema 30. Diga por qué el intervalo de validez de la solución general no es $(0, \infty)$.

32. Describa cómo se pueden combinar los métodos de coeficientes indeterminados y de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y' = 4x^2 - 3 + \frac{e^x}{x}.$$

4.7 ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER

- *Una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables especiales*
- *Ecuación auxiliar* ■ *Raíces de una ecuación auxiliar cuadrática*
- *Formas de la solución general de una ecuación diferencial de Cauchy-Euler, lineal, homogénea y de segundo orden* ■ *Uso de variación de parámetros*
- *Ecuaciones diferenciales de orden superior* ■ *Reducción a ecuaciones con coeficientes constantes*

La facilidad relativa con que pudimos determinar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes en las secciones anteriores, en general no se consigue con las ecuaciones lineales con coeficientes variables. En el capítulo 6, veremos que cuando una ecuación diferencial lineal tiene coeficientes variables, lo mejor que podemos esperar, por lo general, es determinar una solución en forma de serie infinita. Sin embargo, el tipo de ecuación diferencial que examinaremos en esta sección es una excepción a la regla: se trata de una ecuación con coeficientes variables cuya solución general siempre se puede expresar en términos de potencias de x, senos, cosenos y funciones logarítmicas y

EJERCICIOS 4.4

1. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 3$
3. $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$
5. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$
7. $y = c_1 \cos\sqrt{3}\,x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,x + (-4x^2 + 4x - \frac{4}{3})e^{3x}$
9. $y = c_1 + c_2e^x + 3x$
11. $y = c_1e^{x/2} + c_2xe^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2e^{x/2}$
13. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}x \cos 2x$
15. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$
17. $y = c_1e^x \cos 2x + c_2e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}xe^x \operatorname{sen} 2x$
19. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\operatorname{sen} 2x - \frac{9}{25}\cos 2x$
21. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{6x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{37}\cos x + \frac{1}{37}\operatorname{sen} x$
23. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x$
25. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x + x^2 - 2x - 3$
27. $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}$
29. $y = -200 + 200e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$
31. $y = -10e^{-2x} \cos x + 9e^{-2x} \operatorname{sen} x + 7e^{-4x}$
33. $x = \dfrac{F_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t - \dfrac{F_0}{2\omega}t \cos \omega t$
35. $y = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2e^x + \frac{1}{2}e^{5x}$
37. $y = 6 \cos x - 6(\cot 1)\operatorname{sen} x + x^2 - 1$
39. $y = \begin{cases} \cos 2x + \frac{5}{6}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{5}{6}\operatorname{sen} 2x, & x > \pi/2 \end{cases}$

EJERCICIOS 4.5

1. $(3D - 2)(3D + 2)y = \operatorname{sen} x$
3. $(D - 6)(D + 2)y = x - 6$ 5. $D(D + 5)^2y = e^x$
7. $(D - 1)(D - 2)(D + 5)y = xe^{-x}$
9. $D(D + 2)(D^2 - 2D + 4)y = 4$ 15. D^4 17. $D(D - 2)$
19. $D^2 + 4$ 21. $D^3(D^2 + 16)$ 23. $(D + 1)(D - 1)^3$
25. $D(D^2 - 2D + 5)$ 27. $1, x, x^2, x^3, x^4$ 29. $e^{6x}, e^{-3x/2}$
31. $\cos\sqrt{5}\,x, \operatorname{sen}\sqrt{5}\,x$ 33. $1, e^{5x}, xe^{5x}$
35. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{3x} - 6$ 37. $y = c_1 + c_2e^{-x} + 3x$
39. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$
41. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2$
43. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x} + \frac{1}{7}xe^{4x}$
45. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - e^x + 3$
47. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$
49. $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x} - \frac{1}{49}xe^{4x} + \frac{2}{343}e^{4x}$
51. $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{1}{4}x^2e^x + \frac{1}{4}xe^x - 5$
53. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{3}e^x \operatorname{sen} x$
55. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x - 2x \cos 5x$
57. $y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \operatorname{sen} x + 2\cos x - x \cos x$
59. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-8x} + \frac{11}{256}x^2 + \frac{7}{32}x^3 - \frac{1}{16}x^4$
61. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x + x - 13$
63. $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{2}x^2$
65. $y = \frac{5}{8}e^{-8x} + \frac{5}{8}e^{8x} - \frac{1}{4}$
67. $y = -\frac{41}{125} + \frac{41}{125}e^{5x} - \frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x$
69. $y = -\pi \cos x - \frac{11}{3}\operatorname{sen} x - \frac{8}{3}\cos 2x + 2x \cos x$
71. $y = 2e^{2x}\cos 2x - \frac{3}{64}e^{2x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x$

