Probabilidad y Estadística
Tarea #2.3
Ricardo Ceballos Sebastián

Distribuciones para variables aleatorias discretas y continuas

1. Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro β, y si $P(X = 0) = 0{,}2$, calcule la probabilidad de que $X \geq 2$.

2. Sea X una distribución de Poisson con parámetro λ. Encontrar el valor de k para el cual $P(X = k)$ es la mayor. Sugerencia (comparar $P(X = k)$ con $P(X = k - 1)$.

3. El número de buques tanques, digamos N, que llegan cada día a cierta refinería tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Las actuales instalacones portuarias pueden despachar tres buques al día. Si más de tres buques llegan en un día, los que están en exceso deben enviarse a otro puerto.

   a) En un día determinado, ¿cuál es la probabilidad de tener que desviar buques tanques a otro puerto?
   b) ¿En cuánto debe aumentarse la capacidad de las instalaciones actuales para permitir la atención de buques tanques el 90 % de los días?
   c) ¿Cuál es el número esperado de buques tanques que llegan al día?
   d) ¿Cuál es el número más probable de buques tanques que llegan diariamente?
   e) ¿Cuál es el número esperado de buques tanques atendidos diariamente?
   f) ¿Cuál es el número esperado de buques tanques devueltos diariamente?

4. Suponga que la probabilidad de que un artículo produciddo por una máquina especial sea defectuoso es igual 0.2. Si 10 artículos producidos, se seleccional al azar.¿Cuál es la probabilidad de que no se encuentre más de un artículo defectuoso? Use las distribuciones binomial y de Poisson y compare los resultados.

5. Una compañía de seguros ha descubierto que solo 0.1 por ciento de la población tiene cierto tipo de accidente cada año. Si los 10,000 asegurados fueran escogidos aleatoriamente en la población, ¿cuál será la probabilidad de que no más de 5 de estos clientes tengan un accidente de este tipo el próximo año?

6. Suponga que X tiene distribución de Poisson. Si $P(X = 2) = \dfrac{2}{3}P(X = 1)$, calcular, $P(X = 0)$ y $P(X = 3)$.

7. Un productor de películas produce 10 rollos de una película especialmente sensible cada año. Si la película no se vende dentro del año, debe descartarse. Experiencias pasadas indican que D, la demanda (pequeña) para la película es una variable aleatoria con distribución de Poisson cuyo parámetro es 8. Si se obtiene una utilidad de \$7 en cada rollo vendido, mientras que ocurre una pérdidad de \$3 por cada rollo que debe ser descartado, calular la utilidad esperada que el fabricante puede obtener con los 10 rollos que produce.

8. Suponga que una fuente radiactiva emite partículas y que el número de tales partículas emitidas durante el periodo de una hora tiene una distrubución de Poisson con parámetro λ. Se utiliza un instrumento para contar y para anotar el número de partículas emitidas. Si más de 30 partículas llegan durante cualquier período de una hora, el instrumento para anotar es incapaz de controlar el exceso y simplemente anota 30. Si Y es la variable aleatoria definida como el número de partículas anotadas por el instrumento que cuenta, obtenga la distribución de probabilidad de Y.

9. Suponga que una fuente radiactiva emite partículas y que el número de tales partículas emitidas durante el periodo de una hora tiene una distrubución de Poisson con parámetro λ. Consideremos que el instrumento para contar tales emisiones falla ocasionalmente en anotar una partícula emitida. Supóngase, específicamente, que cualquier partícula emitida, tiene una probabilidad p de ser anotada.

   a) Si Y está definida como el número de partículas anotadas. Determine una expresión para la distribución de probabilidad de Y.
   b) Calcule $P(Y = 0)$, si $\lambda = 4$ y $p = 0{,}9$.

10. Supóngase que un depósito contiene 10,000 partículas. La probabilidad de que una de esas partículas salga del depósito es igual a 0.0004. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran más de 5 salidas?(Suponga que las diversas salidas son independientes unas de otras)

11. Supóngase que un libro de 585 páginas contiene 43 errores tipográficos. Si esos errores están distribuidos aleatoriamente en el libro, ¿cuál es la probabilidad de que 10 páginas, seleccionadas aleatoriamente, estén libres de errores?(Suponga que X, la variable que mide el número de errores por página, tiene una distribución de Poisson).

12. Se observa una fuente radiactiva durante 7 intervalos de 10 segundos de duración cada uno y se cuenta el número de partículas emitidas durante cada período. Suponiendo que el número de partículas emitidas, digamos X, durante cada período observado tiene una disrtribución de Poisson con parámetro 5.0. (Es decir, las partículas son emitidas a razón de 0.5 partículas por segundo)

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que en cada uno de los 7 intervalos de tiempo, sean emitidas 4 o más partículas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que en al menos uno de los 7 intervalos de tiempo, sean emitidas 4 o más partículas?

13. Se ha encontrado que el número de fallas de transistores en un computador electrónico en cualquier período de una hora puede considerarse como una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson con parámetro 0.1. (Es decir, en promedio hay una falla de un transistor cada 10 horas). Se inicia cierto proceso que requiere 20 horas de tiempo de cómputo,

   a) Encuentre la probabilidad de que el proceso anterior pueda ser terminado exitosamente sin una falla.(Se supone que la máquina llega a ser inoperante sólo si fallan 3 o más transistores)
   b) Lo mismo que en a) solo que la máquina llega a ser inoperante si fallan 2 o más transistores.

