Apuntes del Programa de Probabilidad y Estadística

Ricardo Ceballos Sebastián

28 de septiembre de 2020

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la probabilidad

La probabilidad es una rama de las matemáticas cuya aplicación es de carácter tan general, que es tema de estudio tanto en las ciencias exactas como en las ciencias sociales. El concepto *probabilidad* surge de la necesidad de conocer la oportunidad de ganar en los juegos de azar. Su objeto de estudio son aquellos experimentos en los cuales está presente el azar como el elemento principal. El Diccionario Enciclopédico Espasa [5] define azar como casualidad y en el mismo sentido, la Real Academia de la Lengua Española[6] define el azar como casualidad o caso fortuito.

1.1. Generalidades

En esta sección se presentarán los conceptos fundamentales de la probabilidad: El objeto de estudio y sus características más importantes.

1.1.1. Modelos probabilísticos y determinísticos

Definición 1.1.1 (Experimento) *Se conoce como experimento a cualquier proceso que genere un conjunto de datos.*

Experimentos deterministas y modelos determinísticos Existen ciertos experimentos, que si se llevan a cabo bajo condiciones esencialmente idénticas, se llegarán a los mismos resultados. A este tipo de experimentos se les conoce como experimentos deterministas. Por ejemplo, si se deja caer un balín de 1cm de diámetro desde una altura determinada h, es posible medir el tiempo de caída t (con el equipo adecuado) y éste será prácticamente el mismo, siempre que el experimento se repita bajo las mismas condiciones. Para el ejemplo que se ha citado, existe una ley que determina el tiempo de caída en función de la altura ($t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$). El modelo que llevó a establecer la ley anterior es un ejemplo de modelo determinista. El éxito del modelo solo puede concretarse una vez que se confirman las consecuencias del modelo mediante la observación o experimentación. En general, los modelos determinísticos son aquellos en los cuales se acepta que las condiciones iniciales en las que se realiza el experimento definen el resultado del mismo.

Experimentos aleatorios y modelos probabilísticos Existen experimentos en los cuales no es posible controlar el valor de determinadas variables, en otros las variables son desconocidas totalmente, de manera que el resultado cambiará de un experimento a otro, a pesar de que la mayoría de las condiciones sean las mismas. A este tipo de experimentos se les conoce como aleatorios. Por ejemplo, al lanzar una moneda al aire el resultado del experimento será cara (C) o cruz (X). Aquí interesan particularmente las observaciones que se obtegan en la repetición del experimento que, como puede verse, dependerán del azar y no podrá predecirse un resultado con precisión. En este caso, aplicar un modelo determinista es imposible; sin embargo, los modelos probabilísticos han probado su potencial con este tipo de experimentos. En general, a diferencia de los modelos determinísticos, en un modelo probabilístico las condiciones iniciales bajo las cuales se realiza el experimento no definen el resultado, sino lo que posteriormente se conocerá como la distribución de probabilidades.

1.1.2. Espacio de muestras y eventos

Definición 1.1.2 (Espacio de muestras o espacio muestral) *Se conoce como espacio muestral al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. El espacio muestral se representa generalmente mediante la letra S.*

Ejemplo 1.1.1 *Considérese el experimento que consiste en examinar dos artículos de una línea de producción. Los artículos pueden clasificarse como defectuosos (D) o no defectuoso (N). En este caso, el espacio muestral S es el conjunto*

$$S = \{DD, DN, ND, NN\}.$$

Ejemplo 1.1.2 *Si se lanza un dado y se observa el número en la cara que cae hacia arriba, entonces el espacio muestral es*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ejemplo 1.1.3 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado hasta que aparezca el primer* 3*. En este caso, en cada lanzamiento se puede obtener éxito*(3) *o fracaso*(3′)*. El espacio muestral puede representarse como,*

$$S = \{3, 3'3, 3'3'3, 3'3'3'3, \ldots\}$$

.

Ejemplo 1.1.4 *Considérese el experimento que consiste en determinar la altura de los estudiantes de una clase de matemáticas. En este caso, el espacio muestral consiste en un intervalo y cualquier valor entre dicho intervalo está permitido; por lo tanto,* $S = \{x|a < x < b\}$.

Espacios muestrales discretos y no discretos
Los espacios muestrales se clasifican en discretos y no discretos. Los espacios muestrales discretos son aquellos que poseen un número finito o infinito numerable de elementos. Los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2 son ejemplos de espacios muestrales discretos con un número finito de elementos; mientras que el ejemplo 1.1.3 representa un espacio muestral discreto con un número infinito numerable de elementos. Por otro lado, se conoce como espacio muestral no discreto a los espacios que contienen tantos elementos como el intervalo $(0, 1)$ en los números reales. Un ejemplo de espacio muestral no discreto lo constituye el ejemplo 1.1.4.

Definición 1.1.3 (Eventos) *Un evento es cualquier subconjunto del espacio muestral. Dos eventos de particular interés lo constituyen el evento seguro,* S *y el evento imposible, denotado por* ϕ*.*

Definición 1.1.4 (Eventos excluyentes o disjuntos) *Dos eventos* A *y* B *son mutuamente excluyentes o disjuntos si* $A \cap B = \phi$*; es decir, no tienen elementos en común.*

Dado que los eventos son conjuntos, es posible definir sobre ellos las operaciones usuales sobre conjuntos; es decir: la unión, la intersección, el complemento y la diferencia. A continuación se definen lo eventos citados y se representan gráficamente mediante los diagramas de Venn.

Definición 1.1.5 (Unión) *Si* A *y* B *son dos eventos, entonces la unión de estos eventos, denotado por* $A \cup B$*, es el evento que contiene a todos los elementos que pertenecen a* A *o a* B*.*

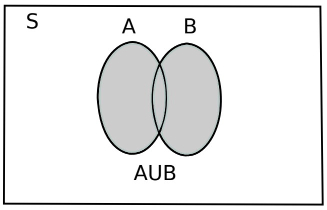


Figura 1.1: Unión

Definición 1.1.6 (Intersección) *Si A y B son dos eventos, entonces la intersección de estos eventos, denotado por $A \cap B$, es el evento que contiene a todos los elementos comunes a A y a B.*
Algunas veces se omite el signo $\cap$, de manera que el evento $A \cap B$ se denota como AB. Esta notación se utilizará algunas veces en este trabajo; sin embargo, se advertirá que se trata de la notación económica.

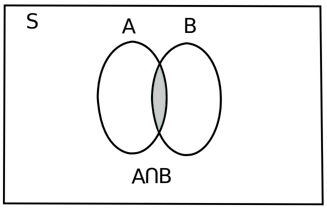


Figura 1.2: Intersección

Definición 1.1.7 (Diferencia) *Si A y B son dos eventos, el evento diferencia de A y B, denotado por $A - B$, es el conjunto que contiene a los elementos que se encuentran en A, pero que no se encuentran en B.*

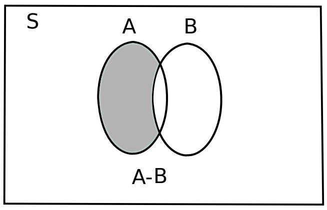


Figura 1.3: Diferencia

Definición 1.1.8 (Complemento) *Si A es un evento, el complemento de A, denotado por $A', A^c, \mathcal{C}A$ o $\overline{A}$, es el evento que contiene a los elementos de S que no están en A; es decir, $\overline{A} = S - A$.*

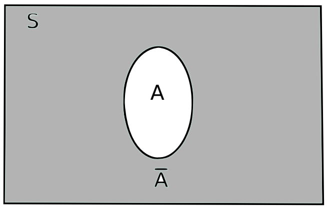


Figura 1.4: Complemento

Definición 1.1.9 (Producto cartesiano) *Si A y B son dos eventos diferentes del vacío, el producto cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$ es*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

1.1.3. Interpretación de la probabilidad

La probabilidad de un evento es una medida de la oportunidad de ocurrencia que tiene dicho evento. Para cuantificar la probabilidad del evento se le asigna un número entre 0 y 1. Se asigna una probabilidad de ocurrencia igual a 1, al evento seguro; es decir, al espacio muestral S; mientras que al evento imposible ϕ, se le asigna una probabilidad de ocurrencia 0. Para asignarle una probabilidad a cualquier evento A contenido en S se tienen dos enfoques diferentes conocidos como: enfoque clásico y enfoque frecuentista.

Definición 1.1.10 (Enfoque clásico) *Si un experimento aleatorio puede resultar de n maneras diferentes, todas igualmente probables, y un evento A contenido en S contiene h de los posibles resultados, entonces la probabilidad del evento A, denotado por $P(A)$ es,*

$$P(A) = \frac{h}{n}. \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.1.5 *Supóngase que se lanza un dado y que las seis caras tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Si se define el evento A como: obtener un número par, entonces para este caso $n = 6$ y $h = 3$ y de acuerdo con el enfoque clásico,*

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.50.$$

Definición 1.1.11 (Enfoque frecuentista) *Si un experimento aleatorio con espacio muestral S se repite un número n de veces, donde n es muy grande, y el evento A contenido en S ocurre h veces, entonces la probabilidad del evento A, denotado por P(A) es,*

$$P(A) = \frac{h}{n}. \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.1.6 *Supóngase que se lanza un dado 100 veces y que se obtienen 55 números pares, en este caso, si A es el evento: obtener número par; de acuerdo con el enfoque frecuentista,*

$$P(A) = \frac{55}{100} = 0.55.$$

El enfoque clásico requiere para su validez, que los eventos simples sean *igualmente probables*, mientras que el enfoque frecuentista requiere que n sea muy grande. Se evitarán la ambigüedades de las expresiones "igualmente probables" y "n muy grande" mediante un tercer enfoque, conocido como el enfoque axiomático de la probabilidad y que se tratará más adelante.

1.2. Elementos del análisis combinatorio

En muchos casos el número de puntos en un espacio muestral no es muy grande, de manera que resulta fácil la enumeración directa o el conteo directo. Sin embargo, con frecuencia se presentan experimentos cuyos espacios muestrales contienen tantos elementos que enlistarlos ya no constituye una posibilidad práctica. En tales casos se hace uso del análisis combinatorio, que como se verá a continuación, se basa en el principio fundamental de conteo.

Principio fundamental de conteo

Si una operación puede realizarse de n_1 maneras diferentes, y si para cada una de éstas una segunda operación puede efectuarse de n_2 maneras diferentes, y así sucesivamente hasta una k-ésima operación que puede realizarse de n_k maneras diferentes, entonces se tienen $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ maneras diferentes de realizar la secuencia de las k operaciones en el orden establecido.

El principio fundamental de conteo tiene su origen en el diagrama de árbol. A continuación se ilustra este hecho para tres procesos con $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 4$. Véase la figura 1.5.

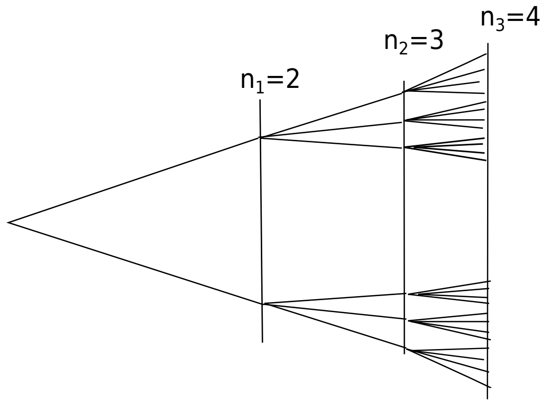


Figura 1.5: Principio fundamental de conteo y diagrama de árbol

El número total de manera en que el proceso puede realizarse en el orden 1, 2 y 3, corresponde al número total de las ramas finales del árbol: esto es $n_1 n_2 n_3 = 2(3)(4) = 24$.
Siempre resulta ventajoso tener una imagen del proceso. Se recomienda por simplicidad construir una línea de cuadros, como se muestra a continuación, y colocar en el cuadro correspondiente los número $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de acuerdo con el orden del proceso.

1	2	...	k
n_1	n_2	...	n_k

Ejemplo 1.2.1 *¿Cuántos números telefónicos pueden formarse con diez números, de los cuáles los dos primeros sólo pueden ser 5?*

Solución: Los dos primeros números solo tienen una manera de ser escogidos, ya que todos los números comenzarán con 55. Para cada uno de los siguientes números se tienen 10 posibilidades, ya que en cada uno de los espacios se usará un dígito.

1	1	10	10	10	10	10	10	10	10

Finalmente, por el principio fundamental de conteo se tienen 10^8 números telefónicos diferentes.

Ejemplo 1.2.2 *¿De cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar parejas de distinto sexo de un grupo de 4 hombres y 7 mujeres?*

Solución: Hay 4 maneras de escoger un hombre y 7 maneras de seleccionar una mujer.

H	M
4	7

Por el principio fundamental de conteo se pueden formar $4(7) = 28$ parejas diferentes.

Ejemplo 1.2.3 *a) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con el conjunto* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *si no se permite repetición? b) ¿Cuántos de estos números son pares? c) ¿Cuántos son impares?*

Solución:

a) Para explicar la solución de este tipo de problemas se recurrirá al arreglo de cuadros que se recomendó anteriormente. Considérese que los cuadros representan las tres cifras de los números que se requiere formar.

1	2	3

El primer cuadro se rellenará con el número 5, ya que del conjunto se pueden escoger solo 5 dígitos para formar el número de 3 cifras. El cero se descarta porque no se formarían con él números de tres cifras en dicha posición.

1	2	3
5		

El segundo cuadro se rellenará con el número 5, ya que existen 5 opciones del conjunto dado para formar un número de 3 cifras. Aunque el dígito que se usó en la casilla anterior no puede usarse nuevamente, en esta posición el cero si es una opción válida.

1	2	3
5	5	

Por último, los dos dígitos del conjunto dado que se hayan usado en la primera y segunda posición, ya no podrán usarse en la tercera posición del número a formar, de manera que el tercer cuadro se rellenará con el número 4.

1	2	3
5	5	4

Por el principio fundamental de conteo se tienen, $T = 5 \times 5 \times 4 = 100$ números diferentes de tres cifras.

b) Para determinar los números pares se comenzará por calcular aquellos que terminan en 2 y 4, ya que el cero sigue una regla diferente en la formación de los números y por esa razón se calcularán por separado los números pares de 3 cifras que terminan en cero.

Números pares que terminan en 2 y 4.
Considérese nuevamente la línea de cuadros,

1	2	3

El tercer cuadro se rellenará con el número 2, ya que hay dos opciones para que el número termine en 2 y 4.

1	2	3
		2

La primera casilla se rellenará con el número 4, debido a que el número que se usó en la tercera casilla y el cero no son opciones para el primer dígito del número que se formará. Éstos dos números se excluyen de las opciones válidas, de manera que, se tienen solamente 4 opciones diferentes para el primer dígito del número que se desea formar.

1	2	3
4	4	2

Excluyendo los dos númeron usados, quedan 4 opciones para escoger el segundo dígito, por esta razón la segunda casilla se rellanará con el número 4. Por el principio fundamental de conteo se tienen, $4 \times 4 \times 2 = 32$ números diferentes de tres cifras que terminan en 2 y 4.

Números pares que terminan en 0.
Considérese la línea de cuadros

1	2	3
5	4	1

Solo hay una opción para llenar la tercera casilla (el 0). Para la primera casilla hay 5 opciones descartando el cero. Para la segunda casilla hay 4 opciones, descartando el cero que se usó en la primer casilla y el número que se haya escogido para el primer cuadro. Por el principio fundametal de conteo se tienen, $4 \times 5 = 20$ números diferentes de tres cifras que terminan en 0.
Finalmente, sumando todos los números pares se obtienen $P = 32 + 20 = 52$ números pares diferentes de tres cifras.

c) Para hallar los números impares se cuenta con dos opciones:
Primera opción: Nuevamente la línea de cuadros

1	2	3
4	4	3

A continuación se explica el llenado de las casillas. Tercera casilla: Hay tres maneras en que un número impar puede finalizar, con el conjunto dado.
Primera casilla: Descartando el cero y el número usado en la primera casilla se tienen 4 opciones para la primer casilla.
Segunda casilla: Descartado los 2 dígitos usados en las casillas 3 y 1, quedan 4 opciones para la segunda casilla.
Por el principio fundamental de conteo se tienen $I = 4 \times 4 \times 3 = 48$ números impares de tres cifras.

Segunda opción:
El total T (hallado en el inciso a se compone de la cuenta de los números pares e impares. Si a T se le resta el número total de los pares, el resto debe corresponder a los impares; es decir,

$$I = T - P = 100 - 52 = 48.$$

1.2.1. Permutaciones

Supóngase que se tienen n objetos diferentes y que se desea ordenar r de ellos en línea. Cada una de estas posibles ordenaciones se conoce como permutación de n objetos tomados r a la vez. Para determinar el número total de tales ordenaciones se procede de la siguiente manera: Debido a que existen n maneras diferentes para escoger el primer objeto, y luego $n - 1$ maneras diferentes de escoger el segundo, y así sucesivamente, al final se tendrán $n - r + 1$ maneras de escoger el *r-ésimo* objeto. La siguiente tabla muestra el proceso.