EJERCICIOS 4.6

1. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$; $(-\pi/2, \pi/2)$
3. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x = c_1 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x$; $(-\infty, \infty)$
5. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$; $(-\infty, \infty)$
7. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x} = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x \operatorname{senh} x$; $(-\infty, \infty)$
9. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \dfrac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}\,dt\right)$, $x_0 > 0$; $(0, \infty)$
11. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x)$; $(-\infty, \infty)$
13. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$; $(-\infty, \infty)$
15. $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}e^x \ln(1 + x^2) + xe^x \tan^{-1}x$; $(-\infty, \infty)$
17. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}$; $(0, \infty)$
19. $y = c_1e^x \cos 3x + c_2e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{27}e^x \cos 3x \ln|\sec 3x + \tan 3x|$; $(-\pi/6, \pi/6)$
21. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \tan x|$; $(-\pi/2, \pi/2)$
23. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-x} + \frac{1}{8}e^{3x}$; $(-\infty, \infty)$
25. $y = \frac{1}{4}e^{-x/2} + \frac{3}{4}e^{x/2} + \frac{1}{8}x^2e^{x/2} - \frac{1}{4}xe^{x/2}$
27. $y = \frac{4}{9}e^{-4x} + \frac{25}{36}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$
29. $y = c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x + x^{-1/2}$

EJERCICIOS 4.7

1. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$ 3. $y = c_1 + c_2 \ln x$
5. $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)$
7. $y = c_1x^{(2-\sqrt{6})} + c_2x^{(2+\sqrt{6})}$
9. $y_1 = c_1 \cos(\frac{1}{5}\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{5}\ln x)$
11. $y = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}\ln x$
13. $y = x[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)]$

Segunda Parte de la Lista de Ejercicios 2do Departamental a 8/10/2019
"Ecuaciones Diferenciales"
Prof. Encarnación Salinas

Resuelva los problemas 29 a 34 por el método de variación de parámetros.

29. $xy'' + y' = x$
30. $xy'' - 4y' = x^4$
31. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$
32. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$
33. $x^2y'' - xy' + y = 2x$
34. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$

En los problemas 35 a 40 use la sustitución $x = e^t$ para transformar la ecuación respectiva de Cauchy-Euler en una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Resuelva la ecuación original a través de la nueva ecuación mediante los procedimientos de las secciones 4.4 y 4.5.

35. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10x\dfrac{dy}{dx} + 8y = x^2$
36. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$
37. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$
38. $2x^2y'' - 3xy' - 3y = 1 + 2x + x^2$
39. $x^2y'' + 9xy' - 20y = \dfrac{5}{x^3}$
40. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6x\dfrac{dy}{dx} - 6y = 3 + \ln x^3$

Problema *para discusión*

41. El valor del primer coeficiente, a_nx^n, de toda ecuación de Cauchy-Euler es cero cuando $x = 0$. Se dice que **0 es un punto singular** de la ecuación diferencial (véase sec. 6.2). Un punto singular es potencialmente problemático porque las soluciones de la ecuación diferencial *pueden* llegar a ser no acotadas o presentar algún comportamiento peculiar cerca del punto. Describa la naturaleza de los pares de raíces m_1 y m_2 de la ecuación auxiliar de (1) en cada uno de los siguientes casos: 1) reales distintas (por ejemplo, m_1 positiva y m_2 positiva); 2) reales repetidas, y 3) complejas conjugadas. Determine las soluciones correspondientes y, con una calculadora graficadora o software graficador, trace 'esas soluciones. Describa el comportamiento de esas soluciones cuando $x \to 0^+$.

