Apuntes del Programa de Probabilidad y Estadística

Ricardo Ceballos Sebastián

3 de diciembre de 2020

Índice general

Capítulo 4

Distribución de varias variables aleatorias

En el capítulo 2 se estudiaron las funciones de probabilidad para variables aleatorias discretas y las funciones de densidad que corresponde a las variables aleatorias continuas. En ambos casos las funciones solo dependían de una variable; sin embargo, existen situaciones en las cuales, para un experimento aleatorio dado cuyo espacio muestral es S, es necesario contar o medir más de una variable aleatoria; por ejemplo, los médicos requieren llevar un registro de la edad, los pesos y las alturas de los niños para detectar posibles desórdenes en la salud de los mismos. Por lo anterior, es necesario generalizar los conceptos estudiados en el capítulo 2 y así poder analizar experimentos que requieran del manejo de dos o más variables aleatorias.

En las siguientes secciones se establecerán los conceptos fundamentales para variables aleatorias bidimensionales. La generalización de los conceptos se abordarán en la sección 4.4.2

4.1. Probabilidad conjunta y marginal

Definición 4.1.1 (Variable aleatoria bidimensional) *Si X y Y son dos variables aleatorias definidas en un espacio muestral S y si (X,Y) se define como*

$$\begin{aligned} (X,Y) &: S \to \mathbb{R}^2, \\ (X,Y)(s) &= (X(s),Y(s)), \quad \forall\, s \in S. \end{aligned}$$

Se dice que (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional.
Si X y Y son Variables aleatorias discretas, entonces (X,Y) es una variable

aleatoria bidimensional discreta; Si tanto X como Y son variables aleatorias continuas, entonces (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua; en cualquier otro caso, (X, Y) será una variable aleatoria bidimensional mixta.[1]

El recorrido de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) se denota por R_{XY} y está definido como,

$$R_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (X(s), Y(s)) = (x, y) \text{ para algún } s \in S\} \tag{4.1}$$

En la figura 4.1 se muestra una representación esquemática del concepto anterior.

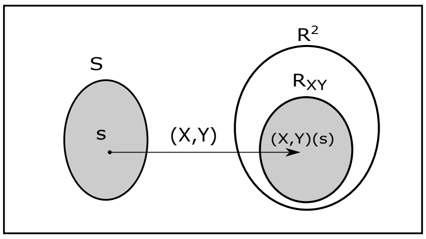


Figura 4.1: Representación esquemática de una variable bidimensional (X,Y)

Ejemplo 4.1.1 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en extraer una tras otra, sin reemplazo, dos esferas de una urna que contiene 10 esferas blancas y 15 negras. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de esferas blancas y Y la variable aleatoria que cuenta el número de esferas negras, entonces (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta. El recorrido de (X, Y) es un conjunto discreto de puntos contenidos en $\mathbb{R}^2$.*

Ejemplo 4.1.2 *Considérese el experimento que consiste en determinar los pesos y las alturas de un grupo de 30 estudiantes que toman una clase de matemáticas. Si W es la variable aleatoria que mide el peso y H la variable aleatoria que mide la altura, entonces (W,H) es una variable aleatoria bidimensional continua. El recorrido de (W,H) es un conjunto de puntos contenidos en $\mathbb{R}^2$.*

Notación: Si (X, Y) es una variable bidimensional discreta, se denota como $P(X = x, Y = y)$ a la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X asuma el valor particular x, mientras que la variable aleatoria discreta Y asuma el valor particular y.

[1] En este trabajo no se considerarán las variables aleatorias bidimensionales mixtas.

Definición 4.1.2 (Función de probabilidad conjunta) *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, se conoce como función de probabilidad conjunta de X y Y, y se denota por f(x,y), a la función que asigna la probabilidad P(X=x, Y=y) a cada pareja de valores (x,y) en el recorrido de (X,Y); es decir,*

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y), \quad \forall\,(x,y) \text{ en el recorrido de (X,Y).} \tag{4.2}$$

La función de probabilidad conjunta debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $f(x,y) \geq 0$, *para todo* $x \in R_X$ *y* , $y \in R_Y$.
2. $\displaystyle\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} f(x,y) = 1.$

Las sumas, en la condición 2, deben realizarse sobre todos elementos x en el recorrido de la variable aleatoria X y sobre todos los elementos y que se encuentren en el recorrido de Y. De manera más explícita, si $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, mientras que $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) = 1. \tag{4.3}$$

Si los recorridos de las variables aleatorias X y Y tienen infinitos elementos, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1. \tag{4.4}$$

En el caso de que X y Y tengan recorridos finitos, resulta conveniente construir una tabla, como se muestra a continuación, para representar a la función de probabilidad conjunta.

X/Y	x_1	x_2	$\dots$	x_n	
y_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_2,y_1)$	$\dots$	$f(x_n,y_1)$	$f_2(y_1)$
y_2	$f(x_1,y_2)$	$f(x_2,y_2)$	$\dots$	$f(x_n,y_2)$	$f_2(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$f(x_1,y_m)$	$f(x_2,y_m)$	$\dots$	$f(x_n,y_m)$	$f_2(y_m)$
	$f_1(x_1)$	$f_1(x_2)$	$\dots$	$f_1(x_n)$	Gran Total=1

Tabla 4.1: Representación tabular de la función de probabilidad conjunta

Ejemplo 4.1.3 *Considérese el experimento aleatorio que consiste lanzar un dado 2 veces. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de 5 y Y la variable aleatoria que cuenta el número de 6 en el experimento, determine la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y. Supóngase que el dado es normal y no está cargado.*

Solución: Las variables aleatorias X y Y asumen los valores 0, 1 y 2. Como se mencionó anteriormente, es conveniente representar a la función de probabilidad conjunta mediante la siguiente tabla:

X/Y	0	1	2	
0	f(0,0)	f(1,0)	f(2, 0)	
1	f(0,1)	f(1,1)	f(2,1)	
2	f(0,2)	f(1,2)	f(2,2)	Gran Total

Tabla 4.2: Representación de la función de probabilidad conjunta

Debido a que el experimento aleatorio está limitado a 2 lanzamientos, entonces los eventos $(X = 1, Y = 2)$, $(X = 2, Y = 1)$ $(X = 2, 2)$ son eventos imposibles, de manera que $f(1,2) = f(2,1) = f(2,2) = 0$. Las demás probabilidades conjuntas se determinan de acuerdo con el ejemplo **??**.

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 16/36, \\ f(1,0) &= 8/36, \\ f(2,0) &= 1/36, \\ f(0,1) &= 8/36, \\ f(1,1) &= 2/36, \\ f(0,2) &= 1/36. \end{aligned}$$

Dado que $f(x,y)$ es una función de probabilidad, es importante verificar que los valores que asume sean positivos y que la suma de todas las probabilidades sea a la unidad, lo que en la tabla 4.1 se indica como el Gran Total. La tabla que representa a la función de probabilidad conjunta, para este ejemplo, es:

X/Y	0	1	2	
0	16/36	8/36	1/36	
1	8/36	2/36	0	
2	1/36	0	0	1

Tabla 4.3: Representación tabular de la función de probabilidad conjunta

En la tabla 4.1 se reservaron un último renglón y una última columna, las cuales se denotaron como $f_1(x)$ y $f_2(y)$, respectivamente. Estas funciones se conocen como funciones de probabilidades marginales y se definen a continuación:

Definición 4.1.3 (Funciones de probabilidades marginales) *Supóngase (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta f(x,y). Si a cada valor x de la variable aleatoria X, se le asigna la suma de las probabilidades conjuntas sobre todos los valores permitidos de la variable aleatoria Y, se obtiene la función de probabilidad marginal para la variable aleatoria X, es decir,*

$$f_1(x) = \sum_{y \in R_Y} f(x,y) f(x,y), \quad x \in R_X. \tag{4.5}$$

De manera análoga, si a cada valor y de la variable aleatoria Y, se le asigna la suma de las probabilidades conjuntas sobre todos los valores de la variable aleatoria X, se obtiene la función de probabilidad marginal de la variable aleatoria Y; es decir,

$$f_2(y) = \sum_{x \in R_X} f(x,y), \quad y \in R_Y. \tag{4.6}$$

De manera más explícita, si $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, mientras que $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, entonces las ecuaciones anteriores representan:

$$f_1(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{4.7}$$

$$f_2(y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j), \quad j = 1, 2 \ldots, n. \tag{4.8}$$

Si los recorridos de las variables aleatorias X y Y tienen infinitos elementos, entonces

$$
\begin{aligned}
f_1(x_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2 \ldots . \qquad (4.9)\\
f_2(y_j) &= \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad j = 1, 2 \ldots . \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.1.4 *Para el ejemplo 4.1.3, determine las funciones de probabilidades marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$.*

Solución: De acuerdo con la definición 4.2.2, sumando sobre las columnas en la tabla 4.1 se obtienen los valores de $f_1(x)$; es decir,

$$
\begin{aligned}
f_1(0) &= 25/36,\\
f_1(1) &= 10/36,\\
f_1(2) &= 1/36.
\end{aligned}
$$

De manera análoga, sumando sobre los renglones se obtiene,

$$
\begin{aligned}
f_2(0) &= 25/36,\\
f_2(1) &= 10/36,\\
f_2(2) &= 1/36.
\end{aligned}
$$

Por último, con los datos anteriores se obtiene la tabla 4.1.

X/Y	0	1	2	$f_2(y)$
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$f_1(x)$	25/36	10/36	1/36	1

Tabla 4.4: Representación tabular de la función de probabilidad conjunta y las funciones de probabilidad marginales

Se observa que:

$$\sum_{x=0}^{2} f_1(x) = \sum_{y=0}^{2} f_2(y) = 25/36 + 10/36 + 1/36 = 1.$$

Estos resultados son de carácter general dado que,

$$\sum_{x \in R_X} f_1(x) = \sum_{y \in R_Y} f_2(y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} f(x, y) = 1. \qquad (4.11)$$

4.2. Densidad conjunta y marginal

Las definiciones anteriores se extienden de manera inmediata para el caso de las variables aleatorias bidimensionales continuas.

Definición 4.2.1 (Función de densidad conjunta) *Si (X, Y) es una variable aleatoria continua bidimensional, entonces f(x,y) se conoce como la función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y, si la probabilidad de que $a < X < b$ mientras que $c < Y < d$ está determinada por,*

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy, \qquad (4.12)$$

donde a, b, c, d son números reales tales que $a < b$ y $c < d$. La función de densidad conjunta f(x,y) debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $f(x, y) \geq 0, \quad -\infty < x, y < \infty.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1.$

Definición 4.2.2 (Funciones de densidades marginales) *Si (X, Y) es una variable aleatoria continua bidimensional con función de densidad conjunta f(x,y), se definen las densidades marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$ para las variables aleatorias X y Y, respectivamente, como:*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)dv, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (4.13)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)du, \quad -\infty < y < \infty. \qquad (4.14)$$

4.3. Distribución conjunta y marginal

Definición 4.3.1 (Función de distribución conjunta) *Para una variable aleatoria bidimensional (X, Y) se define la función de distribución conjunta de la siguiente manera:*

Caso discreto:

Si (X, Y) *una variable aleatoria bidimensional discreta y supóngase que f(x,y) es la función de probabilidad conjunta de X y Y, entonces la función de densidad conjunta de las variables aleatoria X y Y se define mediante:*

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.15}$$

Las sumas que aparecen en la ecuación 4.15 deben interpretarse como: la suma sobre todos los u que están en el recorrido de X y que son menores o iguales que x; y, la suma sobre todos los v que están en el recorrido de Y y que son menores o iguales que y.

Caso continuo:

Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua y si f(x,y) es la función de densidad conjunta de X y Y, entonces la función de distribución conjunta de las variables aleatorias X y Y se define como:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y), && (4.16) \\ &= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v) du dv, \quad -\infty < x, y < \infty. && (4.17) \end{aligned}$$

La función de densidad $F(x, y)$ debe satisfacer,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \tag{4.18}$$

Ejemplo 4.3.1 *Si X y Y son dos variables aleatorias, cuya función de densidad conjunta está dada por,*

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq 1, \, y \leq x, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine la función de distribución conjunta.

Solución: El cálculo de la función de distribución debe realizarse por casos, considerando la región en donde se localiza el punto (x, y).

i) Si (x,y) está en la región $x < 0$ o $y < 0$, entonces $f(x, y) = 0$ y por lo tanto, $F(x, y) = 0$.

ii) Si (x,y) está en la región $0 \leq x \leq 1$, $y < x$, entonces la región de interés, para el cálculo de la integral que define a la función de distribución,

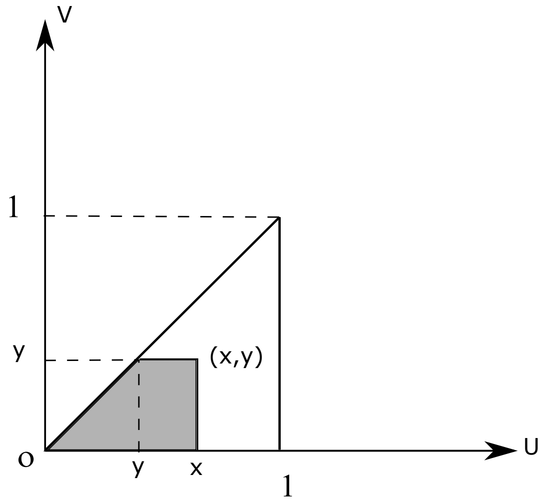


Figura 4.2: Representación de la región de integración.

se compone de dos regiones disjuntas, como se muestra en la figura 4.2.
La región de integración puede expresarse como,

$$\begin{aligned} R_{UV} &= \{(u,v)\,|\,0 \leq u \leq y,\, 0 \leq v \leq u\} \cup \\ & \quad \{(u,v)\,|\,y \leq u \leq x,\, 0 \leq v \leq y\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{R_{UV}} f(u,v)dudv, \\ &= \int_0^y \int_0^u f(u,v)dvdu + \int_y^x \int_0^y f(u,v)dvdu, \\ &= 8\int_0^y \int_0^u uvdvdu + 8\int_y^x \int_0^y uvdvdu, \\ &= 4\int_0^y u^3du + 4\int_y^x uy^2du, \\ &= y^4 + 2y^2(x^2-y^2), \\ &= y^2(2x^2-y^2). \end{aligned}$$

iii) Si (x,y) está en la región $x \geq 1$, $0 \leq y \leq 1$, entonces la región de integración puede expresarse como,

$$R_{UV} = \{(u,v)\,|\,0 \leq v \leq y,\, v \leq x \leq 1\}$$

La región se muestra en la figura 4.3 Por lo tanto,

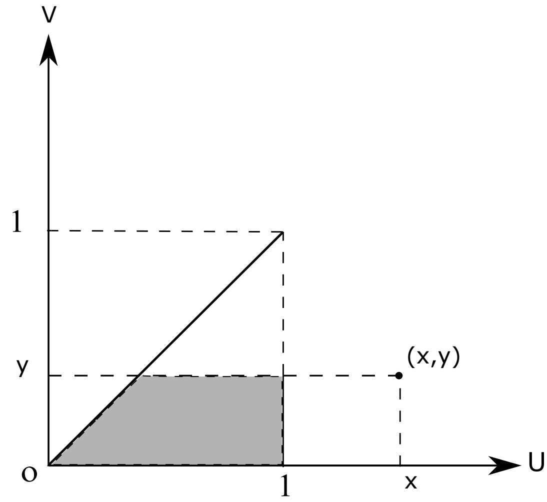


Figura 4.3: Representación de la región de integración.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{R_{UV}} f(u,v)dudv, \\
&= \int_0^y \int_v^1 f(u,v)dudv, \\
&= 8\int_0^y \int_v^1 vududv, \\
&= 4\int_0^y v(1-v^2)dv, \\
&= 4\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right), \\
&= y^2(2-y^2)
\end{aligned}$$

iv) Si (x,y) está en la región $0 \leq x \leq 1$, $y \geq x$, entonces la región de interés, para el cálculo de la integral que define a $F(x,y)$ puede expresarse como,

$$R_{UV} = \{(u,v)\,|\,0 \leq u \leq x,\, 0 \leq v \leq u\}$$

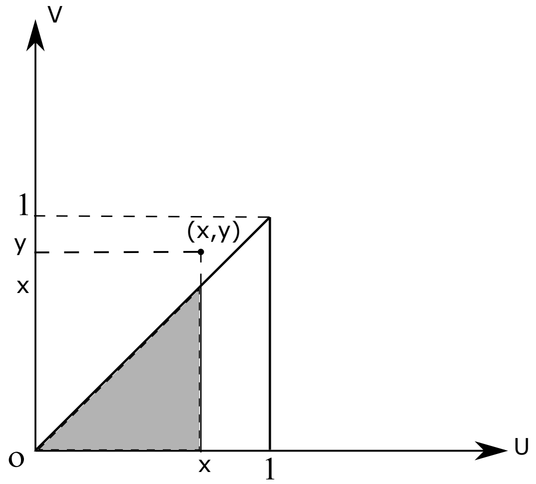


Figura 4.4: Representación de la región de integración.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{R_{UV}} f(u,v)dudv, \\ &= \int_0^x \int_0^u f(u,v)dvdu, \\ &= 8\int_0^x \int_0^u uvdvdu, \\ &= 4\int_0^x u^3du, \\ &= x^4. \end{aligned}$$

v) Finalmente, si (x,y) se encuentra en la región $x \geq 1$, $y \geq 1$, entonces $F(x,y) = 1$.
La función de distribución conjunta se representa en la figura 4.5

Definición 4.3.2 (Distribuciones marginales) *Las funciones de distribuciones marginales se definen por casos:*

Caso discreto:

Sea (X,Y) *una variable aleatoria bidimensional discreta y supóngase que f(x,y) es la función de probabilidad conjunta de X y Y.. Las funciones de*

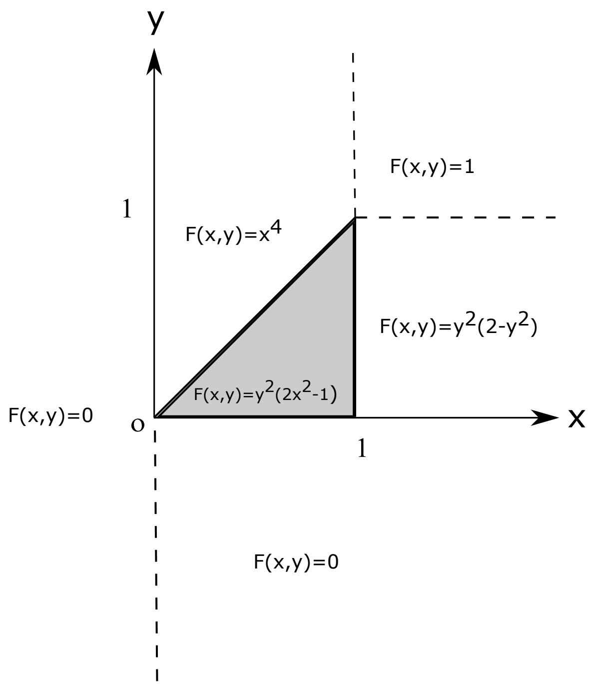


Figura 4.5: Representación de la función de distribución conjunta $F(x, y)$.

distribuciones marginales $F_1(x)$ y $F_2(y)$, para X y Y, respectivamente, se definen de la manera siguiente:

$$F_1(x) = \sum_{u \leq x} \sum_{y \in R_Y} f(u, y), \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.19}$$

La sumas que aparecen en la ecuaciones anteriores deben interpretarse como: la suma sobre todos los u que están en el recorrido de X y que son menores o iguales que x; y, la suma sobre todos los v que están en el recorrido de Y.

$$F_2(y) = \sum_{v \leq y} \sum_{x \in R_X} f(x, v), \quad -\infty < y < \infty. \tag{4.20}$$

La sumas que aparecen en la ecuaciones anteriores deben interpretarse como: la suma sobre todos los v que están en el recorrido de Y y que son menores o iguales que Y; y, la suma sobre todos los x que están en el recorrido de X.

Caso continuo:

Si (X,Y) es una variable aleatorias bidimensional continua con función de densidad conjunta f(x,y), se definen las densidades marginales $F_1(x)$ y

$F_2(y)$ *para las variables aleatorias* X *y* Y*, respectivamente, mediante*

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.21}$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu, \quad -\infty < y < \infty. \tag{4.22}$$

De las definiciones anteriores se observa que,

$$F_1(x) = \sum_{u\leq x} f_1(u) = P(X \leq x),$$

y

$$F_2(y) = \sum_{v\leq y} f_2(v) = P(Y \leq y).$$

Para el caso continuo se tiene,

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv, \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dvdu, \\
F_1(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_1(u)du = P(X \leq x).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
F_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu, \\
&= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv, \\
F_2(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_2(v)dv = P(Y \leq y).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ejemplo 4.3.2 *Si* X *y* Y *son dos variables aleatorias, cuya función de densidad conjunta está dada por,*

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq 1,\ y \leq x, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar:

a) las densidades marginales,

b) las distribuciones marginales,

Solución:
a) Se determinarán las densidades marginales.
Densidad marginal para la variable aleatoria X
De acuerdo con la definición 4.2.2 se tiene:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)dv, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si $x \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^x 8xvdv, \\ &= 4x^3. \end{aligned}$$

Luego,

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera análoga,
Densidad marginal para la variable aleatoria Y

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)du, \quad -\infty < y < \infty.$$

Si $y \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_y^1 8uydu, \\ &= 4y(1 - y^2). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f_2(y) = \begin{cases} 4y(1 - y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

b) Cálculo de las distribuciones marginales.
Distribución marginal para la variable aleatoria X
De acuerdo con la ecuación 4.23 se tiene:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)du, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si $x < 0$, entonces $f(x, y) = 0$, en consecuencia, $F_1(x) = 0$. Si $0 \leq x < 1$, entonces

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^x f_1(u)du, \\ &= 4\int_0^x u^3 du, \\ &= x^4. \end{aligned}$$

Finalmente, si $x \geq 1$, entonces $F_1(x) = 1$, de manera que:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^4, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Distribución marginal para la variable aleatoria Y
De acuerdo con la ecuación 4.24 se tiene:

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(v)dv, \quad -\infty < y < \infty.$$

Si $y < 0$, entonces $f(x, y) = 0$, en consecuencia $F_2(y) = 0$.
Si $0 \leq y < 1$, entonces

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \int_0^y f_2(v)dv, \\ &= 4\int_0^y v(1 - v^2 dv), \\ &= 2y - y^4. \end{aligned}$$

Finalmente, si $y \geq 1$, entonces $F_2(y) = 1$, de manera que:

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 2y - y^4, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

4.4. Cálculo de probabilidades para densidades de dos o más variables aleatorias

4.4.1. Cálculo de probabilidades para una variable aleatoria bidimensional

En general $z = f(x, y)$ define una superficie en el espacio tridimensional, como se muestra en las figura 4.6.

La primera condición de la definición 4.2.1 indica que la superficie no cruza el plano XY; ésta siempre se encontrará del lado positivo del eje z.
La segunda condición de la definición 4.2.1 implica que el volumen total limitado por la superficie es igual a la unidad.

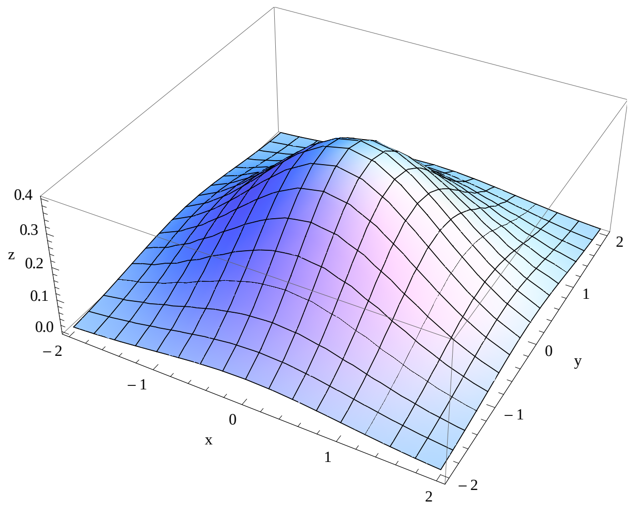


Figura 4.6: Representación de la función de densidad conjunta

En general, un evento A que se encuentre en el recorrido de (X, Y) tiene asociado una región R_{xy} en el plano cartesiano XY, de manera que:

$$P(A) = \int_{R_{xy}} f(x,y)dxdy. \tag{4.25}$$

Ejemplo 4.4.1 *Considérese las variables aleatorias X y Y del ejemplo 4.3.2. Determine la probabilidad del evento A, donde A es la región acotada por las rectas* $y = 0$, $y = x$, *y*, $x + y = 1/2$.

Solución: El evento A es la unión de dos eventos disjuntos A_1 y A_2 (ver la figura 4.7), donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(X,Y)|0 \leq X \leq 1/4\}, 0 \leq Y \leq X\}, \\ A_2 &= \{(X,Y)|1/4 \leq X \leq 1/2\}, 0 \leq Y \leq 1/2 - X\}, \end{aligned}$$

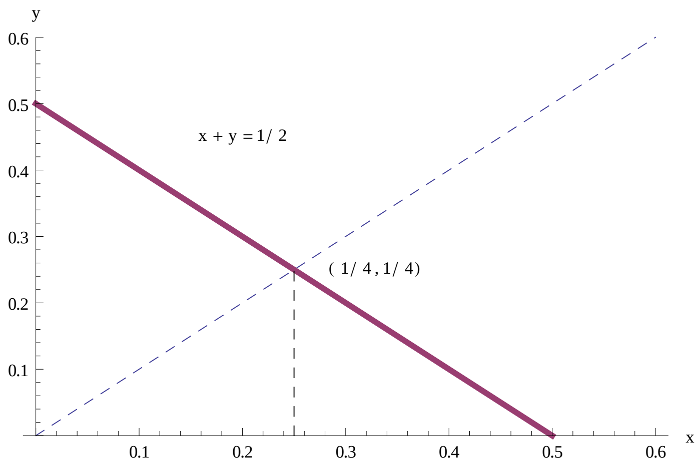


Figura 4.7: Representación gráfica del evento A

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1) + P(A_2), \\
&= \int_0^{1/4}\int_0^x f(x,y)dydx \\
&\quad + \int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1/2-x} f(x,y)dydx, \\
&= 8\int_0^{1/4}\int_0^x xydydx + 8\int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1/2-x} xydydx, \\
&= 8\int_0^{1/4} x\int_0^x ydydx + 8\int_{1/4}^{1/2} x\int_0^{1/2-x} ydydx, \\
&= 4\int_0^{1/4} x^3dx + 4\int_{1/4}^{1/2} x(1/2-x)^2dx, \\
&= x^4\Big|_0^{1/4} + \left(x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{1/4}^{1/2}, \\
&= \frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

Funciones de una variable bidimensional

Sea (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua y $f(x,y)$ la función de densidad conjunta de las variables X y Y. Supóngase que una variable aleatoria U es función de las variables aleatorias X y Y; es decir, $U = \phi(X, Y)$. El problema que se plantea consiste en determinar la función de densidad de la variable aleatoria U. El procedimiento que se sigue se establece en siguiente teorema y de manera más específica en el corolario. La demostración se omite; sin embargo, a manera de ejemplos, en el apéndice D se obtienen las distribuciones t de Student y F (las cuales son de gran importancia en la estadística inferencial) mediante la aplicación directa del teorema y su corolario.