1	2	...	r
n	$n-1$	...	$n-(r-1)$

A partir del principio fundamental de conteo se deduce que el número de arreglos diferentes está determinado por

$$_nP_r = n(n-1)\dots(n–r+1), \tag{1.3}$$

donde nP_r es el número total de permutaciones de n objetos tomados r a la vez.
Es posible expresar $_nP_r$ de una forma más conveniente, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} _nP_r &= n(n-1)\dots(n–r+1), \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n–r+1)((n-r)!)}{(n-r)!}, \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dado que $0! = 1$, entonces para el caso particular en que $r = n$ se obtiene,

$$_nP_n = n! \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.2.4 *Determine el número de arreglos diferentes o permutaciones que consten de 3 letras cada una y que pueden formarse a partir de 7 letras:* $\{A, B, C, D, E, F, G\}$

Solución: Se requiere determinar las permutaciones de 7 objetos tomados 3 a la vez; es decir,

$$_7P_3 = \frac{7!}{4!} = 210.$$

Ejemplo 1.2.5 *En una sección de un teatro, la fila A tiene asientos numerados del 1 al 10. Si 5 niños y 5 niñas deben sentarse en la fila A. Determine el número de maneras en que esto es posible si,*

a) no existen restricciones,

b) deben sentarse en dos grupos: uno de niños y otro de niñas,

c) deben sentarse de manera alternada.

Solución:

a) Si no existen restriciones, entonces se trata de hallar las permutaciones de 10 elementos diferentes tomados todos a la vez; es decir,

$$_{10}P_{10} = 10! = 3,628,800.$$

b) Se tienen 2 maneras de colocar a los grupos. Los elementos de cada grupo pueden colocarse de 5!. Por el principio fundamental de conteo se tienen

$$2(5!)(5!) = 28,800,$$

maneras diferentes de sentarlos en dos grupos.

c) Considésere en primer lugar que se acomodan a las niñas en los asientos impares. Esto puede hacerse de 5! maneras diferentes. Para cada una de las ordenaciones anteriores, los niños pueden colocarse en los asientos pares de 5! maneras diferentes. Por el principio fundamental de conteo se tienen $5! \times 5!$ maneras diferentes de colocarlos en sus asientos. Bajo el mismo argumento los niños pueden colocarse en los asientos impares y las niñas en los asientos pares de $5! \times 5!$ maneras diferentes. En total se tienen,

$$2 \times 5! \times 5! = 28800,$$

maneras diferentes de colocarlos en sus asientos de forma alternada.

Permutaciones de n elementos no todos diferentes entre sí

Supóngase que un conjunto consta de n objetos de los cuales n_1 son de una primera especie (es decir, que no pueden distinguirse entre sí), n_2 son de una segunda especie, y así sucesivamente; n_k son de una *k-ésima* especie, donde por supuesto, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Si todos los objetos fueran diferentes, entonces el número de permutaciones diferentes sería, $nP_n = n!$ Considerando que no todos los objetos son distinguibles y sea Q el número de arreglos diferentes, entonces $Qn_1!n_2! \ldots n_k!$ es el número de maneras de arreglar los n objetos como si fueran distinguibles, esto es $n!$, por lo tanto,

$$Qn_1!n_2! \ldots n_k! = n!$$

luego,

$$Q = \frac{n!}{n_1!n_2! \ldots n_k!}$$

El número total de permutaciones donde no todos los elementos son diferentes se representa comunmente como, $nP_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, de manera que

$$_nP_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2! \ldots n_k!} \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.2.6 *Determine el número de permutaciones diferentes de 9 letras que pueden formarse con las letras de la palabra CARRETERA.*

Solución: Se tiene un conjunto que consta de 1C, 2A, 3R, 2E y 1T, es decir, se tienen elementos de diferentes especies, por lo tanto, el número de permutaciones diferentes de 9 letras está dada por

$$ {}_9P_{1,2,3,2,1} = \frac{9!}{2!3!2!} = 15,120. $$

Ejemplo 1.2.7 *¿Cuántos códigos diferentes pueden formarse con 6 unos y 4 ceros, es decir, con 1111110000?*

a) Sin restricciones

b) Si siempre se comienza y finaliza con un 1.

Solución:

a) Se tiene un conjunto de 10 elementos, de los cuales 6 son de una especie y 4 de otra; el número de permutaciones diferentes está determinado por,

$$ {}_{10}P_{6,4} = \frac{10!}{6!4!} = 210. $$

b) Si se fijan los extremos de la permutación con unos en cada extremo, entonces se necesitan colocar 2 unos en dichas posiciones, los cuales pueden escogerse de una sola manera, ya que éstos 6 elementos son indistinguibles. De manera que los 4 unos restantes se permutarán con los 4 ceros generando un total de

$$ {}_8P_{4,4} = \frac{10!}{4!4!} = 70 \text{ permutaciones diferentes.} $$

Un arreglo posible del problema corresponde a 1111100001. Este problema está íntimamente relacionado con el problema de las casillas, que consiste en repartir n objetos idénticos en r casillas separadas. Es decir, el inciso b) puede interpretarse como el número de maneras de repartir 4 canicas idénticas en 5 compartimentos separados.

Permutaciones circulares o permutaciones cíclicas

Considérese que se tienen n objetos diferentes que deben ser colocados alrededor de un círculo, en una secuencia cíclica o cerrada. Cada uno de los posibles arreglos se conoce como permutación cíclica. Considérese el caso en que tres personas, por decir, A, B y C deben sentarse en una mesa redonda. Los lugares a ocupar pueden numerarase como 1, 2 y 3. En la figura 1.6 se muestran dos arreglos, los cuales son esencialmente equivalentes.

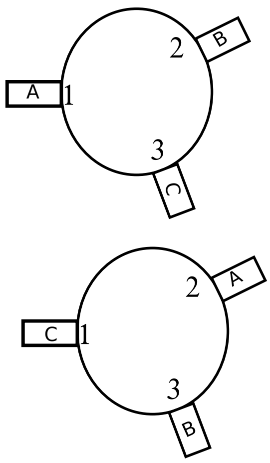


Figura 1.6: Arreglos equivalentes

Para no contar las permutaciones equivalentes más de una vez, se procederá de la siguiente manera. Se fijará un objeto en una de las posiciones y enseguida se permutarán los n–1 objetos restantes. Por lo anterior se tienen (n–1)! maneras diferentes de colocar los $n-1$ objetos, una vez que se fija el primero. Lo anterior se expresa mediante,

$$_nP_c = (n-1)! \tag{1.7}$$

donde $_nP_c$ representa el número de permutaciones cíclicas de n elementos.

Ejemplo 1.2.8 *¿De cuántas maneras pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa redonda?*

Solución: Se trata de determinar las permutaciones cíclicas de 6 objetos. De acuerdo con la ecuación 1.7 se tienen,

$$_6P_c = 5! = 120,$$

maneras diferentes de sentar a 6 personas alrededor de una mesa redonda.

Ejemplo 1.2.9 *Tres mujeres y tres hombres deben sentarse de modo que sus lugares queden alternados. Calcule de cuántas formas es posible hacerlo si se sientan alrededor de una mesa circular.*

Solución: Se tienen 6 espacios, los cuales pueden numerarse como 1,2,3,4,5,6. Si los espacios impares son ocupados por las mujeres, entonces se tienen 2! formas de acomodar a las mujeres. Los lugares pares serán ocupados por los hombres y esto puede hacerse de 3! maneras diferentes. Por el principio fundamental de conteo se tienen $2!3! = 12$ maneras diferentes.

Ejemplo 1.2.10 *Determine de cuántas formas pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa redonda si,*

a) pueden sentarse en cualquier forma,

b) dos personas no pueden estar una al lado de la otra.

Solución:

a) Se requiere determinar la permutación cíclica de 8 objetos.

$$_8P_c = 7! = 5040.$$

b) Primero se calculará el número de formas en que estas personas pueden sentarse juntas, así que para los fines del conteo serán considerandos como un solo ente. Entonces se tienen 7 objetos diferentes que deben permutarse cíclicamente; por lo tanto,

$$_7P_c = 6!$$

Para cada una de las ordenaciones anteriores, las dos personas que deben permanecer juntas, pueden intercambiar sus lugares, entonces por el principio fundamental de conteo se tienen, $2(6!) = 1440$ formas diferentes en que dos personas pueden sentarse juntas. El complemento de esta afirmación es justamente el número de formas en que dos personas no pueden sentarse juntas, así que este número será el que se obtenga de la diferencia con el total. Entonces se tienen, $5040 - 1440 = 3600$ formas en que dos personas no se sienten juntas.

1.2.2. Combinaciones

En muchos problemas el interés se centra en el número de formas diferentes de seleccionar r objetos de un total de n posibles, sin importar el orden. Estas selecciones se llaman combinaciones de n objetos tomados r a la vez. Por ejemplo, considérese el conjunto $\{A, B, C, D, E\}$, si se desea obtener las combinaciones de tres letras se debe considerar que ABC y todas sus posibles permutaciones (3!= 6) forman una sola combinación ; es decir, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA son una misma combinación. Si C es el número total de combinaciones y por cada una de ellas hay (3!) permutaciones, entonces el número total de permutaciones de 5 letras tomados 3 a la vez es

$$_5P_3 = C(3!),$$

de manera que,

$$C = \frac{_5P_3}{3!}$$

Lo anterior se generaliza de manera inmediata. El número de combinaciones de n objetos distintos tomados r a la vez se denota por ${}_nC_r$ o $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$, de manera que,

$$ {}_nC_r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.8} $$

El número ${}_nC_r$ se como conoce como coeficiente binomial, ya que aparece en el desarrollo del binomio de Newton, como se mostrará en el ejemplo 1.2.11.

Teorema 1.2.1 *Si n y r son números enteros tales que $r \leq n$, entonces*

$$ a) \quad \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}, \tag{1.9} $$

$$ b) \quad \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}. \tag{1.10} $$

Demostración: a) Desarrollando el lado derecho de la ecuación 1.9 se obtiene,

$$ \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}. $$

b)

$$ \begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}, \\ &= \frac{(r+n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}, \\ &= \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}, \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}, \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!}, \\ &= \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

La propiedad contenida en inciso b) implica que: seleccionar r objetos de n posibles es equivalente a seleccionar $n-r$ objetos de los n posibles. La propiedad contenida en el inciso b) es la base para la construcción del arreglo de números conocido como triángulo de Pascal y que es muy útil en el desarrollo de la potencia de un binomio.

Ejemplo 1.2.11 *Considérese que un conjunto A contiene n elementos, donde n es un entero positivo. Demuéstrese que A posee exactamete 2^n subconjuntos.*

Solución: A contiene $nC_0 = 1$ subconjunto con cero elementos (el conjunto vacío), ${}_nC_1 = n$ subconjuntos con 1 elemento , ${}_nC_2$ subconjuntos con 2 elementos, $\ldots$, ${}_nC_n = 1$ subconjunto con n elemento (el propio conjunto A). De manera que el número total de subconjuntos puede expresarse como,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{1.11}$$

Por otra parte, el desarrollo del binomio de Newton se expresa como,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1.12}$$

Si se evalúa la ecuación 1.12 para $x = y = 1$ se obtiene,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{1.13}$$

y esto es justo lo que se quería demostrar.

Ejemplo 1.2.12 *Una clase de probabilidad consta de 20 hombre y 15 mujeres. ¿Cuántos equipos de 5 estudiantes, cada uno constituido por 3 hombres y 2 mujeres pueden formarse?*

Solución: Se tienen ${}_{20}C_3$ maneras de escoger tres hombres; para cada una de estas combinaciones se tienen $15C_2$ maneras de escoger 2 mujeres. Por el principio fundamental de conteo se tienen

$$({}_{20}C_3)({}_{15}C_2) = 119700$$

equipos de 5 estudiantes y que estén constituidos por 3 hombres y 2 mujeres.

Ejemplo 1.2.13 *Considérese la palabra clave AAABBCCD,*

a) ¿Cuántas combinaciones diferentes de 3 letra pueden formarse con ella?

b) ¿Cuántas permutaciones de tres letras son posibles?

Solución:

a) Las combinaciones son de tres tipos: aquellas en las cuales todas las letras son diferentes, las que tienen 2 letras iguales y una diferente, y finalmente, aquella que tiene todas las letras iguales.
Se tienen ${}_4C_3 = 4$ combinaciones con las tres letras diferentes.
Se tienen ${}_3C_1 \times_3 C_1 = 9$ combinaciones con un par de letras iguales y una diferente.
Finalmente, se tiene solo una combinación con todas las letras iguales.
Sumando todas las combinaciones se obtiene un total 14 combinaciones diferentes.

b) Una vez que se tienen clasificadas las combinaciones, se usarán los resultados de la sección anterior, ya que cada combinación genera un número de permutaciones que contribuyen al total de las permutaciones.
El primer tipo de combinaciones aporta $3! = 6$ permutaciones diferentes cada una.
El segundo tipo de combinaciones aporta $\frac{3!}{2!} = 3$ permutaciones diferentess cada una.
El tercer tipo de combinaciones solo aporta 1 permutación.
Al multiplicar por las combinaciones correspondientes y sumar esos productos se obtiene el total de 4(6)+9(3)+1(1)=52 permutaciones diferentes.

Para los ejercicios siguientes se recomienda revisar el apéndice A

Ejemplo 1.2.14 *¿De cuántas maneras puede extraerse un conjunto de 5 cartas de una baraja inglesa?*

Solución: La baraja inglesa consta de 52 cartas, dado que se extraen 5 de ellas, entonces se tienen

$${}_{52}C_5 = 2,598,960$$

maneras diferentes de obtener las 5 cartas. En estos casos el orden en que se obtienen las cartas no es importante. Solo interesa el conjunto de las 5 cartas.

Ejemplo 1.2.15 *De cuántas maneras puede extraerse una mano de poker que conste de 2 cartas rojas y 3 cartas negras?*

Solución: Se tienen ${}_{26}C_2$ maneras de obtener 2 cartas rojas y para cada una de éstas se tienen ${}_{26}C_3$ maneras de obtener una carta negra. Por el principio fundamental de conteo se tienen,

$$({}_{26}C_2)({}_{26}C_3) = 845,000$$

manos diferentes de *poker* que consten de 2 cartas rojas y 3 cartas negras.

Particiones de un conjunto

Considérese que se tiene un conjunto A y que éste consta de n elementos. Supóngase que se desea distribuir los elementos del conjunto A en k subconjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$ del conjunto A, donde $A_i \cap A_j = \phi$ para todo $i \neq j$, y $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$. Se dice que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$ forman una partición de A. El problema que se plantea ahora es determinar de cuántas maneras es posible particionar el conjunto A en k subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y que contienen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elementos, respectivamente, donde $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. En primer lugar se tienen

$$\binom{n}{n_1}$$

maneras diferentes de elegir los n_1 elementos del conjunto A_1. Para cada una de las elecciones anteriores de los elementos de A_1, se tienen

$$\binom{n-n_1}{n_2}$$

maneras diferentes de elegir los n_2 elementos del conjunto A_2. Continuando con este proceso, al final se tendrá

$$\binom{n-(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})}{n_k} = \binom{n_k}{n_k} = 1,$$

manera de escoger los n_k elementos de A_k. Si se denota por R al número total de maneras en que la partición puede llevarse a cabo, entonces por el principio fundamental de conteo se tiene,

$$R = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})}{n_k}. \tag{1.14}$$

Considérese el caso particular en que $k = 2$, de acuerdo con la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} R &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}, \\ &= \binom{n}{n_1}\binom{n_2}{n_2}, \\ &= \binom{n}{n_1}, \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1!)}, \\ &= \frac{n}{n_1!n_2!}. \end{aligned}$$

Puede demostrarse, por el método de inducción matemática, que en general

$$R = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \tag{1.15}$$

Ejemplo 1.2.16 *En un programa de concursos se tienen tres urnas diferentes, en las cuales se colocarán tres premios diferentes. ¿De cuántas maneras pueden colocarse los 3 premios en las 2 urnas si,*

a) no deben quedar urnas vacías?

b) si no hay restricciones?

Solución:
a) Se tiene un conjunto de 3 objetos el cual se desea particionar en 2 conjuntos. Las particiones permitidas son:

$$\{(n_1, n_2)|1 \leq n_1 \leq 3, 1 \leq n_2 \leq 3, n_1 + n_2 = 3\} = \{(12), (21)\}.$$

A continuación se procede a determinar el número de maneras posibles en que cada partición puede llevarse a cabo.

$$R_1 = \frac{3!}{2!} = 3, \tag{1.16}$$

$$R_2 = \frac{3!}{2!} = 3. \tag{1.17}$$

Sumando los números anteriores se obtienen en total 6 maneras diferentes de repartir 3 premios diferentes en dos urnas diferentes, sin que queden urnas vacías.
b) Si se quita la rectricción, entonces se agregan dos formas más, y éstas corresponden a poner todos los premios en una sola urna. Al final se tienen 8 maneras diferentes de colocar 3 premios diferentes en 2 urnas diferentes sin restricciones.

