Método Maestro

Sean $a \geq 1$ y $b > 1$ constantes. Sea $f(n)$ una función, y sea $T(n)$ una recurrencia definida como:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

donde n/b puede ser $\lfloor n/b \rfloor$ o $\lceil n/b \rceil$. Entonces $T(n)$ está acotado asintóticamente por:

$T(n)$ está acotado

Caso I:) Si $\boxed{f(n) \in \Theta(n^{\log_b a - \varepsilon})}$ para algún $\varepsilon > 0$,

entonces $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$.

Caso II:) Si $\boxed{f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})}$, entonces $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_b n)}$

Caso III:) Si $\boxed{f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})}$ para algún $\varepsilon > 0$, y si

$a f(n/b) \leq c f(n)$ para alguna constante $c < 1$, y si

$$\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} \geq n^{\gamma}$$ para algún $\gamma > 0$, entonces

$$\boxed{T(n) = \Theta(f(n))}.$$

Ejemplo: $T(n) = 9T(n/3) + n$

Se tiene $a=9$, $b=3$ y $f(n)=n$.

luego $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

se tiene:

$$f(n) = n \in O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right) = O\left(n^{\log_3 9-\varepsilon}\right) = O\left(n^{2-\varepsilon}\right)$$

Aplicando el Teorema maestro, caso I,

se tiene $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_3 9}\right)$

$= \Theta(n^2)$

En esta parte fíjate en primero y ultimo n y n^2, para saber que le restas o sumas

(2) $T(n) = T(2n/3) + 1$

$T(n) = T\left(\frac{n}{3/2}\right) + 1$

Sea $a=1$, $b=3/2$ y $f(n)=1$,

se tiene $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$

Puesto que $f(n) = 1 \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_{3/2} 1}\right) = \Theta\left(n^0 = 1\right)$

Aplicando el teorema maestro, caso II

se tiene $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log_b n\right)$

$= \Theta\left(\log_{3/2} n\right)$

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$

Sea $a=3$, $b=4$ y $\boxed{f(n) = n\log n}$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.79}$$

Se tiene

$$f(n) = n\log n \in \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right) = \Omega\left(n^{\log_4 3+\varepsilon}\right) = \Omega\left(n^{0.79+\varepsilon}\right)$$

Por otro lado

$$af(n/b) = 3f(n/4) = 3\,\frac{n}{4}\log\frac{n}{4}$$

$$= \frac{3}{4}n\log\frac{n}{4} = \frac{3}{4}n\left[\log n - \log 4\right]$$

$$\leq \frac{3}{4}n\log n = c\,f(n) \quad \text{con } c = \frac{3}{4} < 1$$

δ

y además

$$\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \frac{n\log n}{n^{0.79}} = n^{0.21}\log n \geq n^{0.21}$$

$\therefore$ Aplicando el teorema maestro, caso III, se tiene:

$$\therefore \quad \underline{T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)}$$

4) $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

Sea $a = 2$, $b = 2$ y $f(n) = n\log n$

$\Rightarrow \quad n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$

$\Rightarrow \quad f(n) = n\log n \in \Omega(n^{1+\varepsilon})$

posiblemente podemos utilizar el teorema maestro, caso III.

$$\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \frac{\cancel{n}\log n}{\cancel{n}} = \log n \neq n^{\gamma}$$

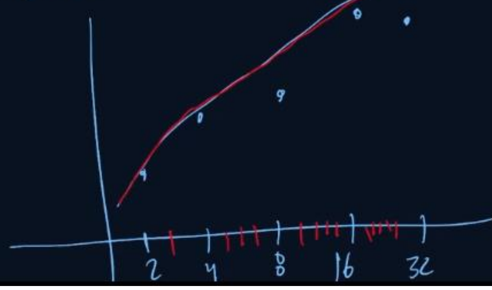
No se puede utilizar el teorema maestro.

Teorema (Regla de suavidad)

Sea $T(n)$ una función y $f(n)$ una función suave.
Si $T(n) \in \Theta(f(n))$ para valores n potencias de b, donde $b \geq 2$, entonces $T(n) \in \Theta(f(n))$.