Teorema 4.4.1 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional y f(x,y) es la función de densidad conjunta de las variables X y Y. Supóngase (U, V) es otra variable aleatoria bidimensional definida en términos de (X, Y) por $U = \phi_1(X, Y)$ y $v = \phi_2(X, Y)$, donde a cada pareja de valores (u,v) le corresponde una única pareja de valores (x,y) y también viceversa; es decir, X y Y pueden expresarse en términos de U y V mediante, $X = \psi_1(U, V)$ y $X = \psi_2(U, V)$. Si además, las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ existen y son continuas, entonces la función de probabilidad conjunta de (U, V) está dada por*

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, \\ g(u, v) &= f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))|J|, \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde J es el jacobiano de la transformación y está definido mediante

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Corolario 4.4.1 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional y f(x,y) es la función de densidad conjunta de las variables X y Y. Supóngase (U, V) es otra variable aleatoria bidimensional definida en términos de (X, Y) por $U = \phi(X, Y)$ y $V = X$, donde a cada pareja de valores (u,v) le corresponde una única pareja de valores (x,y) y también viceversa. Entonces la función de densidad U es la densidad marginal obtenida a partir de la densidad conjunta de (U, V) dada por el teorema anterior.*

4.4.2. Generalizaciones

En esta sección se generalizan los conceptos estudiados en las secciones anteriores para variables aleatorias n-dimensionales.

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Definición 4.4.1 (Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$) *Si n es un entero positivo, entonces una n-ada ordenada es una sucesión de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. El conjunto de todas las n-adas ordenadas se conoce como espacio n-dimensional y se denota por $\mathbb{R}^n$; es decir,*

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \, : \, a_i \in \mathbb{R}, \quad \textit{para todo} \;\; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces la entrada *n-ésima* de u, la denotaremos por $(u)_i$; es decir, $(u)_i = u_i$.

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, con entradas $(u)_i = u_i$ y $(v)_i = v_i$, entonces se dice que son iguales y se escribe $u = v$, si y solo si, las entradas correspondientes son iguales; es decir,

$$u = v \Longleftrightarrow u_i = v_i, \quad \textit{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar definidas sobre $\mathbb{R}^n$ son:

Suma

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n);$$

es decir,

$$(u + v)_i = u_i + v_i, \quad \textit{para todo} \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Multiplicación por un escalar

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ y k es un escalar, entonces

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n);$$

es decir,

$$(ku)_i = ku_i \;\; \textit{para todo} \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Puede demostrarse que el conjunto $\mathbb{R}^n$ con las dos operaciones anteriores constituye un espacio vectorial de dimensión n, de manera que sus elementos, las n-adas, son vectores.
Si sobre $\mathbb{R}^n$ se define el producto interior

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n, \tag{4.28}$$

entonces este espacio de productos interiores se conoce como espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.4.2 (Variable aleatoria n-dimensional) *Considérese un experimento aleatorio cuyo espacio muestral sea S. Si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es un conjunto de n funciones todas con dominio S, es decir, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas en el espacio muestral S, entonces la función $X : S \to \mathbb{R}^n$ definida como:*

$$X(s) = (X_1(s), X_2(s), \ldots, X_n(s)), \quad \forall s \in S$$

se conoce como variable aleatoria n-dimensional. Si todas las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ son discretas, entonces X es variable aleatoria n-dimensional discreta; Si las n variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ son continuas, entonces X es una variable aleatoria n-dimensional continua; en cualquier otro caso, X será una variable n dimensional mixta. En este trabajo no se considerarán las variables aleatorias n-dimensionales mixtas.

De acuerdo con la definición 4.4.2, el recorrido de una variable aleatoria n-dimensional X está contenido en $\mathbb{R}^n$. La figura 4.8 muestra una representación de este hecho, la cual no es más que una abstracción, ya que S y $\mathbb{R}^n$, en general, no son puntos del plano.

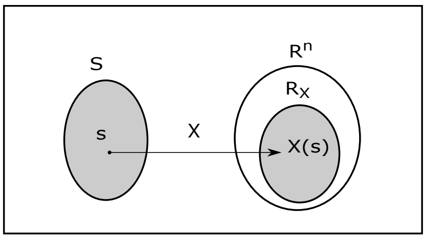


Figura 4.8: Variable aleatoria n-dimensional

Función de probabilidad conjunta

Considérese un experimento aleatorio cuyo espacio muestral sea S. Si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable n-dimensional discreta definida en el espacio muestral S y si la n-ada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se encuentra en el recorrido de X, se denota por $P(X = x)$ a la probabilidad de que la variables aleatoria n-dimensional X asuma asuma la n-ada x. De manera más explícita se denota $P(X = x)$ mediante $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$.

Definición 4.4.3 (Función de probabilidad conjunta) *Si X es una variable aleatoria n-dimensional discreta, es decir,* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$*, se conoce como función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *o (función de probabilidad de la variable aleatoria n-dimensional X) a la función que asocia la probabilidad* $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ *a cada n-ada* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *que se encuentra en el recorrido de X (*R_X*). La función de densidad conjunta de X se denota por* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y debe satisfacer las siguientes propiedades:*

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \ \textit{para todo } x_i \in R_{X_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$
2. $\displaystyle\sum_{x_1 \in R_{X_1}} \sum_{x_2 \in R_{X_2}} \cdots \sum_{x_n \in RX_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1.$

En el capítulo 2 se discutió el concepto de eventos equivalentes (definición 4.4.4) cuando X era una variable unidimensional, de manera análoga se tiene:

Definición 4.4.4 (Eventos equivalentes) *Considérese un experimento aleatorio cuyo espacio muestral sea S. Sea X una variable aleatoria n-dimensional definida en S cuyo recorrido es* R_X*, si B es un evento contenido en* R_X *y el evento A que está contenido en S se define como*

$$A = \{s \in S : X(s) = x, \textit{para algún } x \in B\},$$

entonces A y B se conocen como eventos equivalentes y $P(B) = P(A)$*.*

$$P(A) = \sum_{x \in B} f(x) = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B} f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.29}$$

Lo anterior se representa en la figura 4.9.

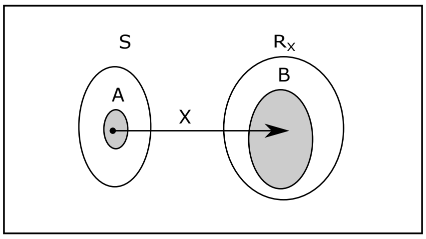


Figura 4.9: Eventos equivalentes

Función de densidad conjunta

Definición 4.4.5 (Función de densidad conjunta) *Si* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *es una variable aleatoria n-dimensional continua, se conoce como función de densidad conjunta de las variables* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *a la función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *si ésta satisface las siguientes condiciones,*

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, *para todo* $x_i \in R_{X_i}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n = 1.$

Además, si R es un evento contenido en el recorrido de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, es decir, R es una región del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces

$$P((x_1 \ldots x_n) \in R) = \int_R f(x)dx = \int_R f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n. \tag{4.30}$$

Probabilidades y densidades marginales

Definición 4.4.6 (Probabilidades y densidades marginales) *Considérese que* $(X_1 \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ *es una variable aleatoria n-dimensional (discreta o continua), y que* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es la función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda. Sea* X_i *la variable aleatoria que corresponde a la componente i-ésima de la variable aleatoria n-dimensional X, se define la función marginal* $f_i(u)$ *de la siguiente manera:*

Caso discreto:

$$f_i(u) = \sum_{x_1 \in R_{X_1}} \cdots \sum_{x_{i-1} \in R_{X_{i-1}}} \sum_{x_{i+1} \in R_{X_{i+1}}} \cdots \sum_{x_n \in R_{x_n}} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1} \ldots x_n), \tag{4.31}$$

donde $u \in R_{X_i}$. La función $f_i(u)$ se conoce como función de probabilidad marginal de la variable aleatoria discreta X_i.

Caso continuo:

$$f_i(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1} \dots x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n, \tag{4.32}$$

La función $f_i(u)$ se conoce como función de densidad marginal de la variable aleatoria continua X_i.

Función de distribución conjunta y funciones de distribuciones marginales

Definición 4.4.7 (Función de distribución conjunta) *Considérese una variable aleatoria n-dimensional $(X_1 \dots, X_i, \dots, X_n)$ y supóngase que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es la función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda. Se define la función de distribución conjunta, denotada por $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, de la siguiente manera:*

Caso discreto:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{u_1 \in R_{X_1}, \\ u_1 \leq x_1}} \dots \sum_{\substack{u_n \in R_{X_n}, \\ u_n \leq x_n}} f(u_1, \dots, u_n), \tag{4.33}$$

$-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty$.

Caso continuo:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n, \tag{4.34}$$

$-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty$.

Definición 4.4.8 (Funciones de distribuciones marginales) *Considérese una variable aleatoria n-dimensional (discreta o continua) $(X_1 \dots, X_i, \dots, X_n)$, y supóngase que su función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda, está determinada por $f(x_1, \dots, x_i \dots, x_n)$. Sea X_i la variable aleatoria que corresponde a la componente i-ésima de la variable aleatoria* *n-dimensional, se define la función, $F_i(t)$, de la siguiente manera:*

Caso discreto:

$$F_i(t) = \sum_{\substack{x_i \in R_{X_n}, \\ x_i \leq t}} f_i(x_i), \quad -\infty < t < \infty, \tag{4.35}$$

$F_i(t)$ se conoce como función de distribución marginal de la variable aleatoria discreta X_i.

Caso continuo:

$$F_i(t) = \int_{-\infty}^{t} f_i(x_i)dx_i, \quad -\infty < t < \infty, \tag{4.36}$$

$F_i(t)$ se conoce como función de distribución marginal de la variable aleatoria continua X_i.

4.5. Suma de variables aleatorias

La media

En esta sección se extienden los conceptos relacionados con la media, para distribuciones de 2 o más variables aleatorias.

Definición 4.5.1 (La media) *Para una variable aleatoria bidimensional se define la media como:*

Caso discreto:

Sea (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional discretas con función de probabilidad conjunta f(x,y), se define la media de la variable aleatoria X como:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{y \in R_Y} \sum_{x \in R_X} x f(x,y), \tag{4.37}$$

siempre y cuando la doble suma converja absolutamente.

De manera análoga, se define la media de la variable aleatoria Y como:

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y \in R_Y} \sum_{x \in R_X} y f(x,y), \tag{4.38}$$

siempre y cuando la doble suma converja absolutamente.

Caso continuo:

Sea (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta f(x,y), se define la media de la variable aleatoria X como:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy, \tag{4.39}$$

siempre y cuando la integral doble converja absolutamente.
De manera análoga, se define la media de la variable aleatoria como:

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy, \tag{4.40}$$

siempre y cuando la integral doble converja absolutamente.

Una consecuencia inmediata de la definición 4.5.1r es:

Caso discreto:

$$E(X) = \sum_{x\in R_X} xf_1(x), \tag{4.41}$$

$$E(Y) = \sum_{y\in R_Y} yf_2(y). \tag{4.42}$$

Caso continuo:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx, \tag{4.43}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy \tag{4.44}$$

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional con función de probabilidad o densidad conjunta (según corresponda) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces el concepto de media se establece como:
Caso dicreto:

$$E(X_i) = \sum_{u \in R_{X_i}} u f_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{4.45}$$

La suma se realiza sobre todos los u en el recorrido de X_i.

Caso continuo:

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_i(u) du, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{4.46}$$

Teoremas sobre la media

Teorema 4.5.1 *Si X y Y son dos variables aleatorias, ambas continuas o ambas discretas, cuya función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda al caso, es f(x,y), si además,* $Z = \phi(X, Y)$ *es una variable aleatoria definida en términos de las variables aleatorias X y Y, entonces,*

a) ***Caso discreto:***

$$E(Z) = E(\phi(X, Y)) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} \phi(x, y) f(x, y), \tag{4.47}$$

b) ***Caso continuo:***

$$E(Z) = E(\phi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, y) dx dy. \tag{4.48}$$

Demostración: La demostración queda fuera de los objetivos de este trabajo.

Para los teoremas que se enunciarán a continuación solo se demostrará el caso continuo.

Teorema 4.5.2 *Si C es una constante, entonces*

$$E(C) = C \tag{4.49}$$

Demostración: De acuerdo con el teorema 4.5.1, si $Z = \phi(X,Y) = C$, entonces

$$\begin{aligned} E(C) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Cf(x,y)dxdy, \\ &= C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy, \\ &= C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.5.3 *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional y* $Z = \phi(X,Y)$ *es una variable aleatoria que es función de (X,Y) y C es una constante, entonces*

$$\begin{array}{ll} a) & E[C\phi(X,Y)] = CE[\phi(X,Y)], \\ b) & E(CX) = CE(X), \\ c) & E(CY) = CE(Y). \end{array}$$

Demostración: a) Como $Z = C\phi(X,Y)$ sigue siendo una función de las variables aleatorias X y Y, entonces, de acuerdo con el teorema 4.5.1 se tiene

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C\phi(x,y)f(x,y)dxdy, \\ &= C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y)f(x,y)dxdy, \\ &= CE(\phi(X,Y)). \end{aligned}$$

Para los incisos b) y c) solo se sustituye $\phi(X,Y) = X$ y $\phi(X,Y) = Y$. $\blacksquare$

Teorema 4.5.4 *Si (X,Y) es una variable bidimensional, entonces*

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \tag{4.50}$$

Demostración: De acuerdo con el teorema 4.5.1, si se hace $Z = X + Y$ se obtiene,

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X+Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,y)dxdy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy, \\ &= E(X) + E(Y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Los teoremas anteriores tienen formas equivalentes para variables aleatorias n-dimensionales.

Teorema 4.5.5 *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional con función de probalidad o densidad conjunta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (según corresponda), entonces*

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n). \tag{4.51}$$

Demostración: El teorema se demuestra por el método de inducción matemática. La demostración se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 4.5.1 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado equilibrado dos veces. Sean X y Y las variables aleatorias que determinan los números que resulta en el primer y el segundo lanzamiento, respectivamente. Determine el valor esperado del total en los dos lanzamientos.*

Solución: Para las variables aleatoria X y Y se tiene $E(X) = E(Y) = 7/2$. Defínase la variable aleatoria $Z = X + Y$. De manera que Z es la variable aleatoria que da el total en los lanzamientos. De acuerdo con el teorema 4.5.4,

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X + Y), \\ &= E(X) + E(Y), \\ &= 7. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.2 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado 2 veces. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de 5 y Y la variable aleatoria que cuenta el número de 6 en el experimento, determine*

a) El valor esperado de la variable aleatoria X.

b) La esperanza de Y

c) La media de XY.

Solución: Tabla 4.4 del ejemplo 4.1.4 muestra los valores de las funciones de probabilidades marginales.

X/Y	0	1	2	$f_2(y)$
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$f_1(x)$	25/36	10/36	1/36	1

a) De la tabla se obtiene,

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 25/36, \\ f_1(1) &= 10/36, \\ f_1(2) &= 1/36. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i f_1(x_i) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

b) De manera análoga,

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 25/36, \\ f_2(1) &= 10/36, \\ f_2(2) &= 1/36. \end{aligned}$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j f_2(y_j) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

c) De acuerdo con el teorema 4.5.1

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xyf(x,y), \\ &= f(1,1) = \frac{2}{36}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.3 *Si X y Y son dos variables aleatorias continuas cuya función de densidad conjunta está dada por,*

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq 1,\ y \leq x, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor esperado de X.

b) El valor esperado de Y.

c) El valor esperado de XY.

Solución: Las funciones de densidades marginales para X y Y se determinaron en el 4.3.2.

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) De acuerdo con la definición 4.5.1,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx, \\ &= 4\int_0^1 x^4 dx, \\ &= \frac{4}{5} x^5 \Big|_0^1, \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

b) De manera análoga al inciso anterior,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy, \\ &= 4\int_0^1 y^2(1-y^2) dy, \\ &= 4\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5)\right|_0^1, \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

c) De acuerdo con el teorema 4.5.1

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy,\\
&= 8\int_0^1\int_0^x x^2y^2dydx,\\
&= 8\int_0^1 x^2\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x dx,\\
&= \frac{8}{3}\int_0^1 x^5dx,\\
&= \frac{8}{18}\,x^6\big|_0^1,\\
&= \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.4 *Considérese que (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional y que la función de densidad conjunta de las variables X y Y está determinada por la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

Determinar:

a) El valor esperado de X.

b) El valor esperado de Y.

c) El valor esperado de XY.

Solución: Se calcularán las densidades marginales.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv,\\
&= 4\int_0^1 xvdv,\\
&= 4x\,\frac{v^2}{2}\Big|_0^1,\\
&= 2x.
\end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$f_1(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Procediendo de la misma manera se obtiene,

$$f_2(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) De acuerdo con la definición 4.5.1

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx, \\ &= 2\int_0^1 x^2 dx, \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) De manera análoga al inciso anterior,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy, \\ &= 2\int_0^1 y^2 dy, \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

c) De acuerdo con el teorema 4.5.1

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy, \\ &= 4\int_0^1\int_0^1 x^2 y^2 dy dx, \\ &= 4\int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y^2 dy, \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right), \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

La varianza y la covarianza

El concepto de varianza estudiado en el capítulo 2 para una variable real, y que resulta ser una medida de la dispersión de los valores que asume la variable aleatoria, respecto a la media, se extiende a dos o más variables aleatorias sin mayores dificultades, como se muestra a continuación.

Definición 4.5.2 (La varianza) *Si (X Y) es una variable aleatoria bidimensional (discreta o continua), y si* $Z = \phi(X, Y)$ *es una variable aleatoria que es función de las variables aleatorias X y Y, entonces se define la varianza de la variable aleatoria Z, denotada por var(Z) o* σ_Z^2*, mediante*

$$var(Z) = \sigma_Z^2 = E[(Z - \mu_Z)^2]. \tag{4.52}$$

Para el caso particular en que $Z = \phi(X, Y) = X$*, se obtiene la varianza de la variable aleatoria X*

$$var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2], \tag{4.53}$$

de manera análoga, si $Z = \phi(X, Y) = Y$*, entonces la varianza de la variable aleatoria* Y *es,*

$$var(Y) = \sigma_Y^2 = E[(Y - \mu_Y)^2]. \tag{4.54}$$

Al considerar los casos discretos y continuos se obtiene:

Caso discreto:

$$var(X) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x - \mu_X)^2 f(x, y), \tag{4.55}$$

siempre y cuando la sumatoria converja absolutamente.

$$var(Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (y - \mu_Y)^2 f(x, y). \tag{4.56}$$

siempre y cuando la sumatoria converja absolutamente.

Caso Continuo:

$$var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x, y) dx dy, \tag{4.57}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

$$var(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_Y)^2 f(x, y) dx dy, \tag{4.58}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

Definición 4.5.3 (La covarianza) *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, se define la covarianza de las variables aleatorias X y Y como:*

$$cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]. \tag{4.59}$$

De manera más precisa se tiene:

Caso discreto:

$$cov(X,Y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y), \tag{4.60}$$

siempre y cuando la suma converja absolutamente.

Caso Continuo:

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy, \tag{4.61}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

Teoremas sobre la varianza y la covarianza

Teorema 4.5.6 *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, y si $Z = \phi(X,Y)$ define una variable aleatoria que es función de las variables aleatorias X y Y, entonces*

$$var(Z) = E(Z^2) - \mu_Z^2, \tag{4.62}$$

Demostración: Mediante la definición 4.5.2 y el uso de los teoremas 4.5.4, 4.5.2 y 4.5.3, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} var(Z) &= E[(Z-\mu_Z)^2],\\ &= E[Z^2 - 2\mu_Z Z + \mu_Z^2],\\ &= E[Z^2] - 2\mu_Z E[Z] + E[\mu_Z^2],\\ &= E[Z^2] - 2\mu_Z^2 + \mu_Z^2,\\ &= E(Z^2) - \mu_Z^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema anterior implica que, si $Z = \phi(X,Y) = X$, entonces

$$var(X) = E(X^2) - \mu_X^2, \tag{4.63}$$

de manera análoga, si $Z = \phi(X, Y) = Y$ se obtiene

$$var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2. \tag{4.64}$$

Teorema 4.5.7 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, y si $Z = \phi(X, Y)$ define una variable aleatoria que es función de las variables aleatorias X y Y; si además, C es una constante, entonces*

a) $var(CZ) = C^2 var(Z)$

b) $var(Z + C) = var(Z)$

Demostración: De acuerdo con la definición 4.5.2 y el teorema 4.5.3, se tiene:

$$\begin{aligned} a) \quad var[CZ] &= E[(CZ - E(CZ))^2], \\ &= E[C^2(Z - \mu_Z)^2], \\ &= C^2 E[(Z - \mu_Z)^2], \\ &= C^2 var(Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad var[Z + C] &= E[((Z + C) - E(Z + C))^2], \\ &= E[((Z + C) - (\mu_Z + C))^2], \\ &= E[(Z - \mu_Z)^2], \\ &= var(Z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.5.8 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, entonces*

$$cov(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y \tag{4.65}$$

Demostración: Mediante la definición 4.5.3 y el uso de los teoremas 4.5.4, 4.5.2 y 4.5.3, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)], \\ &= E[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y], \\ &= E[XY] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + E[\mu_X \mu_Y], \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y, \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.5.9 *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, entonces*

$$var(X \pm Y) = var(X) + var(Y) \pm 2cov(X,Y) \tag{4.66}$$

Demostración: Mediante el uso de la definición 4.5.2, y el teorema 4.5.6, donde $Z = X + Y$, de manera que, $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$, se tiene:

$$\begin{aligned}
var(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - (\mu_X + \mu_Y)^2, \\
&= E[X^2 + 2XY + Y^2] - \mu_Y^2 - 2\mu_X\mu_Y + \mu_Y^2], \\
&= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] \\
&\quad -\mu_X^2 - 2\mu_X\mu_Y - \mu_Y^2], \\
&= [E(X^2) - \mu_X^2] + [E(Y^2) - \mu_Y^2] \\
&\quad +2[E(XY) - \mu_X\mu_Y], \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Se deja al lector la demostración para el caso de la resta de X y Y.

Ejemplo 4.5.5 *Considérese la variable aleatoria bidimensiona discreta que se definió en el ejemplo 4.5.2.*

a) Las varianzas de las variables aleatorias X y Y.

b) La covarianza de X y Y.

c) La varianza de X+Y.

Solución:

a) De acuerdo con el teorema 4.5.6 se requieren las esperanzas $E(X^2)$ y $E(X)$ para determinar la varianza de X. Para calcular la esperanza de X^2 se recurre a la tabla siguiente:

X/Y	0	1	2	$f_2(y)$
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$f_1(x)$	25/36	10/36	1/36	1

De acuerdo al teorema 4.5.1

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 f_1(x_i), \\ &= \frac{10}{36} + 4(1/36), \\ &= \frac{14}{36}. \end{aligned}$$

Se sabe que $E(X) = 12/36$, de manera que,

$$var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{5}{18}.$$

De manera análoga se procede con la variable aleatoria Y.

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{3} y_i^2 f_2(y_i), \\ &= \frac{10}{36} + 4(1/36), \\ &= \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

Se sabe que $E(Y) = 12/36$, de manera que,

$$var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{5}{18}.$$

b) La covarianza se determina de acuerdo con el teorema 4.5.8

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{18}.$$

c) La varianza de la suma se determina de acuerdo con el teorema 4.5.9.

$$var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y) = \frac{4}{9}.$$

Ejemplo 4.5.6 *Considérese la variable aleatoria bidimensional del ejemplo 4.5.3. Calcular:*

a) Las varianzas de las variables aleatorias X y Y.

b) La covarianza de X y Y.

c) La varianza de $X+Y$.

Solución: Las funciones de densidades marginales para X y Y se determinaron en el ejemplo 4.3.2.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ f_2(y) &= \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Se calcularán las esperanzas de X^2 y de Y^2.

a) De acuerdo con el teorema 4.5.1,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx, \\ &= 4\int_0^1 x^5 dx, \\ &= \frac{4}{6}\, x^6\Big|_0^1, \\ &= \frac{4}{6} \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy, \\ &= 4\int_0^1 y^3(1-y^2)dy, \\ &= 4\left(\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^6\right)\Big|_0^1, \\ &= \frac{2}{6}. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema 4.5.6

$$\begin{aligned} var(X) &= E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{2}{75}, \\ var(Y) &= E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{66}{255}. \end{aligned}$$

b) La covarianza se determina de acuerdo con en teorema 4.5.8

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{225}.$$

c) La variaza de la suma se determina de acuerdo con el teorema 4.5.9.

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y) = \frac{80}{225}.$$

Ejemplo 4.5.7 *Para la variable aleatoria bidimensional continua que se discutió en el ejemplo 4.5.4, determine:*

a) Las varianzas de las variables aleatorias X y Y.

b) La covarianza de X y Y.

c) La varianza de $X+Y$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx, \\ &= 2\int_0^1 x^2 dx, \\ &= \frac{2}{3}\, x^3\Big|_0^1, \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy, \\ &= 2\int_0^1 y^2 dy, \\ &= \frac{2}{3}\, y^3\Big|_0^1, \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorena 4.5.6

$$\begin{aligned} var(X) &= E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{2}{9}, \\ var(Y) &= E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

b) La covarianza se determina de acuerdo con en teorema 4.5.8

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y), \\ &= \frac{4}{9} - (2/3)(2/3), \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) La varianza de la suma se determina de acuerdo con el teorema 4.5.9.

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y) = \frac{4}{9}.$$

4.6. Independencia de dos o más variables aleatorias

En esta sección se estudiarán conceptos relacionados con la independencia de eventos, estudiados en el capítulo 1. Para comenzar recuérdese que para dos eventos A y B, la probabilidad condicional del evento A dado que B ha ocurrido se definió como,

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \qquad \text{si } P(B) > 0.$$

Por otro lado, se sabe que para dos variables aleatorias discretas X y Y, $X = x$ y $Y = y$, definen eventos en el espacio muestral S. De manera que si se identifican A y B con los eventos descritos en términos de las variables aleatorias X y Y, la ecuación anterior se puede expresar mediante,

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \\ &= \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \qquad \text{si } f_2(y) > 0. \end{aligned}$$

Esta probabilidad se define de manera precisa a continuación y se extiende el concepto para variables aleatorias continuas.