Ejemplo 1.2.17 *Con un grupo de 9 personas deben formarse 3 equipos de trabajo, con 4, 3 y 2 elementos. ¿De cuántas maneras pueden formarse los equipos?*

Solución: Se requiere particionar un conjunto de $n = 9$ elementos en tres conjuntos con $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 2$. De acuerdo con la ecuación 1.15 se tienen,

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260,$$

maneras diferentes de formar los equipos.

Ejemplo 1.2.18 *Después de un sismo la cruz roja debe transladar a un equipo de rescate a la zona de desastre. Dispone de tres vehículos con capacidades máximas para 4, 3 y 2 pasajeros. Si debe movilizar a 7 brigadistas, ¿de cuántas maneras puede hacerse el translado de los brigadistas sin que queden vehículos sin usar?*

Solución: Sea B el conjunto de todas las particiones permitidas; es decir,

$$\begin{aligned} B &= \{(n_1, n_2, n_3) | 1 \leq n_1 \leq 2,\ \ 1 \leq n_2 \leq 3,\ \ 1 \leq n_3 \leq 4,\ \ n_1 + n_2 + n_3 = 7\} \\ &= \{(133), (124), (214), (223), (232)\}. \end{aligned}$$

A continuación se determinan el número de maneras posibles en que puede efectuarse cada partición.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{8!}{3!3!} = 1120, \\ R_2 &= \frac{8!}{2!4!} = 840, \\ R_3 &= \frac{8!}{2!4!} = 840, \\ R_4 &= \frac{8!}{2!2!3!} = 1640, \\ R_5 &= \frac{8!}{2!3!2!} = 1640. \end{aligned}$$

Sumando los números anteriores se obtiene el resultado final, 6160.

1.3. Axiomas de probabilidad

Definición 1.3.1 (Probabilidad) *Sea S un espacio muestral y A cualquier evento de éste, se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(A)$, si satisface los siguientes axiomas:*

1. $P(A) \geq 0$,
2. $P(S) = 1$,
3. *Si para los eventos* $A_1, A_2, A_3, \ldots,$
   $A_i \cap A_j = \phi$ *para toda* $i \neq j$, *entonces*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

.

Teorema 1.3.1 *Para el evento imposible,* $P(\phi = 0)$.

Demostración: Como $\phi \cup S = S$, y $\phi \cap S = \phi$ entonces por el axioma 3,

$$\begin{aligned} P(\phi) + P(S) &= P(S), \\ P(\phi) &= P(S) - P(S), \\ P(\phi) &= = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.3.2 *Si* A_1 *y* A_2 *son eventos tales que,* $A_1 \subseteq A_2$*, entonces*

$$a) \quad P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1), \tag{1.18}$$
$$b) \quad P(A_1) \leq P(A_2). \tag{1.19}$$

Demostración: Considérese el diagrama de Venn mostrado en la figura 1.7.

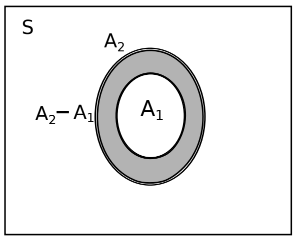


Figura 1.7: Diferencia

a) Se observa del diagrama que:

$$A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1),$$

además,

$$A_1 \cap (A_2 - A_1) = \phi.$$

Como consecuencia del axioma 3 se tiene,

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1),$$

despejando $P(A_2 - A_1)$ se obtiene,

$$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1).$$

b) Como $A_2 - A_1$ es un evento contenido en S, entonces por el axioma 1,

$$P(A_2 - A_1) \geq 0.$$

De este resultado junto con el inciso anterior se sigue que,

$$P(A_2) - P(A_1) \geq 0;$$

es decir,

$$P(A_1) \leq P(A_2). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.3 *Para un evento cualquiera A,*

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.20}$$

Como $A \subseteq S$, entonces por el teorema anterior,

$$P(A) \leq P(S),$$

además por el axioma 2,

$$P(A) \leq P(S) = 1,$$

Este resultado junto con el axioma 1 permiten establecer el contenido de este teorema. $\blacksquare$

Teorema 1.3.4 *Si A' es el complemento del evento A, entonces*

$$P(A') = 1 - P(A). \tag{1.21}$$

Demostración: Considérese el diagrama de Venn que se muestra a continuación.

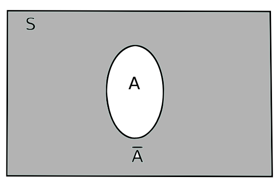


Figura 1.8: Complemento

Del diagrama se observa que,

$$S = A \cup A'$$
$$A \cap A' = \phi.$$

Por el axioma 3 de probabilidad se tiene,

$$P(S) = P(A) + P(A').$$

Del axioma 2 se sigue,

$$1 = P(A) + P(A').$$

Despejando $P(A')$ se concluye la demostración. ∎

Teorema 1.3.5 *Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.22}$$

Demostración: Considérese el diagrama de Venn siguiente:

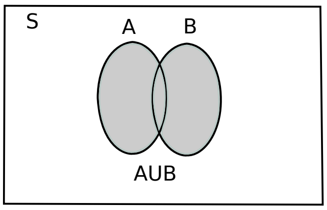


Figura 1.9: Unión de los eventos A y B

Es posible expresar $A \cup B$ como la unión de dos eventos disjuntos, éstos son, B y $A - B$. De manera que por el axioma 3,

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B). \tag{1.23}$$

Además,

$$A - B = A - (A \cap B),$$

de manera que por el teorema 1.3.2 se obtiene

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \tag{1.24}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 1.24 en la ecuación 1.23 se concluye la demostración. ∎

Teorema 1.3.6 *Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B'). \tag{1.25}$$

Demostración: Obsérvese que A puede expresarse como la unión de los eventos disjuntos, $A \cap B$ y $A \cap B'$, de manera que por el axioma 3,

$$P(A) = (A \cap B) + P(A \cap B'). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.7 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes; es decir, $A_i \cap A_j = \phi$, para todo $i \neq j$, y $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, entonces*

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \tag{1.26}$$

particularmente, si $A = S$, entonces

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{1.27}$$

Demostración: Se sigue directamente de los axiomas 2 y 3. $\blacksquare$

Asignación de probabilidades

Espacios muestrales finitos

Considérese un espacio muestral finito S que se compone de n elementos, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. El conjunto S puede particionarse en n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que consten de un solo elemento. De la manera más simple se tiene $A_i = \{s_i\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Estos conjuntos se conocen como conjuntos elementales, ya que contienen un solo punto del espacio muestral. De acuerdo con el axioma 1 de la probabilidad y con el teorema 1.3.7, los conjuntos elementales deben satisfacer las siguientes condiciones:

1. $P(A_i) \geq 0$,
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Si un evento cualquiera A consta de h elementos del espacio muestral, es decir,

$$A = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ih}\},$$

entonces

$$P(A) = \sum_{j=1}^{h} P(A_{ij}). \tag{1.28}$$

Ejemplo 1.3.1 *Una moneda está cargada de tal manera que el evento, obtener cara(C), tiene el doble de oportunidad de ocurrir que el evento, obtener cruz(C). Determine la probabilidad de los eventos simples.*

Solución: Como se definieron anteriormente, los eventos simples son:
C: Obtener cara.
X: Obtener cruz.

Si se define $P(X) = p$, entonces $P(C) = 2p$, y de acuerdo con la propiedad 2 para los eventos simples,

$$\begin{aligned} P(C) + P(X) &= 1, \\ 2p + p &= 1, \\ 3p &= 1. \end{aligned}$$

Por lo anterior, $P(X) = 1/3$ y $P(C) = 2/3$. Ambos valores son positivos, satisfaciendo la propiedad 1 de los eventos simples.

Espacios muestrales equiprobables

Si todos los puntos de un espacio muestral finito tienen la misma probabilidad de ocurrencia, el espacio muestral se conoce como espacio muestral equiprobable. En este caso los resultados de la sección anterior se reducen considerablemente. Por principio de cuentas,

$$P(A_i) = \frac{1}{n}. \tag{1.29}$$

Para un conjunto arbitrario A con h elementos se tiene,

$$P(A) = \sum_{j=1}^{h} P(A_{ij}) = \frac{h}{n}, \tag{1.30}$$

donde n representa el número de puntos del espacio muestral y h el número de puntos en que el evento A puede ocurrir.

Ejemplo 1.3.2 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado equilibrado. Determínese la probabilidad de los siguientes eventos:*

a) Obtener un número par.

b) Obtener un número impar.

c) Obtener un número mayor que 3.

d) Obtener un número impar o un número mayor que 3.

e) Obtener un número impar y que sea mayor que 3.

Solución: El espacio muestral es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Considere los siguientes eventos:
A: Obtener número par.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

B: Obtener un número impar.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

C: Obtener un número mayor que 3.

$$C = \{4, 5, 6\}$$

D: Obtener un número impar y que sea mayor que 3.

$$D = B \cap C = \{5\}$$

E: Obtener un número impar o un número mayor que 3.

$$E = B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

Cada punto muestral tiene la misma probabilidad, ya que el dado está equilibrado. De acuerdo con la ecuación 1.30,

$$\begin{array}{ll} a) & P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ b) & P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ c) & P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ d) & P(D) = \frac{1}{6}, \\ e) & P(E) = \frac{5}{6}. \end{array}$$

Es ilustrativo verificar que el teorema 1.3.5 se satisface.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B \cup C), \\ &= P(B) + P(C) - P(B \cap C), \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.3 *Considerése el experimento que consiste en lanzar una moneda equilibrada dos veces.*

a) Determine la probabilidad de obtener máximo una cara.

b) Determine la probabilidad de obtener 0 caras.

c) Determine la probabilidad de obtener al menos una cara.

Solución: El espacio muestral de este experimento puede expresarse como:

$$S = \{CC, CX, XC, XX\}^1$$

Debido a que la moneda lanzada es equilibrada se tiene un espacio muestral equiprobable, es decir, cada evento elemental tiene probabilidad igual a $1/4$. A continuación se definen los siguientes eventos:

A: Obtener máximo una cara.
B: Obtener 0 caras.
C: Obtener al menos una cara.

De acuerdo con lo anterior:

$$\begin{aligned} A &= \{XX, XC, CX\}, \\ B &= \{XX\}, \\ C &= \{CC, XC, CX\}. \end{aligned}$$

De la ecuación 1.30 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} &a) \quad P(A) = \frac{3}{4}, \\ &b) \quad P(B) = \frac{1}{4}, \\ &c) \quad P(C) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

[1]Se está haciendo uso de la notación taquigráfica para la intersección, donde CX significa que se obtuvo cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo

Obsérvese que B y C son eventos complementarios; es decir, $C' = B$. De acuerdo con el teorema 1.3.4,

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(C'), \\ &= 1 - P(B), \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Para los siguientes ejemplos se recomienda ver el apéndice A

Ejemplo 1.3.4 *Se sacan 3 cartas de un mazo bien barajado de 52 naipes (baraja inglesa). Encuentre la probabilidad de sacar 3 ases.*

Solución: El espacio muestral consiste de todos los subconjuntos de 3 cartas que pueden formarse de un conjunto con 52 elementos diferentes. Se tienen

$$n = \binom{52}{3}$$

maneras de obtener tres cartas de un conjunto de 52. Este número corresponde a la cardinalidad del espacio muestral.
Si se define el evento A como:
A: Obtener 3 cartas que sean ases cuando se extraen 3 cartas de un mazo bien barajado de 52.
Dentro del conjunto de las 52 cartas solo se tienen 4 ases, de los cuales se deben tomar 3. El número de maneras en que se pueden sacar 3 ases de un conjunto de 4 es:

$$h = \binom{4}{3}.$$

Por lo tanto, la probabiidad del evento A es:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}, \\ &= \frac{4}{22100} = \frac{1}{5525}, \\ &= 1.8 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Este problema se resolverá en la siguiente sección con un enfoque diferente.

Ejemplo 1.3.5 *Se sacan 5 cartas de una baraja inglesa. Determine la probabilidad de que,* *a) todas las cartas sean de un mismo palo,*

b) se saquen exactamente 2 ases,

c) que no se saquen ases,

d) se saque al menos un as.

Solución: El espacio muestral de este experimento consta todos los subconjuntos de 5 cartas que pueden formarse con un total de 52 cartas diferentes. La cardinalidad de este conjunto es $52C_2$.
A continuación se definen los eventos de interés:

A: Sacar todas las cartas de un mismo palo.
B: Sacar exactamente 2 ases.
C: No obtener ases.
D: Sacar al menos un as.

a) Se procede a determinar el número de elementos del conjunto A. Debido a que se tienen 4 palos diferentes, se tienen 4 opciones diferentes de escoger un palo; además, cada palo tiene 13 cartas de modo que se tienen $13C_5$ maneras diferentes de escoger las 5 cartas del palo. Por el principio fundamental de conteo se tienen, $4(13C_5)$ maneras de obtener 5 cartas del mismo palo; por lo tanto,

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{66}{4165}.$$

b) Para el conjunto B, debido a que se tienen 4 ases diferentes, en consecuencia se tienen $4C_2$ maneras de escoger 2 de de ellos. Las tres cartas restantes deberán tomarse del conjunto de 48 cartas que no son ases y esto puede hacerse de $(3C_{48})$ maneras diferentes. Por el principio fundamental de conteo se tienen $(4C_2)(3C_{48})$ formas diferentes de obtener 5 cartas con exactamente 2 ases. En consecuencia,

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{4324}{54145}.$$

c) Las 5 cartas deberán proceder del conjunto de 48 cartas que no son ases y esto puede hacerse de $(5C_{48})$ maneras diferentes. Por consiguiente,

$$P(C) = \frac{\begin{pmatrix} 48 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{35673}{54145}.$$

d) Obsérvese que los eventos C y D son complementarios, es decir, $D' = C$, de modo que mediante el teorema 1.3.4 se tiene,

$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - P(D'), \\ &= 1 - P(C), \\ &= 1 - \frac{35673}{54145}, \\ &= \frac{18472}{54145}. \end{aligned}$$

El lector podrá verificar que,

$$P(D) = \frac{(4C_1)(48C_4) + (4C_2)(48C_3) + (4C_3)(48C_2) + (48C_1)}{52C_5} = \frac{18472}{54145}.$$

1.4. Probabilidad condicional

Para tener una aproximación intuitiva del concepto de probabilidad condicional, considérese el siguiente experimento aleatorio. Una urna consta de N esferas, de las cuales, n son blancas y el resto, $N - n$ son negras; por las demás características físicas son idénticas. Se deben extraer de la urna una tras otra x esferas y anotar sus colores. Este experimento puede realizarse de dos maneras conocidas como: extracción con reemplazo y sin reemplazo.

a) **Extracción con reemplazo**
Se extrae la primera esfera y una vez que se anota su color ésta es devuelta a la urna. Después se extrae la segunda esfera, una vez más se anota su color y se devuelve a la urna, y así sucesivamente, hasta completar la última extracción y anotar el color correspondiente.

b) **Extracción sin reemplazo**
A diferencia con el proceso anterior, si se extrae la segunda esfera sin antes devolver la primera esfera extraída, y cada extracción se realiza sin devolver la esfera de la extracción previa, y así sucesivamente, hasta extraer x de ellas, el proceso se conoce como extracción sin reemplazo.

Considérese el experimento aleatorio que consiste en extraer dos esferas de la urna antes mencionada y defínanse los eventos B_1 y B_2 como: B_1 es el evento que consiste en sacar esfera blanca en la primera extracción y B_2 es el evento que consiste en sacar una esfera blanca en la segunda extracción. Naturalmente, si el proceso de extracción se realiza con reemplazo, las probabilidades de los eventos B_1 y B_2 pueden calcularse sin dificultad alguna, ya que en cada extracción se sabe explícitamente cuantas esferas hay en total en la urna y cuantas de ellas son blancas. Más específicamente, si en total se tienen 30 esferas de las cuales 20 son blancas y 10 son negras, entonces para la primera extracción, $P(B_1) = 20/30$. Como la esfera extraída se devuelve a la urna, entonces para la segunda extracción se tiene, $P(B_2) = 20/30$.

