Formulario

EL-4701 Modelos de Sistemas

Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Prof.: Dr. Pablo Alvarado Moya

$$\sum_{n=0}^{M} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{M+1}}{1-\alpha} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) \pm \cos(A)\operatorname{sen}(B) \qquad \cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$$

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2}(1+\cos(2A)) \qquad \operatorname{sen}^2(A) = \frac{1}{2}(1-\cos(2A))$$

$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right) \qquad \cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right)$$

$$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos(A)\right)} \qquad \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos(A)\right)}$$

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\operatorname{sen}(\omega)$$

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2} \qquad \operatorname{sen}(\omega) = \frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}$$

Descomposición en funciones simétricas

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t), \qquad f_e(t) = f_e(-t), \quad f_o(t) = -f_o(-t)$$

$$f_e(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} \qquad f_o(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

Mapeos

Círculo centrado en z_0 y radio r:	$\lvert z-z_0\rvert = r$
Recta mediatriz a segmento entre a y b:	$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$
Mapeo lineal:	$w = \alpha z + \beta$
Mapeo de inversión:	$w = 1/z$
Mapeo bilineal:	$w = \frac{az+b}{cz+d} = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z+\beta}$, $\lambda = a/c$, $\mu = bc-ad$, $\alpha = c^2$, $\beta = cd$

Derivación compleja

Para $f(z = x+jy) = u(x,y) + jv(x,y)$.

Ecuaciones de Cauchy Riemann $\exists f'(z) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Funciones conjugadas $u(x,y)$ y $v(x,y)$ si cumplen Ec. Cauchy-Riemann.

Función armónica: $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$

Mapeo conforme: $\exists f'(z), f'(z) \neq 0$

Series

Radio de convergencia R y razón de D'Alambert para $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Serie de Taylor: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$

Serie de Laurent: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

Residuo: $a_{-1} = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right] \right\}$

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \frac{z^n}{n!} + \dots & ; |z| < \infty \\
\operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & ; |z| < \infty \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots & ; |z| < \infty \\
\frac{1}{z-a} &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} & \text{para } |z-z_0| > |a-z_0| \\ \displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} & \text{para } |z-z_0| < |a-z_0| \end{cases}
\end{aligned}$$

Integración compleja

Teorema de la integral de Cauchy: $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz = 0$ si $\exists f'(z)$ dentro y sobre C.

Fórmula de la integral de Cauchy: $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)\frac{2\pi j}{n!}$

Teorema del residuo: $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} a_{-1}^{(i)}$

Series de Fourier

Producto interno $\langle u_k(t), x(t)\rangle = \displaystyle\int_a^b {u_k}^*(t) x(t)\,dt$

$x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t)$ con $\{u_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ una base funcional ortogonal, $c_k \in \mathbb{C}$.

Generalizada: $c_k = \dfrac{\langle u_k(t), x(t)\rangle}{\|u_k(t)\|^2}$

Fourier exponencial compleja (para funciones periódicas de periodo T_p).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \qquad c_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)\,dt$$

Fourier cosenoidal

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k) \qquad \tilde{c}_k = 2|c_k|,\ \theta_k = \angle c_k,\ k > 0$$

Fourier senoidal

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\omega_0 kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\omega_0 kt$$

$$a_k = \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\cos\omega_0 kt\,dt = 2|c_k|\cos(\theta_k) \quad b_k = \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\operatorname{sen}\omega_0 kt\,dt = -2|c_k|\operatorname{sen}(\theta_k)$$

Propiedades de la Serie de Fourier (periodo T_p, $\omega_0 = 2\pi/T_p$)

Propiedad	Señal en el tiempo	Coeficientes
	$x(t)$	c_k
	$x_1(t)$	c_{1_k}
	$x_2(t)$	c_{2_k}
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 c_{1_k} + \alpha_2 c_{2_k}$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$c_k = \frac{2}{T_p}\int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t)\cos(\omega_0 kt)\,dt$ $c_k \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$c_k = -\frac{2j}{T_p}\int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t)\operatorname{sen}(\omega_0 kt)\,dt$ $c_k \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$c_k = {c^*}_{-k}$
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-j\omega_0 k\tau} c_k$
Conjugación	$x^*(t)$	${c^*}_{-k}$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	c_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$	c_k
Convolución periódica	$\int_{T_p} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$	$T_p c_{1_k} c_{2_k}$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1_l} c_{2_{k-l}}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 c_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$, $c_0 = 0$	$\frac{c_k}{jk\omega_0}$
Relación de Parseval	$\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \lvert x(t)\rvert^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$	