Definición 4.6.1 (Funciones de probabilidades condicionales) *Si (X,Y) son dos variables aleatorias discretas, cuya función de probabilidad conjunta es f(x,y) y con las funciones de probabilidad marginales $f_1(x)$ y $f_1(y)$ para las variables X y Y, respectivamente:*
Se define la función de probabilidad condicional de la variable aleatoria X, dado que Y=y mediante,

$$f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad si\ f_2(y) \neq 0. \tag{4.67}$$

De manera análoga se define la función de probabilidad condicional de la variable aleatoria Y, dado que X=x mediante,

$$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad si\ f_1(x) \neq 0. \tag{4.68}$$

Definición 4.6.2 (Funciones de densidades condicionales) *Sean (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua, cuya función de densidad conjunta es f(x,y) y con las funciones de densidad marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$ para las variables X y Y, respectivamente:*
Se define la función de densidad condicional de la variable aleatoria X, dado que Y=y mediante,

$$f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad si\ f_2(y) \neq 0. \tag{4.69}$$

De manera análoga se define la función de densidad condicional de la variable aleatoria Y, dado que X=x mediante,

$$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad si\ f_1(x) \neq 0. \tag{4.70}$$

Si X y Y son dos variables aleatorias continuas, y si A y B son dos eventos tales que, A se encuentra en el recorrido de X y B se encuentra en el recorrido de Y, entonces es posible hallar la probabilidad de que el evento A ocurra dado que un evento particular $Y = y$ ha ocurrido, para lo anterior simplemente se sumará $g(x|y)$ sobre todos los $x \in A$; es decir,

$$P(A|Y = y) = \sum_{x \in R_X} f_1(x|y). \tag{4.71}$$

De manera análoga se determina la probabilidad de que el evento B ocurra dado que un evento particular $X = x$ ha ocurrido, para lo anterior simplemente se sumará $h(x|y)$ sobre todos los $y \in B$; es decir,

$$P(B|Y = y) = \sum_{y \in R_Y} f_2(y|x). \tag{4.72}$$

Si X y Y son dos variables aleatorias continuas, y si A y B son dos eventos tales que, $A = \{a < X < b\}$ se encuentra en el recorrido de X y $B = \{c < Y < d\}$ se encuentra en el recorrido de Y, entonces es posible hallar la probabilidad de que el evento A ocurra dado que un evento particular $Y = y$ ha ocurrido, para lo anterior se integrará $g(x|y)$ sobre el intervalo dado; es decir,

$$P(A|Y = y) = P(a < X < b|Y = y) = \int_a^b f_1(x|y)dx. \tag{4.73}$$

De manera análoga se determina la probabilidad de que el evento B ocurra dado que un evento particular $X = x$ ha ocurrido,

$$P(B|Y = y) = P(c < Y < d|X = x) = \int_c^d f_2(y|x)dy. \tag{4.74}$$

Ejemplo 4.6.1 *Una compañía dulcera distribuye cajas de chocolates con una mezcla de tres tipos de chocolate: cremas, chiclosos y envinados. Suponga que el peso de cada caja es de un kilogramo, pero los pesos individuales de las cremas, de los chiclosos y de los envinados varían de una caja a otra. Para una caja seleccionada aleatoriamente X y Y representan el peso de las cremas y de los chiclosos, respectivamente, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es,*

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & si\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

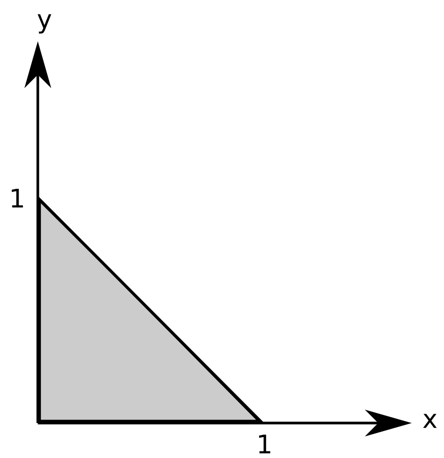


Figura 4.10: Región donde $f(x, y) \neq 0$

a) Encuentre la densidad marginal para el peso de los chiclosos.

b) Encuentre la probabilidad de que el peso de los chocolates de cremas en una caja sea menos de 1/8 de kilogramo, si se sabe que las chiclosos constituyen 3/4 del peso.

Solución:

a) En la figura 4.10 se muestra la región donde la función de densidad conjunta es diferente de cero.
A continuación se calcula la marginal requerida.
De acuerdo con la definición 4.2.2,

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) du.$$

i) Si $0 \le y \le 1$, entonces

$$\begin{aligned} f_2(y) &= 24 \int_0^{1-y} uydu, && (4.75) \\ &= 24 \int_0^{1-y} uydu, && (4.76) \\ &= 12y(1-y)^2. && (4.77) \end{aligned}$$

ii) En cualquier otra región $f(x, y) = 0$ y por lo tanto, $f_2(y) = 0$.
Por lo anterior,

$$f_2(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

b) De acuerdo con la ecuación 4.74,

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1/8 | Y = y) &= \int_a^b f_1(x|y) dx, \\ &= \int_0^{1/8} f_1(x|3/4) dx, \\ &= 32 \int_0^{1/8} x dx, \\ &= 16(1/8)^2, \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Variables aleatorias independientes

El el capítulo 1 se estudió el concepto de eventos independientes. Recuérdese que si A y B son dos eventos, éstos se consideran independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de que el otro ocurra. Esta forma intuitiva permitió establecer la independencia estadística de los eventos A y B como:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(A).$$

Las ecuaciones anteriores generan dificultades teóricas cuando se trabaja con un número relativamente grande de variables aleatorias. Sin embargo, las dos condiciones anteriores se satisfacen cuando se requiere que,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

y permite establecer de manera conveniente la independencia estadística de dos o más variables aleatorias.

Definición 4.6.3 (Variables independientes) *Si X y Y son dos variables aleatorias, ambas continuas o ambas discretas, y f(x,y) es su función de probabilidad (o densidad) conjunta, según corresponda. Se dice que X y Y son variables aleatorias estadísticamente independientes o simplemente independientes, si y solo si,*

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y), \tag{4.78}$$

para todo (x,y) en el rango de (X,Y). Donde $f_1(x)$ y $f_2(y)$ son las probabilidades(o densidades) marginales de X y Y, respectivamente.

El concepto anterior de independencia se generaliza fácilmente para variables aleatorias n-dimensionales. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ discreta (o continua) define una variable aleatoria n dimensional, se dice que las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ son independientes si y solo si la función de probabilidad conjunta (o de densidad conjunta) puede expresarse como el producto de las probabilidades (o densidades) marginales de las variables aleatorias en todo el recorrido de la variable n-dimensional; es decir, si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n) \tag{4.79}$$

De manera equivalente, si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ define una variable aleatoria n dimensional, entonces se dice que las variables aleatoria $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ son independientes si y solo si la función de distribución conjunta puede expresarse como el producto de las distribuciones marginales de las variables aleatorias en todo el recorrido de la variable n-dimensional; es decir, si

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_n(x_n). \tag{4.80}$$

Ejemplo 4.6.2 *Las variables aleatorias definidas en los ejemplos 4.5.5 y 4.5.6 no son variables independientes. En el primer caso la función de probabilidad conjunta no corresponde al producto de las funciones de probabilidades marginales.*

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \frac{16}{32}, \\ f_1(0)f_2(0) &= (25/36)(25/36), \\ f(0,0) &\neq f_1(0)f_2(0). \end{aligned}$$

En el segundo caso la función de densidad conjunta tampoco corresponde al producto de las densidades marginales.

$$\begin{array}{ll} f(x,y)=0, & \{(x,y)|0\leq x\leq 1, x\leq y\leq 1\} \\ f_1(x)f_2(y)=16x^3y(1-y^2), & \{(x,y)|0\leq x\leq 1, x\leq y\leq 1\} \\ f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y), & \{(x,y)|0\leq x\leq 1, x\leq y\leq 1\}. \end{array}$$

Ejemplo 4.6.3 *Determine la función de distribución conjunta para las variables aleatorias X y Y definidas en el ejemplo 4.5.7*

Solución: Las variables aleatorias X y Y son independientes, dado que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \begin{cases} 4xy & 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ f_1(x) &= \begin{cases} 2x & 0\leq x\leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} 2y, & 0\leq y\leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ f(x,y) &= f_1(x)f_2(y). \end{aligned}$$

Algunos resultados obtenidos anteriormente se simplifican si las variables aleatorias X y Y son independientes, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.6.1 *Si (X,Y) es una variable bidimensional y si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces*

$$a) \quad E(XY)=E(X)E(Y). \tag{4.81}$$

$$b) \quad cov(X,Y)=0. \tag{4.82}$$

$$c) \quad var(X+Y)=var(X)+var(Y). \tag{4.83}$$

Demostración:
a) De acuerdo con el teorema 4.5.1,

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy. \tag{4.84}$$

Dado que las variables aleatorias X y Y son independientes, entonces

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y). \tag{4.85}$$

Sustituyendo la ecuación 4.85 en la 4.84,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(y)dxdy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)dy, \\ &= E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Los incisos b y c se obtienen como consecuencia de este resultado y de los teoremas 4.5.8 y 4.5.9 . $\blacksquare$El inciso c representa una propiedad muy importante para la estadística, de manera que es necesario enunciar la generalización.

Teorema 4.6.2 *Si* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *define una variable aleatoria n dimensional, y si las variables aleatorias* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *son independientes, entonces*

$$var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = var(X_1) + var(X_2) + \ldots var(X_n). \tag{4.86}$$

Demostración: El teorema se demuestra por el método de inducción matemática. La demostración se deja al lector.

El coeficiente de correlación

Si (X,Y) es un variable aleatoria bidimensional, surge la necesidad de indagar qué tipo de relación funcional existe entre ellas. El problema no es simple de abordar; sin embargo, al menos parcialmente, este problema puede abordarse a partir del coeficiente de correlación, el cuál se presenta a continuación.

Definición 4.6.4 (El coeficiente correlación) *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, se define el coeficiente de correlación de las variables X y Y como:*

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{4.87}$$

Si $\rho_{XY} = 0$ se dice que las variables son no correlacionadas.

Obsérvese que si X y Y son variables aleatorias independientes entonces $\sigma_{XY} = 0$, y por lo tanto, $\rho = 0$. Por otra lado, si $X = Y$, entonces $\rho = 1$. Para tener una interpretación adecuada del coeficiente de correlación, es necesario demostrar algunos resultados.

Teorema 4.6.3 *Si X y Y son dos variables aleatorias independientes, entonces $\rho_{XY} = 0$.*

Demostración: Dado que las variables X y Y son independientes, entonces $cov(X, Y) = \sigma_{XY} = 0$, y por lo tanto, $\rho_{XY} = 0$. $\blacksquare$ El teorema 4.6.3 significa que si las variables aleatorias X y Y son independientes, entonces las variables aleatorias son no correlacionadas. El recíproco de este teorema es falso; es decir que si X y Y son variables no correlacionadas, no se deduce de este hecho que sean independientes.

Ejemplo 4.6.4 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un par de dados equilibrados. Sean X y Y los resultados del primer y segundo dado, respectivamente. Si las variables U y V se definen como se muestra a continuación,*

$$\begin{aligned} U &= X + Y, \\ V &= X - Y. \end{aligned}$$

a) determine el factor de correlación de U y V,

b) determine si U y V son independientes.

Solución: a) Se calculará la covarianza de U y V.

$$\begin{aligned} cov(U, V) &= E(UV) - E(U)E(V), \\ &= E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y)E(X-Y), \\ &= E(X^2 - Y^2)) - E(X+Y)E(X-Y), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que la covarianza es cero, entonces el factor de correlación es cero y, por lo tanto, las variables U y V son no correlacionadas.
b) Los recorridos de las variables U y V son:

$$\begin{aligned} R_U &= \{2, 3, \ldots, 12\} \\ R_V &= \{-5, \ldots, 0, \ldots, 5\} \end{aligned}$$

Considérese, por ejemplo, que $U = 2$ y $V = -5$.

$$P(U = 2)P(V = -5) = \left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{1}{36}\right).$$

Por otro lado, dado que $x + y = 2$ y $x - y = -5$ es un sistema de ecuaciones lineales inconsistente, (corresponde al evento imposible) entonces

$$P(U = 2, V = -5) = 0,$$

en consecuencia,

$$P(U = 2, V = -5) \neq P(U = 2)P(V = -5).$$

Lo anterior significa que U y V no son variables aleatorias independientes.

Teorema 4.6.4 *Si X y Y son dos variables aleatorias cualesquiera, entonces* $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Demostración: Sean $U = X - \mu_X$ y $V = Y - \mu_Y$, defínase el polinomio en t como:

$$p(t) = E[(Ut + V)^2]. \tag{4.88}$$

Desarrollando el binomio al cuadrado,

$$\begin{aligned} p(t) &= E[U^2t^2 + 2UVt + V^2], \\ &= E[U^2]t + 2E[UV]t + E[V^2], \\ &= \sigma_X^2 t^2 + 2\sigma_{XY} t + \sigma_Y^2. \end{aligned} \tag{4.89}$$

La ecuación 4.89 puede expresarse como:

$$p(t) = At^2 + Bt + C. \tag{4.90}$$

donde $A = \sigma_X^2$, $B = 2\sigma_{XY}$ y $C = \sigma_Y^2$.
Las raíces del polinomio anterior están determinadas por

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.91}$$

Dado que $p(t) \geq 0$, de acuerdo con la ecuación 4.88, entonces sus raíces son complejas o a lo más tiene una sola raíz real, de manera que el discriminante, $B^2 - 4AC$, debe ser menor o igual que cero; por lo tanto,

$$B^2 - 4AC = 4\sigma_{XY}^2 - 4\sigma_X^2\sigma_Y^2 \leq 0.$$

Realizando los cálculos correspondientes se obtiene,

$$\begin{aligned} \sigma_{XY}^2 &\leq \sigma_X^2\sigma_Y^2, \\ \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} &\leq 1, \\ \rho_{XY}^2 &\leq 1, \\ -1 \leq \rho_{XY} &\leq 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.6.5 *Si X y Y son dos variables aleatorias tales que $Y = AX+B$, entonces $\rho_{XY}^2 = 1$. Además, $\rho_{XY} = 1$ si $A > 0$ y $\rho_{XY} = -1$ si $A < 0$.*

Demostración: La media, la varianza y la desviación estándar de Y son:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(AX+B) = AE(X) + B, \\ var(Y) &= var(AX+B) = A^2 var(X), \\ \sigma_Y &= \sqrt{A^2 var(X)} = |A|\sigma_X. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= E(XY) - E(X)E(Y), \\ &= E[X(AX+B)] - E(X)E[(AX+B)], \\ &= AE[X^2] + BE[X] - AE^2[X] - BE[X], \\ &= Avar(X), \end{aligned}$$

por lo anterior, el coeficiente de correlación es:

$$\rho_{XY} = \frac{A\sigma_X^2}{\sigma_X(|A|\sigma_X)} = \frac{A}{|A|}. \quad \blacksquare$$

La pregunta que se debe plantear ahora es si el recíproco del teorema anterior es verdadero. Se abordará este problema de una manera informal. Considérese que $\rho_{XY} = 1$, de manera que el polinomio $p(t)$ descrito por la ecuación 4.88 tiene una raíz única. Sea t_0 la raíz del polinomio, entonces $p(t_0) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[(Ut_0 + V)^2] &= 0, \\ E[Ut_0 + V] &= t_0E(U) + E(V) = 0, \\ var[Ut_0 + V] &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema de Chebyshev, $P(|X-\mu| \leqslant \epsilon) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$. Aplicado a la variable Ut_0+V se concluye que,

$$P(|Ut_0+V| \leq \epsilon) = 1.$$

La ecuación anterior es válida para todo $\epsilon > 0$; por lo tanto, $Ut_0+V=0$,

$$Ut_0+V = t_0(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y) = 0.$$

Realizando el álgebra se obtiene,

$$Y = -t_0X+\mu_Y - t_0\mu_X$$

La última ecuación es de la forma $Y = AX+B$.
En conclusión si $\rho_{XY} = 1$ entonces, con probabilidad 1, $Y = AX+B$.

Propiedades reproductivas

Supóngase que X y Y son dos variables aleatorias con la misma distribución de probabilidad, si la variable aleatoria Z=X+Y tiene la misma distribución que X y Y, entonces se dice que la distribución en sí misma tiene propiedades reproductivas. Para el estudio de las propiedad reproductiva es de gran utilidad la función generadora de momentos.

Teorema 4.6.6 *Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de momentos son $M_{X_1}, M_{X_2}, \ldots, M_{X_n}$, respectivamente. Entonces la función generadora de momentos de la variable aleatoria $Y = X_1+X_2+\ldots+X_n$ está determinada por,*

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t). \tag{4.92}$$

Demostración: De acuerdo con la definición **??**,

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E[e^{tZ}],\\
&= E[e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}],\\
&= E[e^{(tX_1+tX_2+\ldots+tX_n)}],\\
&= E[e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_n}], \text{dado que las variables son independientes},\\
&= E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\ldots E[e^{tX_n}],\\
&= M_Y(t) = (M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 4.6.7 (Propiedad reproductiva de la normal) *Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribuciones*

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2), \ldots, N(\mu_n, \sigma_n^2),$$

respectivamente. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes, entonces la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_2X_n$ tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde

$$\mu = \sum_i^n a_i\mu_i, \tag{4.93}$$

$$\sigma^2 = \sum_i^n a_i^2\sigma_i^2. \tag{4.94}$$

Demostración: La demostración se basa en los teoremas **??** y **??**.
De acuerdo con la ecuación **??**, las funciones generadoras de momentos de las variables aleatorias X_i están determinadas por:

$$M_{X_i} = e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2} \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{4.95}$$

Como las variables aleatorias X_i son independientes, entonces por el teorema 4.6.6

$$\begin{aligned} M_Y &= M_{X_1} M_{X_2} \ldots M_{X_n}, \\ &= \left(e^{\mu_1(a_1t) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(a_1t)^2}\right)\left(e^{\mu_2(a_2t) + \frac{1}{2}\sigma_2^2(a_2t)^2}\right)\ldots\left(e^{\mu_n(a_nt) + \frac{1}{2}\sigma_n^2(a_nt)^2}\right), \\ &= e^{[(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n)t + \frac{1}{2}(a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2)t^2]} \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema **??** la variable aleatoria Y tiene distribución normal con media y varianza determinadas por:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_i^n a_i\mu_i, \\ \sigma^2 &= \sum_i^n a_i^2\sigma_i^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 4.6.1 *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales idénticas con media μ y varianza σ^2, entonces la variable aleatoria $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tiene distribución normal con media $N(\mu, \sigma^2)$, donde*

$$\mu = \sum_i^n \mu_i, \tag{4.96}$$

$$\sigma^2 = \sum_i^n \sigma_i^2. \tag{4.97}$$

Demostración: Se obtiene tomando todas las constantes $a_i = 1, i = 1, 2, \ldots, n$. ∎

Ejemplo 4.6.5 *Tres resistores se conectan en serie en un circuito. La resistencia eléctrica R_i de cada resistor tiene distribución normal con $E(R_i) = 100\,\Omega$ y $var(R_i) = 5\,\Omega^2$. Calcule la probabilidad de que la resistencia total del circuito sobre pase los $305\,\Omega$*

Solución: La resistencia total de un circuito en serie es la suma de las resistencias, de manera que si se define $R = R_1 + R_2 + R_3$. Esta variable aleatoria representa la resistencia total del cicuito. La variable aleatoria R tiene disctribución normal con media $\mu = 3E(R_i) = 300\,\Omega$ y varianza $\sigma = 3var(R_i) = 15\,\Omega^2$. Se requiere determinar $P(R > 305)$.

$$\begin{aligned} P(X > 305) &= 1 - P(X \leq 305), \\ &= 1 - P(Z \leq z_1), \\ &= 1 - F(z_1), \end{aligned}$$

donde

$$z_1 = \frac{300 - 305}{3.87} = -1.29.$$

$$\begin{aligned} P(X > 49) &= 1 - F(-1.29), \\ &= 1 - 0.0985, \\ &= 0.9015. \end{aligned}$$

Teorema 4.6.8 (Propiedad reproductiva de la χ_n^2) *Supóngase que X_1, $X_2 \ldots X_k$ son variables aleatorias independientes con distribuciones $\chi^2_{n_1}, \chi^2_{n_2}$, $\chi^2_{n_k}$, respectivamente, entonces la variable aleatoria $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ tiene distribución χ_n^2, donde*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k. \tag{4.98}$$

Demostración: La demostración es análoga al caso anterior, considerando que la función generadora de momentos está determinada por la ecuación **??**.

$$M_{X_{i(t)}} = \frac{1}{(1-2t)^{n_i/2}}, \quad i = 1, 2, \ldots k.$$

Los detalles se dejan para el lector. ∎

Teorema 4.6.9 *Si X es una variable con distribución normal estándar, entonces $Z = X^2$ tiene distribución χ_1^2.*

Demostración: Se sabe que X tiene distribución $N(0,1)$, es decir, la función de densidad está determinada por,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.99}$$

La función de densidad de $Z = X^2$ puede calcularse mediante el teorema **??**

$$g(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}(f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})). \tag{4.100}$$

De las ecuaciones 4.99 y 4.99 se obtiene,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2\sqrt{z}} (e^{-\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}) \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\frac{z}{2}} \right). \end{aligned}$$

La función de densidad determinada por $g(z)$ corresponde a una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad, χ_1^2, como puede verificarse en la ecuación **??**.

Teorema 4.6.10 *Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, todas con distribución $N(0,1)$. Entonces la variable aleatoria $Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ tiene distribución χ_n^2.*

Demostración: Se sigue de los teoremas 4.6.9 y 4.6.8. Dado que las X_i tienen distribución normal estándar, entonces todas las X_i^2 tendrán distribución chi-cuadrado con un grado de libertad. La suma de las X_i^2 tendrá distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. ∎

Ley débil de los grandes números

Teorema 4.6.11 (Ley débil de los grandes números) *Supóngase que X_1, $X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes (discretas o continuas) idénticamente distribuidas, todas con media μ y varianza σ^2. Si*

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0. \tag{4.101}$$

Demostración: De acuerdo con los teoremas 4.5.5 y 4.86

$$
\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right), \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i), \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu, \\
&= \mu.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
var(\overline{X}) &= var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right), \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i), \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2, \\
&= \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}
$$

Aplicando el teorema de Chebyshev (teorema **??**) a la variable aleatoria $\overline{X}$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X} - E(\overline{X})\right| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{var(\overline{X})}{\epsilon^2}, \\
P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}, \\
\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \epsilon\right) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

La variable aleatoria $\overline{X}$ es la media aritmética de las variables $X_1, X_2, \ldots,$ X_n. Este teorema establece que: la probabilidad de que la media aritmética difiera de su media una cantidad mayor que ϵ tiende a cero a medida que $n \to \infty$. En el capítulo 5 se interpretará a la variable aleatoria $\overline{X}$ como la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n tomado de una población $f(x)$ con media poblacional μ y varianza poblacional σ^2.

Capítulo 5

Estadística paramétrica usando estimación y prueba de hipótesis

La estadística se divide en dos ramas: La estadística descriptiva y la estadística inferencial. La estadística descriptiva se ocupa de recolectar, clasificar, organizar y presentar los datos de un experimento. Por otro lado, la estadística inferencial se ocupa del estudio de los métodos y procedimientos inductivos (que van de lo particular a lo general) para determinar las propiedades de una *población estadística*. En este capítulo se estudiarán los conceptos y las técnicas de la estadística inferencial. Para comenzar esta unidad se presentará una breve introducción de la teoría del muestreo.

Introducción a la teoría del muestreo

Población y muestra

El el capítulo 1 se definió *experimento* como cualquier proceso que genere un conjunto de datos. El conjunto de todos los datos se conoce como población. Si la población consta de un número finito de datos, el total de éstos se conoce como tamaño de la población. Por otro lado, se conoce como muestra a cualquier subconjunto finito de datos tomados de la población. El número de datos que componen la muestra se conoce como tamaño de la muestra.

Parámetros de la población e inferencia estadística

En general, los datos que constituyen la población son mediciones u observaciones de una variable aleatoria X cuya función de probabilidad o (de densidad) $f(x)$ puede ser conocida o no. Por lo anterior, la población se denomina en términos de la distribución correspondiente a $f(x)$, por ejemplo, si $f(x) = b(x; n, p)$ (ver la definición **??**) se dirá que la población tiene distribución binomial. La función $f(x)$ depende de ciertos parámetros, éstos se conocen como parámetros poblacionales.

En la práctica generar los datos implica diseñar los experimentos de tal manera que puedan observarse las variables que son de interés para el observador. La obtención de todos los datos de un experimento puede llegar a ser un trabajo impráctico o imposible. En consecuencia, al realizar estudios estadísticos, se opta por determinar *una muestra representativa* de la población y, a partir de los resultados encontrados en ésta, se busca inferir conclusiones sobre las propiedades de la población. Este proceso se conoce como **inferencia estadística.**

Muestreo aleatorio y distribuciones muestrales

El procedimientro mediante el cual se obtiene una muestra de la población se conoce como muestreo. Se dirá que la muestra es sesgada si el muestreo sobrestima o subestima una característica de la población, lo cual ocurre con mucha frecuencia cuando se descarta a un segmento de la población. Para eliminar el sesgo en un estudio estadístico se requiere que la muestra sea representativa de la población y esto solo puede lograrse si todos los elementos de la población tienen la misma oportunidad de formar parte de la muestra. El proceso de muestreo puede englobarse en dos casos muy generales, los cuales se discuten a continuación.

Muestreo con y sin reemplazo

1. El primer caso se discutió en el capítulo 1. La población se compone de un conjunto de N objetos, los cuales poseen la característica X. Por ejemplo, la población puede formarse de todos los artículos de un lote, donde cada artículo puede caracterizarse como defectuoso $X = 0$ o no defectuoso $X = 1$. Los objetos que componen la población pueden numerarse como $1, 2, \ldots, N$. La obtención de una muestra de tamaño n puede realizarse de dos maneras: con reemplazo y sin reemplazo. En ambos casos se supone que los objetos no pueden ser observados (o medidos) sino hasta después de haber sido extraídos de la población. Una muestra de tamaño n, extraída de la población, es una n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de valores de la característica medible X. Si se definen n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ donde la variable X_i toma

el valor x_i que se obtiene en la i-ésima medición con $i = 1, 2, \ldots n$, entonces la n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una medición de la variable n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. La distribución de probabilidad de la variable n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dependerá de si el muestreo se realiza con reemplazo o sin reemplazo.

a)Si el muestreo se realiza con reemplazo, es decir, el objeto se devuelve a la urna (o al lote) antes de realizar la siguiente extracción, entonces las condiciones bajo las cuales se realiza la i-ésima extracción $(1 < i \leq n)$ son idénticas a la que se tenían al realizar la primera extracción y, por lo tanto, las variables aleatorias X_i para $i = 1, 2, \ldots n$ son independientes y tienen la misma distribución que la variable aleatoria X, luego

$$\begin{aligned} P(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots X_n = j_n) &= f(j_1)f(j_2)\ldots f(j_n), \\ &\quad \text{donde } j_i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

b)Si el muestreo se realiza sin reemplazo, entonces las condiciones bajo las cuales se realiza la i-ésima extracción $(1 < i \leq n)$ no son idénticas a las que se tenían al realizar la primera extracción y, además, las variables aleatorias X_i no son independientes. La función de probabilidad conjunta puede expresarse como:

$$\begin{aligned} P(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots X_n = j_n) &= \frac{1}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}, \\ &\quad \text{donde } j_i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

2. La segunda situación se presenta en las ciencias físicas y la ingeniería. En este caso la población no consiste de un conjunto de objetos, sino de un conjunto infinito de posibles resultados para una cantidad medible X con función de densidad $f(x)$ y que resulta de interés para el investigador. Para obtener una muestra de tamaño n, es decir, n mediciones de la variable aleatoria X, se diseña un experimento que permita medir la característica X obteniéndose un valor x_1. El experimento se repite nuevamente, bajo las mismas condiciones para obtener una segunda medición x_2 de X, y así sucesivamente, hasta obtener una medición x_n de X. Todas las mediciones se realizan de manera independiente y bajo las mismas condiciones. Al final se tiene una muestra $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de la característica medible X. Si se definen n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ donde la variable X_i toma el valor x_i que se obtiene en la i-ésima medición con $i = 1, 2, \ldots n$. De esta manera, la n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una medición de la variable *n-dimensional*

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dado que las mediciones se obtuvieron bajo las mismas condiciones y de manera independiente, entonces las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen la misma distribución que X y además son independientes; por lo tanto, su función de densidad conjunta está determinada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n). \tag{5.1}$$

Muestras aleatorias

Definición 5.0.1 (Muestras aleatorias) *Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad determinada (normal, binomial, etc...). Se dice que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de X, si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes y si tienen la misma distribución que X.*

Estadístico muestral

Definición 5.0.2 (Estadístico) *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de una variable aleatoria X, entonces se conoce como estadístico muestral a cualquier función real $U = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.*

Dado que U es una variable aleatoria, entonces el estadístico tendrá asociado una función de distribución y parámetros (como la media y la varianza). De este modo, dado un estadístico U, se hablará de la distribución y de los parámetros del estadístico U.