Ahora considérese que el experimento se realiza sin reemplazo. Nuevamente, $P(B_1) = 20/30$; sin embargo, para calcular la probabilidad del segundo evento se necesita información adicional sobre la composición de la urna, ya que una vez que se extrae una esfera sin reemplazo, la composición de la urna necesariamente se modifica, de manera que, el número total de esferas y el número de esferas blancas dependerá del resultado obtenido en la primera extracción. Si en la primera extracción se obtuvo esfera blanca, esto permite conocer la nueva composición de la urna y es posible calcular la probabilidad de obtener una esfera blanca en la segunda extracción dado que en la primera extracción se obtuvo una esfera blanca. Esta probabilidad se conoce como la probabilidad condicional del evento B_2 dado que el evento B_1 ha ocurrido y se denota por $P(B_2|B_1)$. Para el ejemplo que se ha considerado, $P(B_2|B_1) = 19/29$, ya que después de la primera extracción se tienen 29 esferas de las cuales 19 son blancas.

Un análisis más detallado de este experimento permitirá desarrollar una definición general de la probabilidad condicional. Para el experimento anterior, el espacio muestral puede expresarse como:

$$S = \{B_1B_2, B_1N_2, N_1B_2, N_1N_2\}$$

donde B_1 y B_2 representan los eventos: obtener esfera Blanca en la extracción 1 y 2, respectivamente. De la misma manera N_1 y N_2 representan los eventos: obtener esfera negra en la extracción 1 y 2, respectivamente. Cuando se calcula la probabilidad del evento B_1 se está comparando la posibilidad de estar en el evento B_1 dado que se está el espacio muestral completo S; es decir, dentro de S los eventos que favorecen B_1 son $\{B_1B_2, B_1N_2\}$. Sin embargo, para la segunda extracción se está comparando la posibilidad de estar en B_2 dado que se está en B_1; es decir, el espacio muestral se reduce a $\{B_1B_2, B_1N_2\}$ y el evento que favorece a B_2 es $\{B_1B_2\}$. Lo anterior conduce a la siguiente definición.

Definición 1.4.1 (Probabilidad condicional) *Si A y B son dos eventos en un espacio muestral S tal que $P(A) > 0$, entonces se define la probabilidad condicional de que el evento B ocurra dado que el evento A ya ha ocurrido mediante,*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{1.31}$$

Si $P(B) > 0$, de manera análoga se define:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.32}$$

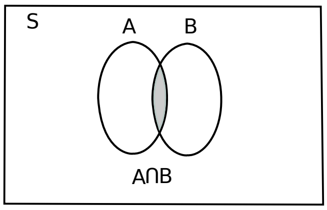


Figura 1.10: Probabilidad condicional

Despejando $P(A \cap B)$ en las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A), \\ &= P(B)P(A|B). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Ejemplo 1.4.1 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado equilibrado dos veces. Sean A y B los eventos, A: obtener un total de 10, y B: obtener al menos un 5. Determine a) $P(A|B)$, b)$P(B|A)$.*

Solución: Se comenzará por definir y determinar los elementos de los eventos involucrados en la definición de probabilidad condicional:

A: obtener un total de 10.
$A = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
B: obtener al menos un cinco.
$B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$
$A \cap B = \{(5,5)\}$

a) $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$

b) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$

Ejemplo 1.4.2 *La urna I contiene 10 bolas blancas y 15 bolas negras; mientras que la urna II contiene 20 bolas blancas y 10 bolas negras. Se extrae una bola de la urna I y sin ver su color se deposita en la urna II. Posteriormente se extrae una bola de la urna II. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la urna II sea blanca?*

Solución: Considérese los siguientes eventos:
B_1 : obtener una bola blanca de la urna I,
N_1 : obtener una bola negra de la urna I,
B_2 : obtener una bola blanca de la urna II,
E_1 : obtener blanca de la urna I y blanca de la urna II,
E_2 : obtener negra de la urna I y blanca de la urna II,
E : obtener blanca de la urna II.

El evento E puede ocurrir de dos maneras: que suceda E_1 o que suceda E_2. De manera que, $E = E_1 \cup E_2$. Como los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1 \cup E_2), \\ &= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2), \\ &= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(N_1)P(B_2|N_1). \end{aligned}$$

Sustituyendo los datos se obtiene:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(N_1)P(B_2|N_1), \\ &= \left(\frac{10}{25}\right)\left(\frac{21}{31}\right) + \left(\frac{15}{25}\right)\left(\frac{20}{31}\right), \\ &= \frac{102}{155}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.3 *Un lote está compuesto de 30 microcomputadoras de las cuales 5 son defectuosas. Se extraen sin reemplazo una tras otra 6 microcomputadoras del lote. Determine la probabilidad de que la sexta microcomputadora extraída sea la última microcomputadora defectuosa.*

Solución: Para que la sexta microcomputadora extraída sea la última defectuosa, necesariamente se tienen que haber obtenido 4 microcomputadoras defectuosas en las 5 extracciones anteriores. Por lo tanto, es conveniente definir los siguientes eventos:

A: Obtener 4 microcomputadoras defectuosas en las 5 primeras extracciones.

B: Obtener una microcomputadora defectuosa en la sexta extracción. Se desea determinar la probabilidad del evento $E = A \cap B$. De manera que,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap B), \\ &= P(A)P(B|A). \end{aligned}$$

El evento A consiste en extraer 4 artículos defectuosos de un total de 5 posible y un artículo no defectuoso de 25 posibles, lo cual puede hacerse de $5C_4(25C_1)$ maneras diferentes. Por lo tanto,

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix}} = \left(\frac{125}{142506}\right).$$

Hasta aquí se han extraído 5 artículos del lote, de los cuales 4 fueron defectuosos y uno no defectuoso. Para la última extracción la composición del lote es de 25 microcomputadoras, de las cuales solo una es defectuosa, por lo tanto,

$$P(B|A) = \left(\frac{1}{25}\right)$$

Finalmente,

$$P(E) = P(A)P(B|A) = \left(\frac{125}{142506}\right)\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{5}{142506} = 3.5 \times 10^{-5}$$

Teorema 1.4.1 *Si A_1, A_2, A_3 son tres eventos cualesquiera de un espacio muestral, entonces*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \tag{1.34}$$

Demostración: Mediante una simple asociación de los conjuntos y la aplicación de la ecuación 1.33 se tiene,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3), \\ &= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2), \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La generalización de este teorema para n conjuntos es inmediata.

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1}). \tag{1.35}$$

La demostración (mediante el método de inducción matemática) se deja al lector.

Ejemplo 1.4.4 *Considérese nuevamente el ejemplo 1.3.4. Se sacan 3 cartas de un mazo bien barajado de 52 naipes (baraja inglesa). Encuentre la probabilidad de sacar 3 ases si las cartas se sacan una tras otra sin reemplazo.*

Solcución: Considere los siguientes eventos:

A_1: Obtener as en la primera extracción.
A_2: Obtener as en la segunda extracción.
A_3: Obtener as en la tercera extracción.

Se desea determinar la probabilidad del evento $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. De manera que, de acuerdo con el teorema 1.4.1

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Inicialmente se tienen 52 cartas, de las cuales 4 son ases, entonces

$$P(A_1) = \frac{4}{52}.$$

Una vez que se ha extraído un as de la baraja, quedan 3 ases de un total de 51 cartas, de manera que la probabilidad de obtener un as en la segunda extracción dado que se obtuvo un as en la primera extracción es,

$$P(A_2|A_1) = \frac{3}{51}.$$

Por último, una vez que se han retirado dos ases del mazo, quedan solo dos ases de un total de 50 cartas, así que la probabilidad de obtener as en la tercera extracción dado que se obtuvieron ases en las dos extracciones previas es,

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{50}.$$

Por lo tanto,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)\left(\frac{2}{50}\right) = \frac{1}{5525}.$$

1.5. Eventos independientes y la regla de la multiplicación

Considérese nuevamente el experimento que consiste en extraer una tras otra dos esferas de una urna que contiene 20 esferas negras y 10 esferas blancas. Si la extracción se realiza con reemplazo y se definen nuevamente los eventos B_1 y B_2 como obtener esfera blanca en la primera y segunda extracción, respectivamente, entonces $P(B_2|B_1) = P(B_2)$; es decir, la probabilidad de B_2 no se ve afectada por la ocurrencia de B_1. Este resultado permite intuir el concepto de eventos estadísticamente independientes.

Si A y B son dos eventos en el espacio muestral S y $P(B|A) = P(B)$, entonces A y B son eventos independientes. Del mismo modo, se requiere que $P(A|B) = P(A)$ de otro modo la independencia no sería un concepto útil. Además de los anteriores requisitos, se debe cumplir que tanto $P(A)$ como $P(B)$ deben ser mayores que cero. Se puede abordar el concepto de una manera que permita su generalización, si se observa que para dos eventos independientes A y B, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Esta relación seguirá siendo válida aun cuando A o B sean eventos de probabilidad cero. Para tres eventos A, B y C, se dirá que éstos son eventos mutuamente independientes si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)P(B), \\
P(A \cap C) &= P(A)P(C), \\
P(B \cap C) &= P(B)P(C), \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C).
\end{aligned}$$

La generalización para n eventos se establece a continuación.

Definición 1.5.1 (Eventos independientes) *Si* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *son eventos en un espacio muestral* S*, entonces los eventos se conocen como mutuamente independientes si para cualquier subconjunto* $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$ *del conjunto* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *se satisface que,*

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

además,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Es importante notar que para n eventos, en general se tienen $2^n - 2$ relaciones por satisfacer. Este número corresponde al número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez, con $r \geq 2$.

Ejemplo 1.5.1 *Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Determine la probabilidad de que se obtenga:*

a) Solo una cara.

b) Al menos una cara

c) Máximo una cara.

Solución: El espacio muestral de este experimento es:

$$S = \{CC, CX, XC, XX\}$$

donde CX significa que se obtuvo cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo; es decir, se está usando la notación *económica* para la intersección.
a) Para el evento, A: obtener solo una cara, se tiene

$$A = \{CX, XC\}$$

Los dos eventos que conforman A son mutuamente excluyentes, así que,

$$P(A) = P(CX) + P(XC).$$

Debido a que los lanzamientos son independientes,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C)P(X) + P(X)(C), \\ &= (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2), \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

b) B: obtener al menos una cara.

$$B = \{CX, XC, CC\}$$

Por los mismos argumentos que en el inciso anterior,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C)P(X) + P(X)(C) + P(CC), \\ &= (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2), \\ &= 3/2. \end{aligned}$$

c) $\mathcal{C}$: Máximo una cara.

$$\mathcal{C} = \{CX, XC, XX\}$$

De la misma manera que en los incisos anteriores,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}) &= P(C)P(X) + P(X)(C) + P(XX), \\ &= (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2,) \\ &= 3/2. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.2 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado equilibrado dos veces.*

a) Determine la probabilidad de cada punto muestral.

b) Determine la probabilidad de obtener un total de 7.

Solución:

a) El primer lanzamiento de un dado puede resultar uno de los números del conjunto $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, todos con la misma probabilidad. Para el segundo lanzamiento, de la misma manera, puede resultar cualquiera de los números de $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de la misma manera que con el primer dado lanzado, todos con la misma probabilidad. Por lo tanto, el espacio muestral que describe los resultados de este experimento es,

$$S = S_1 \times S_2 = \{(a, b)|a \in S_1, b \in S_2\}.$$

Cada uno de los posibles resultados en S tiene la misma probabilidad. Dado que S tiene 36 puntos muestrales, entonces $P[(a, b)] = 1/36$.

Bajo el enfoque de la independencia de eventos se llega a la misma conclusión. De hecho, como los lanzamientos son independietes; es decir, lo que se obtiene en el primer lanzamiento no influye sobre el resultado del segundo lanzamiento, entonces

$$\begin{aligned} P[(a, b)] &= P[\{a\} \cap \{b\}], \\ &= P(\{a\})P(\{b\}), \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right), \\ &= \left(\frac{1}{36}\right). \end{aligned}$$

b) Defínase el evento A como:

A: Obtener un total de 7 en 2 lanzamientos de una moneda equilibrada. De acuerdo a la definición de A se tiene,

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$

por lo tanto,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 1.5.3 *Considérese que se lanzan un par de dados equilibrados 5 veces.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 por primera vez en el último lanzamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 una sola vez?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 al menos una vez?

Solución: Se definen los siguientes eventos:

E_i: obtener un total de 7 en el *i-ésimo* lanzamiento de los dos dados.

E_i': obtener un total diferente de 7 en el *i-ésimo* lanzamiento de los dos dados.

De los 36 posibles resultados que se obtienen al lanzar dos dados, 6 de ellos dan un total de 7, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(E_i) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\ P(E_i') &= \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

a) Si se obtiene un 7 por primera vez en el quinto lanzamiento, entonces debieron obtenerse totales diferentes de 7 en los primeros 4 lanzamientos de los dos dados. El evento de interés es: $A = E_1'E_2'E_3'E_4'E_5$. Debido a que cada lanzamiento de los dados es independiente de los demás, entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1'E_2'E_3'E_4'E_5), \\ &= P(E_1')P(E_2')P(E_3')P(E_4')P(E_5), \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right), \\ &= \frac{625}{7776} = 0.0803 \end{aligned}$$

b) A diferencia del inciso anterior, ahora el 7 pudo haberse obtenido en cualquiera de los intentos. El evento de interés está compuesto por todos aquellos eventos que dan un total de 7 en 5 intentos; es decir,

$$B = \{EE'E'E'E', E'EE'E'E', E'E'EE'E', E'E'E'EE', E'E'E'E'E\}$$

Se han omitido los subíndices, ya que en este punto debe ser claro que la posición de la letra corresponde al número del lanzamiento.
Los eventos que conforman a B son mutuamente excluyentes, así que, de acuerdo con el axioma 3 de la probabilidad,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(EE'E'E'E') + P(E'EE'E'E') + P(E'E'EE'E') + \\ &\quad P(E'E'E'EE') + P(E'E'E'E'E) \end{aligned}$$

Debido a que los 5 lanzamientos son independientes, entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= 5P(E)P^4(E') \\ &= \binom{5}{1} P(E)P^4(E'), \\ &= 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4, \\ &= \frac{3125}{7776} = 0.4019 \end{aligned}$$

c) En cinco intentos se pueden obtener hasta 5 totales de 7. Considere los siguientes eventos:
C: obtener al menos un total de 7.
C': obtener totales diferentes de 7.
Se procederá a determinar la probabilidad del evento C', y posteriormente, mediante el teorema 1.3.4 se determinará la probabilidad del evento C.
El evento C' se obtiene cuando todos los lanzamientos dan totales diferentes de siete; es decir, $C = \{E'E'E'E'E'\}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(C') &= P(E'E'E'E'E'), \\ &= P^5(E'), \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^5, \\ &= \frac{3125}{7776}, \\ &= 0.4019 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(C'), \\ &= 1 - \frac{3125}{7776}, \\ &= \frac{4651}{7776}, \\ &= 0.5981 \end{aligned}$$

1.6. Regla de Bayes

Teorema 1.6.1 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes; es decir, $A_i \cap A_j = \phi$ para todo $i \neq j$, y $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, entonces*

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_n). \tag{1.36}$$

Demostración: Obsérvese que $A \cap A_i = A_i$ para todo i. Sustituyendo este resultado en el teorema 1.3.7 se concluye la demostración. ∎

Definición 1.6.1 (Partición finita del espacio muestral) *Sea S un espacio muestral y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una sucesión finita de eventos en S. Se dice que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición del espacio muestral S si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

$$a) \quad A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j, \tag{1.37}$$

$$b) \quad S = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n. \tag{1.38}$$

Teorema 1.6.2 (Probabilidad total) *Si S es un espacio muestral y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición de S, entonces para todo evento A en S se tiene,*

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \ldots + P(A_n)P(A|A_n). \tag{1.39}$$

Demostración: Del teorema 1.6.1 se tiene,

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_n). \tag{1.40}$$

De acuerdo con la definición 1.4.1

$$P(A \cap A_i) = P(A_i)P(A|A_i), \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.41}$$

Sustituyendo las ecuaciones descritas en 1.41 en la ecuación 1.40 se concluye la demostración. ▮

Teorema 1.6.3 (Teorema de Bayes) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición del espacio muestral S y A es un evento en S, entonces*

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}, \quad k = 1, 2 \ldots, n. \tag{1.42}$$

Demostración: De acuerdo con la definición 1.4.1,

$$P(A_k|A) = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A)}, \tag{1.43}$$

$$P(A|A_k) = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A_k)}, \tag{1.44}$$

de la ecuación 1.44 se obtiene,

$$P(A \cap A_k) = P(A_k)P(A|A_k). \tag{1.45}$$

Sustituyendo la ecuación 1.45 en la ecuación 1.43 se obtiene,

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{P(A)}, \quad k = 1, 2 \ldots, n. \tag{1.46}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 1.39 en la ecuación 1.46 se concluye la demostración. ▮

Ejemplo 1.6.1 *Un bolso contiene tres monedas de las cuales dos son normales, mientras que una de ellas está sesgada, de manera que el evento, obtener cara(C),tiene dos veces más probabilidad de ocurrir que el evento, obtener cruz(X). Se extrae aleatoriamente una moneda del bolso y se lanza cuatro veces, obteniéndose 4 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda seleccionada haya sido la moneda sesgada?*

Solución: Defínase como evento seguro el evento que ya ha ocurrido y que consiste en obtener 4 caras en cuatro lanzamientos.