$T(n) = T(n/2) + c$

$n = 2^k \ (k = \log n)$



```
Funcion (int n)
    int i                      θ(1)
    if n ≤ 1
        return                 θ(1)
    for i=1 to i ≤ 3
        Funcion( n/3 )         3T(n/3)
```

$\therefore \; T(n) = 3T(n/3) + \theta(1)$

Aplicando el teorema maestro con

$a = 3,\ b = 3$ y $f(n) = \theta(1)$

$\Rightarrow \; n^{\log_b a} = n^{\log_3 3} = n^1 = n$

$\Rightarrow \; f(n) = \theta(1) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{\log_3 3 - \varepsilon}) = O(n^{1-\varepsilon})$

$\therefore$ por el caso I, se tiene

$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) = \theta(n)$.

$\therefore$ Funcion $\in \theta(n)$

```
int FuncionB (int n)
    if n <= 2
        return 1               θ(n)
    else
        return FuncionB(√n) + 1  —— T(√n)+1
```

$\therefore \; T(n) = T(\sqrt{n}) + \theta(1)$

Sea $n = 2^k$ $(k = \log n)$

$\Rightarrow \; T(2^k) = T(2^{k/2}) + \theta(1)$

Sea $S(k) = T(2^k)$

$\Rightarrow \; S(k) = S(k/2) + \theta(1)$

$\vdots$

$S(k) = \theta(\log k)$

$\Rightarrow \; T(n) = T(2^k) = S(k) = \theta(\log k)$

$\therefore \; T(n) = \theta(\log \log n)$

$\therefore$ FuncionB $\in \theta(\log \log n)$

Resolver:

$$T(n)=2T(n-1)+3^n, \quad \boxed{T(0)=0,\ T(1)=1}$$

Se tiene:

$$T(n)-2T(n-1)=3^n \quad \text{———} \quad (1)$$

Evaluando en $n+1$ la ec. (1), se tiene:

$$T(n+1)-2T(n)=3^{n+1} \quad \text{———} \quad (2)$$

Multiplicando la ec. (1) por 3, se tiene:

$$3T(n)-6T(n-1)=3^{n+1} \quad \text{———} \quad (3)$$

Restar (3) de (2)

$$T(n+1)-5T(n)+6T(n-1)=0 \quad \text{———} \quad (4)$$

$\boxed{T(n+1)-5T(n)+6 \ldots}$

El polinomio característico para la ec. (4) es:

$$r^2-5r+6=0$$

de donde $r_1=3$ y $r_2=2$, luego

$$T(n)=\alpha r_1^n+\beta r_2^n=\alpha 3^n+\beta 2^n \quad \text{———} \quad (5)$$

Aplicando las condiciones de frontera, se tiene.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= T(0)=\alpha+\beta \\ 1 &= T(1)=3\alpha+2\beta \end{aligned}\right\} \text{sist. ecuaciones.}$$

$\Rightarrow \quad \alpha=1 \quad$ y $\quad \beta=-1$

$\therefore \quad T(n)=3^n-2^n \in \Theta(3^n)$

```
FuncionR (int n)
if n <= 1                                   Θ(1)
    return 1
else
    for i=1 to i<=n                         Θ(n)          Θ(nlogn)
        j=1                                 Θ(1)   Θ(logn)
        while j<n                           Θ(logn)
            j=j*2
            print(*)
    return FuncionR(n/2)+FuncionR(n/2)      2T(n/2)
```

$\therefore \quad T(n)=2T(n/2)+\Theta(n\log n)$

Aplicando divide y vencerás con $a=2$, $b=2$ y $f(n)=cn\log n$, se

$$\boxed{n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n}$$

y

$$\sum_{j=1}^{k=\log_b n} \frac{f(b^j)}{a^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{f(2^j)}{2^j}$$

$$k = \log_b n = \log n$$

$$\boxed{n = 2^k}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{c\,\cancel{2^j}\log 2^j}{\cancel{2^j}}$$

$$= c\sum_{j=1}^{k} \log 2^j \leq c\sum_{j=1}^{k} \log 2^k$$

$$= c\log 2^k \sum_{j=1}^{k} 1$$

$$= c\log 2^k \; k$$

$$= c\log 2^k \log n$$

$$= c\log n \log n$$

$$\boxed{= c\log^2 n}$$

$\therefore$ $T(n) \in \Theta(n\log^2 n)$

$\therefore$ $\text{Funcion}R \in \Theta(n\log^2 n)$