La media muestral

Definición 5.0.3 (La media muestral) *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de una población específica, entonces se conoce como la media muestral al estadístico $\overline{X}$ definido como:*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.2}$$

La varianza muestral

Definición 5.0.4 (La varianza muestral) *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de una población específica, entonces se conoce como la varianza muestral al estadístico S^2 definido como:*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \tag{5.3}$$

La desviación estándar muestral

Definición 5.0.5 (La desviación estándar muestral o error estándar) *La raíz cuadrada positiva de la varianza muestral se conoce como la desviación estándar muestral o error estándar; es decir,*

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}. \tag{5.4}$$

Definición 5.0.6 (Distribución muestral) *La distribución de probalidad de un estadístico se conoce como distribución muestral del estadístico. Las distribuciones muestrales de los estadísticos $\overline{X}$ y S^2 son de particular interés, ya que a partir de su conocimiento es posible hacer inferencias sobre la media y la varianza poblacional.*

5.1. Estimación de parámetros

La inferencia estadística puede abordase desde dos enfoques, conocidos como el enfoque clásico y el enfoque bayesiano. El enfoque clásico consiste en obtener una estimación de un parámetro poblacional, considerado como un valor desconocido pero fijo, a partir de una muestra aleatoria. En el enfoque bayesiano la estimación requiere de información adicional que no proviene de la muestra y que se basa en la experiencia del observador. En esta sección se presentan los conceptos básicos para comprender y desarrollar los métodos del enfoque clásico de la estimación.

Estimación puntual y estimación por intervalos

La estimación de un parámetro poblacional puede llevarse a cabo mediante una muestra en conjunción con el uso de un estadístico. Considérese que se obtiene una muestra aleatoria $(X_1, X_1, \ldots, X_n)$ de una población cuya distribución depende de un parámetro desconocido θ. Para estimar el valor de θ se requiere de un estadístico. Si después de los procedimientos se reporta un valor numérico $\widehat{\theta}$ para estimar el parámetro θ, el proceso se conoce como estimación puntual. El valor $\widehat{\theta}$ se conoce como la estimación y corresponde al valor del estadístico al sustituir los valores de la muestra. Por otro lado, si al final de los procedimientos se reporta un intervalo en el cual el parámetro poblacional puede encontrarse, con cierta probabilidad, entonces el procedimiento se conoce como estimación por intervalo. El intervalo determinado mediante este proceso se conoce como intervalo de confianza. Dado que se pueden tener diversos estadísticos para realizar la estimación de un parámetro poblacional, es necesario establecer criterios para seleccionar el estimador más adecuado para estimar el parámetro poblacional, en el sentido de que provea una mejor estimación en términos probabilísticos.

Definición 5.1.1 (Estimador y estimación) *Supóngase que $f(x;\theta)$ es la función de distribución de una población y que de ella se extrae una muestra aleatoria $(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ de tamaño n. Si $\widehat{\Theta} = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es el estadístico que se utiliza para estimar el parámetro poblacional θ, entonces $\widehat{\Theta}$ se conoce como estimador del parámetro poblacional θ, mientras que el valor que asume el estimador al sustituir los valores muestrales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se conoce como estimación de θ y se representa por $\widehat{\theta}$; es decir,*

$$\widehat{\theta} = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.5}$$

Definición 5.1.2 (Estimador insesgado) *Supóngase que $\widehat{\Theta}$ es un estimador de un parámetro poblacional θ, entonces se dice que $\widehat{\Theta}$ es un estimador insesgado de θ si*

$$E(\widehat{\Theta}) = \theta \tag{5.6}$$

para todos los posibles valores de θ.

En la figura 5.1 se muestran las funciones de densidad de dos estimadores $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$. Se observa que $\widehat{\Theta}_1$ es un estimador insesgado del parámetro poblacional θ.

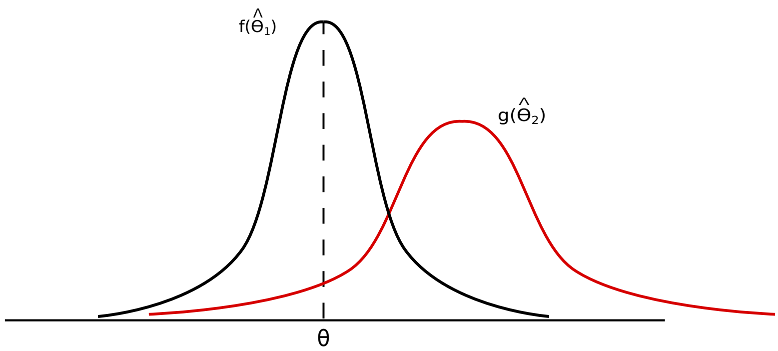


Figura 5.1: Estimadores

Ejemplo 5.1.1 *Considérese una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población $f(x;\mu)$. Si se estima la media mediante el estimador*

$$T = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

entonces

$$E(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n}{n+1}\mu,$$

por lo tanto, T no es un estimador insesgado de μ.

Teorema 5.1.1 *Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Si $\overline{X}$ es la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n, entonces*

a) $E(\overline{X}) = \mu$.

b) $var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

c) Si X está distribuido normalmente, entonces $\overline{X}$ tiene distribución normal.

Demostración:

a) De acuerdo con la definición 5.0.3 y las propiedades de la media estudiadas en el capítulo 4,

$$\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i), \\
&= \frac{n\mu}{n} = \mu.
\end{aligned}$$

Lo anterior significa que la media muestral $\overline{X}$ es un estimador insesgado de la media μ.

b) De manera análoga,

$$
\begin{aligned}
var(\overline{X}) &= var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i), \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X), \\
&= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}
$$

c) Se obtiene directamente de la propiedad reproductiva de la distribución normal (teorema 4.94). ∎

Teorema 5.1.2 *Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Si $\overline{X}$ es la media muestral y S^2 es la varianza muestral de una muestra aleatoria de tamaño n, entonces*

a) $E(S^2) = \sigma^2$.

b) Si X está distribuida normalmente, entonces la variable aleatoria

$$\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) S^2,$$

tiene distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

Demostración:

a) Desarróllese la siguiente suma:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\overline{X})^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)\right]^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+(\overline{X}-\mu)^2\right],\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)(X_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\overline{X}-\mu)(n\overline{X}-n\mu)+n(\overline{X}-\mu)^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de la media a la ecuación 5.7 se obtiene,

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2\right]\right],\\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\overline{X}-\mu)^2\right],\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}var(X_i)-n\,var(\overline{X})\right),\\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n(\frac{\sigma^2}{n})\right),\\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Esto significa que la varianza muestral S^2 es un estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2.

b) De la ecuación 5.7 se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2.$$

De la definición de la varianza (definición 5.0.4) se sigue

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2,\\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= (n-1)S^2+n(\overline{X}-\mu)^2,\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\dfrac{1}{\sigma^2}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)S^2+\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2. \tag{5.8}$$

Si se definen las variables aleatorias

$$Y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2, \tag{5.9}$$

$$Y_1 = \left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)S^2, \tag{5.10}$$

$$Y_2 = \left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2, \tag{5.11}$$

entonces la ecuación 5.8 puede expresarse como

$$Y=Y_1+Y_2. \tag{5.12}$$

De acuerdo en el teorema 4.6.10, la variable aleatoria Y definida por la ecuación 5.9 es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. El teorema 4.6.9 permite establecer que Y_2 es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado y con un grado de libertad. Puede probarse que las variables aleatorias Y y Y_2 son independientes, de manera que la propiedad reproductiva de la distribución chi-cuadrado permite concluir que Y_1 es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado y con $n-1$ grados de libertad. ∎

Definición 5.1.3 (Estimador insesgado de varianza mínima) *Si $\widehat{\Theta}_1$ es un estimador insesgado de un parámetro poblacional θ, se dice que $\widehat{\Theta}_1$ es un estimador insesgado de varianza mínima o estimador más eficiente, si para cualquier otro estimador $\widehat{\Theta}_2$, se cumple que*

$$var(\widehat{\Theta}_1)<var(\widehat{\Theta}_2)$$

.

En la figura 5.2 se representan las distribuciones de dos estimadores $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$ para el mismo parámetro θ. Se observa que $var(\widehat{\Theta}_1) < var(\widehat{\Theta}_2)$. Si lo anterior se cumple para cualquier otro estimador insesgado de θ, entonces $\widehat{\Theta}_1$ será un estimador insesgado de varianza mínima para el parámetro θ.

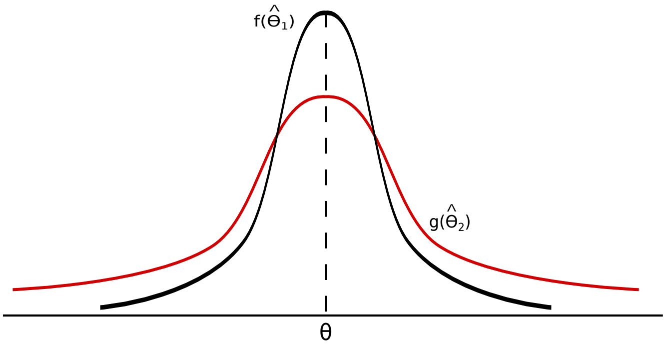


Figura 5.2: Estimadores

Definición 5.1.4 (Estimador convergente) *Si $\widehat{\Theta}$ es una estimación de un parámetro poblacional θ, entonces se dice que $\widehat{\Theta}$ es un estimador convergente si,*

$$\lim_{n\to\infty} (|\widehat{\Theta} - \theta| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \tag{5.13}$$

o de manera equivalente si

$$\lim_{n\to\infty} (|(\widehat{\Theta} - \theta| < \epsilon) = 1, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{5.14}$$

Ejemplo 5.1.2 *Si la media muestral $\overline{X}$ se usa como estimador de la media μ, entonces, de acuerdo con el teorema 4.6.11*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}| - \mu > \epsilon) = 0, \tag{5.15}$$

por lo tanto, $\overline{X}$ es un estimador convergente.

Definición 5.1.5 (El mejor estimador insesgado) *Se dice que $\widehat{\Theta}$ es el mejor estimador de un parámetro poblacional θ si se satisfacen las siguientes condiciones*

a) $\widehat{\Theta}$ *es un estimador insesgado.*

b) $\widehat{\Theta} = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$*, donde todas las* a_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *son constantes.*

c) Si $\widehat{\Theta}$ *es un estimador de varianza mínima.*

Hasta aquí solo se han definido las características deseables de un estimador. Existen varios métodos para obtener estimadores para un parámetro poblacional dado, en este trabajo no se abordarán dichos métodos. El lector interesado encontrará una amplia exposición de estos métodos en la bibliografía recomendada al final de este trabajo.

5.1.1. Estimación puntual

Una estimación puntual de un parámetro poblacional θ es un valor único $\widehat{\theta}$ del estimador Θ.

Ejemplo 5.1.3 *Si se usa la media muestral como estimador de la media poblacional, entonces el valor único*

$$\widehat{\overline{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

corresponde a una estimación puntual de la media, donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *son los valores de una muestra aleatoria de tamaño* n*.*

Ejemplo 5.1.4 *Si se utiliza la varianza muestral como estimador de la varianza poblacional, entonces el valor único*

$$\widehat{s^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\overline{x}})^2,$$

corresponde a una estimación puntual de la varianza, donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *son los valores de una muestra aleatoria de tamaño* n*.*

Ejemplo 5.1.5 *Las medidas de una muestra aleatoria corresponden a los pesos 8.3, 10.6, 9.7, 8.8, 10.2, y 9.4 lb. a) Determine una estimación puntual de la media usando el estimador insesgado* $\overline{X}$*, b) determine una estimación puntual de la varianza poblacional usando el estimador insesgado* S^2*.*

Solución: Las estimaciones puntuales de la media y la varianza son:

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{x}} &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 9.5,\\
\widehat{s^2} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \widehat{\overline{x}})^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 9.5)^2 = 0.736.
\end{aligned}$$

5.1.2. Estimación por intervalo

Si en lugar de determinar un valor único para un parámetro poblacional θ se determina un intervalo en el cual θ puede estar contenido, con cierta probabilidad, entonces la estimación se conoce como estimación por intervalo. En una estimación por intervalo el parámetro poblacional θ estará acotado por dos estadísticos $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$ tal que

$$\widehat{\Theta}_1 < \theta < \widehat{\Theta}_2.$$

Tanto $\widehat{\Theta}_1$ como $\widehat{\Theta}_2$ dependen del estimador y de la distribución del mismo, de tal manera que es posible determinar

$$P(\widehat{\Theta}_1 < \theta < \widehat{\Theta}_2) = 1 - \alpha, \tag{5.16}$$

para un $0 < \alpha < 1$.

5.2. Intervalos de confianza(I de C)

El valor $1 - \alpha$ en la ecuación 5.16 se conoce como coeficiente de confianza de $(1 - \alpha)$ o coeficiente de confianza del $(1 - \alpha)100\,\%$.
El intervalo $(\widehat{\Theta}_1 < \theta < \widehat{\Theta}_2)$ se conoce como intervalo de confianza para la media y para el coeficiente de confianza del $(1 - \alpha)100\,\%$.

La ecuación 5.16 debe interpretarse como: $1 - \alpha$ es la probabilidad de que el intervalo aleatorio de confianza $(\widehat{\Theta}_1, \widehat{\Theta}_2)$ contenga al parámetro θ.
A continuación se precisarán los conceptos anteriores analizando un caso general.

Intervalo de confianza para la media cuando se muestrea una población normal con varianza conocida

Considérese una población distribuida normalmente $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ es conocida y μ es el parámetro poblacional que se requiere estimar. Supóngase que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de la población y que se utiliza la media muestral para estimar μ. De acuerdo con el teorema 5.0.3, $\overline{X}$ tiene distribución $N(\mu, \sigma^2/n)$, luego la variable estandarizada

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

tiene distribución normal estándar. En la figura 5.3 se muestra la función de densidad de la variable aleatoria Z. Para precisar los parámetros de la figura

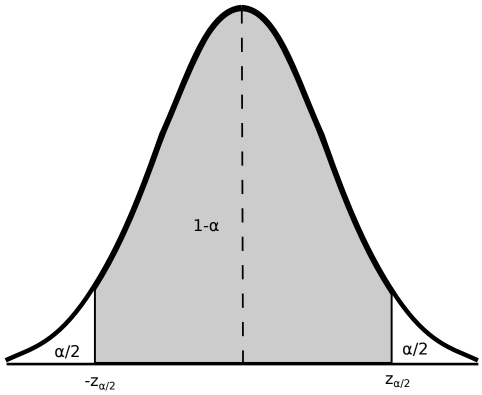


Figura 5.3: La distribución normal

anterior obsérvese que:

$$\begin{aligned} F(z_{\alpha/2}) &= \int_{-\infty}^{-z_{\alpha/2}} f(x)dx + \int_{-z_{\alpha/2}}^{z_{\alpha/2}} f(x)dx, \\ &= F(-z_{\frac{\alpha}{2}}) + (1-\alpha), \\ &= \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha), \\ &= 1 - \alpha/2. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Se debe tener siempre presente que $z_{\alpha/2}$ corresponde al cuantil $z_{1-\alpha/2}$. Lo anterior permite establecer,

$$\begin{aligned} P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha, \\ P(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha, \\ P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha, \qquad (5.18) \\ P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} < -\mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X}) &= 1-\alpha, \\ P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha. \qquad (5.19) \end{aligned}$$

A continuación se precisan algunas cantidades que aparecen en la ecuación 5.19.

El valor $1-\alpha$ en la ecuación 5.19 corresponde al coeficiente de confianza del $(1-\alpha)100\,\%$.

El intervalo de confianza para la media y para el coeficiente de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ es,

$$(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \tag{5.20}$$

La ecuación 5.19 debe interpretarse como: $1-\alpha$ es la probabilidad de que el intervalo aleatorio de confianza $(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ contenga a la media μ.
Los límites de confianza se determinan a partir de los estadísticos

$$L_1 = \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5.21}$$

$$L_2 = \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.22}$$

Una vez que se tiene la muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ el intervalo de confianza puede expresarse como:

$$\widehat{l}_{2,1} = \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5.23}$$

Ejemplo 5.2.1 *Un fabricante de fibras sintéticas desea estimar la tensión de ruptura media de una fibra. Diseña un experimento en las que se observan las tensiones de ruptura, en Newtons, de 16 hilos del proceso, seleccionados aleatoriamente. Las tensiones son: 20.8, 20.6, 21.0, 20.9, 19.9, 20.2, 19.8, 19.6, 20.9, 21.1, 20.4, 20.6, 19.7, 19.6, 20.3, 20.7. Supóngase que la tensión de ruptura de una fibra se encuentra modelada por una distribución normal con varianza de 0.45 Newtons. Construya un intervalo de confianza del 98 % para el valor real de la tensión promedio de ruptura promedio de la fibra.*

Solución: La estimación puntual de la media es:

$$\widehat{\overline{x}} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 20.3812.$$

Dado que el coeficiente de confianza es 0.98, entonces $\alpha = 0.02$ y $\alpha/2 = 0.01$ y por lo tanto, $F(Z_{0.01}) = 0.99$. De la tabla 4 del apéndice E se obtiene $Z_{0.01} = 2.33$. Los límites de confianza se determinan de acuerdo con la ecuación 5.23

$$\widehat{l}_{2,1} = 20.3812 \pm 2.33\frac{0.45}{\sqrt{16}} = 20.3187 \pm 0.2621, \tag{5.24}$$

$$\widehat{l}_2 = 20.3812 + 0.26217 = 20.6433, \tag{5.25}$$

$$\widehat{l}_1 = 20.3812 - 0.2621 = 20.1192, \tag{5.26}$$

Finalmente, el intervalo de confianza para μ del 98 % es:

$$20.1192 < \mu < 20.6433.$$

5.3. I de C, error estándar y tamaño de muestra

Considérese el siguiente desarrollo de la ecuación 5.18,

$$\begin{aligned} P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha, \\ P(|\overline{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha. \end{aligned} \tag{5.27}$$

La cantidad

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5.28}$$

se conoce como error absoluto y se denota como ϵ. La ecuación 5.27 se expresa en términos del error absoluto como

$$P(|\overline{X} - \mu| < \epsilon) = 1-\alpha. \tag{5.29}$$

En muchas situaciones se requiere determinar el tamaño de la muestra de tal manera que la ecuación 5.29 se satisfaga para un ϵ determinado. De la ecuación 5.28 se obtiene,

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\epsilon}\right)^2. \tag{5.30}$$

Definición 5.3.1 (Error estándar de un estimador puntual) *Dado un estimador puntual $\widehat{\Theta}$ de un parámetro poblacional θ, se define el error estándar como la desviación estándar del estimador; es decir,*

$$e.s(\widehat{\Theta}) = \sqrt{var(\widehat{\Theta})} \tag{5.31}$$

El intervalo de confianza de una estimación por intervalos dependerá del estimador que se utilice a través su error estándar, como se muestra a continuación.

Ejemplo 5.3.1 *Considérese que se utiliza la media muestral para estimar un la media de una población normal con varianza conocida. De acuerdo con el teorema 5.1.1 la varianza del estimador es*

$$var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

de manera que la desviación estándar o error estándar de la media es

$$e.s(\overline{X}) = \sqrt{(var(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En términos del error estándar los límites del intervalo de confianza para la estimación de la media se espresan como:

$$\widehat{l_1} = \overline{x} - z_{\alpha/2} e.s(\overline{X}), \quad (5.32)$$

$$\widehat{l_2} = \overline{x} + z_{\alpha/2} e.s(\overline{X}). \quad (5.33)$$

Intervalo de confianza para la media cuando se muestrea una población normal con varianza desconocida

Considérese que se desea hacer una estimación de la media para una población con distribución normal de la cual se desconoce la varianza, en este caso se recurre al estadístico

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}. \quad (5.34)$$

Desafortunadamente, el estadístico T no tiene distribución normal; sin embargo, su distribución puede determinarse considerando que,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{\frac{S}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} \\ &= \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} \end{aligned}$$

Si se definen las variables aleatorias Z y V como,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

y

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$$

entonces T puede expresarse como:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}}. \quad (5.35)$$

Si la muestra aleatoria se extrae de una población normal, entonces Z tiene distribución normal estándar (teorema 5.1.1) y V tiene disdribución chi-cuadrado con $(n-1)$ grados de libertad (teorema 5.1.2) . Si se supone que Z y V son independientes, entonces la variable aleatoria T tiene distribución t de Student, la cual se define en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1 *Sea (Z, V) una variable aleatoria bidimensional, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, mientras que V es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. Supóngase que Z y V son independientes y que T es una variable aleatoria que se define en términos de Z y V mediante*

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}, \tag{5.36}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria T está determinada por

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{5.37}$$

Una variable aleatoria cuya función de densidad está determinada por la ecuación 5.37 se conoce como variable aleatoria con distribución t de Student[1] *con n grados de libertad.*

Demostración: La demostración se desarrolla en el apéndice D.1.

En la tabla 6 del apéndice E se muestran los valores cuantiles t_p, los cuales deben interpretarse como:

$$p = \int_{-\infty}^{t_p} g(t)dt, \tag{5.38}$$

como se ilustra en la figura 5.4.

[1]Esta distribución fue publicada en 1908 por W. S. Gosset bajo el seudónimo de Student.

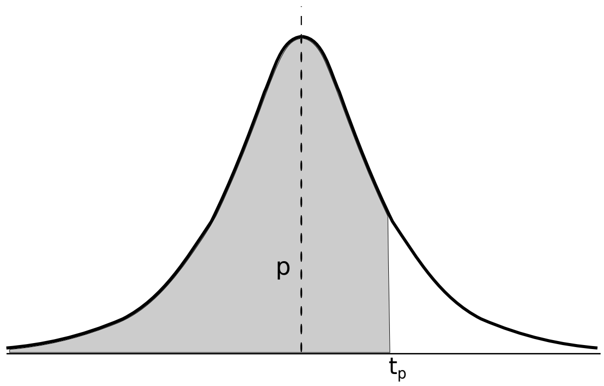


Figura 5.4: Cuantiles de la distribución t de Student

Para determinar el intervalo de confianza, considérese la figura 5.5

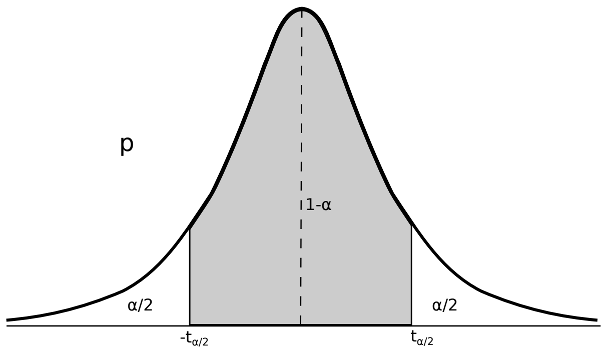


Figura 5.5: La distribución t

De manera análoga al caso anterior,

$$
\begin{aligned}
P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) &= 1-\alpha, \\
P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) &= 1-\alpha. \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

La ecuación 5.39 establece el intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida. Los límites de confianza están dados por los estadísticos

$$L_1 = \overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad (5.40)$$

$$L_2 = \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (5.41)$$

Con los valores de la muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se determinan las estimaciones que corresponden a los estimadores de los límites de confianza:

$$\widehat{l}_{2,1} = \overline{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}. \tag{5.42}$$

Se debe tener siempre presente que el estadístico de interés T definido mediante la ecuación 5.34 tiene distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad.

Ejemplo 5.3.2 *Se registraron 5 medidas del tiempo de reacción de un individuo ante cierto estímulo como: 0.28, 0.30, 0.27, 0.33, 0.31 segundos. Encuentre los límites de confianza del a) 90 % b) 95 % y c) 99 % para el tiempo verdadero medio de reacción.*

Solución: Las estimaciones puntuales de la media, la varianza y la desviación estándar son:
La media,

$$\widehat{\overline{x}} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 0.298.$$

La varianza,

$$\widehat{s^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 0.298)^2 = 0.0007.$$

La desviación estándar,

$$\widehat{s} = \sqrt{\widehat{s^2}} = \sqrt{0.0007} = 0.0264.$$

Además,

$$\frac{\widehat{s}}{\sqrt{5}} = \frac{0.0264}{2} = 0.0118.$$

Por otro lado, para obtener los cuantiles la tabla 6 del apéndice E, recuérdese que $t_{\alpha/2}$ corresponde al cuantil $t_{1-\alpha/2}$. Los cuantiles $t_{1-\alpha/2}$ para $n-1=4$, se muestran en la tabla 5.1

Coeficientes de confianza	90 %	95 %	99 %
$\alpha/2$	0.05	0.025	0.005
$F(t_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2$	0.95	0.975	0.995
$t_{\alpha/2}$	2.132	2.776	4.604

Tabla 5.1: Cuantiles $t_{1-\alpha/2}$

a) De acuerdo con la ecuación 5.42 el intervalo de confianza del 90 % para la media

$$\begin{aligned}\widehat{l}_{2,1} &= 0.298 \pm (2.132)(0.0118),\\ &= 0.298 \pm 0.0251.\end{aligned}$$

b) De manera análoga al caso anterior, el intervalo de confianza del 95 % para la media

$$\begin{aligned}\widehat{l}_{2,1} &= 0.298 \pm (2.776)(0.0118),\\ &= 0.298 \pm 0.0327.\end{aligned}$$

c) De la misma manera que en los incisos anteriores, el intervalo de confianza del 99 % para la media

$$\begin{aligned}\widehat{l}_{2,1} &= 0.298 \pm (4.604)(0.0118),\\ &= 0.298 \pm 0.0543.\end{aligned}$$

Intervalo de confianza para la varianza cuando se muestrea una población normal

Si se requiere hacer una estimación de la varianza para una población normal, entonces considera el estimador

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - X_i)^2.$$

Para determinar el intervalo de confianza debe considerarse el estadístico

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

El estadístico anterior tiene un distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad, como se demostró en el teorema 5.1.2. Considérese la figura 5.6. El parámetro α permite establecer,

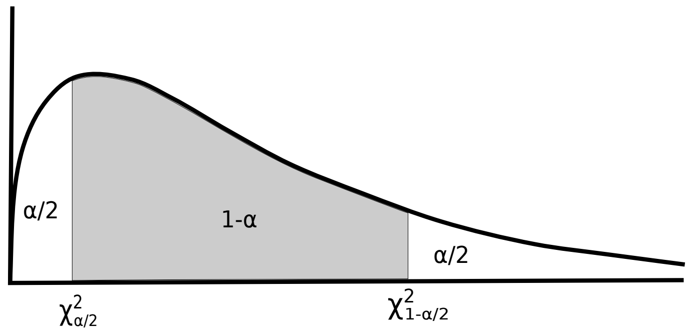


Figura 5.6: La distribución Chi-cuadrado

Los términos que aparecen en la figura anterior corresponden a los cuantiles,

$$\begin{aligned} F(\chi^2_{\alpha/2}) &= \frac{\alpha}{2}, \\ F(\chi^2_{1-\alpha/2}) &= 1-\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Lo anterior permite establecer,

$$\begin{aligned} P\left(\chi^2_{\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{(n-1)S^2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right) &= 1-\alpha. \end{aligned} \tag{5.43}$$

La ecuación 5.43 establece el intervalo de confianza para la varianza de una población normal. Los límites de confianza están dados por los estadísticos

$$L_1 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \tag{5.44}$$

$$L_2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \tag{5.45}$$

Para una muestra aleatoria $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la estimación de los límites de confianza se determinan como:

$$\widehat{l_1} = \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \tag{5.46}$$

$$\widehat{l_2} = \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{\alpha/2}} \tag{5.47}$$

Ejemplo 5.3.3 *Un fabricante de baterías para automóvil, asegura que sus baterías duran tres años en promedio, con una varianza de 1 año. Si 5 de éstas baterías tienen duraciones 1.9, 2.4, 3.0, 3.5, y 4.2 años, determine un intervalo de confianza de 95 % para σ^2. Supóngase que la población de la duración de las baterías tiene distribución normal.*

Solución: Las estimaciones puntuales de la media y la varianza son:

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{x}} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 3 \\ \widehat{s^2} &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \widehat{\overline{x}})^2 = 0.815 \end{aligned}$$

Los cuantiles satisfacen:

$$\begin{aligned} F(\chi^2_{\alpha/2}) &= 0.025, \\ F(\chi^2_{1-\alpha/2}) &= 0.975. \end{aligned}$$

De la tabla 5 del apéndice E se obtiene:

$$\begin{aligned} \chi^2_{1-\alpha/2} &= 11.15, \\ \chi^2_{\alpha/2} &= 0.48. \end{aligned}$$

De las ecuaciones 5.46 y 5.47 se obtiene la estimación de los límites de confianza.

$$\begin{aligned} \widehat{l_1} &= \frac{4(0.815)}{11.15}, \\ \widehat{l_2} &= \frac{4(0.815)}{0.48}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza del 95 % para la varianza es:

$$0.2923 < \sigma^2 < 6.7914.$$

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas cuando se muestrean dos poblaciones normales

Supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño n_1 de una población normal $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que una segunda muestra aleatoria de tamaño n_2 se toma de otra población normal $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Si se requiere hacer una estimación del cociente de las varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, entonces se recurre al estadístico F definido como,

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}.$$

Mediante los estadísticos U y V definidos como

$$\begin{aligned} U &= \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}, \\ V &= \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}, \end{aligned}$$

es posible expresar el estadístico F como:

$$F = \frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)}$$

Dado que las muestras se toman de poblaciones con distribuciones normales, entonces los estadísticos U y V tienen distribuciones chi-cuadrado con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad, respectivamente. La distribución del estadístico F se establece en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.2 *Sea (U, V) una variable aleatoria bidimensional, donde U y V son variables aleatorias con distribución chi-cuadrado cada una con n y m grados de libertad, respectivamente. Supóngase que U y V son variables aleatorias independientes y que F es una variable aleatoria que se define en términos de U y V mediante*

$$F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}, \tag{5.48}$$

entonces la función de densidad $g(f)$ de la variable aleatoria F está determinada por

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \tag{5.49}$$

Una variable aleatoria cuya función de densidad está determinada por la ecuación 5.49 se conoce como variable aleatoria con distribución F. Los parámetros n y m se conocen como grados de libertad de la distribución F.