4.8 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

■ *Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales* ■ *Operadores diferenciales lineales*
■ *Eliminación sistemática* ■ *Solución con determinantes*

Las ecuaciones diferenciales ordinarias simultaneas consisten en dos o más ecuaciones con derivadas de dos o más funciones desconocidas de **una** sola variable independiente. Si x, y y z son funciones de la variable t,

$$4\frac{d^2x}{dt^2} = -5x + y \qquad\qquad x' - 3x + y' + z' = 5$$

$$\text{y} \qquad\qquad x' - y' + 2z' = t^2$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2} = 3x - y \qquad\qquad x + y' - 6z' = t - 1$$

son dos ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas.

no tienen respuesta fácil cuando se trata de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, pero algunos tipos de estas ecuaciones se prestan a un **análisis** cualitativo sistemático. Las ecuaciones no lineales de segundo orden de la forma

$$F(y, y', y'') = 0 \qquad 0 \text{ sea} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y, y')$$

(esto es, ecuaciones diferenciales sin dependencia explícita de la variable independiente x) se llaman **autónomas.** La **ecuación** diferencial del ejemplo 2 es autónoma; la ecuación del ejemplo 3 es no **autónoma.**

EJERCICIOS 4.9

En los problemas 1 y 2 compruebe que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada, pero que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ no lo es, en general.

1. $(y'')^2 = y^2$; $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$ 　　 *2.* $yy'' = \frac{1}{2}(y')^2$; $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$

Resuelva la ecuación diferencial correspondiente a cada uno de los problemas 3 a 8, con la sustitución u = y'.

3. y" + (y')" + 1 = 0 　　 **4.** y $''$ = 1 + (y')"

5. $x^2y'' + (y')' = 0$ 　　 *6.* $(y + 1)y'' = (y')^2$

7. $y'' + 2y(y')^3 = 0$ 　　 8. y^2y'' = y'

9. Determine la solución del problema de valor inicial

$$y'' + yy' = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(O) = -1.$$

Use un programa ***ODE solver*** para **graficar** la curva de solución. Trace la solución **explícita** con una calculadora graficadora. Determine un **intervalo** de validez de la **solución.**

10. Establezca dos soluciones al problema de valor inicial

$$(y'')^2 + (y')^2 = 1, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Use un ***ODE solver*** para trazar las curvas solución.

En los problemas **11** y 12, demuestre que la sustitución u = y' conduce a una **ecuación** de Bernoulli. Resuelva esa ecuación **(véase Sec.** 2.4).

11. xy" = y' + $(y')^3$ 　　 **12.** xy'' = y' + $x(y')^2$

En los problemas 13 a 16 proceda como en el ejemplo 3 para obtener los seis primeros **términos** distintos de cero de una solución en serie de Taylor, centrada en 0, del problema respectivo de valor inicial. Use un *ODE solver* y una calculadora graficadora para comparar la curva solución y la gráfica del polinomio de Taylor.

13. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

14. $y'' + y^2 = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

15. $y'' = x^2 + y^2 - 2y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

16. $y'' = e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

17. En **cálculo** diferencial, la curvatura de una curva representada por $y = f(x)$ se **define** como sigue:

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Determine una función, $y = f(x)$, para la cual $\kappa = 1$. *[Sugerencia:* por simplicidad, no tenga en cuenta las constantes de integración.]

18. Un modelo **matemático** de la posición, $x(t)$, de un cuerpo con movimiento rectilíneo en el eje x dentro de un campo de fuerzas que **varían** con la inversa del cuadrado de la distancia es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2}{x^2}.$$

Suponga que cuando $t = 0$, el cuerpo parte del reposo en la **posición** $x = x_0$, $x_0 > 0$. Demuestre que la velocidad del objeto en cualquier momento está definida por

$$\frac{v^2}{2} = k^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Use esa ecuación en un sistema algebraico de computación para llevar a cabo la integración y expresar al tiempo t en función de x.

Problemas poro discusión

19. Un modelo matemático de la posición, $x(t)$, de un objeto en movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{sen} x = 0.$$

Use un *ODE solver* a fm de investigar las soluciones de la ecuación, sujetas a $x(0) = 0$, $x'(0) = \beta$, $\beta \geq 0$. Describa el movimiento del objeto **cuando** $t \geq 0$ y para diversos valores de β. Investigue la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \operatorname{sen} x = 0$$

del mismo modo. Describa una interpretación **física** posible del término dx/dt.

