Tarea # 3.1
Probabilidad y Estadística
Prof. Ricardo Ceballos Sebastián

1. Determine el valor de c de tal manera que las siguientes funciones representen distribuciones de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y:

   a) $f(x, y) = cxy$, para x=1,2,3; y=1,2,3.

   b) $f(x, y) = c|x - y|$ para $x = -2, 0, 2$; $y = -2, 3$.

2. Si la distribución de probabilidad conjunta de X y Y es

   $$f(x, y) = \frac{x + y}{30} \qquad \textit{para} \quad x = 0, 1, 2, 3; y = 0, 1, 2$$

   encuentre,

   a) $P(X \leq 2, Y = 1)$

   b) $P(X > 2, Y \leq 1)$

   c) $P(X > Y)$

   d) $P(X + Y = 4)$

3. De un costal de frutas que contiene 3 naranjas, 2 manzanas y 3 plátanos, se selecciona una muestra aleatoria de 4 frutas. Si X es el número de naranjas y Y es el número de manzanas en la muestra, encuentre,

   a) la distribución de probabilidad conjunta de X y Y,

   b) $P[(X, Y) \in A]$, donde A es la región $\{(x, y) \,|\, x + y \leq 2\}$

4. Considere un experimento que consiste en 2 lanzamientos de un dado balanceado. Si X es el número de cuatros y Y es el número de cincos que se obtienen en los 2 lanzamientos, encuentre,

   a) la distribución de probabilidad conjunta de X y Y;

   b) $P[(X, Y) \in A]$, donde A es la región $\{(x, y) \,|\, 2x + y < 3\}$

5. Si X representa el número de caras y Y el número de caras menos el número de cruces cuando se lanzan 3 monedas. Encuentre la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

6. Se sacan tres cartas sin reemplazo de las 12 cartas mayores(sotas, reinas y reyes) de un paquete común de 52 cartas. Sea X el número de reyes seleccionados y Y el número de sotas. Encuentre,

a) la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

b) $P[(X,Y) \in A]$ donde A es la región $\{(x,y)\,|\,x+y \geq 2\}$

7. Dos variables aleatorias tienen la siguiente densidad conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

encuentre,

a) $P(0 \leq X \leq 3/4, 1/8 \leq Y \leq 1/2)$;

b) $P(Y > X)$.

8. Dos variables aleatorias tienen la siguiente densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2), & 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Hallar,

a) k;

b) $P(1 < X < 2, 2 < Y \leq 3)$;

c) $P(1 \leq X \leq 2)$;

d) $P(X + Y > 4)$.

9. Si X y Y tienen la función de densidad conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre $P(X + Y > 1/2)$.

10. Con los datos del ejercicio 2, encuentre,

a) la distribución marginal de X;

b) la distribución marginal de Y;

11. Una moneda se lanza dos veces. Sea Z el número de caras en el primer lanzamiento y W el número total de caras en los dos lanzamientos. Si la moneda no está equilibrada y una cara tiene 40 % de posibilidad de ocurrir, encuentre,

a) la distribución de probabilidad conjunta de W y Z;

b) la distribución marginal de W;

c) la distribución marginal de Z;

d) la probabilidad de que ocurra almenos una cara.

12. Con los datos del ejercicio 3, encuentre,

a) $f(y \mid 2)$ para todos los valores de y;

b) $P(Y = 0 \mid X = 2)$

13. Suponga que X y Y tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

		x		
	$f(x,y)$	1	2	3
	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
y	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	0
	3	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$

a) Calcule la distribución marginal de X;

b) calcule la distribución marginal de Y;

c) encuentre $P(Y = 3 \mid X = 2)$

14. Suponga que X y Y tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta,

		x	
	$f(x,y)$	2	4
	1	0.10	0.15
y	3	0.20	0.30
	5	0.10	0.15

a) Encuentre la distribución marginal de X;

b) Encuentre la distribución marginal de Y.

15. Una vinatería cuenta con instalaciones para atender a clientes que llegan en automóvil y a quienes llegan caminando. En un dís seleccionado aleatoriamente, sean X y Y ,respectivamente, los períodos de tiempos que se utilizan en cada caso y suponga que la función de densidad conjunta para estas dos variables aleatorias es,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+2y), & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

   a) Encuentre la densidad marginal de X;

   b) encuentre la densidad marginal de Y;

   c) encuentre la probabilidad de que las instalaciones para quienes lleguen en automóvil se utilicen menos de la mitad de tiempo.

