CD. de Mexico a 27 de Marzo del 2020

Tema: Situaciones especiales en el Tema de los Coeficientes indet.

Ejercicios: Resolver la sig. ecuacion dif.

$$y'' - 4y = 4e^{2x}$$

Sol. La ecuación homogenea $y'' - 4y = 0$

Sea $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$

$\therefore \quad m^2e^{mx} - 4e^{mx} = 0 \quad \therefore \quad e^{mx}[m^2-4] = 0$

y es claro que las sol. estarán dadas por $m_1 = 2, m_2 = -2$

$\Rightarrow \quad y_1(x) = e^{2x}, \; y_2(x) = e^{-2x}$

La solución a la ecuación homogenea : $\boxed{y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}}$

Ahora bien, para la sol. particular se hace la propuesta

$y_p(x) = Ae^{2x} \quad \therefore \quad y_p' = 2Ae^{2x}, \; y_p'' = 4Ae^{2x}$

con ello $\quad y_p'' - 4y_p = 4e^{2x}$

$\Rightarrow \quad 4Ae^{2x} - 4(Ae^{2x}) = 4e^{2x}$

$\therefore \quad 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 4e^{2x}$

$e^{2x}\underbrace{(4A-4A)}_{0} = \underbrace{0 = 4e^{2x}}_{\text{Inconsistencia}}$ ¿Qué paso? ¿Que hacer?

Lo que sucedio fue una de las soluciones a la ecuación homogenea aparecio o coincidio con la propuesta a la sol. particular, es decir

$y_1(x) = \underbrace{e^{2x}}$,

$y_p(x) = A\underbrace{e^{2x}}$ "La constante multiplicativa no importa"

¿Qué es lo que se debe de hacer? simplemente en la propuesta a la solución particular se debe de multiplicar por "x", es decir

$$y_p(x) = Ae^{2x} \longrightarrow \text{¡Ya no en este caso!}$$

Ahora lo correcto es: $\boxed{y_p(x) = Axe^{2x}}$

$$\therefore \; y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y_p''(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

Por lo tanto a partir de

$$y_p'' - 4y_p = 4e^{2x}$$

$$\Rightarrow \; 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 4(Axe^{2x}) = 4e^{2x}$$

$$4Ae^{2x} + \underbrace{\cancel{4Axe^{2x}} - \cancel{4Axe^{2x}}}_{0} = 4e^{2x}$$

$$\therefore \; \cancel{4}A\cancel{e^{2x}} = \cancel{4}\cancel{e^{2x}} \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

es decir $y_p(x) = (1)xe^{2x} = \underline{xe^{2x}}$

Luego entonces, la solución general a la ecuación Diferencial

$$y'' - 4y = 4e^{2x}$$

estará dada por

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + xe^{2x}}$$

Ejemplo 2.- Resolver la sig. ecuación diferencial

$$y'' + y = 3\operatorname{Sen} x - 4x\operatorname{Cos} x$$

Sol. Primero se resuelve la ecuación homogenea: $y'' + y = 0$

Sea $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$

$$\therefore \; m^2e^{mx} + e^{mx} = 0 \Rightarrow e^{mx}[m^2+1] = 0 \;\therefore\; m^2 + 1 = 0$$

y claramente tenemos las soluciones $m_1 = i$, $m_2 = -i$

bien, de acuerdo con la Teoría

$$\boxed{y_h(x) = c_1\operatorname{Sen}(x) + c_2\operatorname{Cos}(x)}$$

Por otro lado, la propuesta para hallar la sol. particular esta dada

$$y_p(x) = (Ax+B)\,\mathrm{Sen}\,x + (Cx+D)\cos x$$

$$y_p'(x) = A\,\mathrm{Sen}\,x + (Ax+B)\cos x + C\cos x + (Cx+D)(-\mathrm{Sen}\,x)$$

$$y_p''(x) = A\cos x + A\cos x - (Ax+B)\,\mathrm{Sen}\,x - C\,\mathrm{Sen}\,x$$
$$- C\,\mathrm{Sen}\,x - (Cx+D)\cos x$$

Entonces a partir de la expresión $y_p'' + y_p = 3\,\mathrm{Sen}\,x - 4x\cos x$

$$\Rightarrow \left[A\cos x + A\cos x - \cancel{Ax\,\mathrm{Sen}\,x} - \cancel{B\,\mathrm{Sen}\,x} - C\,\mathrm{Sen}\,x - C\,\mathrm{Sen}\,x - \cancel{Cx\cos x} - \cancel{D\cos x}\right]$$
$$+ \left(\cancel{Ax\,\mathrm{Sen}\,x} + \cancel{B\,\mathrm{Sen}\,x} + \cancel{Cx\cos x} + \cancel{D\cos x}\right) = 3\,\mathrm{Sen}\,x - 4x\cos x$$

Simplificando términos

$$2A\cos x - C\,\mathrm{Sen}\,x = 3\,\mathrm{Sen}\,x - 4x\cos x + 0\cos x$$

igualando términos $\begin{cases} 2A = 0 \\ C = 3 \end{cases}$, $A = 0$, $C = 3$ y ¿que paso con B y D?