Demostración: La demostración se desarrolla en el apéndice D.2.
El la tabla 7 del apéndice E se muestran los valores cuantiles f_p, para diversos valores de los parámetros (l_1, l_2) (grados de libertad, que en dicho orden corresponden a (n,m)).
Los cuantiles deben interpretarse como:

$$p = \int_{-\infty}^{f_p} g(f)df, \tag{5.50}$$

como se ilustra en la figura 5.7.

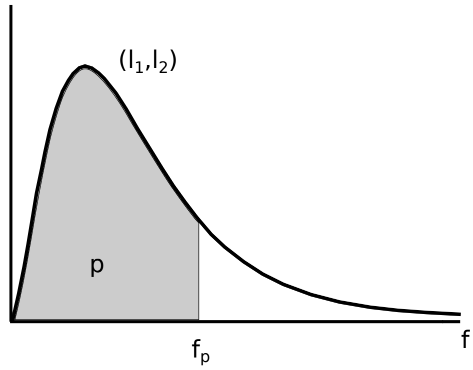


Figura 5.7: Cuantiles de la distribución F

Los cuantiles de interés se muestran en la figura 5.8 y se definen mediante:

$$\begin{aligned} P(F \leq f_{\alpha/2}) &= \int_0^{f_{\alpha/2}} g(f)df = \frac{\alpha}{2}, \\ P(F \leq f_{1-\alpha/2}) &= \frac{\alpha}{2} + 1 - \alpha, \end{aligned}$$

De acuerdo con la figura 5.8,

Lo anterior permite establecer,

$$\begin{aligned} P\left(f_{\alpha/2} < F < f_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(f_{\alpha/2} < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(f_{\alpha/2}\frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_{1-\alpha/2}\frac{S_2^2}{S_1^2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{1}{f_{1-\alpha/2}}\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{f_{\alpha/2}}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) &= 1-\alpha. \end{aligned} \tag{5.51}$$

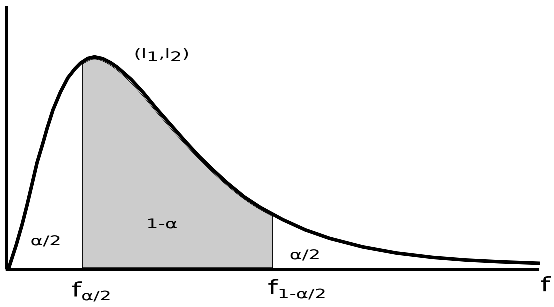


Figura 5.8: La distribución F

La siguiente propiedad de los cuantiles (ver el apéndice D.2)

$$f_{\alpha/2}(n,m) = \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(m,n)}$$

permite expresar la ecuación 5.51 como:

$$P\left(\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n,m)}\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < f_{1-\alpha/2}(m,n)\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = 1-\alpha. \tag{5.52}$$

La ecuación 5.52 establece el intervalo de confianza para el cociente de dos varianzas. Los límites de confianza están dados por los estimadores,

$$L_1 = \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n,m)}\frac{S_1^2}{S_2^2}, \tag{5.53}$$

$$L_2 = f_{1-\alpha/2}(m,n)\frac{S_1^2}{S_2^2}. \tag{5.54}$$

Mediante las muestras $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$ obtenidas de poblaciones independientes con distribuciones normales $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_1^2)$, respectivamente, se obtienen las estimaciones de los límites de confianza para el cociente de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$,

$$\widehat{l_1} = \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\frac{\widehat{s_1^2}}{\widehat{s_2^2}}, \tag{5.55}$$

$$\widehat{l_2} = f_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)\frac{\widehat{s_1^2}}{\widehat{s_2^2}}, \tag{5.56}$$

donde

$$\widehat{l_1} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \widehat{l_2}. \tag{5.57}$$

Ejemplo 5.3.4 *Cierto metal se produce, por lo común, mediante un proceso estándar. Se desarrolla un nuevo proceso en el que se añade una aleación a la producción del metal. Para cada proceso se seleccionan 12 especímenes y cada uno de ellos se somete a una tensión hasta que se rompen. La siguiente tabla muestra las tensiones de rupturas de los especímenes, en kilogramos por centímetros cuadrados.*

Si se supone que el muestreo se llevó a cabo sobre dos distribuciones normales e independientes. Determine un intervalo de confianza del 98 % para el cociente de las varianzas σ_1^1/σ_2^2, donde σ_1^2 es la varianza del proceso estándar (P 1) y σ_2^2 es la varianza del segundo proceso (P 2).

P 1	428	419	458	439	441	456	463	429	438	445	441	463
P 2	462	448	435	465	429	472	453	459	427	468	452	447

Tabla 5.2: Tabla de los procesos

Solución: Las estimaciones puntuales para la media y la varianza del proceso 1 son:

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{x}}_1 &= 433.3333, \\ \widehat{s_1^2} &= 312.9704. \end{aligned}$$

Las estimaciones puntuales para la media y la varianza del proceso 2 son:

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{x}}_2 &= 451.4166, \\ \widehat{s_2^2} &= 223.1742. \end{aligned}$$

Además,

$$\frac{\widehat{s_1^2}}{\widehat{s_2^2}} = 1.4023.$$

Se requiere obtener un intervalo de confianza del 98 %; por lo tanto $\alpha/2 = 0.01$ De la tabla 7 del apéndice E se obtiene

$$f_{0.99,11,11} = 4.46.$$

De las ecuaciones 5.55 y 5.56 se obtiene la estimación de los límites de confianza

$$\begin{aligned} \widehat{l_1} &= (1.4023)/(4.46) = 0.3145, \\ \widehat{l_2} &= (1.4023)(4.46) = 6.2491. \end{aligned}$$

El intervalo de confianza del 98 % para el cociente de las varianzas es:

$$0.3145 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 6.2491.$$

5.4. Teorema de límite central

Teorema 5.4.1 (Teorema del límite central) *Supóngase que* X_1, $X_2, \ldots, X_n$ *son* n *variables aleatorias independientes (discretas o continuas) idénticamente distribuidas, todas con media* μ *y varianza* σ^2. *Si*

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

es decir; la variable estandarizada $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ *tiende asintóticamente a la distribución normal estándar a medida que* $n \to \infty$.

Demostración: Dado que las variables aleatorias X_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ son independientes, entonces de acuerdo con el teorema 4.6.6 la función generadora de momentos de la variable aleatoria S_n es:

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t).$$

Además las variables aleatorias son idénticamente distribuidas; por lo tanto,

$$M_{S_n}(t) = M^n_{X_1}(t).$$

La variable aleatoria S_n tiene media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. Considérese la variable aleatoria estandarizada

$$Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

De acuerdo con el teorema **??**

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= e^{-\frac{n\mu t}{\sqrt{n}\sigma}t}M_{S_n}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}),\\
&= e^{-\frac{n\mu t}{\sqrt{n}\sigma}}M^n_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}),\\
&= e^{-\frac{n\mu t}{\sqrt{n}\sigma}}\left(E(e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}\sigma}})\right)^n,\\
&= \left(e^{-\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma}}E(e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}\sigma}})\right)^n,\\
&= \left(E(e^{\frac{(X_1-\mu)t}{\sqrt{n}\sigma}})\right)^n.
\end{aligned}$$

Mediante el desarrollo de Taylor para la función exponencial se obtiene,

$$\begin{aligned}
E\left(e^{(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma})t}\right) &= E\left(1+\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t+\frac{1}{2}\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 t^2+\dots\right),\\
&= 1+E\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t+\frac{1}{2}E\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 t^2+\dots,\\
&= 1+\frac{1}{2n\sigma^2}E\left(X_1-\mu\right)^2 t^2+\dots,\\
&= 1+\frac{1}{2n}t^2+\dots,
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} M_Z(t) &= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n}t^2)^n,\\
&= e^{\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Ésta es la función generadora de momentos para una variable aleatoria Z con distribución normal estándar. De acuerdo con el teorema **??** Z tiene distribución N(0,1). ∎

Los expertos en probabilidad recomiendan usar la aproximación establecida en el teorema anterior para muestras de tamaño $n > 30$ (lo cual se conoce como aproximación de muestras grandes). Dicho de otra manera, si no se conoce la distribución de la cual se extrae la muestra o si ésta se vuelve compleja para manipular, pero el tamaño de la muestra satisface el criterio de muestras grandes, puede usarse la distribución normal y este procedimiento está plenamente justificado por el teorema de límite central. A continuación se utilizará el teorema anterior para hallar un intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial.

Intervalo de confianza para la proporción cuando se muestrea una distribución binomial

Supóngase que se muestrea una población binomial cuyo parámetro p se requiere estimar mediante una muestra aleatoria. Considérese el estimador

$$\widehat{P}=\frac{X}{n}, \tag{5.58}$$

el cual resulta ser un estimador insesgado del parámetro p como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} E(\widehat{P}) &= \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}(np) = p, && (5.59)\\ var(\widehat{P}) &= \frac{1}{n^2}var(X) = \frac{1}{n^2}(np(1-p)) = \frac{p(1-p)}{n}. && (5.60)\end{aligned}$$

El hecho de que $\widehat{P}$ resulte ser un estimador insesgado para el parámetro binomial p no es una casualidad, de hecho, si se definen n variables aleatorias X_i con $i = 1, \ldots, n$ donde X_i asume al valor 1 si se obtiene éxito y asume el valor cero si se obtiene fracaso, entonces el estimador $\widehat{P}$ puede expresarse como

$$\widehat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{5.61}$$

por lo tanto, el estimador $\widehat{P}$ corresponde a la media muestral $\overline{X}$ y, de acuerdo con el teorema 5.1.1 éste es un estimador insesgado. Por otro lado, de acuerdo con el teorema de límite central, para muestras grandes, la variable aleatoria

$$Z = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sigma} = \frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

tiene distribución normal estándar. Se procederá a determinar un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ para el parámetro p.

$$\begin{aligned} P(-z_{\alpha/2} < Z < -z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha,\\ P(-z_{\alpha/2} < \frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha,\\ P\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \widehat{P} - p < z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha,\\ P\left(-\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < -p < -\widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha,\\ P\left(\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha.\end{aligned} \tag{5.62}$$

La ecuación 5.62 tiene el inconveniente teórico de que los límites de confianza dependen del parámetro p que se desea estimar . Dado que se está trabajando con muestras grandes, se espera que la estimación puntual $\widehat{p} = x/n$ se aproxime p, de manera que si se sustituye $\widehat{P} = X/n$ en los radicales que aparecen en la ecuación 5.62, los estimadores de los límites de confianza se expresan como:

$$\begin{aligned} L_1 &= \widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}, \\ L_2 &= \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}. \end{aligned}$$

Para una muestra aleatoria $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la estimaciones de los límites de confianza se expresan como:

$$\widehat{l_1} = \widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \tag{5.63}$$

$$\widehat{l_2} = \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}. \tag{5.64}$$

Ahora supóngase que para el coeficiente de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ y un $\epsilon > 0$ se requiere determinar el tamaño de la muestra de tal manera que

$$P(|\widehat{P} - p| < \epsilon) = 1 - \alpha.$$

Lo anterior puede lograrse considerando que la ecuación 5.63 puede expresarse como:

$$P\left(\left|\widehat{P} - p\right| < z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha. \tag{5.65}$$

Por lo anterior,

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \tag{5.66}$$

Despejando n de la ecuación anterior se obtiene

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{\epsilon^2}p(1-p). \tag{5.67}$$

Aparentemente el problema está resuelto; sin embargo, la ecuación 5.67 depende del parámetro p que se desea estimar. Considerada como una función de p, $n = n(p)$ tiene un máximo para $p = 1/2$; por lo tanto, para $p = 1/2$ se obtiene la estimación más conservadora del tamaño de la muestra.

Ejemplo 5.4.1 *Se recibe un lote muy grande de artículos que provienen de un fabricante que asegura que el porcentaje de artículos defectuosos en la población es del 1 %. Al seleccionar una muestra aleatoria de 200 artículos y después de inspeccionarlos, se descubren 8 defectuosos. Obténgase los intervalos de confianza aproximados del 90, 95 y 99 % para la verdadera proporción de artículos defectuosos en el proceso de manufactura del fabricante. Con base en estos resultados ¿Qué puede decirse sobre la afirmación del fabricante?*

Solución: La estimación puntual de la proporción es:

$$\widehat{p} = \frac{x}{n} = \frac{8}{200} = 0.0004.$$

Los cuantiles para los coeficientes de confianza dados se muestran en la tabla 5.3. Los valores de los cuantiles se determinan mediante la tabla 4 del apéndice E.

Coeficientes de confianza	90 %	95 %	99 %
$\alpha/2$	0.05	0.025	0.005
$F(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2$	0.95	0.975	0.995
$z_{\alpha/2}$	1.645	1.96	2.575

Tabla 5.3: Cuantiles $z_{1-\alpha/2}$

Los valores $z_{\alpha/2}$ se determinaron mediante la tabla 4 del apéndice E. Para determinar la estimación de los límites aproximados de confianza se recurre a las ecuaciones 5.63 y 5.64.

$$\begin{aligned}
\widehat{l_1} &= \widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \\
\widehat{l_2} &= \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los datos de la muestra y la estimación puntual $\widehat{p}$ se obtiene

$$\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} = 0.0139.$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\widehat{l}_{2,1} = \widehat{p} \pm (0.0139)z_{\alpha/2}.$$

Finalmente, sustituyendo $\widehat{p} = 0.04$ y los valores correspondientes de la tabla 5.3 se obtiene:

a) Intervalo de confianza del 90 % para la proporción.

$$\widehat{l}_{2,1} = 0.04 \pm (0.0139) z_{\alpha/2} = 04 \pm (0.0139)(1.645) = 0.04 \pm 0.0227,$$

$$0.0173 < p < 0.0627.$$

b) Intervalo de confianza del 95 % para la proporción.

$$\widehat{l}_{2,1} = 0.04 \pm (0.0139) z_{\alpha/2} = 0.04 \pm (0.0139)(1.9600) = 0.04 \pm 0.0270,$$

$$0.0130 < p < 0.0670.$$

c) Intervalo de confianza del 99 % para la proporción.

$$\widehat{l}_{2,1} = 0.04 \pm (0.0139) z_{\alpha/2} = 0.04 \pm (0.0139)(2.5750) = 0.04 \pm 0358,$$

$$0.0045 < p < 0.0755.$$

El valor de p que el fabricante asigna a su proceso queda fuera de los intervalos de confianza que se han obtenido. Existe entonces razón suficiente para sospechar que el valor verdadero de p no es 0.01 como él afirma.

5.5. Prueba de hipótesis

En muchas situaciones se deben tomar decisiones sobre hipótesis que involucran una población, basados en una muestra aleatoria; por ejemplo, el especialista de cierta área tiene que tomar decisiones sobre alguna hipótesis como podría ser: determinar si un nuevo fármaco ofrece alguna mejora significativa en el tratamiento de un padecimiento, si un automóvil tiene un mejor rendimiento que otro, o si el consumo de ciertos alimentos afectan la salud, etc... Las pruebas de hipótesis son una herramienta útil para abordar problemáticas como los anteriores.

Definición 5.5.1 (Hipótesis estadística) *Se entenderá por hipótesis estadística a una conjetura o afirmación acerca de una característica desconocida de una o más poblaciones. En general, una hipótesis estadística involucra un parámetro de la población.*

5.5.1. Elección de la prueba

Las pruebas de hipótesis se establecen mediante dos hipótesis conocidas como: la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alterna H_1.
Si la población de interés tiene distribución $f(x;\theta)$ y las hipótesis se definen en términos del parámetro poblacional θ, entonces la hipótesis nula se formulará como un valor único θ_0, mientras que la hipótesis alterna H_1 se formulará de manera más abierta; es decir, el parámetro θ podrá asumir un valor mayor, menor o diferente de θ_0. Las pruebas de hipótesis basadas en el parámetro poblacional θ pueden expresarse como:

a)
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0, \\ H_1 &: \quad \theta > \theta_0. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0, \\ H_1 &: \quad \theta < \theta_0. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0, \\ H_1 &: \quad \theta \neq \theta_0. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.1 *La cantidad promedio de una sustancia que se coloca en un recipiente en un proceso de llenado se supone que es de 20 ml. En forma periódica se escogen 25 recipientes y el contenido de cada uno de éstos se pesa. Se supone que la cantidad que se vacía en cada recipiente se encuentra aproximada, en forma adecuada por una distribución normal con desviación estándar* 0.5 *ml. Si se sospecha que la cantidad promedio se encuentra fuera de control, las hipótesis pueden plantearse como:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu \neq 20. \end{aligned}$$

La conclusión de que el sistema se encuentra fuera de control debe alcanzarse mediante el rechazo de la hipótesis nula.

Ejemplo 5.5.2 *Si se sospecha que una moneda está sesgada de tal manera que cara tiene menor oportunidad de ocurrir que cruz, entonces las hipótesis se pueden plantear de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = 0.5 \\ H_1 &: \quad p < 0.5. \end{aligned}$$

La conclusión de que H_1 es cierta se obtendrá a partir del rechazo de H_0.

5.6. Nivel de significancia

5.6.1. Errores tipo I(alfa) y tipo II(beta)

Las pruebas de hipótesis se diseñan de tal modo que la evidencia que proviene de la muestra permita rechazar o aceptar la hipótesis nula. Debe quedar claro que una decisión tomada a partir de una muestra nunca tendrá una certeza total. Los errores que pueden presentarse en una prueba de hipótesis se muestran en la siguiente tabla:

	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Se acepta H_0	Decisión correcta	Error tipo II
Se rechaza H_0	Error tipo I	Decisión correcta

Tabla 5.4: Errores tipo I y II

Definición 5.6.1 (Error tipo I) *Se comete un error tipo I si se rechaza la hipótesis nula dado que es verdadera. La probabilidad de este error se denota por α.*

Definición 5.6.2 (Error tipo II) *Se comete un error de tipo II si se acepta la hipótesis nula dado que es falsa. La probabilidad de este error de denota por β.*

De las definiciones anteriores se sigue que:

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ es cierta}), \tag{5.68}$$

$$\beta = P(\text{aceptar } H_0 | H_0 \text{ es falsa}). \tag{5.69}$$

Definición 5.6.3 (Nivel de significancia) *Se conoce como nivel de significancia a la probabilidad de cometer un error de tipo I; es decir, rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es cierta.*

El nivel de significancia α debe interpretarse de la misma manera que se interpretó la probabilidad de un intervalo de confianza; es decir, un nivel de significancia α significa que se rechazará la hipótesis nula en un $100\alpha\,\%$ de las veces.

Supóngase que el nivel de significancia es $\alpha = 0.01$; es decir, se cometerá un error de tipo I o se rechazará la hipótesis nula dado que es cierta en un 1 % de las veces, mientras que en un 99 % de las veces se aceptará la hipótesis nula dado que es cierta.

Para tomar una decisión sobre una hipótesis nula, una vez que se cuenta con la información de la muestra, es necesario tener una regla o un procedimiento prestablecido con el cual la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis se defina de manera unívoca. En otras palabras, se debe decidir hasta que punto serán aceptables las fluctuaciones entre la medición y el valor real del parámetro poblacional.

Definición 5.6.4 (Prueba o dócima, y Estadístico de prueba) *Una prueba o dócima de una hipótesis estadística con respecto a alguna carácterística desconocida de la población es cualquier regla para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula, con base a la información de una muestra aleatoria de la población. Esta prueba requiere del uso de un estadístico cuya distribución debe ser conocida. El estadístico se conoce como estadístico de prueba.*

Ejemplo 5.6.1 *Considérese el ejemplo 5.5.1 para el cual se establecieron las hipótesis como:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu \neq 20. \end{aligned}$$

Si ahora se define la prueba como: Se juzga el proceso como fuera de control cuando la media muestral $\overline{X}$ es menor o igual a 19.8 *o mayor o igual* 20.2 *ml. La prueba se ha establecido en términos del estadístico $\overline{X}$, el cual tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2/n)$.*

Como se mostró en el ejemplo anterior, la prueba se define en términos de ciertos valores del estadístico de prueba para los cuales la hipótesis nula debe ser rechazada. La región definida por estos valores se conoce como región crítica. En general para un estadístico de prueba T las pruebas pueden plantearse como:

a) Rechazar H_0 si T es mayor que un valor establecido c.

b) Rechazar H_0 si T es menor que un valor establecido c.

c) Rechazar H_0 si T es mayor que un valor establecido c_2 y menor que un valor establecido c_1.

Los valores c en cada prueba se conocen como valores críticos. Las pruebas definidas como en los incisos a) y b) se conocen como pruebas unilaterales o de una cola, mientras que las pruebas definidas como en el inciso c) se conocen como bilaterales o de doble cola. Las pruebas unilaterales se definen en términos de un único valor crítico, mientras que las pruebas bilaterales se definen en términos de dos valores críticos. La clasificación de las pruebas de hipótesis se debe a la forma en que el valor crítico o los valores críticos dividen el rango del estadístico de prueba. Las regiones se conocen como región crítica (o de rechazo) y región de aceptación (o de confianza). Lo anterior se representa en la figura 5.9. El riesgo de tomar una decisión equivocada siem-

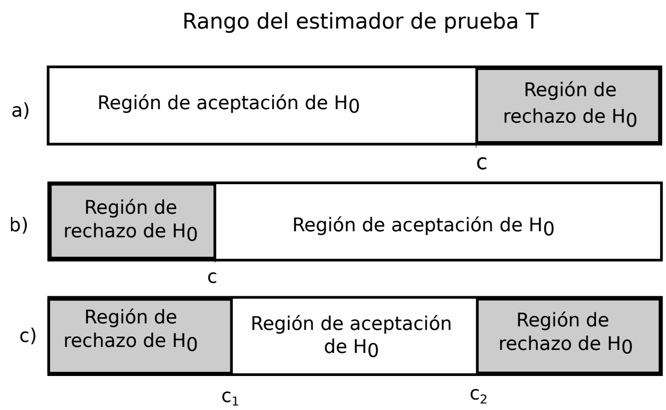


Figura 5.9: Pruebas de hipótesis de una y de dos colas

pre estará presente en las pruebas de hipótesis. Los riesgos que se asumen al tomar una decisión basada en una prueba de hipótesis definirán la calidad de la prueba. En general, se puede hacer que el valor de α sea tan pequeño como se quiera; sin embargo, esto incrementa la probabilidad de cometer un error de tipo II. Por fortuna, ambas probabilidades pueden disminuirse aumentando el tamaño de la muestra. Lo anterior se analizará en la siguiente sección.

5.7. Prueba de hipótesis para la media

Para ejemplificar los conceptos anteriores considérese que se tiene una población con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ y que las hipótesis se establecen

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0, \\ H_1 &: \quad \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

Si se utiliza el estadístico de prueba $\overline{X}$, y la prueba se establece como: Rechazar H_0 si $\overline{X} > c$, donde $\overline{X}$ es la media muestral y c es una constante. De acuerdo con la propiedad reproductiva de la distribución normal (teorema 4.94) y el teorema 5.1.1, $\overline{X}$ tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2/n)$, por lo tanto el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

tiene distribución normal estándar.
Supóngase que se conoce el tamaño de la muestra y se especifica un valor de c para la prueba, entonces el nivel de significancia se determina de la siguiente manera: Dado que Z es una función uno a uno y sobre, de acuerdo con el teorema **??**,

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es cierta}), \\
&= P(\overline{X} > c \,|\, \mu = \mu_0), \\
&= 1 - P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu = \mu_0), \\
&= 1 - P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{(c - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\
&= 1 - P\left(Z \leq \frac{(c - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\
&= 1 - F\left(\frac{(c - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (5.70)
\end{aligned}$$

donde

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

De la ecuación 5.70 se obtiene

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= F\left(\frac{(c - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (5.71) \\
&= F(z_c), \qquad (5.72)
\end{aligned}$$

donde

$$z_c = \frac{(c - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (5.73)$$

El valor z_c corresponde al cuantil $z_{1-\alpha}$. Es decir, el área de la curva normal estándar a la izquierda de z_c es $1 - \alpha$. El estadístico Z puede usarse para determinar la prueba considerando que para Z la región de rechazo está definida por $Z > z_c$. La región crítica y de aceptación de H_0 en términos de z_c se muestran en la figura 5.10.

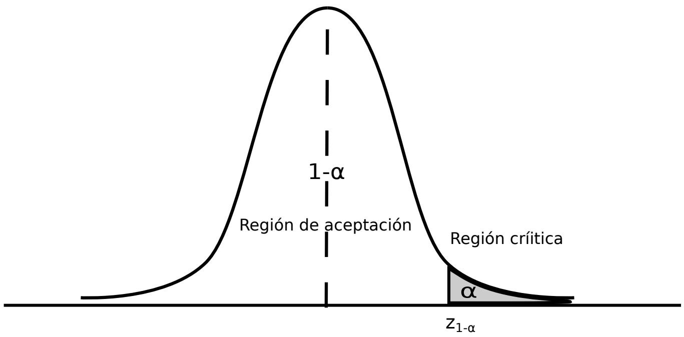


Figura 5.10: Prueba unilateral de cola derecha

Para las otras pruebas, bajo un procedimiento análogo, se determinan las regiones críticas y de aceptación para el estadístico Z en términos de los cuantiles correspondientes. Lo anterior se muestra en las figuras 5.11 y 5.12.

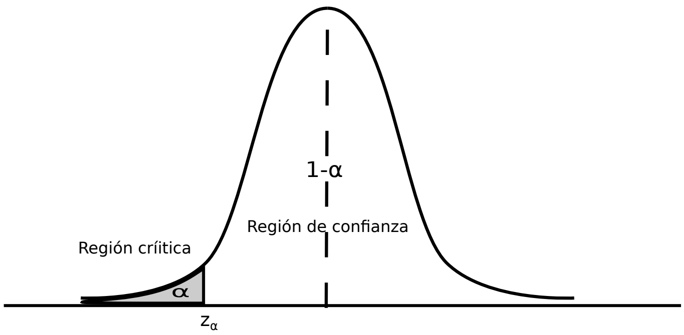


Figura 5.11: Prueba unilateral de cola izquierda

Obsérvese que para una prueba de dos colas con un nivel de significancia α, la hipótesis nula se rechazará para valores del estadístico Z que queden dentro de la región crítica ($Z < z_{\alpha/2}$ o $Z > z_{1-\alpha/2}$) o de manera equivalente, que queden fuera de la región de confianza. La región de confianza para una prueba de doble cola es equivalente el intervalo de confianza que se definió en la sección 5.2, $z_{\alpha/2} < Z << z_{1-\alpha/2}$; por lo tanto, las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza deben considerarse como temas equivalentes.