16. Una compañía dulcera distribuye cajas de chocolates con una mezcla de tres tipos de chocolate: cremas, chiclosos y envinados. Suponga que el peso de cada caja es de un kilogramo, pero los pesos individuales de las cremas, de los chiclosos y de los envinados varían de una caja a otra. Para una caja sekleccionada aleatoriamente X y Y representan el peso de las cremas y de los chiclosos, respectivamente, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es,

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

   a) Encuentre la probabilidad de que en una caja determinada, el peso de los chocolates envinados sea más de 1/2 del peso total.

   b) Encuentre la densidad marginal para el peso de las cremas.

   c) Encuentre la probabilidad de que el peso de los chocolates de chiclosos en una caja sea menos de 1/8 de kilogramo, si se sabe que las cremas constituyen 3/4 del peso.

17. Dada la función de densidad conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6-x-y}{8}, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

   encuentre $P(1 < Y < 3 \,|\, X = 2)$.

18. Se emplean dos procedimientos independientes en la operación de lanzamiento de cohetes. Supóngase que cada uno de los procedimientos se continua hasta que se produce un lanzamiento exitoso. Se supone que al usar el procemimieto I, P(E), la probabilidad de un lanzamiento exitoso es igual a p_1, mientras que para el procedimiento II, P(E) es igual a p_2. Se supone además, que cada semana se hace un intento con cada uno de los dos métodos. Representemos con X_1 y X_2 al número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso, por medio de los métodos I y II, respectivamente. X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene una distribución geométrica. Sea W el mínimo (X_1, X_2) y sea Z el máximo (X_1, X_2). W representa el número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso, mientras que Z representa el número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso con ambos procedimiento. Si el procedimiento I resulta en, $\overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}$, mientras que el procedimiento II resulta en $\overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}$, tenemos que $W = 3$, $Z = 4$.

    a) Obtener una expresión para la distribución de probabiliadad de W. Exprese el suceso $W = k$ en función de X_1 y X_2.

    b) Obtener una expresión para la didtribución de probabiliadad de Z.

    c) Escribir nuevamente las expresiones anteriores si $p_1 = p_2$.

19. Si X y Y representan las duraciones en años, de dos componentes en un sistema electrónico. Si la función de densidad conjunta de estas variables es,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

    encuentre $P(0 < X < 1 \,|\, Y = 2)$.

20. Determine si las dos variables aleatorias del ejercicio 13 son independientes o dependientes.

21. Determine si las dos variables aleatorias del ejercicio 14 son independientes o dependientes.

22. La cantidad de queroseno, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una cantidad aleatoria Y, de la cual una cantidad aleatoria X se vende durante el día. Suponga que el tanque no se rellena durante

el día. De tal forma que $x \leq y$, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine si X y Y son independientes;

b) encuentre $P(1/4 < X < 1/2 \,|\, Y = 3/4)$.

23. La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y es,

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Demuestre que X y Y no son independientes;

b) encuentre $P(X > 0.3 \,|\, Y = 0.5)$.

24. Si X, Y y Z tienen la función de densidad de probabilidad conjunta,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} kxy^2z, & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Encuentre k;

b) encuentre $P(X < 1/4, Y > 1/2, 1 < Z < 2)$.

Esperanza matemática

25. Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes que tienen la distribución de probabilidad conjunta,

		x	
	$f(x,y)$	2	4
	1	0.10	0.15
y	3	0.20	0.30
	5	0.10	0.15

encuentre,

a) $E(2X - 3Y)$,

b) encuentre $E(XY)$.

26. Si X representa el número que resulta cuando se lanza un dado rojo y Y el número que ocurre cuando se lanza un dado verde. Encuentre,

a) $E(X+Y)$,

b) $E(X-Y)$,

c) $E(XY)$.

27. Suponga que Xy Y son variables aleatorias independientes con densidades de probabilidad,

$$g(x) = \begin{cases} 8/x^3, & x > 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

y

$$h(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

encuentre el valor esperado de $Z = XY$.

28. La función de densidad conjunta de X y Y es,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+2y), & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de $g(X,Y) = X/Y^3 + X^2Y$.

29. Si Y representa el número que resulta cuando se lanza un dado rojo y X el número que ocurre cuando se lanza un dado verde. Encuentre la varianza de,

a) $2X - Y$,

b) $X + 3Y - 5$.