A: Obtener 4 caras en 4 lanzamientos.

Defínanse los eventos de la partición como:
A_1: Escoger la moneda sesgada.
A_2: Escoger una moneda no sesgada.

De acuerdo con los eventos definidos se requiere calcular la probabilidad de que se haya escogido la moneda sesgada dado que se obtuvieron 4 caras; es decir, $P(A_1|A)$. Como las monedas se extraen del bolso aleatoriamente, entonces

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{1}{3}, \\ P(A_2) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Para la moneda sesgada la probabilidad de obtener una cara es $P(C) = \frac{2}{3}$, mientras que para las no sesgadas se tiene $P(C) = \frac{1}{2}$. Además, los resultados de cada lanzamiento son independiente, de manera que,

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}, \\ P(A|A_2) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el teorema de Bayes se obtiene,

$$\begin{aligned} P(A_1|A) &= \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(A|A_i)}, \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{16}{81}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{16}{81}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)}, \\ &= \frac{64}{145} = 0.4414 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.2 *Una compañía posee tres máquinas que producen cierto tipo de pernos. Las máquinas M_1, M_2 y M_3 fabrican 50 %, 30 % y 20 % de la producción total, respectivamente. De lo que cada una produce, 7 % , 3 % y 2 %, respectivamente, son pernos defectuosos. Si se escoge un perno al azar y éste resulta defectuoso. ¿Cuál el la probabilidad de que el perno provenga de la máquina M_2?*

Solución: Se comenzará por definir los eventos de interés:

Evento seguro:
A: Obtener un perno defectuoso.

Los eventos de la partición se definen mediante:
A_i: El perno proviene de la máquina M_i, $\quad i = 1, 2, 3.$

Se requiere calcular la probabilidad de que el perno provenga de la máquina 2 dado que el perno resultó defectuoso; es decir, $P(A_2|A)$. Las probabilidades de que los pernos provengan de cada una de las máquinas están dadas por,

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.50, \\ P(A_2) &= 0.30, \\ P(A_3) &= 0.20 \end{aligned}$$

Además, las probabilidades que un perno sea defectuoso dado que fue producido por la máquina 1, 2 o 3, respectivamente, son:

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= 0.07, \\ P(A|A_2) &= 0.03, \\ P(A|A_3) &= 0.02 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Bayes se obtiene,

$$\begin{aligned} P(A_2|A) &= \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}, \\ &= \frac{(0.3)(0.03)}{(0.50)(0.07) + (0.30)(0.03) + (0.20)(0.02)}, \\ &= 0.19 \end{aligned}$$

Apéndices

Apéndices A

Sobre la baraja inglesa

Entre los juegos de azar, aquellos en los que se reparten cartas son de los preferidos por los jugadores. En este trabajo el interés por las cartas se centra solo en los problemas que estos juegos plantean a las técnicas de conteo y a la probabilidad en sí misma. Por lo anterior, se pondrán algunos términos en contexto.

En general, una baraja consta de un conjunto de cartas (o naipes) de diferentes colores, figuras, números, e incluso letras. Existen dos tipos de barajas que son las más comunmente usadas: La baraja inglesa y la española. Solo se describirá la baraja inglesa: La baraja inglesa consta de cuatro clases diferentes de figuras, las cuales se conocen como palos: corazones, diamantes, tréboles y picas. Las figuras que aparecen en estas cartas tienen estas formas. Las cartas de los palos corazones y diamantes son de color rojo; mientras que las cartas de los palos tréboles y picas son de color negro. Cada palo contiene 13 cartas. Las primeras 9 de ellas están numeradas del 2 hasta el 10. Las 4 cartas restantes se conocen como figuras y se designan mediante letras: J(Jack-jota o sota), Q(Queen-reina), K(King-rey) y A(As), como se muestra en la figura A.1.

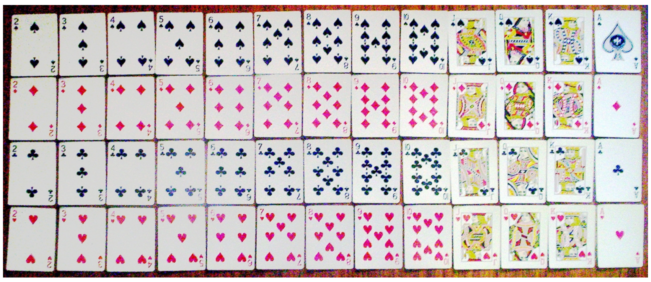


Figura A.1: Baraja inglesa

Los juegos más comunes con la baraja inglesa son: el *poker*, el *bridge* y la *canasta*. Solo se especificará aquí algunos términos propios del juego de **poker**.
En el juego de *poker* cada jugador recibe 5 cartas. Las cinco cartas que un jugador recibe se conocen como manos. Las más codiciadas, por su valor en el juego, son:
Escalera: Cinco cartas consecutivas, sin importar el palo de las mismas.
Escalera de color: Cinco cartas consecutivas del mismo palo.
Escalera real: La mejor mano posible en *poker*. Escalera desde el Diez al As, del mismo palo.

Estos datos son los que interesan para los objetivos de este trabajo.

Apéndices B

Distribución de Poisson

Conidérese las tres propiedades que definen el proceso de Poisson.

1. Los eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.
2. La probabilidad de que un evento sencillo ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional a la magnitud del intervalo.
3. La probabilidad de que más de un evento sencillo ocurra en un intervalo pequeño de tiempo es despreciable.

Para deducir la función de probabilidad para una variable aleatoria de Poisson a partir del proceso de Poisson, considérese la siguiente notación:

$$P_0(t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_x(t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_0(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo } \Delta t$$

$$P_x(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo } \Delta t.$$

El interés se centra en determinar $P_x(\Delta t)$, a partir del proceso de Poisson, para tal fin, se comenzará por determinar $P_x(\Delta t)$ para los primeros valores de X y finalmente se propondrá la fórmula general que podrá ser probada mediante el método de inducción matemática.

i) Para X=0:
Considérese el siguiente esquema, el cual permite tener una imagen del proceso.

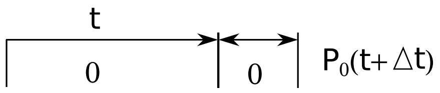


Figura B.1:

La probabilidad de ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo $t + \Delta t$ solo puede ocurrir de una manera: 0 eventos en t y 0 eventos en Δt. Como los intervalos t y Δt son disjuntos, entonces, de acuerdo con el punto 1, los eventos que en estos intervalos ocuren son independientes, por lo tanto

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t). \tag{B.1}$$

Por otro lado, los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios, ya que de acuerdo con el punto 3, la probabilidad de que más de un evento ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es cero, por lo anterior

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t). \tag{B.2}$$

Sustituyendo la ecuación B.2 en la ecuación B.1 se obtiene

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.3}$$

Ahora considérese el punto 2, el cual especifica que la probabilidad de un evento simple ocurra en Δt es proporcional a este intervalo pequeño. Sea λ la constante de proporcionalidad, entonces

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.4}$$

Sustituyendo la ecuación B.4 en la ecuación B.3 se obtiene

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda \Delta t). \tag{B.5}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t). \tag{B.6}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.6

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= -\lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\ \frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t). \end{aligned} \tag{B.7}$$

En este punto es necesario recurrir a los métodos de solución para ecuaciones diferenciales. La ecuación anterior es separable, de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} &= -\lambda t, \\ \ln P_0(t) &= -\lambda t + \ln c_0. \end{aligned} \tag{B.8}$$

De la ecuación B.8 se obtiene

$$\begin{aligned} P_0(t) &= e^{-\lambda t + \ln c_0}, \\ &= e^{\ln c} e^{-\lambda t}, \\ &= c e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Finalmente, se evaluará $P_0(t)$ en $t = 0$ para determinar la constante c_0. Dado que la probabilidad de que ningún evento ocurra en $t = 0$ es el evento seguro, entonces

$$P_0(0) = c_0 = 1, \tag{B.10}$$

de manera que

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{B.11}$$

ii)Para X=1

Considérese el esquema siguiente:

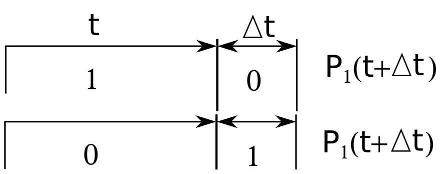


Figura B.2:

Existen dos eventos mutuamente excluyentes mediante los cuales se puede generar un evento en el intervalo de tiempo $t+\Delta t$. De acuerdo con el axioma 3 de la probabilidad y el punto 1 del proceso de Poisson se tiene

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_1(t). \tag{B.12}$$

Como los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios (de acuerdo con el punto 3), entonces

$$P_0(\Delta t) = (1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.13}$$

Sustituyendo la ecuación B.13 en la ecuación B.12 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + (1 - P_1(\Delta t))P_1(t), \tag{B.14}$$

además, por el punto 2 se tiene que

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.15}$$

Sustituyendo la ecuación B.15 en la ecuación B.14 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = \lambda P_0(t)\Delta t + (1 - \lambda \Delta t)P_1(t). \tag{B.16}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). \tag{B.17}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.17

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_1(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\
\frac{d}{dt} P_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). & \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}$$

La ecuación B.18 representa una ecuación diferencial cuya solución se obtiene mediante el método conocido como: método del factor integrante, el cual consiste en hallar una función $u(t)$ tal que al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 por esta función, el lado izquierdo se convierta en

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right).$$

Para la acuación anterior se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\lambda u(t)P_0(t) &= u(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + \lambda u(t)P_1(t), && \text{(B.19)} \\
&= u_1(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + P_1(t)\frac{d}{dt}\left(u(t)\right), && \text{(B.20)} \\
&= \frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right). && \text{(B.21)}
\end{aligned}$$

Para que las tres ecuaciones anteriores sean consistentes, se debe satisfacer que:

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right) = \lambda u(t).$$

Esta ecuación es separable y su solución es:

$$u(t) = ce^{\lambda t}.$$

Considérese la constante $c = 1$, ya que para cualquier $c \neq 0$ su valor específico es irrelevante, ya que, al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 ésta se anula por todas partes. De manera que

$$u(t) = e^{\lambda t}. \tag{B.22}$$

Sustituyendo B.22 en la ecuación B.21 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_0(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \tag{B.23}$$

donde $P_0(t)$ es la función que se determinó en el inciso i. Sustituyendo $P_0(t)$ en la ecuación B.23 se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \\ \lambda &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right). \end{aligned} \tag{B.24}$$

Integrando la ecuación B.24 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \lambda t + c_1,$$

de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t}$$

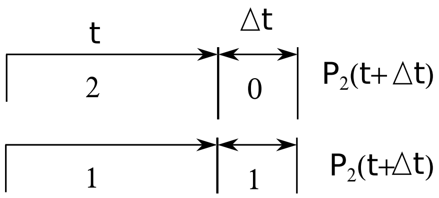
Finalmente evaluando en $t = 0$ se obtiene, el evento imposible $P_1(0) = 0$, lo que permite concluir que $c_1 = 0$, de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t)e^{-\lambda t}. \tag{B.25}$$

iii) Para X=2

Nuevamente, se tienen dos eventos mutuamente excluyentes que generan dos eventos en el intervalo $t + \Delta t$, como se muestra en el siguiente esquema. De la misma manera como se procedió en los incisos anteriores se obtiene para este caso:

$$P_2(t + \Delta t) = P_1(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_2(t). \tag{B.26}$$



Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos anteriores se obtiene

$$P_2(t+\Delta t) = \lambda P_1(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_2(t). \tag{B.27}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_2(t+\Delta t)-P_2(t)}{\Delta t} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). \tag{B.28}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.28

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_2(t+\Delta t)-P_2(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\lambda P_2(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\lambda P_1(t), \\ \frac{d}{dt}P_2(t) + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). & \qquad\qquad (B.29) \end{aligned}$$

Al aplicar el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$P_2(t) = \left(\frac{(\lambda t)^2}{2} + c_2\right)e^{-\lambda t}.$$

Finalmente, evaluando en $t=0$ se obtiene el evento imposible $P_2(0)=0$, lo que permite concluir que $c_2=0$, de manera que

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}. \tag{B.30}$$

iv) Para X=x

A partir de los resultados anteriores resulta razonable proponer la siguiente expresión general para la distribución de Poisson.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots \tag{B.31}$$

Para terminar este apartado, se probará validez de la ecuación B.31 mediante el método de inducción matemática.

a) Evaluando la fórmula para x=0, se obtiene

$$f(0) = e^{-\lambda t}, \tag{B.32}$$

lo que coincide con $P_0(t)$ dado por la ecuación B.11.

b) Supóngase que la fórmula es válida para el entero $x \geq 0$; es decir

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.33}$$

c) Demuéstrese que la fórmula dada es válida para x+1.
Una vez más, considérese el siguiente esquema. Nuevamente, se tienen dos

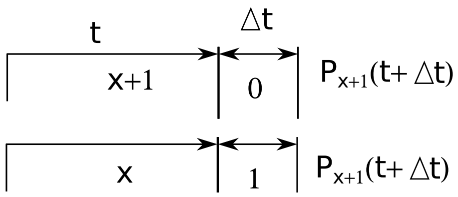


Figura B.3:

eventos mutuamente excluyentes que generan 2 eventos en el intervalo $t+\Delta t$, manera que

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = P_x(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.34}$$

Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos i) y ii) de la primera parte,

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = \lambda P_x(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.35}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_x(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). \tag{B.36}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.36

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{x+1}(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_{x+1}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_x(t), \\ \frac{d}{dt}P_{x+1}(t) + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). & \qquad \text{(B.37)} \end{aligned}$$

Mediante el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt}(u(t)P_{x+1}(t)) = \lambda u(t)P_x(t). \tag{B.38}$$

Al sustituir $u(t) = e^{\lambda t}$ y la ecuación B.33 en la ecuación B.38 se obtiene

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_{x+1}(t)) = \frac{\lambda(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.39}$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} P_{x+1}(t) &= \left(\frac{\lambda^{x+1}t^{x+1}}{(x+1)x!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}, \\ &= \left(\frac{(\lambda t)^{x+1}}{(x+1)!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{B.40}$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$ se obtiene el evento imposible $P_{x+1}(0) = 0$, lo cual permite concluir que $c_{x+1} = 0$, de manera que

$$P_{x+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{x+1}e^{-\lambda t}}{(x+1)!}. \tag{B.41}$$

Se observa que la ecuación B.41 coincide con lo que la fórmula B.31 genera al evaluarla en $x + 1$, por lo tanto, la fórmula general queda demostrada.

Apéndices C

Cálculo de las integrales usadas

C.1. Integral para la normal estándar

Verifique que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Sea

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx = \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

entonces,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right), \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy. \end{aligned}$$

Para continuar se hace un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta, &\qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ y = r\operatorname{sen}\theta, &\qquad 0 \leq r < \infty. \end{aligned}$$

El jacobiano correspondiente es

$$\begin{aligned} J &= \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array}\right|, \\ &= \left|\begin{array}{cc} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{array}\right|, \\ &= r. \end{aligned}$$

Considerando lo anterior,

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy, \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\theta dr, \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr, \\
&= -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^b = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, extrayendo la raíz cuadrada se obtiene

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C.2. Integral para la distribución gama

Verifique que

$$I = \frac{1}{(r-1)!} \int_\mu^\infty u^{r-1} e^{-u} du = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}.$$

Multiplicando por $(r-1)!$ se obtiene,

$$I^* = (r-1)! I = \int_\mu^\infty u^{r-1} e^{-u} du$$

Se procede mediante el método de integración por partes:
Si

$$w = u^{r-1} \quad \text{y} \quad dz = e^{-u} du,$$

entonces

$$dw = (r-1) u^{(r-2)} du \quad \text{y} \quad z = -e^{-u}$$

El método de integración por partes nos conduce a

$$\begin{aligned}
I^* &= -\, u^{r-1} e^{-u}\Big|_\mu^\infty + (r-1) \int_\mu^\infty u^{r-2} e^{-u} du, \\
&= e^{-\mu} \mu^{r-1} + (r-1) \int_\mu^\infty u^{r-2} e^{-u} du,
\end{aligned}$$

La última integral es del tipo inicial, de manera que integrando por partes $(r-1)$ veces se obtiene el último término, ya que r es un entero; por lo tanto,

$$(r-1)(r-2)\dots 1\int_{\mu}^{\infty} e^{-u}du = (r-1)!e^{-\mu}$$

Por lo anterior,

$$I^* = e^{-\mu}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \dots + (r-1)!\right).$$

Finalmente, al dividir entre $(n-1)!$ obtiene I.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{I^*}{(r-1)!} \\
&= \frac{e^{-\mu}}{(r-1)!}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \dots + (r-1)!\right), \\
&= e^{-\mu}\left(\frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{\mu^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + 1\right), \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Apéndices D

Las distribuciones t y F

D.1. La distribución t de Student

Teorema D.1.1 *Sea (Z,V) una variable aleatoria bidimensional, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, mientras que V es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrada (con n grados de libertad). Supóngase que la función de densidad conjunta de Z y V está determinada por*[1]

$$f(z,v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} v^{n/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & -\infty < z < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.1}$$

Si T es una variable aleatoria que se define en términos de Z y V mediante

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}, \tag{D.2}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria T está determinada por

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{D.3}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario **??** se definen,

$$\begin{aligned} t &= \frac{Z}{\sqrt{\frac{v}{n}}} = \phi_1(z,v), \quad -\infty < z < \infty, \\ u &= v = \phi_2(z,v), \qquad 0 < v < \infty. \end{aligned} \tag{D.4}$$

[1]Esto significa que Z y V son variables aleatorias independientes.

