y la solución general a la ecuación ⊛
$y_g = yh + y_p$

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 + y_1\int \frac{W_1}{W}dx + y_2\int \frac{W_2}{W}dx$$

Ejemplo 1: Aplicando variación de parámetros, resolver

$$y'' - 4y' + 4y = \underbrace{(x+1)e^{2x}}_{F(x)}$$

Sol.
De acuerdo con la teoría ,primero tenemos que hallar las soluciones a la homogénea

$$m^2 - 4m - 4 = (m-2)^2 \therefore m_1 = m_2 = 2$$

es decir las soluciones son $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$$

Ahora, para la solución particular

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{bmatrix} = e^{2x}[2xe^{2x} + e^{2x}] - 2e^{2x}xe^{2x} = e^{4x}[\cancel{2x} - \cancel{2x} + 1] = e^{4x}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{bmatrix} = -xe^{2x}(x+1)e^{2x} = -e^{4x}x(x+1)$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{bmatrix} = e^{2x}(x+1)e^{2x} = e^{4x}(x+1)$$

$u_1 = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx$ $$\therefore u_1(x) = \int \frac{-\cancel{e^{4x}}x(x+1)}{\cancel{e^{4x}}}dx = -\int (x^2+x)dx = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$u_2 = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx \Rightarrow$ $$u_2(x) = \int \frac{\cancel{e^{4x}}(x+1)}{\cancel{e^{4x}}}dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$$

La solución particular es:
$$y_p(x) = y_1u_1 + y_2u_2 = -e^{2x}(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}) + xe^{2x}(\frac{x^2}{2} + x) = e^{2x}(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + x^2) = e^{2x}(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})$$

$$y_p(x) = e^{2x}(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})$$

y la solución general estará dada por

$$y_g = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^{2x}(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})$$

Ejemplo 2: Aplicando variación de parámetros resolver

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}Csc3x$$

Sol.
Las soluciones a la ecuación homogénea $m^2 + 4 = 0$, $m_1 = 3i$, $m_2 = -3i$

$$y_h = c_1Cos3x + c_2Sin3x, y_1 = Cos3x, y_2 = Sin3x$$