Transformada de Fourier

Transformada directa: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$

Transformada inversa: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$

Algunas Transformadas de Fourier

Nombre	Señal en el tiempo	Transformada
Transformación	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Escalon unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Impulso rectangular	$\frac{1}{\tau}[u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)]$	$e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}\,\mathrm{sa}(\omega\tau/2)$
Exponencial	$e^{-at}u(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
Exponencial por rampa	$e^{-at}tu(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
Laplaciana	$e^{-a\lvert t\rvert}$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
Exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
Constante	c	$2\pi c\delta(\omega)$
Función periódica	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$
Impulso gaussiano	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$	$e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2}$
Seno	$\mathrm{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$
Coseno	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$

Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(j\omega)$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$2\int_0^\infty x(t)\cos(\omega t)\,dt$
		$X(j\omega) \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$-2j\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt$
		$X(j\omega) \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
Dualidad	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-j\omega\tau} X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j\omega - j\omega_0)$
Modulación	$\cos(\omega_0 t) x(t)$	$\frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\dfrac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\,d\tau$	$X_1(j\omega) X_2(j\omega)$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\dfrac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Diferenciación	$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
	$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
	$tx(t)$	$j\dfrac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$	$\dfrac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega)\rvert^2\,d\omega$	

Transformada de Laplace

Bilateral: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$ Inversa: $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$

Propiedades de la Transformada Bilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$\geq R$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$\geq R$
	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$

Transformadas Bilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC	Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > a$
$-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma < a$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(t)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma > a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma < a$	$\delta(t-\tau)$	$e^{-s\tau}$	todo s
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$	$[\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[e^{at}\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$	$[e^{at}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n	todo s			

Transformada Unilateral de Laplace: $X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$

Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t) = x(t)u(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t) = x_1(t)u(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t) = x_2(t)u(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Escalamiento en el tiempo	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$\geq R$
Diferenciación múltiple	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$s^n X(s)$	
		$-\sum_{i=1}^{n} s^{n-i}x^{(i-1)}(0^-)$	
Diferenciación en s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$
Teorema de valor inicial	$x(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sX(s)$	
Teorema de valor final	$\lim_{t\to\infty} x(t)$	$\lim_{s\to 0} sX(s)$	

Transformadas Unilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC	Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s	1	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma > a$	$\delta(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	todo s
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$	$\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$e^{at}\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$	$e^{at}\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n	todo s			

Propiedades de la transformada z bilateral.

Propiedad	Dominio n	Dominio z	ROC
Notación	$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$	$R = \{z \mid r_2 < \lvert z\rvert < r_1\}$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	por lo menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$R \setminus \{0\}$ si $k > 0$ y $R \setminus \{\infty\}$ si $k < 0$
Escalado en z	$\alpha^n x(n)$	$X(\alpha^{-1}z)$	$\lvert\alpha\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert r_1$
Reflexión en n	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z\rvert < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
Parte real	$\mathrm{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye R
Parte imaginaria	$\mathrm{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye R
Derivación en z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Por lo menos $R_1 \cap R_2$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	

Propiedades de la transformada z unilateral.

Notación	$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}$	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$	$R = \{z \mid \lvert z\rvert > r_2\}$
Retardo temporal	$x(n-k), k > 0$	$z^{-k}X(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n) z^{n-k}$	$R \setminus \{0\}$
Adelanto temporal	$x(n+k), k > 0$	$z^{k}X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{k-n}$	R
Teorema del valor final		$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	

Transformada z bilateral de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano z
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-(a^n)u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$-n(a^n)u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$

Transformada z unilateral de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano z
1	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
na^n	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)$	$\frac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)$	$\frac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$