La aplicación anterior asigna a cada pareja ordenada (z, v) en el intervalo especificado, una y solo una pareja (t, u) en el intervalo, $-\infty < z < \infty$ y $0 < v < \infty$. También se satisface que a cada pareja ordenada (t, u) en el intervalo, $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$ le corresponde una y solo una pareja ordenada (z, v) en el intervalo $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$. Lo anterior significa que la aplicación es invertible y la aplicación inversa es:

$$\begin{array}{ll} z = \sqrt{\frac{v}{n}}t = \psi_1(t, v), & -\infty < z < \infty, \\ v = u = \psi_2(t, v), & 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.5}$$

De acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t, u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_1(t, u) \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi_2(t, u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_2(t, u) \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{n}} & \frac{1}{2}\frac{T}{\sqrt{nu}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ &= \sqrt{\frac{u}{n}}. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables T y U se determina de acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} g(t, u) &= f(\psi_1(t, u), \psi_2(t, u))|J|, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{ut^2}{2n}} e^{-\frac{u}{2}} \left(\sqrt{\frac{u}{n}}\right), \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{n/2-1/2} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}. \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(t, u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, & -\infty < t < \infty, \\ & 0 < u < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.6}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T corresponde a la marginal de T que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(t, u)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{-\infty} g(t, u)du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})} du, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $w = ku$ donde $k = \frac{1}{2}(1+\frac{t^2}{n})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}(\frac{w}{k})^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-w}\frac{1}{k}dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}\int_0^\infty w^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-w}dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}\Gamma(\frac{n+1}{2}), \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}(\frac{1}{k})^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T se expresa como,

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.7}$$

En la figura D.1 se muestran las gráficas de $g(t)$ para los valores $n = 2$ y $n = 5$. En ésta se ha denotado a la normal estándar como $n = \infty$. A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución t de Student.

1. Es simétrica respecto a la recta $y = 0$.

2. Su media es cero.

3. Su varianza es,
$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

4. La distribución t de Student tiende a la distribución normal cuando n tiende a infinito.

5. $t_{1-p} = -t_p$

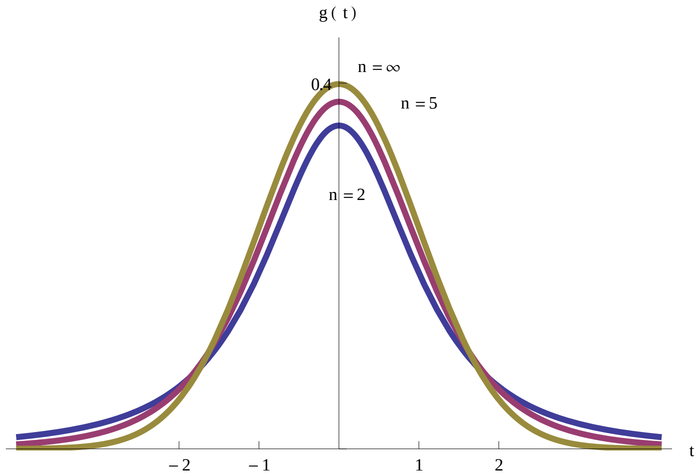


Figura D.1: La distribución t de Student

D.2. La distribución F

Teorema D.2.1 *Sea (U, V) una variable aleatoria bidimensional, donde U y V son variables aleatorias con distribución gama cada una con n y m grados de libertad, respectivamente. Supóngase que la función de densidad conjunta de U y V está determinada por*[2]

$$h(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} v^{m/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & 0 < u < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.8}$$

Si F es una variable aleatoria que se define en términos de U y V mediante

$$F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}, \tag{D.9}$$

entonces la función de densidad $g(f)$ de la variable aleatoria F está determinada por

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.10}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario **??**

$$\begin{aligned} f &= \frac{\frac{u}{n}}{\frac{v}{m}} = \phi_1(u,v), \quad 0 < u < \infty, \\ w &= v = \phi_2(u,v), \quad 0 < v < \infty. \end{aligned} \tag{D.11}$$

[2]Esto corresponde a la hipótesis de independencia entre U y V.

Las funciones inversas son:

$$\begin{array}{ll} u = \frac{nwf}{m} = \psi_1(f,w), & -\infty < z < \infty, \\ v = w = \psi_2(t,v), & 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.12}$$

De acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial f}\psi_1(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_1(f,w) \\ \frac{\partial}{\partial f}\psi_2(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_2(f,w) \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \frac{n}{m}w & \frac{n}{m}f \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ &= \frac{n}{m}w. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables F y W se determina de acuerdo con la ecuación **??**

$$\begin{aligned} g(f,w) &= f(\psi_1(f,w),\psi_2(f,w))|J|, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{nwf}{2m}}\frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}}\left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{nwf}{2m}}e^{-\frac{w}{2}}\left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right), \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(f,w) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right), & 0 < f < \infty, \\ & 0 < w < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.13}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F corresponde a la marginal que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(f,w)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(f) &= \int_0^{-\infty} g(f,w)du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1}e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})}\left(\frac{n}{m}w\right)dw, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $z = kw$ donde $k = \frac{1}{2}(1 + \frac{nf}{m})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(f) &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \int_0^\infty \left(\frac{nfz}{km}\right)^{n/2-1} \left(\frac{z}{k}\right)^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{mk}\right) \frac{1}{k} dz, \\
&= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty \left(\frac{nfz}{m}\right)^{n/2-1} z^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{m}\right) dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty (fz)^{n/2-1} z^{m/2-1} e^{-z} z dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty z^{n/2-1} z^{m/2-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^\infty z^{\frac{n+m}{2}-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}}, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}},
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F se expresa como,

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.14}$$

La función $g(f)$ no solo depende de los valores de sus parámetro n y m, sino que también depende del orden en que éstos se tomen. Por lo anterior, es necesario tener presente que n se definió como los grados de libertad de la variable U, que corresponde al numerador en la ecuación **??**. De la misma manera, m se definió como los grados de libertad de la variable aleatoria V, que corresponde al denominador en la ecuación **??**.
En la figura D.2 se muestran las gráficas de $g(f)$ para las parejas de valores $(n, m) = (6, 10)$ y $(n, m) = (6, 30)$

A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución F.

1. Tiene un único máximo en
$$\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{m}{m+2}\right) \quad n > 2.$$

2. Su media es
$$E(F) = \frac{m}{m-2} \quad m > 2.$$

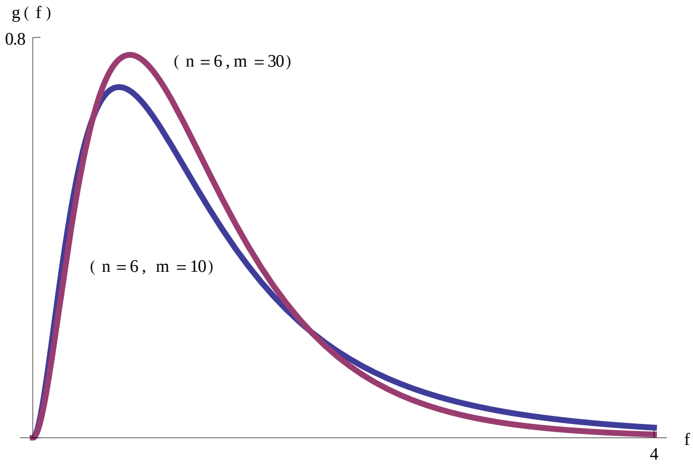


Figura D.2: La distribución F

3. Su varianza es,

$$\sigma^2 = \frac{m^2(2m+2n-4)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad m > 4.$$

4.

Teorema D.2.2 *Demuestre la validez de la propiedad* $F_{1-p,n,m} = \frac{1}{F_{p,m,n}}$.

Demostración: Considérese que F se define de acuerdo con la ecuación D.9, se ha probado que F tiene distribución dada por la ecuación D.14. Si ahora se define la variable aleatoria $F' = 1/F$, entoces

$$F' = \frac{1}{F} = \frac{\frac{V}{m}}{\frac{U}{n}} \tag{D.15}$$

La variable aleatoria F' tiene distribución F con m y n grados de libertad. Nótese que los indíces, están invertido. Ahora considérense los cuantiles, denotados por $1-\alpha$, para F, donde $\alpha > 0$, es decir,

$$\begin{aligned} P(F \leq f_{1-\alpha}(n,m)) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{1}{F} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha, \\ P\left(F' \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha \end{aligned} \tag{D.16}$$

Por otro lado, los cuantiles α de F', están dados por,

$$P(F' \leq f'_\alpha(m,n)) = \alpha, \quad \alpha > 0. \tag{D.17}$$

Como las escuaciones D.16 y D.17 son equivalentes, entonces

$$f'_\alpha(m,n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)} \quad \blacksquare \tag{D.18}$$

Apéndices E

Tablas de las distribuciones

TABLAS ESTADÍSTICAS.

Tabla 1

Función de Distribución Binomial

		P										
n	***X***	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
2	**0**	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	**0**	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	**0**	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	**0**	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	**0**	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9985	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	1.0000	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	1.0000	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	**0**	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9980	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	1.0000	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	1.0000	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	**0**	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9973	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9999	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	1.0000	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9966	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9999	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	1.0000	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461

						P						
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	**6**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	**0**	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9957	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9999	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	1.0000	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	1.0000	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	**0**	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.9948	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9998	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	1.0000	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	1.0000	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	**0**	0.8864	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.9938	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9998	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	1.0000	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	1.0000	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1.0000	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	**0**	0.8775	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.9928	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9997	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	1.0000	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	1.0000	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1.0000	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

		P										
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
14	**0**	0.8687	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.9916	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9997	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	1.0000	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	1.0000	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	**0**	0.8601	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9904	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9996	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	1.0000	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	1.0000	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	1.0000	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	**0**	0.8515	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.9891	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003
	2	03.9995	0.9571	0.7893	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021
	3	1.0000	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106
	4	1.0000	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384
	5	1.0000	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051
	6	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	**0**	0.8429	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.9877	0.7922	0.48l8	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001
	2	0.9994	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012
	3	1.0000	0.9912	0.9l74	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064
	4	1.0000	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245
	5	1.0000	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717
	6	1.0000	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662

		P										
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
17	**7**	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936
	14	1,0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	**0**	0.8345	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9862	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001
	2	0.9993	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007
	3	1.0000	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038
	4	1.0000	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154
	5	1.0000	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481
	6	1.0000	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9916	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	**0**	0.8262	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9847	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.9991	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004
	3	1.0000	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022
	4	1.0000	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096
	5	1.0000	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318
	6	1.0000	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	**0**	0.8179	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9831	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9990	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	1.0000	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
	4	1.0000	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059

n	X	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
						P						
20	**5**	1.0000	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
	6	1.0000	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
	7	1.0000	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	**0**	0.7778	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9742	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9980	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.9999	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
	4	1.0000	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
	5	1.0000	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
	6	1.0000	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
	7	1.0000	1.0000	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 2

Función de Distribución de Poisson

l

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4338	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.988!
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

					l					
X	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	.0.2650
4	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6664	0.6510	0.6335	0.6160
6	0.8787	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767	0.7622
7	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9050	0.8960	0.8867	0.8769	0.8666
8	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382	0.9319
9	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717	0.9682
10	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880	0.9863
11	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953	0.9945
12	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980
13	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**5.7**	**5.8**	**5.9**	**6.0**
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0-0030	0.0027	0.0025
1	0.0372	0.0342	0.0314	0.0289	0.0266	0.0244	0.0224	0.0206	0.0189	0.0174
2	0.1165	0.1088	0.1016	0.0948	0.0884	0.0824	0.07&8	0.0715	0.0666	0.0620
3	0.2513	0.2381	0.2254	0.2133	0.2017	0.1906	0.1801	0.1700	0.1604	0.1512
4	0.4231	0.4061	0.3895	0.3733	0.3575	0.3422	0.3272	0.3127	0.2987	0.2&51
5	0.5984	0.5809	0.5635	0.5461	0.5289	0.5119	0.4950	0.4783	0.4619	0.4457
6	0.7474	0.7324	0.7171	0.7017	0.6860	0.6703	0.6544	0.6384	0.6224	0.6063
7	0.8560	0.8449	0.8335	0.8217	0.8095	0.7970	0.7842	0.7710	0.7576	0.7440
8	0.9252	0.9181	0.9106	0.9027	0.8944	0.8857	0.8766	0.8672	0.8574	0.8472
9	0.9644	0.9603	0.9559	0.9512	0.9462	0.9409	0.9352	0.9292	0.9228	0.9161
10	0.9844	0.9823	0.9800	0.9775	0.9747	0.9718	0.9686	0.9651	0.9614	0.9574
11	0.9937	0.9927	0.9916	0.9904	0.9890	0.9875	0.9859	0.9841	0.9821	0.9799
12	0.9976	0.9972	0.9967	0.9962	0.9955	0.9949	0.9941	0.9932	0.9922	0.9912
13	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980	0.9977	0.9973	0.9969	0.9964
14	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9990	0.9988	0.9986
15	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

X	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**	**6.6**	**6.7**	**6.8**	**6.9**	**7.0**
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0159	0.0146	0.0134	0.0123	0.0113	0.0103	0.0095	0.0087	0.0080	0.0073
2	0.0577	0.0536	0.0498	0.0463	0.0430	0.0400	0.0371	0.0344	0.0320	0.0296
3	0.1425	0.1342	0.1264	0.1189	0.1119	0.1052	0.0988	0.0928	0.0871	0.0818
4	0.2719	0.2592	0.2469	0.2351	0.2237	0.2127	0.2022	0.1920	0.1823	0.1730
5	0.4298	0.4141	0.3988	0.3837	0.3690	0.3547	0.3407	0.3270	0.3137	0.3007
6	0.5902	0.5742	0.5582	0.5423	0.5265	0.5108	0.4953	0.4799	0.4647	0.4497
7	0.7301	0.7160	0.7018	0.6873	0.6728	0.6581	0.6433	0.6285	0.6136	0.5987
8	0.8367	0.8259	0.8148	0.8033	0.7916	0.7796	0.7673	0.7548	0.7420	0.7291
9	0.9090	0.9016	0.8939	0.8858	0.8774	0.8686	0.8596	0.8502	0.8405	0.8305
10	0.9531	0.9486	0.9437	0.9386	0.9332	0.9274	0.9214	0.9151	0.9084	0.9015
11	0.9776	0.9750	0.9723	0.9693	0.9661	0.9627	0.9591	0.9552	0.9510	0.9467
12	0.9900	0.9887	0.9873	0.9857	0.9840	0.9821	0.9801	0.9779	0.9755	0.9730
13	0.9958	0.9952	0.9945	0.9937	0.9929	0.9920	0.9909	0.9898	0.9885	0.9872
14	0.9984	0.9981	0.9978	0.9974	0.9970	0.9966	0.9961	0.9956	0.9950	0.9943
15	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9984	0.9982	0.9979	0.9976
16	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990
17	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1 0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