20. Vimos que sen x, **cos** x, e^x y e^{-x} son cuatro soluciones de la ecuación no lineal $(y'')^2 - y^2 = 0$. Sin tratar de resolverla, describa cómo determinar estas soluciones explícitas con nuestros

15. $y = x^{-1/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ln x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ln x\right)\right]$

17. $y = c_1x^3 + c_2\cos(\sqrt{2}\ln x) + c_3\operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln x)$

19. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2 + c_3x^4$

21. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^{-3}$

23. $y = 2 - 2x^{-2}$ **25.** $y = \cos(\ln x) + 2\operatorname{sen}(\ln x)$

27. $y = 2(-x)^{1/2} - 5(-x)^{1/2}\ln(-x)$

29. $y = c_1 + c_2\ln x + \dfrac{x^2}{4}$

31. $y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$

33. $y = c_1x + c_2x\ln x + x(\ln x)^2$

35. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-8} + \frac{1}{30}x^2$

37. $y = x^2[c_1\cos(3\ln x) + c_2\operatorname{sen}(3\ln x)] + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$

39. $y = c_1x^2 + c_2x^{-10} - \frac{1}{7}x^{-3}$

EJERCICIOS 4.8

1. $x = c_1e^t + c_2te^t$
$y = (c_1 - c_2)e^t + c^2te^t$

3. $x = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + t + 1$
$y = c_1\operatorname{sen} t - c_2\cos t + t - 1$

5. $x = \frac{1}{2}c_1\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}c_2\cos t - 2c_3\operatorname{sen}\sqrt{6}\,t - 2c_4\cos\sqrt{6}\,t$
$y = c_1\operatorname{sen} t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen}\sqrt{6}\,t + c_4\cos\sqrt{6}\,t$

7. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3\operatorname{sen} 2t + c_4\cos 2t + \frac{1}{5}e^t$
$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\operatorname{sen} 2t - c_4\cos 2t - \frac{1}{5}e$

9. $x = c_1 - c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + \frac{17}{15}e^{3t}$
$y = c_1 + c_2\operatorname{sen} t + c_3\cos t - \frac{4}{15}e^{3t}$

11. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$y = \left(-\frac{3}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$
$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{3}{2}c_3\right)e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

13. $x = c_1e^{4t} + \frac{4}{3}e^t$
$y = -\frac{3}{4}c_1e^{4t} + c_2 + 5e^t$

15. $x = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
$y = (c_1 - c_2 + 2) + (c_2 + 1)t + c_4e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$

17. $x = c_1e^t + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$y = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$
$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$
$$z = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$
$$+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

19. $x = -6c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} + 2c_3e^{3t}$
$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
$z = 5c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$

21. $x = -c_1e^{-t} + c_2 + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t$
$y = c_1e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5$

23. $x = e^{-3t+3} + te^{-3t+3}$
$y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3}$

25. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$
$m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$
$x = c_1t + c_2$
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3t + c_4$

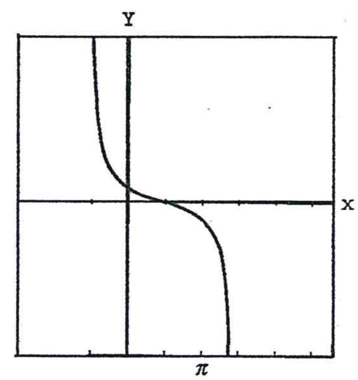
EJERCICIOS 4.9

3. $y = \ln|\cos(c_1 - x)| + c_2$

5. $y = \dfrac{1}{c_1^2}\ln|c_1x + 1| - \dfrac{1}{c_1}x + c_2$

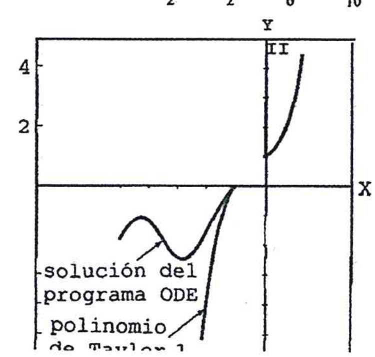
7. $\frac{1}{3}y^3 - c_1y = x + c_2$

9. $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right), -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$