La ecuación 5.71 permite avanzar en dos sentidos. Si se conocen c y el tamaño de la muestra n, entonces es posible determinar z_1 y con esto el nivel de significancia α. Por otro lado, si se conocen n y α, entonces es posible calcular el valor crítico c y con éste las regiones crítica y de aceptación.

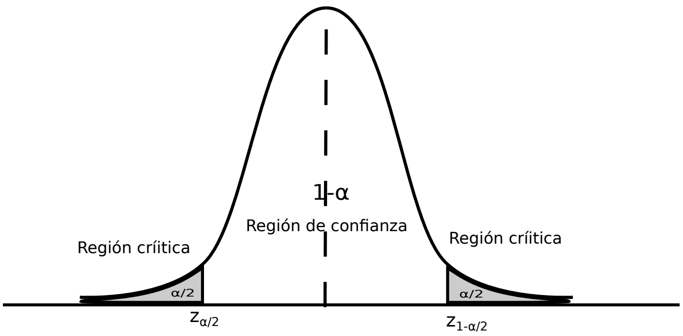


Figura 5.12: Prueba de hipótesis de doble cola

El interés se centrará ahora en determinar si una prueba es mejor que otra. El principio básico que debe guiar una buena prueba consiste en mantener baja la probabilidad de cometer los errores tipo I y II.

Ejemplo 5.7.1 *Considérese que se tiene una población con distribución normal* $N(20, 0.5^2)$ *y que de ella se extrae una muestra de tamaño* $n = 25$ *se desea probar las hipótesis*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu > 20. \end{aligned}$$

mediante las pruebas:
Prueba A: Se rechaza H_0 *si* $\overline{X} > 20.1$,
Prueba B: Se rechaza H_0 *si* $\overline{X} > 20.2$,
Prueba C: Se rechaza H_0 *si* $\overline{X} > 20.3$,
determine el nivel de significancia para las tres pruebas.

De acuerdo con la ecuación 5.70 se tienen los siguientes niveles de significancia:
Para la prueba A:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\ &= 1 - F\left(\frac{(20.1-20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\ &= 1 - F(1), \\ &= 1 - 0.8413 = 0.1587. \end{aligned}$$

Para la prueba B:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\
&= 1 - F\left(\frac{(20.2-20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\
&= 1 - F(2), \\
&= 1 - 0.9772 = 0.0228.
\end{aligned}$$

Para la prueba C:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\
&= 1 - F\left(\frac{(20.3-20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\
&= 1 - F(3), \\
&= 1 - 0.9987 = 0.0013.
\end{aligned}$$

Para las pruebas anteriores se necesita determinar la probabilidad de cometer un error de tipo II; es decir, aceptar la hipótesis nula dado que es falsa.

$$\begin{aligned}
\beta(\mu) &= P(\text{ aceptar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu > 20).
\end{aligned}$$

Para evaluar la probabilidad anterior se debe asignar un valor específico a μ. Supóngase que $\mu = 20.1$, en este caso,

$$\begin{aligned}
\beta(20.1) &= P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu > 20.1) = P(Z \leq \frac{(c-20.1)\sqrt{n}}{\sigma}) \\
&= = F(\frac{(c-20.1)\sqrt{n}}{\sigma})
\end{aligned}$$

Mediante la tabla 4 del apéndice E se obtiene los siguientes errores tipo II:
Para la prueba A:

$$\begin{aligned}
\beta(20.1) &= F\left(\frac{(c-20.1)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\
&= F(0) = 0.5000.
\end{aligned}$$

Para la prueba B:

$$\begin{aligned}\beta(20.1) &= F\left(\frac{(20.2-20.1)\sqrt{25}}{0.5}\right),\\ &= F(1) = 0.8413.\end{aligned}$$

Para la prueba C:

$$\begin{aligned}\beta(20.1) &= F\left(\frac{(20.3-20.1)\sqrt{25}}{0.5}\right),\\ &= F(2) = 0.9772.\end{aligned}$$

Se puede observar que al aumentar el valor crítico se puede disminuir la probabilidad de cometer un error de tipo I, pero en este proceso la probabilidad de cometer un error de tipo II se incrementa. En este ejemplo se ha calculado el error tipo II para un valor específico de μ. Mediante el uso de la función de operación característica, que se define a continuación, es posible obtener algunos resultados generales sobre el comportamiento de las pruebas.

Definición 5.7.1 *Se conoce como función de operación característica ,O.C, a la función de la media definida como:*

$$L(\mu) = P(\text{ aceptar } H_0 \,|\, \mu). \tag{5.74}$$

Esta función permitirá establecer las propiedades de la prueba. De acuerdo con nuestras hipótesis

$$\begin{aligned}L(\mu) &= P(\text{aceptar } H_0 \,|\, \mu),\\ &= P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu),\\ &= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{(c-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right),\\ &= P\left(Z \leq \frac{(c-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right),\\ &= F\left(\frac{(c-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (5.75)\end{aligned}$$

donde

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

De las propiedades de la función de distribución acumulada F se deducen las siguientes propiedades de la función de operación característica.

a) $\lim\limits_{\mu \to -\infty} L(\mu) = 1.$

b) $\lim\limits_{\mu \to \infty} L(\mu) = 0.$

c) $\dfrac{d}{d\mu} L(\mu) < 0, \quad \forall \mu.$

Por las propiedades anteriores, la función de operación carácterística tiene la forma general que se muestra en la figura 5.13

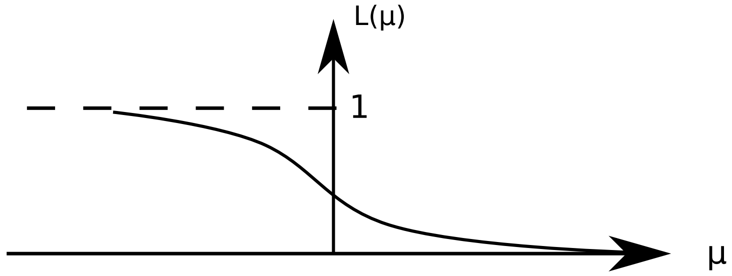


Figura 5.13: Función de operación característica

En el ejemplo 5.7.2 se mostró como determinar las probabilidades de los errores tipo I y II una vez que se han especificado el valor crítico c y el tamaño de la muestra n. En la práctica, lo que realmente se hace es establecer previamente el nivel de significancia y el tamaño de la muestra y con éstos determinar el valor crítico (o los valores críticos) para la prueba, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.7.2 *Considérese que se tiene una población con distribución normal $N(20, 0.5^2)$ y que de ella se extrae una muestra de tamaño $n = 25$ determínese el valor crítico c para la prueba*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu > 20. \end{aligned}$$

de tal manera que se rechace la hipótesis nula un 1 % de las veces siempre que $\overline{X} > c$.

Solución: El nivel de significancia $\alpha = 0.01$, y puede expresarse en términos de la función de operación característica como, $\alpha = 1 - L(20)$ de manera equivalente $L(20) = 0.99$. De la ecuación 5.75 se tiene

$$\begin{aligned} 0.99 &= L(20), \\ &= F\left(\frac{(c-20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \end{aligned}$$

La tabla de la distribución normal se obtiene el cuantil correspondiente al área 0.99, luego

$$\frac{(c-20)\sqrt{25}}{0.5} = 2.33.$$

Despejando se obtiene $c = 20.23$. Esto significa que si se rechaza la hipótesis nula cada vez que la media muestral es mayor que 20.23, entonces se garantiza que ocurrirá un error de tipo 1 el 1 % de las veces. Al especificar α y n la función de operación característica queda definida completamente y podrá usarse para evaluar cualquier valor de μ. Al especificar α y n se impone la condición de que la curva de operación característica pase por un punto particular, como se muestra en la figura 5.14. Si se especifican dos puntos

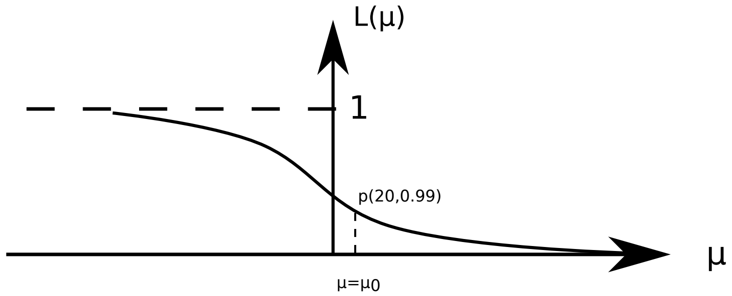


Figura 5.14: Función de operación característica definida para α y n

para la curva de la función de operación característica, entonces se pueden determinar simultáneamente (para una prueba) el valor crítico c y el tamaño de la muestra n. Los puntos de la curva se especifican como:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\ \beta &= F\left(\frac{(c-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

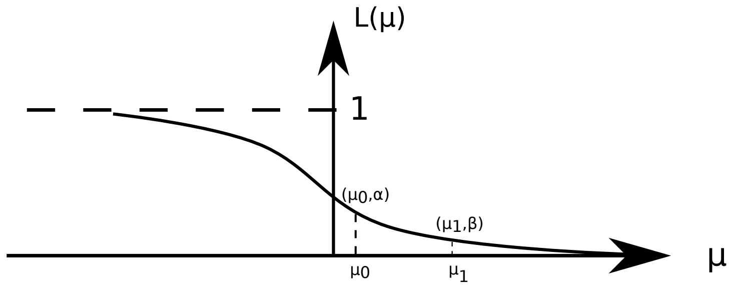


Figura 5.15: Función de operación característica definida para dos puntos

La solución se obtiene a partir de los cuantiles $z_{1-\alpha}$ y z_β dado que,

$$z_{1-\alpha} = \left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{5.76}$$

$$z_\beta = \left(\frac{(c-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{5.77}$$

dividiendo las ecuaciones anteriores se obtiene

$$c = \frac{\mu_1 z_{1-\alpha} - \mu_0 z_\beta}{z_{1-\alpha} - z_\beta}. \tag{5.78}$$

Sustituyendo la ecuación 5.78 en la ecuación 5.76 se obtiene

$$n = \left(\frac{\sigma z_{1-\alpha}}{c-\mu_0}\right)^2. \tag{5.79}$$

Se ha desarrollado esta sección exponiendo los conceptos en términos de una prueba unilateral derecha, las pruebas restantes se realizan con el mismo enfoque, por lo cual se espera que el lector pueda desarrollarlos por sí mismo sin dificultad. Por otro lado, debe notarse que existe una relación muy cercana entre las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza. De hecho, se pueden establecer casos de pruebas de hipótesis para cada una de las situaciones estudiadas en la sección de intervalos de confianza. En cada caso debe considerarse el estadístico de prueba adecuado, sobre todo cuando se trabaje con muestras pequeñas y no se pueda garantizar la aplicación del teorema del límite central.

Ejemplo 5.7.3 *La cantidad promedio de una sustancia que se coloca en un recipiente en un proceso de llenado se supone que es de 20 ml. En forma periódica se escogen 25 recipientes y el contenido de cada uno de éstos se* *pesa. Se juzga el proceso como fuera de control cuando la media muestral* $\overline{X}$ *es menor o igual a* 19.8 *o mayor o igual* 20.2 *ml. Se supone que la cantidad que se vacía en cada recipiente se encuentra distribuida normalmente con desviación estándar* 0.5 *ml.*

a) Enuncie las hipótesis nula y alterna que son apropiadas para esta situación.

b) Obtener la probabilidad del error tipo I.

Solución:

a) Las hipótesis nula y la alterna se definen como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu \neq 20. \end{aligned}$$

Se rechaza H_0 si $\overline{X} > 20.2$ o $\overline{X} < 19.8$

b) Dado que la población tiene distribución normal $N(20, 0.5^2)$, entonces $\overline{X}$ tiene distribución normal $N(20, 0.5^2/25)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{ rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es cierta }) \\ &= P(|\overline{X} - 20| > 0.2), \\ &= 1 - P(|\overline{X} - 20| \leq 0.2), \\ &= 1 - P(19.8 \leq \overline{X} \leq 20.2), \\ &= 1 - P\left(\frac{(19.8 - 20)\sqrt{25}}{0.5} \leq Z \leq \frac{(20.2 - 20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\ &= 1 - P\left(\frac{(19.8 - 20)\sqrt{25}}{0.5} \leq Z \leq \frac{(20.2 - 20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\ &= 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 + F(-2) - F(2), \\ &= 1 + 0.0228 - 0.9772 = 0.0456. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.7.4 *El propietario de un automóvil compacto sospecha que la distancia promedio por galón es menor que la especificada por la EPA, la cual es de 30 millas por galón. El propietario observa la distancia recorrida por galón en nueve ocasiones y obtiene los siguientes datos: 28.3, 31.2, 29.4, 27.2, 30.8, 28.7, 29.2, 26.5, 28.1. Después de una investigación el propietario concluye que la distancia recorrida por galón es una variable aleatoria distribuida normalmente com media* $\mu = 30$ *y desviación estándar de* 1.4*, millas por galón. Con base a esta información, ¿Se encuentra apoyada la sospecha del propietario con* $\alpha = 0.01$*?*

Solución: Se proponen las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 30, \\ H_1 &: \quad \mu < 30. \end{aligned}$$

Además, se propone una prueba de cola izquierda; es decir, se recharazá H_0 si $\overline{X} < c$. Para determinar el valor crítico c se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{ rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es cierta }) \\ &= P(\overline{X} < c \,|\, \mu = 30), \\ &= P(\frac{\overline{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma}), \\ &= P(Z < \frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma}), \\ &= F\left(\frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

El cuantil $z_{0.01} = -2.35$ (ver la tabla 4 del apéndice E) de manera que

$$\frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma} = -2.35.$$

Despejando c y sustituyendo los valores de n y σ se obtiene $c = 28.90$. Por otro lado, la media muestral es $\overline{x} = 28.82$. Dado que $\overline{x}$ está dentro de la zona crítica, entonces la hipótesis nula debe ser rechazada con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$.

5.8. Prueba de hipótesis para la varianza

Considérese que se desean probar hipótesis donde el parámetro poblacional θ que se definió en la sección 5.5.1 corresponde a la varianza, y si la pobación de la cual se obtiene la muesta tiene distribución normal, entonces de la misma manera que se establecieron pruebas de hipótesis para la media puedense establecer para la varianza, como se muestra a continuación. Considérese que se desea probar la hipótesis de doble cola

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 &: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2. \end{aligned}$$

En este caso el estadístico de prueba es

$$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2},$$

el cual tiene distribución chi cuadrado con $n - 1$ grados de libertad. La hipótesis nula se rechazará con nivel de significancia α para los valores del estadístico de prueba χ^2 que quedan dentro de la región crítica que se muestra en la figura 5.16.

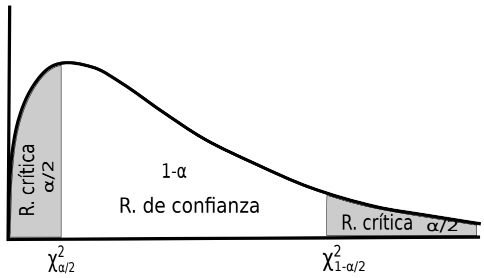


Figura 5.16: Prueba de hipótesis de dos colas para la varianza

Ejemplo 5.8.1 *Experiencias pasadas indican que el tiempo para que alumnos del último año terminen un examen estandarizado es una variable aleatoria normal con una desviación estándar de 6 minutos. Pruebe la hipótesis de que* $\sigma = 6$ *en contraposición con la hipótesis alternativa* $\sigma < 6$ *si una muestra aleatoria de 20 estudiantes tiene una desviación estándar muestral* $s = 4.51$ *al realizar este examen. Utilice un nivel de significancia de* 0.05

Solución: Considérese las hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma^2 = 36, \\ H_1 &: \quad \sigma^2 < 36. \end{aligned}$$

Se rechazará H_0 si $\chi^2 < \chi^2_\alpha$.
Se trata de una prueba unilateral izquierda. El cuantil χ^2_α para $n = 19$ que se obtiene de la tabla 5 (apéndice E) es: $chi^2_{0.05} = 10.11$. Ahora se determinará χ^2 de los datos de la muestra.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(19)(4.51)^2}{36} = 10.68.$$

Dado $\chi^2 = 10.68$ está en la región de confianza, la hipótesis nula no se rechaza para el nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

Si se requiere estimar la igualdad de varianzas de dos poblaciones, las hipótesis se plantean como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma_0^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 &: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2. \end{aligned}$$

En general el estadístico de prueba para dos poblaciones con distribuciones normales y varianzas diferentes es,

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2},$$

el cual tiene distribución F. Bajo la hipótesis nula, el estadístico de prueba se reduce a:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

La hipótesis nula será rechazada con un nivel de significancia α para valores del estadístico de prueba F que quedan dentro de la región crítica que se muestra en la figura 5.17.

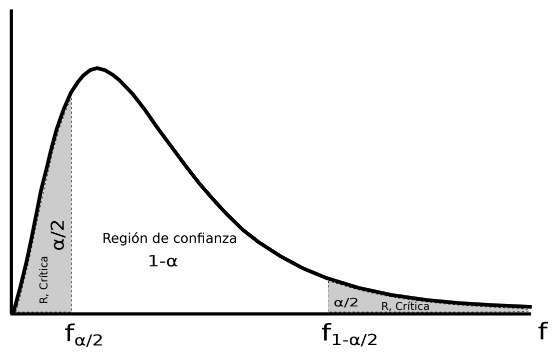


Figura 5.17: Prueba de hipótesis de dos colas para el cociente de varianzas

Ejemplo 5.8.2 *Se lleva a cabo un estudio para comparar el tiempo que tardan hombres y mujeres en armar un producto determinado. Las experiencias anteriores indican que la distribución de tiempo tanto para hombres como para mujeres es aproximadamente normal, pero las varianzas de los tiempos para las mujeres es menor que la de los hombres. Una muestra aleatoria de tiempos para 11 hombre y 14 mujeres arroja los siguientes datos. Pruebe la*

	Hombre	Mujeres
n	11	14
s	6.1	5.3

Tabla 5.5:

hipótesis de que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ en contraposición a la alternativa $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Utilice un nivel de significancia de 0.01.

Solución: La prueba es unilateral derecha; por lo tanto, se requiere del cuantil $f_{1-\alpha}(10, 13)$. De la tabla 7 (apéndice E se obtiene $f_{0.99}(10, 13) = 4.10$. Al evaluar el estadístico de prueba se obtiene:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.32.$$

El estadístico de prueba queda fuera de la región crítica; por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula H_0 para el nivel de significancia $\alpha = 0.01$.

Apéndices

Apéndices A

Sobre la baraja inglesa

Entre los juegos de azar, aquellos en los que se reparten cartas son de los preferidos por los jugadores. En este trabajo el interés por las cartas se centra solo en los problemas que estos juegos plantean a las técnicas de conteo y a la probabilidad en sí misma. Por lo anterior, se pondrán algunos términos en contexto.
En general, una baraja consta de un conjunto de cartas (o naipes) de diferentes colores, figuras, números, e incluso letras. Existen dos tipos de barajas que son las más comunmente usadas: La baraja inglesa y la española. Solo se describirá la baraja inglesa: La baraja inglesa consta de cuatro clases diferentes de figuras, las cuales se conocen como palos: corazones, diamantes, tréboles y picas. Las figuras que aparecen en estas cartas tienen estas formas. Las cartas de los palos corazones y diamantes son de color rojo; mientras que las cartas de los palos tréboles y picas son de color negro. Cada palo contiene 13 cartas. Las primeras 9 de ellas están numeradas del 2 hasta el 10. Las 4 cartas restantes se conocen como figuras y se designan mediante letras: J(Jack-jota o sota), Q(Queen-reina), K(King-rey) y A(As), como se muestra en la figura A.1.

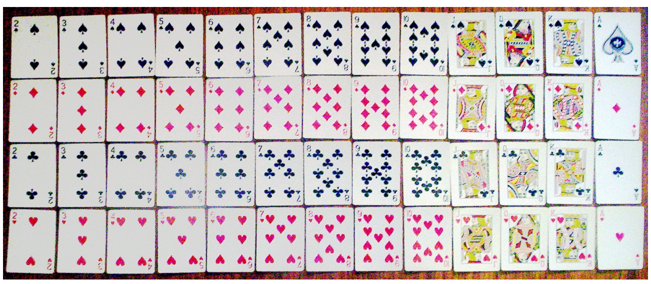


Figura A.1: Baraja inglesa

Los juegos más comunes con la baraja inglesa son: el *poker*, el *bridge* y la *canasta*. Solo se especificará aquí algunos términos propios del juego de **poker**.
En el juego de *poker* cada jugador recibe 5 cartas. Las cinco cartas que un jugador recibe se conocen como manos. Las más codiciadas, por su valor en el juego, son:
Escalera: Cinco cartas consecutivas, sin importar el palo de las mismas.
Escalera de color: Cinco cartas consecutivas del mismo palo.
Escalera real: La mejor mano posible en *poker*. Escalera desde el Diez al As, del mismo palo.

Estos datos son los que interesan para los objetivos de este trabajo.

Apéndices B

Distribución de Poisson

Conidérese las tres propiedades que definen el proceso de Poisson.

1. Los eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.
2. La probabilidad de que un evento sencillo ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional a la magnitud del intervalo.
3. La probabilidad de que más de un evento sencillo ocurra en un intervalo pequeño de tiempo es despreciable.

Para deducir la función de probabilidad para una variable aleatoria de Poisson a partir del proceso de Poisson, considérese la siguiente notación:

$$P_0(t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_x(t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_0(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo } \Delta t$$

$$P_x(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo } \Delta t.$$

El interés se centra en determinar $P_x(\Delta t)$, a partir del proceso de Poisson, para tal fin, se comenzará por determinar $P_x(\Delta t)$ para los primeros valores de X y finalmente se propondrá la fórmula general que podrá ser probada mediante el método de inducción matemática.

i) Para X=0:
Considérese el siguiente esquema, el cual permite tener una imagen del proceso.

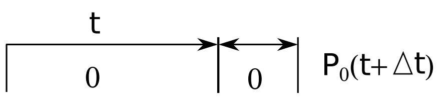


Figura B.1:

La probabilidad de ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo $t+\Delta t$ solo puede ocurrir de una manera: 0 eventos en t y 0 eventos en Δt. Como los intervalos t y Δt son disjuntos, entonces, de acuerdo con el punto 1, los eventos que en estos intervalos ocuren son independientes, por lo tanto

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t). \tag{B.1}$$

Por otro lado, los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios, ya que de acuerdo con el punto 3, la probabilidad de que más de un evento ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es cero, por lo anterior

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t). \tag{B.2}$$

Sustituyendo la ecuación B.2 en la ecuación B.1 se obtiene

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.3}$$

Ahora considérese el punto 2, el cual especifica que la probabilidad de un evento simple ocurra en Δt es proporcional a este intervalo pequeño. Sea λ la constante de proporcionalidad, entonces

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.4}$$

Sustituyendo la ecuación B.4 en la ecuación B.3 se obtiene

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda \Delta t). \tag{B.5}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t). \tag{B.6}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.6

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= -\lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\ \frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t). \end{aligned} \qquad \text{(B.7)}$$

En este punto es necesario recurrir a los métodos de solución para ecuaciones diferenciales. La ecuación anterior es separable, de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} &= -\lambda t, \\ \ln P_0(t) &= -\lambda t + \ln c_0. \end{aligned} \qquad \text{(B.8)}$$

De la ecuación B.8 se obtiene

$$\begin{aligned} P_0(t) &= e^{-\lambda t + \ln c_0}, \\ &= e^{\ln c} e^{-\lambda t}, \\ &= c e^{-\lambda t}. \end{aligned} \qquad \text{(B.9)}$$

Finalmente, se evaluará $P_0(t)$ en $t = 0$ para determinar la constante c_0. Dado que la probabilidad de que ningún evento ocurra en $t = 0$ es el evento seguro, entonces

$$P_0(0) = c_0 = 1, \qquad \text{(B.10)}$$

de manera que

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \qquad \text{(B.11)}$$

ii)Para X=1

Considérese el esquema siguiente:

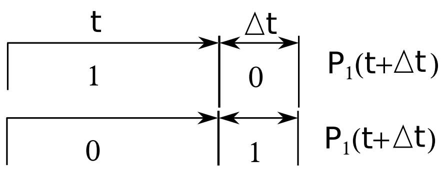


Figura B.2:

Existen dos eventos mutuamente excluyentes mediante los cuales se puede generar un evento en el intervalo de tiempo $t+\Delta t$. De acuerdo con el axioma 3 de la probabilidad y el punto 1 del proceso de Poisson se tiene

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_1(t). \qquad \text{(B.12)}$$

Como los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios (de acuerdo con el punto 3), entonces

$$P_0(\Delta t) = (1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.13}$$

Sustituyendo la ecuación B.13 en la ecuación B.12 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + (1 - P_1(\Delta t))P_1(t), \tag{B.14}$$

además, por el punto 2 se tiene que

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.15}$$

Sustituyendo la ecuación B.15 en la ecuación B.14 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = \lambda P_0(t)\Delta t + (1 - \lambda \Delta t)P_1(t). \tag{B.16}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). \tag{B.17}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.17

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_1(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\ \frac{d}{dt}P_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). & \qquad \text{(B.18)} \end{aligned}$$

La ecuación B.18 representa una ecuación diferencial cuya solución se obtiene mediante el método conocido como: método del factor integrante, el cual consiste en hallar una función $u(t)$ tal que al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 por esta función, el lado izquierdo se convierta en

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right).$$

Para la acuación anterior se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lambda u(t)P_0(t) &= u(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + \lambda u(t)P_1(t), & \text{(B.19)} \\ &= u_1(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + P_1(t)\frac{d}{dt}\left(u(t)\right), & \text{(B.20)} \\ &= \frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right). & \text{(B.21)} \end{aligned}$$

Para que las tres ecuaciones anteriores sean consistentes, se debe satisfacer que:

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right) = \lambda u(t).$$

Esta ecuación es separable y su solución es:

$$u(t) = ce^{\lambda t}.$$

Considérese la constante $c = 1$, ya que para cualquier $c \neq 0$ su valor específico es irrelevante, ya que, al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 ésta se anula por todas partes. De manera que

$$u(t) = e^{\lambda t}. \tag{B.22}$$

Sustituyendo B.22 en la ecuación B.21 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_0(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \tag{B.23}$$

donde $P_0(t)$ es la función que se determinó en el inciso i. Sustituyendo $P_0(t)$ en la ecuación B.23 se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \\ \lambda &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right). \end{aligned} \tag{B.24}$$

Integrando la ecuación B.24 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \lambda t + c_1,$$

de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t}$$

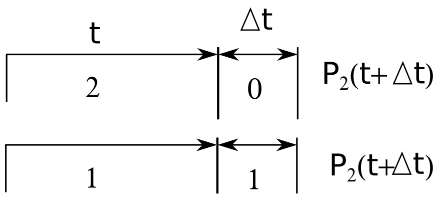
Finalmente evaluando en $t = 0$ se obtiene, el evento imposible $P_1(0) = 0$, lo que permite concluir que $c_1 = 0$, de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t)e^{-\lambda t}. \tag{B.25}$$

iii) Para X=2

Nuevamente, se tienen dos eventos mutuamente excluyentes que generan dos eventos en el intervalo $t + \Delta t$, como se muestra en el siguiente esquema. De la misma manera como se procedió en los incisos anteriores se obtiene para este caso:

$$P_2(t + \Delta t) = P_1(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_2(t). \tag{B.26}$$



Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos anteriores se obtiene

$$P_2(t+\Delta t) = \lambda P_1(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_2(t). \tag{B.27}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). \tag{B.28}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.28

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \lambda P_2(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} \lambda P_1(t), \\ \frac{d}{dt}P_2(t) + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). & \qquad\qquad (\text{B.29}) \end{aligned}$$

Al aplicar el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$P_2(t) = \left(\frac{(\lambda t)^2}{2} + c_2\right) e^{-\lambda t}.$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$ se obtiene el evento imposible $P_2(0) = 0$, lo que permite concluir que $c_2 = 0$, de manera que

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}. \tag{B.30}$$

iv) Para X=x

A partir de los resultados anteriores resulta razonable proponer la siguiente expresión general para la distribución de Poisson.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{B.31}$$

Para terminar este apartado, se probará validez de la ecuación B.31 mediante el método de inducción matemática.

a) Evaluando la fórmula para x=0, se obtiene

$$f(0) = e^{-\lambda t}, \tag{B.32}$$

lo que coincide con $P_0(t)$ dado por la ecuación B.11.

b) Supóngase que la fórmula es válida para el entero $x \geq 0$; es decir

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.33}$$

c) Demuéstrese que la fórmula dada es válida para x+1.
Una vez más, considérese el siguiente esquema. Nuevamente, se tienen dos

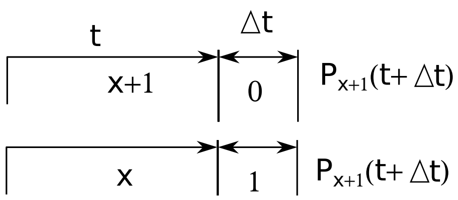


Figura B.3:

eventos mutuamente excluyentes que generan 2 eventos en el intervalo $t+\Delta t$, manera que

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = P_x(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.34}$$

Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos i) y ii) de la primera parte,

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = \lambda P_x(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.35}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_x(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). \tag{B.36}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.36

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{x+1}(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_{x+1}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_x(t), \\ \frac{d}{dt}P_{x+1}(t) + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). & \end{aligned} \tag{B.37}$$

Mediante el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt}(u(t)P_{x+1}(t)) = \lambda u(t)P_x(t). \tag{B.38}$$

Al sustituir $u(t) = e^{\lambda t}$ y la ecuación B.33 en la ecuación B.38 se obtiene

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_{x+1}(t)) = \frac{\lambda(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.39}$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} P_{x+1}(t) &= \left(\frac{\lambda^{x+1}t^{x+1}}{(x+1)x!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}, \\ &= \left(\frac{(\lambda t)^{x+1}}{(x+1)!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{B.40}$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$ se obtiene el evento imposible $P_{x+1}(0) = 0$, lo cual permite concluir que $c_{x+1} = 0$, de manera que

$$P_{x+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{x+1}e^{-\lambda t}}{(x+1)!}. \tag{B.41}$$

Se observa que la ecuación B.41 coincide con lo que la fórmula B.31 genera al evaluarla en $x + 1$, por lo tanto, la fórmula general queda demostrada.