Resulta que igual al problema anterior, en la propia propuesta de la solución particular y_p, estan involucradas las 2 soluciones de la ecuación homogenea, es decir

$$y_p(x) = (Ax+B)\,\mathrm{Sen}\,x + (Cx+D)\cos x$$
$$= Ax\,\mathrm{Sen}\,x + Cx\cos x + \underbrace{B\overset{y_1(x)}{\mathrm{Sen}\,x} + D\overset{y_2(x)}{\cos x}}_{y_h(x)}$$

la presencia de "x" hace que las sol. $y_1(x)$ e $y_2(x)$ no generen problemas

¿Qué es lo que se debe de hacer?

Nuevamente multiplicar por "x" en la propuesta original de sol. partícula, es decir

$y_p(x) = (Ax+B)\,\mathrm{Sen}\,x + (Cx+D)\cos x \rightarrow$ ¡Esta expresión ya No!

$$\boxed{y_p(x) = (Ax^2+Bx)\,\mathrm{Sen}\,x + (Cx^2+Dx)\cos x}$$ Propuesta correcta

luego entonces

$$y_p'(x) = (2Ax+B)\operatorname{Sen}x + (Ax^2+Bx)\operatorname{Cos}x + (2Cx+D)\operatorname{Cos}x - (Cx^2+Dx)\operatorname{Sen}x$$

$$y_p''(x) = 2A\operatorname{Sen}x + (2Ax+B)\operatorname{Cos}x + (2Ax+B)\operatorname{Cos}x - (Ax^2+Bx)\operatorname{Sen}x$$
$$+ 2C\operatorname{Cos}x + (2Cx+D)(-\operatorname{Sen}x) - (2Cx+D)\operatorname{Sen}x - (Cx^2+Dx)\operatorname{Cos}x$$

Entonces en la expresión $y_p''(x) + y_p(x) = 3\operatorname{Sen}x - 4x\operatorname{Cos}x$

$$\Rightarrow \big(2A\operatorname{Sen}x + 2Ax\operatorname{Cos}x + B\operatorname{Cos}x + 2Ax\operatorname{Cos}x + B\operatorname{Cos}x - \cancel{Ax^2\operatorname{Sen}x} - \cancel{Bx\operatorname{Sen}x} + 2C\operatorname{Cos}x$$
$$- 2Cx\operatorname{Sen}x - D\operatorname{Sen}x - 2Cx\operatorname{Sen}x - D\operatorname{Sen}x - \cancel{Cx^2\operatorname{Cos}x} - \cancel{Dx\operatorname{Cos}x}\big) +$$
$$\big(\cancel{Ax^2\operatorname{Sen}x} + \cancel{Bx\operatorname{Sen}x} + \cancel{Cx^2\operatorname{Cos}x} + \cancel{Dx\operatorname{Cos}x}\big) = 3\operatorname{Sen}x - 4x\operatorname{Cos}x$$

Simplificando términos

$$2A\operatorname{Sen}x - 2D\operatorname{Sen}x + 2B\operatorname{Cos}x + 2C\operatorname{Cos}x + 2Ax\operatorname{Cos}x + 2Ax\operatorname{Cos}x - 2Cx\operatorname{Sen}x - 2Cx\operatorname{Sen}x$$
$$= 3\operatorname{Sen}x - 4x\operatorname{Cos}x$$

$$\Rightarrow (2A-2D)\operatorname{Sen}x + (2B+2C)\operatorname{Cos}x + 4Ax\operatorname{Cos}x - 4Cx\operatorname{Sen}x = 3\operatorname{Sen}x - 4x\operatorname{Cos}x$$
$$+ 0\operatorname{Cos}x + 0x\operatorname{Sen}x$$

igualando coeficientes

$$\begin{cases} 2A - 2D = 3 \ \ldots\ (1) \\ 2B + 2C = 0 \ \ldots\ (2) \\ 4A = -4 \ \ldots\ (3) \\ 4C = 0 \ \ldots\ (4) \end{cases}$$

de (4) $\boxed{C=0}$, sust. en (2)

$2B + 2(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$

de (3) $\boxed{A=-1}$ sust. en (1) $2(-1) - 2D = 3$

$\therefore\ -2D = 3+2 = 5 \Rightarrow \boxed{D = -\frac{5}{2}}$

$$\boxed{y_p(x) = -x^2\operatorname{Sen}x - \frac{5}{2}x\operatorname{Cos}x}$$

finalmente la sol. general: $\boxed{y'' + y = 3\operatorname{Sen}x - 4x\operatorname{Cos}x}$

$$\boxed{y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\operatorname{Sen}x + C_2\operatorname{Cos}x - x^2\operatorname{Sen}x - \frac{5}{2}x\operatorname{Cos}x}$$