

Para la particular

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{bmatrix} = 3\cos^2 3x + 3\sin^2 3x = 3[\cos^2 3x + \sin^2 3x] = 3$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sin 3x \\ \frac{1}{4}\csc 3x & \cos 3x \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\sin 3x \csc 3x = -\frac{1}{4}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \frac{1}{4}\csc 3x \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\cos 3x \csc 3x = \frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$u_1(x) = \int \frac{-1}{3} dx = -\frac{1}{12} \int dx = -\frac{x}{12}$$

$$u_2(x) = \int \left( \frac{\frac{1}{4}\cos 3x}{\frac{1}{4}\sin 3x} \right) dx = +\frac{1}{12} \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x} dx = +\frac{1}{12} \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = +\frac{1}{36} \ln|\sin 3x|$$

$$\therefore y_p(x) = \cos 3x \left(-\frac{x}{12}\right) + \sin 3x \left(+\frac{1}{36} \ln|\sin 3x|\right) = -\frac{x}{12} \cos 3x + \frac{1}{36} \sin 3x \ln|\sin 3x|$$

Y la solución general será

$$y_g = y_h + y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{x}{12} \cos 3x + \frac{1}{36} \sin 3x \ln|\sin 3x|$$