14. Al formar números binarios con n dígitos, la probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es 0.002. Si los errores son independientes, ¿cuál es la probabilidad de encontrar 0, uno más de un dígito incorrecto en un número binario de 25 dígitos? Si el computador forma 10^6 de tales números de 25 dígitos por segundo, ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un número incorrecto durante cualquier período de un segundo?

15. Se emplean dos procedimientos independientes en la operación de lanzamiento de cohetes. Supóngase que cada uno de los procedimientos se continua hasta que se produce un lanzamiento exitoso. Se supone que al usar el procemimieto I, P(E), la probabilidad de un lanzamiento exitoso es igual a p_1, mientras que para el procedimiento II, P(E) es igual a p_2. Se supone además, que cada semana se hace un intento con cada uno de los dos métodos. Representemos con X_1 y X_2 al número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso, por medio de los métodos I y II, respectivamente. X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene una distribución geométrica. Sea W el mínimo (X_1, X_2) y sea Z el máximo (X_1, X_2). W representa el número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso, mientras que Z representa el número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso con ambos procedimiento. Si el procedimiento I resulta en, $\overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}$, mientras que el procedimiento II resulta en $\overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}$, tenemos que $W = 3$, $Z = 4$.

a) Obtener una expresión para la distribución de probabiliadad de W. Exprese el suceso $W = k$ en función de X_1 y X_2.

b) Obtener una expresión para la didtribución de probabiliadad de Z.

c) Escribir nuevamente las expresiones anteriores si $p_1 = p_2$.

16. Se arman cuatro componentes en un solo aparato. Las componentes originan fuentes independientes y $p_i = P$(i-ésima componente defectuosa), $i = 1, 2, 3, 4$.

    a) Obtener una expresión de la probabiliadad de que el aparato completo funcione.

    b) Obtener una expresión de la probabiliadad de que al menos tres componentes funcionen.

    c) Si $p_1 = p_2 = 0{,}1$ y $p_3 = p_4 = 0{,}2$, calcule la probabilidad de que funcionen exactamente 2 componentes.

17. Un mecánico mantiene un gran número de arandelas en un depósito. El 50 % de esas arandelas son de 1/4 de pulgadas de diámetro; el 30 % son de 1/8 de pulgada de diámetro; y el 20 % restante son 3/8 de pulgadas de diámetro. Se supone que se eligen 10 arandelas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 5 arandelas de 1/4 de pulgadas, cuatro de 1/8 de pulgada, y una de 3/8 de pulgada?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que solo haya dos clases de arandelas entre las elegidas?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres clases de arandelas estén entre las elegidas?

    d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 3 de una clase, 3 de otra clase y finalmente 4 de la tercera clase en una muestra de 10?

18. El número de partículas emitidas por una fuente radiactiva durante un período específico es una variable aleatoria con una distribución de Poisson. Si la probabilidad de ninguna emisión es igual a 1/3, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran 2 o más emisiones?

19. Supóngase que X_t, el número de partículas emitidas en t horas por una fuente radiactiva, tiene una distribución de Poisson con parámetro 20t. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 partículas sean emitidas durante un período de 15 minutos?

20. La probabilidad de un lanzamiento exitoso es igual 0.8. Supongamos que se hacen ensayos de lanzamientos hasta que han ocurrido 3 lanzamientos exitosos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios 6 intentos? ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios menos de 6 intentos?

21. Para el problema 20, supongamos que los ensayos de lanzamientos se hacen hasta que ocurren tres lanzamientos consecutivos exitosos. Responda las preguntas formuladas en el problema previo para este caso.

22. Considere nuevamente la situación descrita en el problema 20. Supongamos que cada uno de los ensayos de lanzamiento cuesta \$5,000. Además, un lanzamiento que fracase produce un costo adicional de \$500. Calcular el costo esperado para la situación descrita.

23. El número promedio de ratas de campo por acre en un campo de trigo es de 12. Encuentre la probabilidad de que menos de 6 ratas de campo se encuentren:

    a) en un acre de terreno determinado,

    b) en dos de los siguientes tres acres inspeccionados,

    c) por primera vez al inspecionar el acre número cuatro.

24. Supóngase que X tiene una distribución $N(2,0,16)$. Use la tabla de la distribución normal para evaluar las distribuciones siguientes.

a) $P(X \geq 2{,}3)$,

b) $P(1{,}8 \leq X \leq 2{,}1)$.

25. El diámetro de un cable está distribuido normalmente con media 0.8 y varianza 0.0004. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro sobre pase 0.81 pulgadas?

26. Suponiendo que el cable en el problema 25 se considere defectuoso si el diámetro se diferencia de su media en 0.025. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cable defectuoso?

27. Se sabe que los errores en cierto instrumento para medir longitudes están distribuidos normalmente, con valor esperado cero y desviación esándar 1 pulgada. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir los errores, sean mayores de 1 pulgada, 2 pulgadas, 3 pulgadas?