					l					
X	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**7.5**	**7.6**	**7.7**	**7.8**	**7.9**	**8.0**
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0067	0.0061	0.0056	0.0051	0.0047	0.0043	0.0039	0.0036	0.0033	0.0030
2	0.0275	0.0255	0.0236	0.0219	0.0203	0.0188	0.0174	0.0161	0.0149	0.0138
3	0.0767	0.0719	0.0674	0.0632	0.0591	0.0554	0.0518	0.0485	0.0453	0.0424
4	0.1641	0.1555	0.1473	0.1395	0.1321	0.1249	0.1181	0.1117	0.1055	0.0996
5	0.2881	0.2759	0.2640	0.2526	0.2414	0.2307	0.2203	0.2103	0.2006	0.1912
6	0.4349	0.4204	0.4060	0.3920	0.3782	0.3646	0.3514	0.3384	0.3257	0.3134
7	0.5838	0.5689	0.5541	0.5393	0.5246	0.5100	0.4956	0.4812	0.4670	0.4530
8	0.7160	0.7027	0.6892	0.6757	0.6620	0.6482	0.6343	0.6204	0.6065	0.5926
9	0.8202	0.8097	0.7988	0.7877	0.7764	0.7649	0.7531	0.7411	0.7290	0.7166
10	0.8942	0.8867	0.8788	0.8707	0.8622	0.8535	0.8445	0.8352	0.8257	0.8159
11	0.9420	0.9371	0.9319	0.9265	0.9208	0.9148	0.9085	0.9020	0.8952	0.8881
12	0.9703	0.9673	0.9642	0.9609	0.9573	0.9536	0.9496	0.9454	0.9409	0.9362
13	0.9857	0.9841	0.9824	0.9805	0.9784	0.9762	0.9739	0.9714	0.9687	0.9658
14	0.9935	0.9927	0.9918	0.9908	0.9897	0.9886	0.9873	0.9859	0.9844	0.9827
15	0.9972	0.9969	0.9964	0.9959	0.9954	0.9948	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918
16	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9974	0.9971	0.9967	0.9963
17	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989	0.9988	0.9986	0.9984
18	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
19	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
X	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0028	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0018	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012
2	0.0127	0.0118	0.0109	0.0100	0.0093	0.0086	0.0079	0.0073	0.0068	0.0062
3	0.0396	0.0370	0.0346	0.0323	0.0301	0.0281	0.0262	0.0244	0.0228	0.0212
4	0.0941	0.0887	0.0837	0.0789	0.0744	0.0701	0.0660	0.0621	0.0584	0.0550
5	0.1823	0.1736	0.1653	0.1573	0.1496	0.1422	0.1352	0.1284	0.1219	0.1157
6	0.3013	0.2896	0.2781	0.2670	0.2562	0.2457	0.2355	0.2256	0.2160	0.2068
7	0.4391	0.4254	0.4119	0.3987	0.3856	0.3728	0.3602	0.3478	0.3357	0.3239
8	0.5786	0.5647	0.5508	0.5369	0.5231	0.5094	0.4958	0.4823	0.4689	0.4557
9	0.7041	0.6915	0.6788	0.6659	0.6530	0.6400	0.6269	0.6137	0.6006	0.5874
10	0.8058	0.7956	0.7850	0.7743	0.7634	0.7522	0.7409	0.7294	0.7178	0.7060
11	0.8807	0.8731	0.8652	0.8571	0.8487	0.8400	0.8311	0.8220	0.8126	0.8030
12	0.9313	0.9261	0.9207	0.9150	0.9091	0.9029	0.8965	0.8898	0.8829	0.8758
13	0.9628	0.9595	0.9561	0.9524	0.9486	0.9445	0.9403	0.9358	0.9311	0.9262
14	0.9810	0.9791	0.9771	0.9749	0.9726	0.9701	0.9675	0.9647	0.9617	0.9585
15	0.9908	0.9898	0.9887	0.9875	0.9862	0.9848	0.9832	0.9816	0.9798	0.9780
16	0.9958	0.9953	0.9947	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918	0.9909	0.9899	0.9889
17	0.9982	0.9979	0.9977	0.9973	0.9970	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947
18	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9981	0.9978	0.9976
19	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989
20	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996
21	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**	**9.5**	**9.6**	**9.7**	**9.8**	**9.9**	**10.0**
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0011	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005
2	0.0058	0.0053	0.0049	0.0045	0.0042	0.0038	0.0035	0.0033	0.0030	0.0028
3	0.0198	0.0184	0.0172	0.0160	0.0149	0.0138	0.0129	0.0120	0.0111	0.0103
4	0.0517	0.0486	0.0456	0.0429	0.0403	0.0378	0.0355	0.0333	0.0312	0.0293
5	0.1098	0.1041	0.0987	0.0935	0.0885	0.0838	0.0793	0.0750	0.0710	0.0671
6	0.1978	0.1892	0.1808	0.1727	0.1650	0.1575	0.1502	0.1433	0.1366	0.1301
7	0.3123	0.3010	0.2900	0.2792	0.2687	0.2584	0.2485	0.2388	0.2294	0.2202
8	0.4426	0.4296	0.4168	0.4042	0.3918	0.3796	0.3676	0.3558	0.3442	0.3328
9	0.5742	0.5611	0.5480	0.5349	0.5218	0.5089	0.4960	0.4832	0.4705	0.4579
10	0.6941	0.6820	0.6699	0.6576	0.6453	0.6330	0.6205	0.6081	0.5956	0.5830
11	0.7932	0.7832	0.7730	0.7626	0.7570	0.7412	0.7303	0.7193	0.7081	0.6968
12	0.8684	0.8607	0.8529	0.8448	0.8364	0.8279	0.8191	0.8101	0.8009	0.7916
13	0.9210	0.9156	0.9100	0.9042	0.8981	0.8919	0.8853	0.8786	0.8716	0.8645
14	0.9552	0.9517	0.9480	0.9441	0.9400	0.9357	0.9312	0.9265	0.9216	0.9165
15	0.9760	0.9738	0.9715	0.9691	0.9665	0.9638	0.9609	0.9579	0.9546	0.9513
16	0.9878	0.9865	0.9852	0.9838	0.9823	0.9806	0.9789	0.9770	0.9751	0.9730
17	0.9941	0.9934	0.9927	0.9919	0.9911	0.9902	0.9892	0.9881	0.9870	0.9857
18	0.9973	0.9969	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947	0.9941	0.9935	0.9928
19	0.9988	0.9986	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9975	0.9972	0.9969	0.9965
20	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9986	0.9984
21	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993
22	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**	**19.0**	**20.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0-3715	0.2867	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437
22	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9S94	0.9317	0.8933	0.&432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878
26	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9?05	0.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882	0.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930	0.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960	0.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

Tabla 3

Función de Distribución y de Probabilidad Hipergeométrica.

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
2	1	1	0	0.500000	0.500000
2	1	1	1	1.000000	0.500000
3	1	1	0	0.666667	0.666667
3	1	1	1	1.000000	0.333333
3	2	1	0	0.333333	0.333333
3	2	1	1	1.000000	0.666667
3	2	2	1	0.666667	0.666667
3	2	2	2	1.000000	0.333333
4	1	1	0	0.750000	0.760000
4	1	1	1	1.000000	0.250000
4	2	1	0	0.500000	0.500000
4	2	1	1	1.000000	0.500000
4	2	2	0	0.166667	0.166667
4	2	2	1	0.833333	0.666667
4	2	2	2	1.000000	0.166667
4	3	1	0	0.250000	0.250000
4	3	1	1	1.000000	0.750000
4	3	2	1	0.500000	0.500000
4	3	2	2	1.000000	0.500000
4	3	3	2	0.750000	0.750000
4	3	3	3	1.000000	0.250000
5	1	1	0	0.800000	0.800000
5	1	1	1	1.000000	0.200000
5	2	1	0	0.600000	0.600000
5	2	1	1	1.000000	0.400000
5	2	2	0	0.300000	0.300000
5	2	2	1	0.900000	0.600000
5	2	2	2	1.000000	0.100000
5	3	1	0	0.400000	0.400000
5	3	1	1	1.000000	0.600000
5	3	2	0	0.100000	0.100000
5	3	2	1	0.700000	0.600000
5	3	2	2	1.000000	0.300000
5	3	3	1	0.300000	0.300000
5	3	3	2	0.900000	0.600000
5	3	3	3	1.000000	0.100000
5	4	1	0	0.200000	0.200000
5	4	1	1	1.000000	0.800000
5	4	2	1	0.400000	0.400000
5	4	2	2	0.000000	0.600000
5	4	3	2	0.600000	0.600000
5	4	3	3	1.000000	0.400000
5	4	4	3	0.800000	0.800000
5	4	4	4	1.000000	0.200000
6	1	1	0	0.833333	0.833333
6	1	1	1	1.000000	0.166667
6	2	1	0	0.666667	0.666667
6	2	1	1	1.000000	0.333333
6	2	2	0	0.400000	0.400000
6	2	2	1	0.933333	0.533333
6	2	2	2	1.000000	0.066667
6	3	1	0	0.500000	0.500000
6	3	1	1	1.000000	0.500000
6	3	2	0	0.200000	0.200000
6	3	2	1	0.800000	0.600000
6	3	2	2	1.000000	0.200000
6	3	3	0	0.050000	0.050000
6	3	3	1	0.500000	0.450000
6	3	3	2	0.950000	0.450000
6	3	3	3	1.000000	0.050000
6	4	1	0	0.333333	0.333333
6	4	1	1	1.000000	0.666667
6	4	2	0	0.066667	0.066667
6	4	2	1	0.600000	0.533333
6	4	2	2	1.000000	0.400000
6	4	3	1	0.200000	0.200000
6	4	3	2	0.800000	0.600000
6	4	3	3	1.000000	0.200000
6	4	4	2	0.400000	0.400000
6	4	4	3	0.933333	0.533333
6	4	4	4	1.000000	0.066667
6	5	1	0	0.166667	0.166667
6	5	1	1	1.000000	0.833333
6	5	2	I	0.333333	0.333333
6	5	2	2	1.000000	0.666667
6	5	3	2	0.500000	0.500000
6	5	3	3	1.000000	0.500000
6	5	4	3	0.666667	0.666667
6	5	4	4	1.000000	0.333333
6	5	5	4	0.833333	0.833333
6	5	5	5	1.000000	0.166667
7	1	1	0	0.857143	0.857143
7	1	1	1	1.000000	0.142857
7	2	1	0	0.714286	0.714286
7	2	1	1	1.000000	0.285714
7	2	2	0	0.476190	0.476190
7	2	2	1	0.952381	0.476190
7	2	2	2	1.000000	0.047619
7	3	1	0	0.571429	0.571429
7	3	1	1	1.000000	0.428571
7	3	2	0	0.285714	0.285714
7	3	2	1	0.857143	0.571429
7	3	2	2	1.000000	0.142857
7	3	3	0	0.114286	0.114286
7	3	3	1	0.628571	0.514286
7	3	3	2	0.971428	0.342857
7	3	3	3	1.000000	0.028571
7	4	1	0	0.428571	0.428571
7	4	1	1	1.000000	0.571429
7	4	2	0	0.142857	0.142857
7	4	2	1	0.714286	0.571429
7	4	2	2	1.000000	0.285714
7	4	3	0	0.025571	0.028571
7	4	3	1	0.371429	0.342857
7	4	3	2	0.885714	0.514286
7	4	3	3	1.000000	0.114286
7	4	4	1	0.114286	0.114286
7	4	4	2	0.628571	0.514286

N	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***
7	4	4	3	0.971428	0342857
7	4	4	4	1.000000	0.028571
7	5	1	0	0.285714	0.285714
7	5	1	1	1.000000	0.714286
7	5	2	0	0.047619	0.047619
7	5	2	1	0.523809	0.476190
7	5	2	2	1.000000	0.476190
7	5	3	1	0.142857	0.142857
7	5	3	2	0.714286	0.571429
7	5	3	3	1.000000	0.285714
7	5	4	2	0.285714	0.285714
7	5	4	3	0.857143	0.571429
7	5	4	4	1.000000	0.142857
7	5	5	3	0.476190	0.476190
7	5	5	4	0.952381	0.476190
7	5	5	5	1.000000	0.047619
7	6	1	0	0.142857	0.142857
7	6	1	1	1.000000	0.857143
7	6	2	1	0.285714	0.285714
7	6	2	2	1.000000	0.714286
7	6	3	2	0.428571	0.428571
7	6	3	3	1.000000	0.571429
7	6	4	3	0.571429	0.571429
7	6	4	4	1.000000	0.428571
7	6	5	4	0.714286	0.714286
7	6	5	5	1.000000	0.285714
7	6	6	5	0.857143	0.857143
7	6	6	6	1.000000	0.142857
8	1	1	0	0.875000	0.875000
8	1	1	1	1.000000	0.125000
8	2	1	0	0.750000	0.750000
8	2	1	1	1.000000	0.250000
8	2	2	0	0.535714	0.535714
8	2	2	1	0.964286	0.428571
8	2	2	2	1.000000	0.035714
8	3	1	0	0.625000	0.625000
8	3	1	1	1.000000	0.375000
8	3	2	0	0.357143	0.357143
8	3	2	1	0.892857	0.535714
8	3	2	2	1.000000	0.107143
8	3	3	0	0.178571	0.178571
8	3	1	1	0.714286	0.535714
8	3	3	2	0.982143	0.267857
8	3	3	3	1.000000	0.017857
8	4	1	0	0.500000	0.500000
8	4	1	1	1.000000	0.500000
8	4	2	0	0.214286	0.214286
8	4	2	1	0.785714	0.571429
8	4	2	2	1.000000	0.214286
8	4	3	0	0.071429	0.071429
8	4	3	1	0.500000	0.428571
8	4	3	2	0.928571	0.428571
8	4	3	3	1.000000	0.071429
8	4	4	0	0.014286	0.014286
8	4	4	1	0.242857	0.228571
8	4	4	2	0.757143	0.5142S6
8	4	4	3	0.985714	0.228571
8	4	4	4	1.000000	0.014286
8	5	1	0	0.375000	0.375000

N	***n***	***k***	***x***	***F(x)***	***P(x)***
8	5	1	1	1.000000	0.625000
8	5	2	0	0.107143	0.107143
8	5	2	1	0.642857	0.5357Í4
8	5	2	2	1.000000	0.357143
8	5	3	0	0.017857	0.017857
8	5	3	1	0.285714	0.267857
8	5	3	2	0.821429	0.535714
8	5	3	3	1.000000	0.178571
8	5	4	1	0.071429	0.071429
8	5	4	2	0.500000	0.428571
8	5	4	3	0.928571	0.428571
8	5	4	4	1.000000	0.071429
8	5	5	2	0.178571	0.178571
8	5	5	3	0.714286	0.535714
8	5	5	4	0.982143	0:267857
8	5	5	5	1.000000	0.017857
8	6	1	0	0.250000	0.250000
8	6	1	1	1.000000	0.750000
8	6	2	0	0.035714	0.035714
8	6	2	1	0.464286	0.428571
8	6	2	2	1.000000	0.535714
8	6	3	1	0.107143	0.107143
8	6	3	2	0.642857	0.535714
8	6	3	3	1.000000	0.357143
8	6	4	2	0.214286	0.214286
8	6	4	3	0.785714	0.571429
8	6	4	4	1.000000	0.214286
8	6	5	3	0.357143	0.357143
8	6	5	4	0.892857	0.535714
8	6	5	5	1.000000	0.107143
8	6	6	4	0.535714	0.535714
8	6	6	5	0.964286	0.428571
8	6	6	6	1.000000	0.035714
8	7	1	0	0.125000	0.125000
8	7	1	1	1.000000	0.875000
8	7	2	1	0.250000	0.250000
8	7	2	2	1.000000	0.750000
8	7	3	2	0.375000	0.375000
8	7	3	3	1.000000	0.625000
8	7	4	3	0.500000	0.500000
8	7	4	4	1.000000	0.500000
8	7	5	4	0.625000	0.625000
8	7	5	5	1.000000	0.375000
8	7	6	5	0.750000	0.750000
8	7	6	6	1.000000	0.250000
8	7	7	6	0.875000	0.875000
8	7	7	7	1.000000	0.125000
9	1	1	0	0.888889	0.888889
9	1	1	1	1.000000	0.111111
9	2	1	0	0.777778	0.777778
9	2	1	1	1.000000	0.222222
9	2	2	0	0.583333	0.583333
9	2	2	1	0.972222	0.388889
9	2	2	2	1.000000	0.027778
9	3	1	0	0.666667	0.666667
9	3	1	1	1.000000	0.333333
9	3	2	0	0.416667	0.416667
9	3	2	1	0.916667	0.500000
9	3	2	2	1.000000	0.083333