Apéndices C

Cálculo de las integrales usadas

C.1. Integral para la normal estándar

Verifique que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Sea

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}} dx = \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

entonces,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right), \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy. \end{aligned}$$

Para continuar se hace un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta, &\qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ y = r\operatorname{sen}\theta, &\qquad 0 \le r < \infty. \end{aligned}$$

El jacobiano correspondiente es

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}, \\ &= r. \end{aligned}$$

Considerando lo anterior,

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy,\\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} rd\theta dr,\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr,\\
&= -\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^b = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, extrayendo la raíz cuadrada se obtiene

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C.2. Integral para la distribución gama

Verifique que

$$I = \frac{1}{(r-1)!}\int_{\mu}^{\infty} u^{r-1}e^{-u}du = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}.$$

Multiplicando por $(r-1)!$ se obtiene,

$$I^* = (r-1)!I = \int_{\mu}^{\infty} u^{r-1}e^{-u}du$$

Se procede mediante el método de integración por partes:
Si

$$w = u^{r-1} \quad \text{y} \quad dz = e^{-u}du,$$

entonces

$$dw = (r-1)u^{(r-2)}du \quad \text{y} \quad z = -e^{-u}$$

El método de integración por partes nos conduce a

$$\begin{aligned}
I^* &= -\, u^{r-1}e^{-u}\Big|_{\mu}^{\infty} + (r-1)\int_{\mu}^{\infty} u^{r-2}e^{-u}du,\\
&= e^{-\mu}\mu^{r-1} + (r-1)\int_{\mu}^{\infty} u^{r-2}e^{-u}du,
\end{aligned}$$

La última integral es del tipo inicial, de manera que integrando por partes $(r-1)$ veces se obtiene el último término, ya que r es un entero; por lo tanto,

$$(r-1)(r-2)\ldots 1\int_{\mu}^{\infty} e^{-u}du = (r-1)!e^{-\mu}$$

Por lo anterior,

$$I^* = e^{-\mu}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \ldots + (r-1)!\right).$$

Finalmente, al dividir entre $(n-1)!$ obtiene I.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{I^*}{(r-1)!} \\
&= \frac{e^{-\mu}}{(r-1)!}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \ldots + (r-1)!\right), \\
&= e^{-\mu}\left(\frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{\mu^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots + 1\right), \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Apéndices D

Las distribuciones t y F

D.1. La distribución t de Student

Teorema D.1.1 *Sea (Z,V) una variable aleatoria bidimensional, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, mientras que V es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrada (con n grados de libertad). Supóngase que la función de densidad conjunta de Z y V está determinada por*[1]

$$f(z,v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} v^{n/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & -\infty < z < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.1}$$

Si T es una variable aleatoria que se define en términos de Z y V mediante

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}, \tag{D.2}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria T está determinada por

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{D.3}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario 4.4.1 se definen,

$$\begin{array}{ll} t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{v}{n}}} = \phi_1(z,v), & -\infty < z < \infty, \\ u = v = \phi_2(z,v), & 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.4}$$

[1]Esto significa que Z y V son variables aleatorias independientes.

La aplicación anterior asigna a cada pareja ordenada (z, v) en el intervalo especificado, una y solo una pareja (t, u) en el intervalo, $-\infty < z < \infty$ y $0 < v < \infty$. También se satisface que a cada pareja ordenada (t, u) en el intervalo, $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$ le corresponde una y solo una pareja ordenada (z, v) en el intervalo $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$. Lo anterior significa que la aplicación es invertible y la aplicación inversa es:

$$\begin{array}{ll} z = \sqrt{\frac{v}{n}}t = \psi_1(t, v), & -\infty < z < \infty, \\ v = u = \psi_2(t, v), & \quad 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.5}$$

De acuerdo con la ecuación 4.27

$$\begin{aligned} J &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t, u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_1(t, u) \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi_2(t, u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_2(t, u) \end{array} \right|, \\ &= \left| \begin{array}{cc} \sqrt{\frac{u}{n}} & \frac{1}{2}\frac{T}{\sqrt{nu}} \\ 0 & 1 \end{array} \right|, \\ &= \sqrt{\frac{u}{n}}. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables T y U se determina de acuerdo con la ecuación 4.26

$$\begin{aligned} g(t, u) &= f(\psi_1(t, u), \psi_2(t, u))|J|, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{ut^2}{2n}} e^{-\frac{u}{2}} \left(\sqrt{\frac{u}{n}}\right), \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{n/2-1/2} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}. \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(t, u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, & -\infty < t < \infty, \\ & \quad 0 < u < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.6}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T corresponde a la marginal de T que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(t, u)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{-\infty} g(t, u) du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})} du, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $w = ku$ donde $k = \frac{1}{2}(1 + \frac{t^2}{n})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}(\frac{w}{k})^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-w}\frac{1}{k}dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}\int_0^\infty w^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-w}dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}\Gamma(\frac{n+1}{2}), \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}(\frac{1}{k})^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T se expresa como,

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.7}$$

En la figura D.1 se muestran las gráficas de $g(t)$ para los valores $n = 2$ y $n = 5$. En ésta se ha denotado a la normal estándar como $n = \infty$. A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución t de Student.

1. Es simétrica respecto a la recta $y = 0$.

2. Su media es cero.

3. Su varianza es,
$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

4. La distribución t de Student tiende a la distribución normal cuando n tiende a infinito.

5. $t_{1-p} = -t_p$

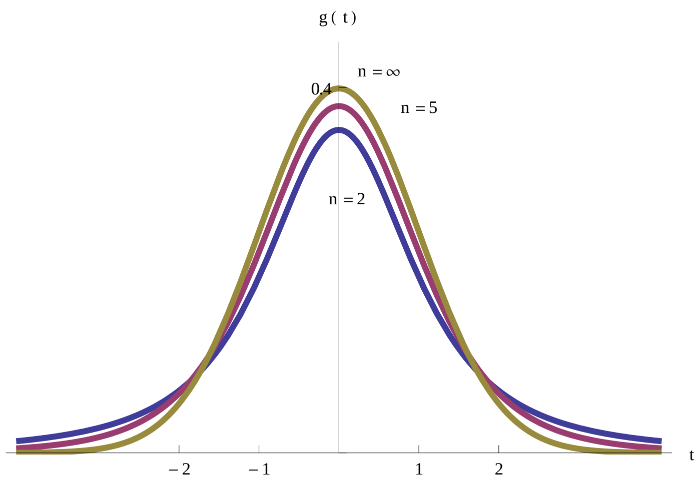


Figura D.1: La distribución t de Student

D.2. La distribución F

Teorema D.2.1 *Sea (U, V) una variable aleatoria bidimensional, donde U y V son variables aleatorias con distribución gama cada una con n y m grados de libertad, respectivamente. Supóngase que la función de densidad conjunta de U y V está determinada por*[2]

$$h(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} v^{m/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & 0 < u < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.8}$$

Si F es una variable aleatoria que se define en términos de U y V mediante

$$F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}, \tag{D.9}$$

entonces la función de densidad $g(f)$ de la variable aleatoria F está determinada por

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.10}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario 4.4.1

$$\begin{aligned} f &= \frac{\frac{u}{n}}{\frac{v}{m}} = \phi_1(u,v), \quad 0 < u < \infty, \\ w &= v = \phi_2(u,v), \quad 0 < v < \infty. \end{aligned} \tag{D.11}$$

[2]Esto corresponde a la hipótesis de independencia entre U y V.

Las funciones inversas son:

$$\begin{array}{ll} u = \frac{nwf}{m} = \psi_1(f,w), & -\infty < z < \infty, \\ v = w = \psi_2(t,v), & \quad 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.12}$$

De acuerdo con la ecuación 4.27

$$\begin{aligned} J &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial f}\psi_1(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_1(f,w) \\ \frac{\partial}{\partial f}\psi_2(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_2(f,w) \end{array} \right|, \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{n}{m}w & \frac{n}{m}f \\ 0 & 1 \end{array} \right|, \\ &= \frac{n}{m}w. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables F y W se determina de acuerdo con la ecuación 4.26

$$\begin{aligned} g(f,w) &= f(\psi_1(f,w),\psi_2(f,w))|J|, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{nwf}{2m}}\frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}}\left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{nwf}{2m}}e^{-\frac{w}{2}}\left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right), \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(f,w) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right), & 0 < f < \infty, \\ & 0 < w < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.13}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F corresponde a la marginal que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(f,w)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(f) &= \int_0^{-\infty} g(f,w)du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right)dw, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $z = kw$ donde $k = \frac{1}{2}(1 + \frac{nf}{m})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(f) &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \int_0^\infty \left(\frac{nfz}{km}\right)^{n/2-1} \left(\frac{z}{k}\right)^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{mk}\right) \frac{1}{k} dz, \\
&= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty \left(\frac{nfz}{m}\right)^{n/2-1} z^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{m}\right) dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty (fz)^{n/2-1}\, z^{m/2-1} e^{-z} z dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty z^{n/2-1} z^{m/2-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty z^{\frac{n+m}{2}-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}}, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}},
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F se expresa como,

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.14}$$

La función $g(f)$ no solo depende de los valores de sus parámetro n y m, sino que también depende del orden en que éstos se tomen. Por lo anterior, es necesario tener presente que n se definió como los grados de libertad de la variable U, que corresponde al numerador en la ecuación 5.48. De la misma manera, m se definió como los grados de libertad de la variable aleatoria V, que corresponde al denominador en la ecuación 5.48.
En la figura D.2 se muestran las gráficas de $g(f)$ para las parejas de valores $(n,m) = (6,10)$ y $(n,m) = (6,30)$

A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución F.

1. Tiene un único máximo en
$$\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{m}{m+2}\right) \quad n > 2.$$

2. Su media es
$$E(F) = \frac{m}{m-2} \quad m > 2.$$

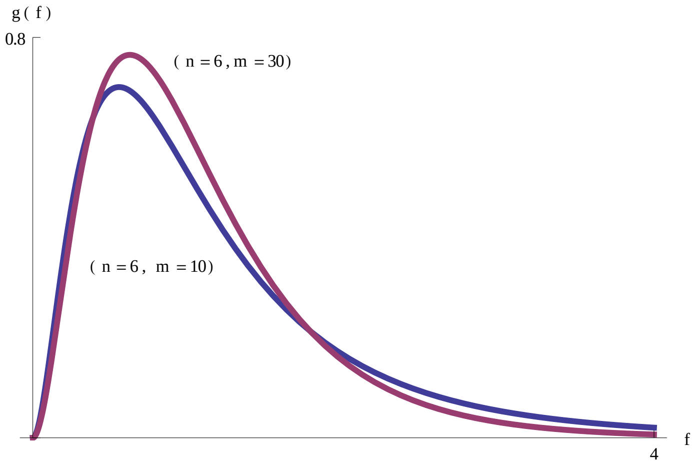


Figura D.2: La distribución F

3. Su varianza es,

$$\sigma^2 = \frac{m^2(2m+2n-4)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad m > 4.$$

4.

Teorema D.2.2 *Demuestre la validez de la propiedad* $F_{1-p,n,m} = \frac{1}{F_{p,m,n}}$.

Demostración: Considérese que F se define de acuerdo con la ecuación D.9, se ha probado que F tiene distribución dada por la ecuación D.14. Si ahora se define la variable aleatoria $F' = 1/F$, entoces

$$F' = \frac{1}{F} = \frac{\frac{V}{m}}{\frac{U}{n}} \tag{D.15}$$

La variable aleatoria F' tiene distribución F con m y n grados de libertad. Nótese que los indíces, están invertido. Ahora considérense los cuantiles, denotados por $1-\alpha$, para F, donde $\alpha > 0$, es decir,

$$\begin{aligned} P(F \leq f_{1-\alpha}(n,m)) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{1}{F} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha, \\ P\left(F' \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha \end{aligned} \tag{D.16}$$

Por otro lado, los cuantiles α de F', están dados por,

$$P(F' \leq f'_{\alpha}(m,n)) = \alpha, \quad \alpha > 0. \tag{D.17}$$

Como las escuaciones D.16 y D.17 son equivalentes, entonces

$$f'_{\alpha}(m,n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)} \quad \blacksquare \tag{D.18}$$

Apéndices E

Tablas de las distribuciones

TABLAS

ESTADÍSTICAS.

Tabla 1

Función de Distribución Binomial

							P					
n	***X***	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
2	**0**	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	**0**	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	**0**	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	**0**	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	**0**	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9985	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	1.0000	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	1.0000	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	**0**	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9980	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	1.0000	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	1.0000	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	**0**	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9973	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9999	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	1.0000	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9966	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9999	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	1.0000	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461

						P						
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	**6**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	**0**	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9957	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9999	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	1.0000	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	1.0000	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	**0**	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.9948	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9998	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	1.0000	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	1.0000	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	**0**	0.8864	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.9938	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9998	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	1.0000	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	1.0000	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1.0000	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	**0**	0.8775	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.9928	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9997	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	1.0000	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	1.0000	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1.0000	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

						P						
n	**X**	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
14	**0**	0.8687	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.9916	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9997	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	1.0000	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	1.0000	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	**0**	0.8601	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9904	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9996	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	1.0000	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	1.0000	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	1.0000	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	**0**	0.8515	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.9891	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003
	2	03.9995	0.9571	0.7893	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021
	3	1.0000	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106
	4	1.0000	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384
	5	1.0000	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051
	6	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	**0**	0.8429	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.9877	0.7922	0.48l8	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001
	2	0.9994	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012
	3	1.0000	0.9912	0.9l74	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064
	4	1.0000	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245
	5	1.0000	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717
	6	1.0000	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662

							P					
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
17	**7**	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936
	14	1,0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	**0**	0.8345	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9862	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001
	2	0.9993	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007
	3	1.0000	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038
	4	1.0000	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154
	5	1.0000	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481
	6	1.0000	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9916	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	**0**	0.8262	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9847	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.9991	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004
	3	1.0000	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022
	4	1.0000	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096
	5	1.0000	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318
	6	1.0000	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	**0**	0.8179	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9831	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9990	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	1.0000	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
	4	1.0000	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059

		P										
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
20	**5**	1.0000	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
	6	1.0000	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
	7	1.0000	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	**0**	0.7778	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9742	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9980	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.9999	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
	4	1.0000	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
	5	1.0000	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
	6	1.0000	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
	7	1.0000	1.0000	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 2

Función de Distribución de Poisson

l

X	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4338	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.988!
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

					l					
X	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	.0.2650
4	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6664	0.6510	0.6335	0.6160
6	0.8787	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767	0.7622
7	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9050	0.8960	0.8867	0.8769	0.8666
8	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382	0.9319
9	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717	0.9682
10	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880	0.9863
11	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953	0.9945
12	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980
13	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**5.7**	**5.8**	**5.9**	**6.0**
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0-0030	0.0027	0.0025
1	0.0372	0.0342	0.0314	0.0289	0.0266	0.0244	0.0224	0.0206	0.0189	0.0174
2	0.1165	0.1088	0.1016	0.0948	0.0884	0.0824	0.07&8	0.0715	0.0666	0.0620
3	0.2513	0.2381	0.2254	0.2133	0.2017	0.1906	0.1801	0.1700	0.1604	0.1512
4	0.4231	0.4061	0.3895	0.3733	0.3575	0.3422	0.3272	0.3127	0.2987	0.2&51
5	0.5984	0.5809	0.5635	0.5461	0.5289	0.5119	0.4950	0.4783	0.4619	0.4457
6	0.7474	0.7324	0.7171	0.7017	0.6860	0.6703	0.6544	0.6384	0.6224	0.6063
7	0.8560	0.8449	0.8335	0.8217	0.8095	0.7970	0.7842	0.7710	0.7576	0.7440
8	0.9252	0.9181	0.9106	0.9027	0.8944	0.8857	0.8766	0.8672	0.8574	0.8472
9	0.9644	0.9603	0.9559	0.9512	0.9462	0.9409	0.9352	0.9292	0.9228	0.9161
10	0.9844	0.9823	0.9800	0.9775	0.9747	0.9718	0.9686	0.9651	0.9614	0.9574
11	0.9937	0.9927	0.9916	0.9904	0.9890	0.9875	0.9859	0.9841	0.9821	0.9799
12	0.9976	0.9972	0.9967	0.9962	0.9955	0.9949	0.9941	0.9932	0.9922	0.9912
13	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980	0.9977	0.9973	0.9969	0.9964
14	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9990	0.9988	0.9986
15	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

X	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**	**6.6**	**6.7**	**6.8**	**6.9**	**7.0**
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0159	0.0146	0.0134	0.0123	0.0113	0.0103	0.0095	0.0087	0.0080	0.0073
2	0.0577	0.0536	0.0498	0.0463	0.0430	0.0400	0.0371	0.0344	0.0320	0.0296
3	0.1425	0.1342	0.1264	0.1189	0.1119	0.1052	0.0988	0.0928	0.0871	0.0818
4	0.2719	0.2592	0.2469	0.2351	0.2237	0.2127	0.2022	0.1920	0.1823	0.1730
5	0.4298	0.4141	0.3988	0.3837	0.3690	0.3547	0.3407	0.3270	0.3137	0.3007
6	0.5902	0.5742	0.5582	0.5423	0.5265	0.5108	0.4953	0.4799	0.4647	0.4497
7	0.7301	0.7160	0.7018	0.6873	0.6728	0.6581	0.6433	0.6285	0.6136	0.5987
8	0.8367	0.8259	0.8148	0.8033	0.7916	0.7796	0.7673	0.7548	0.7420	0.7291
9	0.9090	0.9016	0.8939	0.8858	0.8774	0.8686	0.8596	0.8502	0.8405	0.8305
10	0.9531	0.9486	0.9437	0.9386	0.9332	0.9274	0.9214	0.9151	0.9084	0.9015
11	0.9776	0.9750	0.9723	0.9693	0.9661	0.9627	0.9591	0.9552	0.9510	0.9467
12	0.9900	0.9887	0.9873	0.9857	0.9840	0.9821	0.9801	0.9779	0.9755	0.9730
13	0.9958	0.9952	0.9945	0.9937	0.9929	0.9920	0.9909	0.9898	0.9885	0.9872
14	0.9984	0.9981	0.9978	0.9974	0.9970	0.9966	0.9961	0.9956	0.9950	0.9943
15	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9984	0.9982	0.9979	0.9976
16	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990
17	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1 0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**7.5**	**7.6**	**7.7**	**7.8**	**7.9**	**8.0**
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0067	0.0061	0.0056	0.0051	0.0047	0.0043	0.0039	0.0036	0.0033	0.0030
2	0.0275	0.0255	0.0236	0.0219	0.0203	0.0188	0.0174	0.0161	0.0149	0.0138
3	0.0767	0.0719	0.0674	0.0632	0.0591	0.0554	0.0518	0.0485	0.0453	0.0424
4	0.1641	0.1555	0.1473	0.1395	0.1321	0.1249	0.1181	0.1117	0.1055	0.0996
5	0.2881	0.2759	0.2640	0.2526	0.2414	0.2307	0.2203	0.2103	0.2006	0.1912
6	0.4349	0.4204	0.4060	0.3920	0.3782	0.3646	0.3514	0.3384	0.3257	0.3134
7	0.5838	0.5689	0.5541	0.5393	0.5246	0.5100	0.4956	0.4812	0.4670	0.4530
8	0.7160	0.7027	0.6892	0.6757	0.6620	0.6482	0.6343	0.6204	0.6065	0.5926
9	0.8202	0.8097	0.7988	0.7877	0.7764	0.7649	0.7531	0.7411	0.7290	0.7166
10	0.8942	0.8867	0.8788	0.8707	0.8622	0.8535	0.8445	0.8352	0.8257	0.8159
11	0.9420	0.9371	0.9319	0.9265	0.9208	0.9148	0.9085	0.9020	0.8952	0.8881
12	0.9703	0.9673	0.9642	0.9609	0.9573	0.9536	0.9496	0.9454	0.9409	0.9362
13	0.9857	0.9841	0.9824	0.9805	0.9784	0.9762	0.9739	0.9714	0.9687	0.9658
14	0.9935	0.9927	0.9918	0.9908	0.9897	0.9886	0.9873	0.9859	0.9844	0.9827
15	0.9972	0.9969	0.9964	0.9959	0.9954	0.9948	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918
16	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9974	0.9971	0.9967	0.9963
17	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989	0.9988	0.9986	0.9984
18	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
19	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
X	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0028	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0018	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012
2	0.0127	0.0118	0.0109	0.0100	0.0093	0.0086	0.0079	0.0073	0.0068	0.0062
3	0.0396	0.0370	0.0346	0.0323	0.0301	0.0281	0.0262	0.0244	0.0228	0.0212
4	0.0941	0.0887	0.0837	0.0789	0.0744	0.0701	0.0660	0.0621	0.0584	0.0550
5	0.1823	0.1736	0.1653	0.1573	0.1496	0.1422	0.1352	0.1284	0.1219	0.1157
6	0.3013	0.2896	0.2781	0.2670	0.2562	0.2457	0.2355	0.2256	0.2160	0.2068
7	0.4391	0.4254	0.4119	0.3987	0.3856	0.3728	0.3602	0.3478	0.3357	0.3239
8	0.5786	0.5647	0.5508	0.5369	0.5231	0.5094	0.4958	0.4823	0.4689	0.4557
9	0.7041	0.6915	0.6788	0.6659	0.6530	0.6400	0.6269	0.6137	0.6006	0.5874
10	0.8058	0.7956	0.7850	0.7743	0.7634	0.7522	0.7409	0.7294	0.7178	0.7060
11	0.8807	0.8731	0.8652	0.8571	0.8487	0.8400	0.8311	0.8220	0.8126	0.8030
12	0.9313	0.9261	0.9207	0.9150	0.9091	0.9029	0.8965	0.8898	0.8829	0.8758
13	0.9628	0.9595	0.9561	0.9524	0.9486	0.9445	0.9403	0.9358	0.9311	0.9262
14	0.9810	0.9791	0.9771	0.9749	0.9726	0.9701	0.9675	0.9647	0.9617	0.9585
15	0.9908	0.9898	0.9887	0.9875	0.9862	0.9848	0.9832	0.9816	0.9798	0.9780
16	0.9958	0.9953	0.9947	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918	0.9909	0.9899	0.9889
17	0.9982	0.9979	0.9977	0.9973	0.9970	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947
18	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9981	0.9978	0.9976
19	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989
20	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996
21	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	*l* 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0011	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005
2	0.0058	0.0053	0.0049	0.0045	0.0042	0.0038	0.0035	0.0033	0.0030	0.0028
3	0.0198	0.0184	0.0172	0.0160	0.0149	0.0138	0.0129	0.0120	0.0111	0.0103
4	0.0517	0.0486	0.0456	0.0429	0.0403	0.0378	0.0355	0.0333	0.0312	0.0293
5	0.1098	0.1041	0.0987	0.0935	0.0885	0.0838	0.0793	0.0750	0.0710	0.0671
6	0.1978	0.1892	0.1808	0.1727	0.1650	0.1575	0.1502	0.1433	0.1366	0.1301
7	0.3123	0.3010	0.2900	0.2792	0.2687	0.2584	0.2485	0.2388	0.2294	0.2202
8	0.4426	0.4296	0.4168	0.4042	0.3918	0.3796	0.3676	0.3558	0.3442	0.3328
9	0.5742	0.5611	0.5480	0.5349	0.5218	0.5089	0.4960	0.4832	0.4705	0.4579
10	0.6941	0.6820	0.6699	0.6576	0.6453	0.6330	0.6205	0.6081	0.5956	0.5830
11	0.7932	0.7832	0.7730	0.7626	0.7570	0.7412	0.7303	0.7193	0.7081	0.6968
12	0.8684	0.8607	0.8529	0.8448	0.8364	0.8279	0.8191	0.8101	0.8009	0.7916
13	0.9210	0.9156	0.9100	0.9042	0.8981	0.8919	0.8853	0.8786	0.8716	0.8645
14	0.9552	0.9517	0.9480	0.9441	0.9400	0.9357	0.9312	0.9265	0.9216	0.9165
15	0.9760	0.9738	0.9715	0.9691	0.9665	0.9638	0.9609	0.9579	0.9546	0.9513
16	0.9878	0.9865	0.9852	0.9838	0.9823	0.9806	0.9789	0.9770	0.9751	0.9730
17	0.9941	0.9934	0.9927	0.9919	0.9911	0.9902	0.9892	0.9881	0.9870	0.9857
18	0.9973	0.9969	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947	0.9941	0.9935	0.9928
19	0.9988	0.9986	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9975	0.9972	0.9969	0.9965
20	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9986	0.9984
21	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993
22	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**	**19.0**	**20.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0-3715	0.2867	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437
22	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9S94	0.9317	0.8933	0.&432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878
26	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9?05	0.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882	0.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930	0.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960	0.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

Tabla 3

Función de Distribución y de Probabilidad Hipergeométrica.

