Capítulo 22 La ecuación de Cauchy-Euler ([redacted])

Si una ecuación diferencial de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n}{dx^n} y + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \cdots + a_1 x \frac{d}{dx} y + a_0 y = f(x)$$

en donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes, a esta expresión se le conoce como la ecuación de Cauchy-Euler.

Consideremos el caso particular $n = 2$ y $f(x) = 0$

$$a_2 x^2 \frac{d^2}{dx^2} y + a_1 x \frac{d}{dx} y + a_0 y = 0 \cdots \circledast$$

Sol.
Se propone el cambio $y = x^m \therefore y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)y^{m-2}$

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

se puede expresar como

$$a_2 x^2 m(m-1)x^{m-2} + a_1 x m x^{m-1} + a_0 x^m = 0$$

$$x^m [a_2 m(m-1) + a_1 m + a_0] = 0$$

$$a_2 m(m-1) + a_1 m + a_0 = 0$$

o en forma equivalente

$$a_2 m^2 + m(a_1 - a_2) + a_0 = 0$$

$$m = \frac{-(a_1 - a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Al igual que en el caso de una ecuación de coeficientes constantes de segundo orden, tenemos 3 posibles situaciones dependiendo del valor del discriminante

$$(a_1 - a_2)^2 - 4a_1 a_0$$

I.-Caso en que las raices son distintas $(a_1 - a_2)^2 - 4a_1 a_0 > 0$ las soluciones estan dadas por:

$$m_1 = \frac{-(a_1 - a_2) + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

$$m_2 = \frac{-(a_1 - a_2) - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

y la solución general a la ecuación $\circledast$ estará dada por:

$$y_h(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 c^{m_2}$$