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
9	3	3	0	0.238095	0.238095
9	3	3	1	0.773809	0.535714
9	3	3	2	0.988095	0.214286
9	3	3	3	1.000000	0.011905
9	4	1	0	0.555556	0.555556
9	4	1	1	1.000000	0.444444
9	4	2	0	0.277778	0.277778
9	4	2	1	0.833333	0.555556
9	4	2	2	1.000000	0.166667
9	4	3	0	0.119048	0.119048
9	4	3	1	0.595238	0.476190
9	4	3	2	0.952381	0.357143
9	4	3	3	1.000000	0.047619
9	4	4	0	0.039683	0.039683
9	4	4	1	0.357143	0.317460
9	4	4	2	0.833333	0.476190
9	4	4	3	0.992063	0.158730
9	4	4	4	1.000000	0.007936
9	5	1	0	0.444444	0.444444
9	5	1	1	1.000000	0.555556
9	5	2	0	0.166667	0.166667
9	5	2	1	0.722222	0.555556
9	5	2	2	1.000000	0.277778
9	5	3	0	0.047619	0.047619
9	5	3	1	0.404762	0.357143
9	5	3	2	0.880952	0.476190
9	5	3	3	1.000000	0.119048
9	5	4	0	0.007936	0.007936
9	5	4	1	0.166667	0.158730
9	5	4	2	0.642857	0.476190
9	5	4	3	0.960317	0.317460
9	5	4	4	1.000000	0.039683
9	5	5	1	0.039683	0.039683
9	5	5	2	0.357143	0.317460
9	5	5	3	0.833333	0.476190
9	5	5	4	0.992063	0.158730
9	5	5	5	1.000000	0.007936
9	6	1	0	0.333333	0.333333
9	6	1	1	1.000000	0.666667
9	6	2	0	0.083333	0.083333
9	6	2	1	0.583333	0.500000
9	6	2	2	1.000000	0.416667
9	6	3	0	0.011905	0.011905
9	6	3	1	0.226190	0.214286
9	6	3	2	0.761905	0.535714
9	6	3	3	1.000000	0.238095
9	6	4	1	0.047619	0.047619
9	6	4	2	0.404762	0.357143
9	6	4	3	0.880952	0.476190
9	6	4	4	1.000000	0.119048
9	6	5	2	0.119048	0.119048
9	6	5	3	0.595238	0.476190
9	6	5	4	0.952381	0.357143
9	6	5	5	1.000000	0.047619
9	6	6	3	0.238095	0.238095
9	6	6	4	0.773809	0.535714
9	6	6	5	0.988095	0.214286
9	6	6	6	1.000000	0.011905
9	7	1	0	0.222222	0.222222
9	7	1	1	1.000000	0.777778
9	7	2	0	0.027778	0.027778
9	7	2	1	0.416667	0.388889
9	7	2	2	1.000000	0.583333
9	7	3	1	0.083333	0.083333
9	7	3	2	0.583333	0.500000
9	7	3	3	1.000000	0.416667
9	7	4	2	0.166667	0.166667
9	7	4	3	0.722222	0.555556
9	7	4	4	1.000000	0.277778
9	7	5	3	0.277778	0.277778
9	7	5	4	0.833333	0.555556
9	7	5	5	1.000000	0.166667
9	7	6	4	0.416667	0.416667
9	7	6	5	0.916667	0.500000
9	7	6	6	1.000000	0.833333
9	7	7	5	0.583333	0.583333
9	7	7	6	0.972222	0.388889
9	7	7	7	1.000000	0.027778
9	8	1	0	0.111111	0.111111
9	8	1	1	1.000000	0.888889
9	8	2	1	0.222222	0.222222
9	8	2	2	1.000000	0.777778
9	8	3	2	0.333333	0.333333
9	8	3	3	1.000000	0.666667
9	8	4	3	0.444444	0.444444
9	8	4	4	1.000000	0.555556
9	8	5	4	0.555556	0.555556
9	8	5	5	1.000000	0.444444
9	8	6	5	0.666667	0.666667
9	8	6	6	1.000000	0.333333
9	8	7	6	0.777778	0.777778
9	8	7	7	1.000000	0.222222
9	8	8	7	0.888889	0.888889
9	8	8	8	1.000000	0.111111
10	1	1	0	0.900000	0.900000
10	1	1	1	1.000000	0.100000
10	2	1	0	0.800000	0.800000
10	2	1	1	1.000000	0.200000
10	2	2	0	0.622222	0.622222
10	2	2	1	0.977778	0.355556
10	2	2	2	1.000000	0.022222
10	3	1	0	0.700000	0.700000
10	3	1	1	1.000000	0.300000
10	3	2	0	0.466667	0.466667
10	3	2	1	0.933333	0.466667
10	3	2	2	1.000000	0.066667
10	3	3	0	0.291667	0.291667
10	3	3	1	0.816667	0.525000
10	3	3	2	0.991667	0.175000
10	3	3	3	1.000000	0.008333
10	4	1	0	0.600000	0.600000
10	4	1	1	1.000000	0.400000
10	4	2	0	0.333333	0.333333
10	4	2	1	0.866667	0.533333
10	4	2	2	1.000000	0.133333
10	4	3	0	0.166667	0.166667
10	4	3	1	0.666667	0.500000
10	4	3	2	0.966667	0.300000
10	4	3	3	1.000000	0.033333
10	4	4	0	0.071429	0.071429
10	4	4	1	0.452381	0.380952
10	4	4	2	0.880952	0.428571

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*	*N*	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
10	4	4	3	0.995238	0.114286	10	6	3	0	0.033333	0.033333
10	4	4	4	1.000000	0.004762	10	6	3	1	0.333333	0.300000
10	5	1	0	0.500000	0.500000	10	6	3	2	0.833333	0.500000
10	5	1	1	1.000000	0.500000	10	6	3	3	1.000000	0.166667
10	5	2	0	0.222222	0.222222	10	6	4	0	0.004762	0.004762
10	5	2	1	0.777778	0.555556	10	6	4	1	0.119048	0.114286
10	5	2	2	1.000000	0.222222	10	6	4	2	0.547619	0.428571
10	5	3	0	0.083333	0.083333	10	6	4	3	0.928571	0.380952
10	5	3	1	0.500000	0.416667	10	6	4	4	1.000000	0.071429
10	5	3	2	0.916667	0.416667	10	6	5	1	0.023810	0.023810
10	5	3	3	1.000000	0.083333	10	6	5	2	0.261905	0.238095
10	5	4	0	0.023810	0.023810	10	6	5	3	0.738095	0.476190
10	5	4	1	0.261905	0.238095	10	6	5	4	0.976190	0.238095
10	5	4	2	0.738095	0.476190	10	6	5	5	1.000000	0.023810
10	5	4	3	0.976190	0.238095	10	6	6	2	0.071429	0.071429
10	5	4	4	1.000000	0.023810	10	6	6	3	0.452381	0.380952
10	5	5	0	0.003968	0.003968	10	6	6	4	0.880952	0.428571
10	5	5	1	0.103175	0.099206	10	6	6	5	0.995238	0.114286
10	5	5	2	0.500000	0.396825	10	6	6	6	1.000000	0.004762
10	5	5	3	0.896825	0.396825	10	7	1	0	0.300000	0.300000
10	5	5	4	0.996032	0.099206	10	7	1	1	1.000000	0.700000
10	5	5	5	1.000000	0.003968	10	7	2	0	0.066667	0.066667
10	6	1	0	0.400000	0.400000	10	7	2	1	0.533333	0.466667
10	6	1	1	1.000000	0.600000	10	7	2	2	1.000000	0.466667
10	6	2	0	0.133333	0.133333	10	7	3	0	0.008333	0.008333
10	6	2	1	0.666667	0.533333	10	7	3	0	0.008333	0.008333
10	6	2	2	1.000000	0.333333						

Tabla 4

Función de Distribución Normal (0,1)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0-7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Tabla 5

Función de Distribución c^2

	p									
g.l.	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.64	7.90
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.60	5.99	7.38	9.22	10.59
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.82	9.36	11.32	12.82
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.15	13.28	14.82
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.84	15.09	16.76
6	0.67	0.87	1.24	1.63	2.20	10.65	12.60	14.46	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.02	18.47	20.27
8	1.34	1.64	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.55	20.08	21.94
9	1.73	2.09	2.70	3.32	4.17	14.69	16.93	19.03	21.65	23.56
10	2.15	2.55	3.24	3.94	4.86	15.99	18.31	20.50	23.19	25.15
11	2.60	3.05	3.81	4.57	5.58	17.28	19.68	21.93	24.75	26.71
12	3.06	3.57	4.40	5.22	6.30	18.55	21.03	23.35	26.25	28.25
13	3.56	4.10	5.01	5.89	7.04	19.81	22.37	24.75	27.72	29.88
14	4.07	4.65	5.62	6.57	7.79	21.07	23.69	26.13	29.17	31.38
15	4.59	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	.27.50	30.61	32.86
16	5.14	5.81	6.90	7.96	9.31	23.55	26.30	28.86	32.03	34.32
17	5.69	6.40	7.56	8.67	10.08	24.77	27.59	30.20	33.43	35.77
18	6.25	7.00	8.23	9.39	10.86	25.99	28.88	31.54	34.83	37.21
19	6.82	7.63	8.90	10.11	11.65	27.21	30.15	32.87	36.22	38.63
20	7. 42	8.25	9.59	10.85	12.44	28.42	31.42	34.18	37.59	40.05
21	8.02	8.89	10.28	11.59	13.24	29.62	32.68	35.49	38.96	41.45
22	8.62	9.53	10.98	12.34	14.04	30.82	33.93	36.79	40.31	42.84
23	9.25	10.19	11.69	13.09	14.85	32.01	35.18	38.09	41.66	44.23
24	9.87	10.85	12.40	13.84	15.66	33.20	36.42	39.38	43.00	45.60
25	10.50	11.51	13.11	14.61	16.47	34.38	37.66	40.66	44.34	46.97
26	11.13	12.19	13.84	15.38	17.29	35.57	38.89	41.94	45.66	48.33
27	11.79	12.87	14.57	16.15	18.11	36.74	40.12	43.21	46.99	49.69
28	12.44	13.55	15.30	16.92	18.94	37.92	41.34	44.47	48.30	51.04
29	13.09	14.24	16.04	17.70	19.77	39.09	42.56	45.74	49.61	52.38
30	13.77	14.94	16.78	18.49	20.60	40.26	43.78	46.99	50.91	53.71
35	17.16	18.49	20.56	22.46	24.79	46.06	49.81	53.22	57.36	60.31
40	20.67	22.14	24.42	26.51	29.06	51.80	55.75	59.34	63.71	66.80
45	24.28	25.88	28.36	30.61	33.36	57.50	61.65	65.41	69.98	73.20
50	27.96	29.68	32.35	34.76	37.69	63.16	67.50	71.42	76.17	79.52
60	35.50	37.46	40.47	43.19	46.46	74.39	79.08	83.30	88.40	91.98
70	43.25	45.42	48.75	51.74	55.33	85.52	90.53	95.03	100.44	104.24
80	51.14	53.52	57.15	60.39	64.28	96.57	101.88	106.63	112.34	116.35
90	59.17	61.74	65.64	69.13	73.29	107.56	113.14	118.14	124.13	128.32
100	67.30	70.05	74.22	77.93	82.36	118.49	124.34	129.56	135.82	140.19

Tabla 6

Función de Distribución t-Student

	p						
g.l.	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.999**
1	1.376	3.078	6.31	12.70	31.82	63.65	318.39
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.32
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.183
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601	3.131
500	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
1000	0.842	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098

Esta distribución es simétrica: $t_{n,p} = t_{n,1-p}$

Tabla 7

Función de Distribución F de Snedecor

P = 0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.79	2.75	2.72	2.70
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	3.18	2.81	2.61	2.48	1.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
35	2.85	2.46	2.25	2.11	2.02	1.95	1.90	1.85	1.82	1.79
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66
200	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63
500	2.72	2.31	2.09	1.96	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64	1.61
1000	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61

P=0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	60.47	60.71	61.22	61.74	62.06	62.26	62.53	62.69	63.00	63.29
2	9.40	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.22	5.22	5.20	5.19	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.91	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.78	3.76
5	3.28	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.13	3.11
6	2.92	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.75 2	2.72
7	2.68	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.50 2	2.47
8	2.52	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32 2	2.30
9	2.40	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.19	2.16
10	2.30	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.09	2.06
11	2.23	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.00	1.98
12	2.17	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.94	1.91
13	2.12	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.88	1.85
14	2.07	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.83	1.80
15	2.04	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.79	1.76
16	2.01	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.76	1.72
17	1.98	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.73	1.69
18	1.95	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.70	1.66
19	1.93	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.67	1.64
20	1.91	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.65	1.61
21	1.90	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.63	1.59
22	1.88	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.61	1.57
23	1.87	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.59	1.55
24	1.85	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.58	1.54
25	1.84	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.56	1.52
26	1.83	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.55	1.51
27	1.82	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.54	1.50
28	1.81	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.53	1.48
29	1.80	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.52	1.47
30	1.79	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.51	1.46
35	1.76	1.74	1.69	1.63	1.60	1.57	1.53	1.51	1.47	1.42
40	1.74	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.43	1.38
50	1.70	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.39	1.33
60	1.68	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.36	1.30
80	1.65	1.63	1.57	1.51	1.47	1.44	1.40	1.38	1.32	1.25
100	1.64	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.29	1.22
200	1.60	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.24	1.16
500	1.58	1.56	1.50	1.44 .	1.39	1.36	1.31	1.28	1.21	1.11
1000	1.58	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.20	1.08

P=0.95

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161.4	199.50	215.7	224.5	230.1	233.9	236.7	238.8	240.5	241.8
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.97
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.73
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

P=0.95

	Grados de libertad 1 ***gl_1***									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	242.9	243.9	245.9	248.0	249.2	250.0	251.1	251.7	253.0	254.1
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.76	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.74	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.70	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.60	3.57	3.'5)	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.31	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.10	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.94	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.82	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.46	2.41
12	2.72	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.63	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.57	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
15	2.51	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.46	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
17	2.41	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.02	1.97
18	2.37	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.34	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.31	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
21	2.28	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.88	1.82
22	2.26	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
23	2.24	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.82	1.76
24	2.22	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
25	2.20	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.78	1.72
26	2.18	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
27	2.17	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.74	1.68
28	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
29	2.14	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.71	1.65
30	2.13	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
35	2.07	2.04	1.96	1.88	1.82	1.79	1.74	1.70	1.63	1.57
40	2.04	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
50	1.99	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.52	1.45
60	1.95	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
80	1.91	1.88	1.79	1.70	1.64	1.60	1.54	1.51	1.43	1.34
100	1.89	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
200	1.84	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.32	1.21
500	1.81	1.77	1.69	1.59	1.53	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1000	1.80	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.83	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
1000	5.02	3.69	3.12	2.79	2.59	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1								
gl_2	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**1000**
1	976.7	978.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	39.41	39.43	39.45	39.45	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.39	2.32	2.26	1.19
19	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
1000	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.50	27.34	27.22
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6,93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
2	99.41	99.42	99.43	99.45	99.46	99.46	99.47	99.48	99.49	99.51
3	27.12	27.03	26.85	26.67	26.58	26.50	26.41	26.35	26.24	26.14
4	14.45	14.37	14.19	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.58	13.48
5	9.96	5.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.30	9.24	9.13	9.03
6	7.79	7.7.2	7.56	7.40	7.29	7.23	7.15	7.09	6.99	6.89
7	6.54	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.75	5.66
8	5.73	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	4.96	4.87
9	5.18	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.41	4.32
10	4.77	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.01	3.92
11	4.46	4.40	4.25	4.10	4.00	3.94	3.86	3.81	3.71	3.61
12	4.22	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.47	3.37
13	4.02	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.27	3.18
14	3.86	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.11	3.02
15	3.73	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	2.98	2.88
16	3.62	.3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.86	2.76
17	3.52	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.76	2.66
18	3.43	'3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.68	2.58
19	3.36	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.60	2.50
20	3.29	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.54	2.43
21	3.24	3.17	3.03	2.88	2.78	2.72	2.64	2.58	2.48	2.37
22	3.18	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.42	2.32
23	3.14	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.37	2.27
24	3.09	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.33	2.22
25	3.06	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.29	2.18
26	3.02	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.25	2.14
27	2.99	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.22	2.11
28	2.96	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.19	2.08
29	2.93	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.16	2.05
30	2.91	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.24	2.13	2.02
35	2.80	2.74	2.60	2.44	2.35	2.28	2.19	2.14	2.02	1.90
40	2.73	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	1.94	1.82
50	2.62	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.82	1.70
60	2.56	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.75	1.62
80	2.48	2.42	2.27	2.12	2.01	1.94	1.85	1.79	1.65	1.51
100	2.43	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.60	1.45
200	2.34	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.48	1.30
500	2.28	2.22	2.07	1.92	1.81	1.74	1.63	1.57	1.41	1.20
1000	2.27	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.38	1.16

Referencias

[1] Paul L. Meyer, Probabilidad y Aplicaciones Estadística, Segunda Edición, Editorial Fondo Educativo Interamericano, S. A., México(1973).

[2] Murray R. Spiegel & John J. Schiller & R. Alu Srinivasan, Probabilidad y Estadística, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(2003).

[3] Ronald E. Walpole & Raymond H. Myers, Probabilidad y Estadística, Cuarta Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1992).

[4] George C. Canavos, Probabilidad y Estadística, Primera Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1988).

[5] Diccionario enciclopédico , Tercera edición, Editorial Espasa-Calpe , España(1986).

[6] Real academia de la lengua española.(2018).*azar*. 8 de febrero de 2018, de RAE Sitio web: http://dle.rae.es/?id=4dukUoz

[7] Universidad de Jaén. *TABLAS ESTADÍSTICAS*. 26 de noviembre de 2017. de Sitio web: http://www4.ujaen.es/ mpfrias/TablasDistribucionesI.pdf