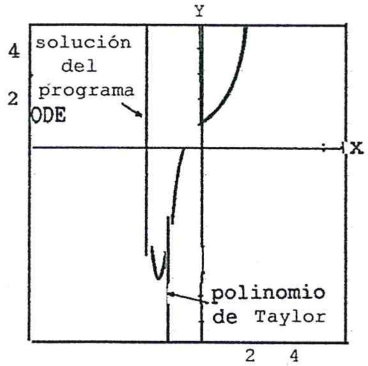


11. $y = -\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1 - c_1^2x^2} + c_2$

13. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots$



15. $y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \cdot$



17. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

EJERCICIOS DE REPASO

1. $y = 0$

3. falso. Las funciones $f_1(x) = 0$ y $f_2(x) = e^x$ son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$, pero f_2 no es múltiplo constante de f_1.

5. $(-\infty, 0)$; $(0, \infty)$ 7. falso 9. $y_p = A + Bxe^x$

11. $y_2 = \operatorname{sen} 2x$ 13. $y = c_1 e^{(1+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{3})x}$

15. $y = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 x e^{-5x}$

17. $y = c_1 e^{-x/3} + e^{-3x/2}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

19. $y = c_1 x^{-1/3} + c_2 x^{1/2}$

21. $y = e^{3x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}$

23. $y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{4}{3}x$

25. $y = e^{x-\pi} \cos x$ **27.** $y = x^2 + 4$

29. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) - e^x \cos x \ln|\sec x + \tan x|$

31. $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + x^4 - x^2 \ln x$

33. $y = \frac{2}{5}e^{x/2} - \frac{2}{5}e^{3x} + xe^{3x} - 4$

35. $x = -c_1 e^t - \frac{3}{2}c_2 e^{2t} + \frac{5}{2}$
$y = -c_1 e^t - c_2 e^{2t} - 3$

37. $x = c_1 e^t + c_2 e^{5t} + te^t$
$y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t} - te^t + 2e^t$

EJERCICIOS 5.1

1. $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}$ **3.** $x(t) = -\frac{1}{4} \cos 4\sqrt{6}\, t$

5. **a)** $x\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}$; $x\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}$; $x\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$; $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $x\left(\frac{9\pi}{32}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) 4 ft/s; hacia abajo

c) $t = \frac{(2n+1)\pi}{16}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

7. **a)** la masa de 20 kg
b) la masa de 20 kg; la masa de 50 kg
c) $t = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; en la posición de equilibrio; la masa de 50 kg se mueve hacia arriba, mientras que la de 20 kg se mueve hacia arriba cuando n es par, y hacia abajo cuando n es impar.

9. $x(t) = \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2t = \frac{\sqrt{13}}{4} \operatorname{sen}(2t + 0.05880)$

11. a) $x(t) = -\frac{2}{3} \cos 10t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 10t = \frac{5}{6} \operatorname{sen}(10t - 0.927)$

b) $\frac{5}{6}$ ft; $\frac{\pi}{5}$

c) 15 ciclos

d) 0.721 s

e) $\frac{(2n+1)\pi}{20} + 0.0927$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

f) $x(3) = -0.597$ ft

g) $x'(3) = -5.814$ ft/s

h) $x''(3) = 59.702$ ft/s^2

i) $\pm 8\frac{1}{3}$ ft/s

j) $0.1451 + \frac{n\pi}{5}$; $0.3545 + \frac{n\pi}{5}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

k) $0.3545 + \frac{n\pi}{5}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

13. 120 lb/ft; $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{sen} 8\sqrt{3}\, t$

17. **a)** arriba **b)** hacia arriba

19. **a)** abajo **b)** hacia arriba

21. $\frac{1}{4}s$; $\frac{1}{2}s$, $x(\frac{1}{2}) = e^{-2}$; esto es, el contrapeso está, aproximadamente, a 0.14 ft abajo de la posición de equilibrio.

23. **a)** $x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$
b) $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$

25. **a)** $x(t) = e^{-2t}(-\cos 4t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4t)$
b) $x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-2t} \operatorname{sen}(4t + 4.249)$
c) $t = 1.294$s