30. Si X y Y son variables aleatorias independientes con varianzas $\sigma_X^2 = 5$ y $\sigma_Y^2 = 3$, encuentre la varianza de la variable aleatoria $Z = -2X + 4Y - 3$.

31. Repita el ejercicio anterior si Si X y Y no son independientes y $\sigma_{XY} = 1$

32. Encuentre la covarianza de las variables X y Y cuya función de densidad de probabilidad conjunta es,

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

33. Suponiendo que los instrumentos D_1 y D_2 tienen distribuciones $N(40,36)$ y $N(45,9)$, respectivamente. ¿Cuál debe preferirse para usarlo en un período de 45 horas? ¿Cuál debe preferirse para usarlo en un período de 48 horas?

34. Podemos interesarnos solo en la magnitud X, digamos $Y = |X|$. Si X tiene una distribución $N(0, 1)$ determine la función de probabilidad de Y, y calcule $E(Y)$ y $Var(Y)$.

35. Supóngase que estamos determinando la posición de un objeto en el plano. Sean X y Y los errores en las medidas de las coordenadas x y y, respectivamente. Supóngase que X y Y son variables independientes, con distribuciones idénticas $N(0, \sigma^2)$. Encuentre la función de probabilidad de $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. La distribución de R se conoce como la distribución de Rayleigh.(Sugerencia: Considere $X = R\cos\psi$ y $X = R\operatorname{sen}\psi$. Encuentre la función de distribución conjunta de (R, ψ) y luego obtenga la densidad marginal de R

36. Encuentre la función de probabilidad de la variable aleatoria $Q = \dfrac{X}{Y}$, donde X y Y están distribuidas como en el problema 35. La distribución de Q se conoce como distribución de Cauchy. ¿Se puede calcular $E(Q)$?

37. Una distribución muy relacionada con la distribución normal es la distribución *lognormal.* Supóngase que X está distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2- Sea $Y = e^X$, entonces Y tiene la distribución *lognormal.* Es decir, Y es log normal si y solo si lnY es normal. Encuentre la función de probabilidad de Y.

38. Suponga que X tiene una distribución $N(\mu, \sigma)$. Determine c como una función de μ y $\sigma >$, donde $P(X \leq c) = 2P(x > c)$.

39. Supóngase que la temperatura, medida en grados centígrados, está distribuida normalmente con media 50° y varianza 4. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura T esté entre 48° y 53° centígrados?

40. Se especifica que el diámetro exterior de una flecha, llamémosle D, debe ser de 4in (4 pulgadas). Supóngase que D es una variable aleatoria distribuida normalmente con media 4 in y varianza .01 in^2. Si el diámetro real se diferencia del valor especificado por más de .05 in, pero en menos de .08 in, la pérdida del fabriante es de \$0.50. Si el diámetro real se diferencia del diámetro especificado en más de 0.08 in, la pérdida es de \$1.00. La pérdida L puede considerarse como una variable aleatoria. Encuentre la distribución de probabilidad de L y determine $E(L)$.

41. Compare la cota superior de la probabilidad $P[|X - E(X)| \geq 2\sqrt{var(X)}]$ obtenida con la desigualdad de Chebyshev con la probalidad exacta en cada uno de los casos siguientes:

a) X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$,

b) X tiene la distribución de Poisson con parámetro λ,

c) X tiene la distribución de exponencial con parámetro α.

42. Supóngase que X es una variable aleatoria para la cual $E(X) = \mu$ y $var(X) = \sigma^2$. Suponiendo que Y está distribuida uniformemente en el intervalo (a,b), determine a y b de manera que E(X)=E(Y) y var(X)=var(Y).

43. Supóngase que X, la resistencia a la ruptura de una cuerda (en libras), tiene distribución N(100,16). Cada 100ft (100 pies) de alambre para cuerda produce una utilidad de $25, si $X > 95$. Si $X \leq 95$, la cuerda puede utilizarse con un objetivo diferente y se obtiene una utilidad de $10 por alambre. Encuentre la utilidad esperada por alambre.

44. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes cada una con una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Sea $Z(t) = X_1 \cos \omega t + X_2 \operatorname{sen} \omega t$. Esta variable aleatoria es de interés en el estudio de señales aleatorias. Sea $V(t) = \dfrac{dZ(t)}{dt}$. Se supone que ω es constante.

    a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de Z(t) y V(t) para cualquier t fija?

    b) Demuestre que Z(t) y V(t) no están correlacionados. [Es posible demostrar que Z(t) y V(t) son independientes, pero esto es más complicado]