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*	*N*	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
2	1	1	0	0.500000	0.500000	6	3	2	1	0.800000	0.600000
2	1	1	1	1.000000	0.500000	6	3	2	2	1.000000	0.200000
3	1	1	0	0.666667	0.666667	6	3	3	0	0.050000	0.050000
3	1	1	1	1.000000	0.333333	6	3	3	1	0.500000	0.450000
3	2	1	0	0.333333	0.333333	6	3	3	2	0.950000	0.450000
3	2	1	1	1.000000	0.666667	6	3	3	3	1.000000	0.050000
3	2	2	1	0.666667	0.666667	6	4	1	0	0.333333	0.333333
3	2	2	2	1.000000	0.333333	6	4	1	1	1.000000	0.666667
4	1	1	0	0.750000	0.760000	6	4	2	0	0.066667	0.066667
4	1	1	1	1.000000	0.250000	6	4	2	1	0.600000	0.533333
4	2	1	0	0.500000	0.500000	6	4	2	2	1.000000	0.400000
4	2	1	1	1.000000	0.500000	6	4	3	1	0.200000	0.200000
4	2	2	0	0.166667	0.166667	6	4	3	2	0.800000	0.600000
4	2	2	1	0.833333	0.666667	6	4	3	3	1.000000	0.200000
4	2	2	2	1.000000	0.166667	6	4	4	2	0.400000	0.400000
4	3	1	0	0.250000	0.250000	6	4	4	3	0.933333	0.533333
4	3	1	1	1.000000	0.750000	6	4	4	4	1.000000	0.066667
4	3	2	1	0.500000	0.500000	6	5	1	0	0.166667	0.166667
4	3	2	2	1.000000	0.500000	6	5	1	1	1.000000	0.833333
4	3	3	2	0.750000	0.750000	6	5	2	I	0.333333	0.333333
4	3	3	3	1.000000	0.250000	6	5	2	2	1.000000	0.666667
5	1	1	0	0.800000	0.800000	6	5	3	2	0.500000	0.500000
5	1	1	1	1.000000	0.200000	6	5	3	3	1.000000	0.500000
5	2	1	0	0.600000	0.600000	6	5	4	3	0.666667	0.666667
5	2	1	1	1.000000	0.400000	6	5	4	4	1.000000	0.333333
5	2	2	0	0.300000	0.300000	6	5	5	4	0.833333	0.833333
5	2	2	1	0.900000	0.600000	6	5	5	5	1.000000	0.166667
5	2	2	2	1.000000	0.100000	7	1	1	0	0.857143	0.857143
5	3	1	0	0.400000	0.400000	7	1	1	1	1.000000	0.142857
5	3	1	1	1.000000	0.600000	7	2	1	0	0.714286	0.714286
5	3	2	0	0.100000	0.100000	7	2	1	1	1.000000	0.285714
5	3	2	1	0.700000	0.600000	7	2	2	0	0.476190	0.476190
5	3	2	2	1.000000	0.300000	7	2	2	1	0.952381	0.476190
5	3	3	1	0.300000	0.300000	7	2	2	2	1.000000	0.047619
5	3	3	2	0.900000	0.600000	7	3	1	0	0.571429	0.571429
5	3	3	3	1.000000	0.100000	7	3	1	1	1.000000	0.428571
5	4	1	0	0.200000	0.200000	7	3	2	0	0.285714	0.285714
5	4	1	1	1.000000	0.800000	7	3	2	1	0.857143	0.571429
5	4	2	1	0.400000	0.400000	7	3	2	2	1.000000	0.142857
5	4	2	2	0.000000	0.600000	7	3	3	0	0.114286	0.114286
5	4	3	2	0.600000	0.600000	7	3	3	1	0.628571	0.514286
5	4	3	3	1.000000	0.400000	7	3	3	2	0.971428	0.342857
5	4	4	3	0.800000	0.800000	7	3	3	3	1.000000	0.028571
5	4	4	4	1.000000	0.200000	7	4	1	0	0.428571	0.428571
6	1	1	0	0.833333	0.833333	7	4	1	1	1.000000	0.571429
6	1	1	1	1.000000	0.166667	7	4	2	0	0.142857	0.142857
6	2	1	0	0.666667	0.666667	7	4	2	1	0.714286	0.571429
6	2	1	1	1.000000	0.333333	7	4	2	2	1.000000	0.285714
6	2	2	0	0.400000	0.400000	7	4	3	0	0.025571	0.028571
6	2	2	1	0.933333	0.533333	7	4	3	1	0.371429	0.342857
6	2	2	2	1.000000	0.066667	7	4	3	2	0.885714	0.514286
6	3	1	0	0.500000	0.500000	7	4	3	3	1.000000	0.114286
6	3	1	1	1.000000	0.500000	7	4	4	1	0.114286	0.114286
6	3	2	0	0.200000	0.200000	7	4	4	2	0.628571	0.514286

N	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***
7	4	4	3	0.971428	0342857
7	4	4	4	1.000000	0.028571
7	5	1	0	0.285714	0.285714
7	5	1	1	1.000000	0.714286
7	5	2	0	0.047619	0.047619
7	5	2	1	0.523809	0.476190
7	5	2	2	1.000000	0.476190
7	5	3	1	0.142857	0.142857
7	5	3	2	0.714286	0.571429
7	5	3	3	1.000000	0.285714
7	5	4	2	0.285714	0.285714
7	5	4	3	0.857143	0.571429
7	5	4	4	1.000000	0.142857
7	5	5	3	0.476190	0.476190
7	5	5	4	0.952381	0.476190
7	5	5	5	1.000000	0.047619
7	6	1	0	0.142857	0.142857
7	6	1	1	1.000000	0.857143
7	6	2	1	0.285714	0.285714
7	6	2	2	1.000000	0.714286
7	6	3	2	0.428571	0.428571
7	6	3	3	1.000000	0.571429
7	6	4	3	0.571429	0.571429
7	6	4	4	1.000000	0.428571
7	6	5	4	0.714286	0.714286
7	6	5	5	1.000000	0.285714
7	6	6	5	0.857143	0.857143
7	6	6	6	1.000000	0.142857
8	1	1	0	0.875000	0.875000
8	1	1	1	1.000000	0.125000
8	2	1	0	0.750000	0.750000
8	2	1	1	1.000000	0.250000
8	2	2	0	0.535714	0.535714
8	2	2	1	0.964286	0.428571
8	2	2	2	1.000000	0.035714
8	3	1	0	0.625000	0.625000
8	3	1	1	1.000000	0.375000
8	3	2	0	0.357143	0.357143
8	3	2	1	0.892857	0.535714
8	3	2	2	1.000000	0.107143
8	3	3	0	0.178571	0.178571
8	3	1	1	0.714286	0.535714
8	3	3	2	0.982143	0.267857
8	3	3	3	1.000000	0.017857
8	4	1	0	0.500000	0.500000
8	4	1	1	1.000000	0.500000
8	4	2	0	0.214286	0.214286
8	4	2	1	0.785714	0.571429
8	4	2	2	1.000000	0.214286
8	4	3	0	0.071429	0.071429
8	4	3	1	0.500000	0.428571
8	4	3	2	0.928571	0.428571
8	4	3	3	1.000000	0.071429
8	4	4	0	0.014286	0.014286
8	4	4	1	0.242857	0.228571
8	4	4	2	0.757143	0.5142S6
8	4	4	3	0.985714	0.228571
8	4	4	4	1.000000	0.014286
8	5	1	0	0.375000	0.375000
8	5	1	1	1.000000	0.625000
8	5	2	0	0.107143	0.107143
8	5	2	1	0.642857	0.5357Í4
8	5	2	2	1.000000	0.357143
8	5	3	0	0.017857	0.017857
8	5	3	1	0.285714	0.267857
8	5	3	2	0.821429	0.535714
8	5	3	3	1.000000	0.178571
8	5	4	1	0.071429	0.071429
8	5	4	2	0.500000	0.428571
8	5	4	3	0.928571	0.428571
8	5	4	4	1.000000	0.071429
8	5	5	2	0.178571	0.178571
8	5	5	3	0.714286	0.535714
8	5	5	4	0.982143	0:267857
8	5	5	5	1.000000	0.017857
8	6	1	0	0.250000	0.250000
8	6	1	1	1.000000	0.750000
8	6	2	0	0.035714	0.035714
8	6	2	1	0.464286	0.428571
8	6	2	2	1.000000	0.535714
8	6	3	1	0.107143	0.107143
8	6	3	2	0.642857	0.535714
8	6	3	3	1.000000	0.357143
8	6	4	2	0.214286	0.214286
8	6	4	3	0.785714	0.571429
8	6	4	4	1.000000	0.214286
8	6	5	3	0.357143	0.357143
8	6	5	4	0.892857	0.535714
8	6	5	5	1.000000	0.107143
8	6	6	4	0.535714	0.535714
8	6	6	5	0.964286	0.428571
8	6	6	6	1.000000	0.035714
8	7	1	0	0.125000	0.125000
8	7	1	1	1.000000	0.875000
8	7	2	1	0.250000	0.250000
8	7	2	2	1.000000	0.750000
8	7	3	2	0.375000	0.375000
8	7	3	3	1.000000	0.625000
8	7	4	3	0.500000	0.500000
8	7	4	4	1.000000	0.500000
8	7	5	4	0.625000	0.625000
8	7	5	5	1.000000	0.375000
8	7	6	5	0.750000	0.750000
8	7	6	6	1.000000	0.250000
8	7	7	6	0.875000	0.875000
8	7	7	7	1.000000	0.125000
9	1	1	0	0.888889	0.888889
9	1	1	1	1.000000	0.111111
9	2	1	0	0.777778	0.777778
9	2	1	1	1.000000	0.222222
9	2	2	0	0.583333	0.583333
9	2	2	1	0.972222	0.388889
9	2	2	2	1.000000	0.027778
9	3	1	0	0.666667	0.666667
9	3	1	1	1.000000	0.333333
9	3	2	0	0.416667	0.416667
9	3	2	1	0.916667	0.500000
9	3	2	2	1.000000	0.083333

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
9	3	3	0	0.238095	0.238095
9	3	3	1	0.773809	0.535714
9	3	3	2	0.988095	0.214286
9	3	3	3	1.000000	0.011905
9	4	1	0	0.555556	0.555556
9	4	1	1	1.000000	0.444444
9	4	2	0	0.277778	0.277778
9	4	2	1	0.833333	0.555556
9	4	2	2	1.000000	0.166667
9	4	3	0	0.119048	0.119048
9	4	3	1	0.595238	0.476190
9	4	3	2	0.952381	0.357143
9	4	3	3	1.000000	0.047619
9	4	4	0	0.039683	0.039683
9	4	4	1	0.357143	0.317460
9	4	4	2	0.833333	0.476190
9	4	4	3	0.992063	0.158730
9	4	4	4	1.000000	0.007936
9	5	1	0	0.444444	0.444444
9	5	1	1	1.000000	0.555556
9	5	2	0	0.166667	0.166667
9	5	2	1	0.722222	0.555556
9	5	2	2	1.000000	0.277778
9	5	3	0	0.047619	0.047619
9	5	3	1	0.404762	0.357143
9	5	3	2	0.880952	0.476190
9	5	3	3	1.000000	0.119048
9	5	4	0	0.007936	0.007936
9	5	4	1	0.166667	0.158730
9	5	4	2	0.642857	0.476190
9	5	4	3	0.960317	0.317460
9	5	4	4	1.000000	0.039683
9	5	5	1	0.039683	0.039683
9	5	5	2	0.357143	0.317460
9	5	5	3	0.833333	0.476190
9	5	5	4	0.992063	0.158730
9	5	5	5	1.000000	0.007936
9	6	1	0	0.333333	0.333333
9	6	1	1	1.000000	0.666667
9	6	2	0	0.083333	0.083333
9	6	2	1	0.583333	0.500000
9	6	2	2	1.000000	0.416667
9	6	3	0	0.011905	0.011905
9	6	3	1	0.226190	0.214286
9	6	3	2	0.761905	0.535714
9	6	3	3	1.000000	0.238095
9	6	4	1	0.047619	0.047619
9	6	4	2	0.404762	0.357143
9	6	4	3	0.880952	0.476190
9	6	4	4	1.000000	0.119048
9	6	5	2	0.119048	0.119048
9	6	5	3	0.595238	0.476190
9	6	5	4	0.952381	0.357143
9	6	5	5	1.000000	0.047619
9	6	6	3	0.238095	0.238095
9	6	6	4	0.773809	0.535714
9	6	6	5	0.988095	0.214286
9	6	6	6	1.000000	0.011905
9	7	1	0	0.222222	0.222222
9	7	1	1	1.000000	0.777778
9	7	2	0	0.027778	0.027778

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
9	7	2	1	0.416667	0.388889
9	7	2	2	1.000000	0.583333
9	7	3	1	0.083333	0.083333
9	7	3	2	0.583333	0.500000
9	7	3	3	1.000000	0.416667
9	7	4	2	0.166667	0.166667
9	7	4	3	0.722222	0.555556
9	7	4	4	1.000000	0.277778
9	7	5	3	0.277778	0.277778
9	7	5	4	0.833333	0.555556
9	7	5	5	1.000000	0.166667
9	7	6	4	0.416667	0.416667
9	7	6	5	0.916667	0.500000
9	7	6	6	1.000000	0.833333
9	7	7	5	0.583333	0.583333
9	7	7	6	0.972222	0.388889
9	7	7	7	1.000000	0.027778
9	8	1	0	0.111111	0.111111
9	8	1	1	1.000000	0.888889
9	8	2	1	0.222222	0.222222
9	8	2	2	1.000000	0.777778
9	8	3	2	0.333333	0.333333
9	8	3	3	1.000000	0.666667
9	8	4	3	0.444444	0.444444
9	8	4	4	1.000000	0.555556
9	8	5	4	0.555556	0.555556
9	8	5	5	1.000000	0.444444
9	8	6	5	0.666667	0.666667
9	8	6	6	1.000000	0.333333
9	8	7	6	0.777778	0.777778
9	8	7	7	1.000000	0.222222
9	8	8	7	0.888889	0.888889
9	8	8	8	1.000000	0.111111
10	1	1	0	0.900000	0.900000
10	1	1	1	1.000000	0.100000
10	2	1	0	0.800000	0.800000
10	2	1	1	1.000000	0.200000
10	2	2	0	0.622222	0.622222
10	2	2	1	0.977778	0.355556
10	2	2	2	1.000000	0.022222
10	3	1	0	0.700000	0.700000
10	3	1	1	1.000000	0.300000
10	3	2	0	0.466667	0.466667
10	3	2	1	0.933333	0.466667
10	3	2	2	1.000000	0.066667
10	3	3	0	0.291667	0.291667
10	3	3	1	0.816667	0.525000
10	3	3	2	0.991667	0.175000
10	3	3	3	1.000000	0.008333
10	4	1	0	0.600000	0.600000
10	4	1	1	1.000000	0.400000
10	4	2	0	0.333333	0.333333
10	4	2	1	0.866667	0.533333
10	4	2	2	1.000000	0.133333
10	4	3	0	0.166667	0.166667
10	4	3	1	0.666667	0.500000
10	4	3	2	0.966667	0.300000
10	4	3	3	1.000000	0.033333
10	4	4	0	0.071429	0.071429
10	4	4	1	0.452381	0.380952
10	4	4	2	0.880952	0.428571

N	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***
10	4	4	3	0.995238	0.114286
10	4	4	4	1.000000	0.004762
10	5	1	0	0.500000	0.500000
10	5	1	1	1.000000	0.500000
10	5	2	0	0.222222	0.222222
10	5	2	1	0.777778	0.555556
10	5	2	2	1.000000	0.222222
10	5	3	0	0.083333	0.083333
10	5	3	1	0.500000	0.416667
10	5	3	2	0.916667	0.416667
10	5	3	3	1.000000	0.083333
10	5	4	0	0.023810	0.023810
10	5	4	1	0.261905	0.238095
10	5	4	2	0.738095	0.476190
10	5	4	3	0.976190	0.238095
10	5	4	4	1.000000	0.023810
10	5	5	0	0.003968	0.003968
10	5	5	1	0.103175	0.099206
10	5	5	2	0.500000	0.396825
10	5	5	3	0.896825	0.396825
10	5	5	4	0.996032	0.099206
10	5	5	5	1.000000	0.003968
10	6	1	0	0.400000	0.400000
10	6	1	1	1.000000	0.600000
10	6	2	0	0.133333	0.133333
10	6	2	1	0.666667	0.533333
10	6	2	2	1.000000	0.333333

N	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***
10	6	3	0	0.033333	0.033333
10	6	3	1	0.333333	0.300000
10	6	3	2	0.833333	0.500000
10	6	3	3	1.000000	0.166667
10	6	4	0	0.004762	0.004762
10	6	4	1	0.119048	0.114286
10	6	4	2	0.547619	0.428571
10	6	4	3	0.928571	0.380952
10	6	4	4	1.000000	0.071429
10	6	5	1	0.023810	0.023810
10	6	5	2	0.261905	0.238095
10	6	5	3	0.738095	0.476190
10	6	5	4	0.976190	0.238095
10	6	5	5	1.000000	0.023810
10	6	6	2	0.071429	0.071429
10	6	6	3	0.452381	0.380952
10	6	6	4	0.880952	0.428571
10	6	6	5	0.995238	0.114286
10	6	6	6	1.000000	0.004762
10	7	1	0	0.300000	0.300000
10	7	1	1	1.000000	0.700000
10	7	2	0	0.066667	0.066667
10	7	2	1	0.533333	0.466667
10	7	2	2	1.000000	0.466667
10	7	3	0	0.008333	0.008333
10	7	3	0	0.008333	0.008333

Tabla 4

Función de Distribución Normal (0,1)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0-7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Tabla 5

Función de Distribución c^2

	p									
g.l.	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.64	7.90
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.60	5.99	7.38	9.22	10.59
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.82	9.36	11.32	12.82
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.15	13.28	14.82
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.84	15.09	16.76
6	0.67	0.87	1.24	1.63	2.20	10.65	12.60	14.46	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.02	18.47	20.27
8	1.34	1.64	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.55	20.08	21.94
9	1.73	2.09	2.70	3.32	4.17	14.69	16.93	19.03	21.65	23.56
10	2.15	2.55	3.24	3.94	4.86	15.99	18.31	20.50	23.19	25.15
11	2.60	3.05	3.81	4.57	5.58	17.28	19.68	21.93	24.75	26.71
12	3.06	3.57	4.40	5.22	6.30	18.55	21.03	23.35	26.25	28.25
13	3.56	4.10	5.01	5.89	7.04	19.81	22.37	24.75	27.72	29.88
14	4.07	4.65	5.62	6.57	7.79	21.07	23.69	26.13	29.17	31.38
15	4.59	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	.27.50	30.61	32.86
16	5.14	5.81	6.90	7.96	9.31	23.55	26.30	28.86	32.03	34.32
17	5.69	6.40	7.56	8.67	10.08	24.77	27.59	30.20	33.43	35.77
18	6.25	7.00	8.23	9.39	10.86	25.99	28.88	31.54	34.83	37.21
19	6.82	7.63	8.90	10.11	11.65	27.21	30.15	32.87	36.22	38.63
20	7. 42	8.25	9.59	10.85	12.44	28.42	31.42	34.18	37.59	40.05
21	8.02	8.89	10.28	11.59	13.24	29.62	32.68	35.49	38.96	41.45
22	8.62	9.53	10.98	12.34	14.04	30.82	33.93	36.79	40.31	42.84
23	9.25	10.19	11.69	13.09	14.85	32.01	35.18	38.09	41.66	44.23
24	9.87	10.85	12.40	13.84	15.66	33.20	36.42	39.38	43.00	45.60
25	10.50	11.51	13.11	14.61	16.47	34.38	37.66	40.66	44.34	46.97
26	11.13	12.19	13.84	15.38	17.29	35.57	38.89	41.94	45.66	48.33
27	11.79	12.87	14.57	16.15	18.11	36.74	40.12	43.21	46.99	49.69
28	12.44	13.55	15.30	16.92	18.94	37.92	41.34	44.47	48.30	51.04
29	13.09	14.24	16.04	17.70	19.77	39.09	42.56	45.74	49.61	52.38
30	13.77	14.94	16.78	18.49	20.60	40.26	43.78	46.99	50.91	53.71
35	17.16	18.49	20.56	22.46	24.79	46.06	49.81	53.22	57.36	60.31
40	20.67	22.14	24.42	26.51	29.06	51.80	55.75	59.34	63.71	66.80
45	24.28	25.88	28.36	30.61	33.36	57.50	61.65	65.41	69.98	73.20
50	27.96	29.68	32.35	34.76	37.69	63.16	67.50	71.42	76.17	79.52
60	35.50	37.46	40.47	43.19	46.46	74.39	79.08	83.30	88.40	91.98
70	43.25	45.42	48.75	51.74	55.33	85.52	90.53	95.03	100.44	104.24
80	51.14	53.52	57.15	60.39	64.28	96.57	101.88	106.63	112.34	116.35
90	59.17	61.74	65.64	69.13	73.29	107.56	113.14	118.14	124.13	128.32
100	67.30	70.05	74.22	77.93	82.36	118.49	124.34	129.56	135.82	140.19

Tabla 6

Función de Distribución t-Student

	p						
g.l.	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.999**
1	1.376	3.078	6.31	12.70	31.82	63.65	318.39
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.32
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.183
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601	3.131
500	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
1000	0.842	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098

Esta distribución es simétrica: $t_{n,p} = t_{n,1-p}$

Tabla 7

Función de Distribución F de Snedecor

P = 0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.79	2.75	2.72	2.70
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	3.18	2.81	2.61	2.48	1.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
35	2.85	2.46	2.25	2.11	2.02	1.95	1.90	1.85	1.82	1.79
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66
200	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63
500	2.72	2.31	2.09	1.96	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64	1.61
1000	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61

P=0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	60.47	60.71	61.22	61.74	62.06	62.26	62.53	62.69	63.00	63.29
2	9.40	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.22	5.22	5.20	5.19	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.91	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.78	3.76
5	3.28	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.13	3.11
6	2.92	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.75 2	2.72
7	2.68	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.50 2	2.47
8	2.52	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32 2	2.30
9	2.40	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.19	2.16
10	2.30	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.09	2.06
11	2.23	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.00	1.98
12	2.17	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.94	1.91
13	2.12	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.88	1.85
14	2.07	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.83	1.80
15	2.04	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.79	1.76
16	2.01	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.76	1.72
17	1.98	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.73	1.69
18	1.95	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.70	1.66
19	1.93	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.67	1.64
20	1.91	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.65	1.61
21	1.90	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.63	1.59
22	1.88	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.61	1.57
23	1.87	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.59	1.55
24	1.85	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.58	1.54
25	1.84	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.56	1.52
26	1.83	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.55	1.51
27	1.82	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.54	1.50
28	1.81	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.53	1.48
29	1.80	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.52	1.47
30	1.79	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.51	1.46
35	1.76	1.74	1.69	1.63	1.60	1.57	1.53	1.51	1.47	1.42
40	1.74	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.43	1.38
50	1.70	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.39	1.33
60	1.68	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.36	1.30
80	1.65	1.63	1.57	1.51	1.47	1.44	1.40	1.38	1.32	1.25
100	1.64	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.29	1.22
200	1.60	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.24	1.16
500	1.58	1.56	1.50	1.44 .	1.39	1.36	1.31	1.28	1.21	1.11
1000	1.58	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.20	1.08

P=0.95

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161.4	199.50	215.7	224.5	230.1	233.9	236.7	238.8	240.5	241.8
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.97
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.73
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

P=0.95

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	242.9	243.9	245.9	248.0	249.2	250.0	251.1	251.7	253.0	254.1
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.76	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.74	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.70	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.60	3.57	3.'5)	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.31	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.10	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.94	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.82	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.46	2.41
12	2.72	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.63	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.57	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
15	2.51	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.46	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
17	2.41	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.02	1.97
18	2.37	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.34	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.31	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
21	2.28	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.88	1.82
22	2.26	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
23	2.24	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.82	1.76
24	2.22	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
25	2.20	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.78	1.72
26	2.18	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
27	2.17	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.74	1.68
28	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
29	2.14	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.71	1.65
30	2.13	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
35	2.07	2.04	1.96	1.88	1.82	1.79	1.74	1.70	1.63	1.57
40	2.04	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
50	1.99	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.52	1.45
60	1.95	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
80	1.91	1.88	1.79	1.70	1.64	1.60	1.54	1.51	1.43	1.34
100	1.89	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
200	1.84	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.32	1.21
500	1.81	1.77	1.69	1.59	1.53	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1000	1.80	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.83	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
1000	5.02	3.69	3.12	2.79	2.59	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1								
gl_2	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**1000**
1	976.7	978.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	39.41	39.43	39.45	39.45	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.39	2.32	2.26	1.19
19	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
1000	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.50	27.34	27.22
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6,93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
2	99.41	99.42	99.43	99.45	99.46	99.46	99.47	99.48	99.49	99.51
3	27.12	27.03	26.85	26.67	26.58	26.50	26.41	26.35	26.24	26.14
4	14.45	14.37	14.19	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.58	13.48
5	9.96	5.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.30	9.24	9.13	9.03
6	7.79	7.7.2	7.56	7.40	7.29	7.23	7.15	7.09	6.99	6.89
7	6.54	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.75	5.66
8	5.73	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	4.96	4.87
9	5.18	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.41	4.32
10	4.77	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.01	3.92
11	4.46	4.40	4.25	4.10	4.00	3.94	3.86	3.81	3.71	3.61
12	4.22	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.47	3.37
13	4.02	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.27	3.18
14	3.86	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.11	3.02
15	3.73	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	2.98	2.88
16	3.62	.3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.86	2.76
17	3.52	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.76	2.66
18	3.43	'3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.68	2.58
19	3.36	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.60	2.50
20	3.29	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.54	2.43
21	3.24	3.17	3.03	2.88	2.78	2.72	2.64	2.58	2.48	2.37
22	3.18	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.42	2.32
23	3.14	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.37	2.27
24	3.09	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.33	2.22
25	3.06	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.29	2.18
26	3.02	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.25	2.14
27	2.99	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.22	2.11
28	2.96	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.19	2.08
29	2.93	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.16	2.05
30	2.91	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.24	2.13	2.02
35	2.80	2.74	2.60	2.44	2.35	2.28	2.19	2.14	2.02	1.90
40	2.73	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	1.94	1.82
50	2.62	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.82	1.70
60	2.56	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.75	1.62
80	2.48	2.42	2.27	2.12	2.01	1.94	1.85	1.79	1.65	1.51
100	2.43	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.60	1.45
200	2.34	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.48	1.30
500	2.28	2.22	2.07	1.92	1.81	1.74	1.63	1.57	1.41	1.20
1000	2.27	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.38	1.16

Referencias

[1] Paul L. Meyer, Probabilidad y Aplicaciones Estadística, Segunda Edición, Editorial Fondo Educativo Interamericano, S. A., México(1973).

[2] Murray R. Spiegel & John J. Schiller & R. Alu Srinivasan, Probabilidad y Estadística, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(2003).

[3] Ronald E. Walpole & Raymond H. Myers, Probabilidad y Estadística, Cuarta Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1992).

[4] George C. Canavos, Probabilidad y Estadística, Primera Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1988).

[5] Diccionario enciclopédico , Tercera edición, Editorial Espasa-Calpe , España(1986).

[6] Real academia de la lengua española.(2018).*azar*. 8 de febrero de 2018, de RAE Sitio web: http://dle.rae.es/?id=4dukUoz

[7] Universidad de Jaén. *TABLAS ESTADÍSTICAS*. 26 de noviembre de 2017. de Sitio web: http://www4.ujaen.es/ mpfrias/TablasDistribucionesI.pdf