Tarea 1.3
Probabilidad y Estadística
Tercera lista de ejercicios
Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián

Probabilidad Condicional, eventos independientes y teorema de Bayes

1. La urna 1 contiene x esferas blancas y y esferas rojas. La urna 2 contiene z esferas blancas y v esferas rojas. Se escoge una esfera al azar de la urna 1 y se pone en la urna 2. Entonces se escoge una esfera al azar de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de que esta esfera sea blanca?

2. Dos tubos defectuosos se confunden con dos buenos. Los tubos se prueban, uno por uno, hasta encontrar los defectuosos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la segunda prueba?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la tercera prueba?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la cuarta prueba?

   d) Agrege(sume) los números obtenidos en a), b) y c). ¿Le sorprendente el resultado?

3. Una caja contiene 4 tubos malos y 6 buenos. Se sacan dos a la vez. Se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

4. En el problema anterior los tubos se verifican sacando uno al azar, se prueba y se repite el proceso hasta que se encuentran los cuatro tubos malos. ¿Cuál es la probabalilidad de encontrar el cuarto tubo malo,

   a) en la quinta prueba?

   b) en la décima prueba?

5. Suponga que A y B son dos sucesos independientes asociados con un experimento. Si la probabilidad de que A o B ocurra es igual a 0.6, mientras que la probabilidad de que A ocurra es igual a 0.4, determine la probabilidad de que B ocurra.

6. Veinte artículos, 12 de los cuales son defectuosos y 8 no defectuosos, se inspeccionan uno después de otro. Si esos artículos se escogen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:

   a) los dos primeros artículos inspeccionados sean dectuosos?

   b) los dos primeros artículos inspeccionados sean no dectuosos?

   c) entre los dos primeros artículos inspeccionados haya uno defectuosos y uno no defectuosos?

7. Suponga que tenemos dos urnas, 1 y 2, cada uno con dos cajones. La urna 1 contiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoje una urna al azar; y de ésta se escoge un cajón al azar. La moneda encontrada en este cajón resulta ser de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la urna 2?

8. Un lote contiene n artículos. Si se sabe que r artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que el k-ésimo artículo (con $k \geq r$) inspeccionado sea el último defectoso en el lote?

9. La probabilidad de que un hombre acierte al blanco es 2/3. Si él dispara al blanco hasta que acierta por primera vez, encuentre la probabilidad de que le tomen 5 disparos para acertar al blanco.

10. Se lanza un par de dados repetidamente. Encuentre la probabilidad de que por primera vez ocurra un 11 en el sexto lanzamiento.

11. ¿Cuál es el menor número de lanzamientos necesarios en el problema anterior de manera que la probabilidad de obtener 11 sea mayor de a) 0.5, b) 0.95?

12. a) Encuentre la probabilidad de obtener la suma de 7 en al menos 1 de 3 lanzamientos de un par de dados balanceados. b) ¿Cuántos lanzamientos se necesitan para que la probabilidad en a)sea mayor que 0.95?

13. Las apuestas a favor de que A le gane a B un juego de ajedrez están 3:2. Si se van a jugar tres partidas, ¿Cuáles serán las apuestas a) a favor de que A gane al menos dos de tres juegos, b) en contra de A perdiendo los dos primeros juegos contra B?

14. Un bolso contiene tres monedas, una de las cuales está acuñada con dos caras, mientras que las otras dos monedas son normales y no son sesgadas. Se escoge una moneda al azar del bolso y se lanza cuatro veces en forma sucesiva. Si cada vez sale cara, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea la moneda con dos caras?

15. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40 % de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5, 4 y 2 %, respectivamente son pernos defectuosos. Se escoge un perno al azar y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál el la probabilidad de que el perno provenga de la máquina A? B? C?

16. Sean A y B dos sucesos asociados con un experimento. Suponga que $P(A)$ =0.4, mientras que $P(A \cup B)$=0.7. Sea $P(B) = p$.

    a) ¿Para qué valores de p son A y B mutuamente excluyentes?

    b) ¿Para qué elecciones de p son A y B independientes?

17. Tres componentes digamos C_1, C_2 y C_3 están colocados en serie(en una línea recta). Suponga que esos mecanismos están agrupados en un orden aleatorio. Sea R el suceso $\{C_2$ está a la derecha de C y sea S el suceso $\{C_3$ está a la derecha de $C_1\}$. ¿Son los eventos R y S independientes? ¿Por qué?

18. Se lanza un dado, e independientemente, se escoge al azar una carta de una baraja normal. ¿Cuál es la probabilidad de que:

    a) el dado muestre un número par y la carta sea de un palo rojo?

    b) el dado muestre un número par o la carta sea de un palo rojo?

19. Un número binario está compuesto solo de los dígitos 0 y 1. (Por ejemplo, 1011, 1100, etc.) Esos números juegan un papel muy importante en el uso de las computadoras. Suponga que un número binario está formado por n dígitos. Suponga, además, que la probabilidad de que aperezca un dígito incorrecto es p y que los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad de formar un número incorrecto?

20. Se lanza un dado n veces. ¿Cuál es la probabilidad de que 6 salga al menos una vez en los n lanzamientos?

21. Dos personas lanzan tres monedas regulares cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

22. Se lanzan dos dados. Puestos que las caras muestran números diferentes, ¿cuál es la probabilidad de que una cara sea 4?

23. En la fabricación de cierto artículo se encuentra que se presenta un tipo de defecto con una probabilidad de 0.1 y de defectos de un segundo tipo con probabilidad 0.05. (Se supone la independencia entre los tipos de defectos). ¿Cuál es la probabilidad de que:

   a) un cartículo no contenga ambas clases de defectos?

   b) un artículo sea defectuoso?

   c) suponiendo que un artículo sea defectuoso, tenga un solo tipo de defecto?

24. Probar que si A y B son eventos independientes, también lo son A y $\overline{B}$, $\overline{A}$ y B, $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

25. En la figura 1 se supone que la probabilidad de que cada relé esté cerrado es p y que cada relé se abre o se cierra independientemente de cualquier otro. Encontrar la probabilidad de que la corriente pase de I a D.

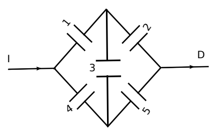

Figura 1:

26. Dos máquinas, A y B, que se accionan independientemente, pueden tener un cierto número de fallas cada día. La tabla 1 da la distribución de probabilidades de las fallas de cada una.

Tabla 1:

Numero de fallas	0	1	2	3	4	5	6
A	0.1	0.2	0.3	0.2	0.09	0.07	0.04
B	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15

Calcular las siguientes probabilidades:

   a) A y B tienen el mismo número de fallas.

   b) El número de fallas es menor que 4; menor que 5.

   c) A tiene más fallas que B

   d) B tiene el doble de fallas que A.

   e) B tiene 4 fallas, cuando se sabe que B tiene por lo menos 2 fallas.

   f) El número mínimo de fallas de las 2 máquinas es 3; es menor que 3.

   g) El nímero máximo de fallas de las máquinas es 3; es más que 3

27. Verifique que la probabilidad condicional $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ satisface los diversos postulados de la probabilidad.

28. Verifique que el teorema de la multiplicación, establecida para dos sucesos, se puede generalizar para tres sucesos como sigue:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

29. Un conjunto electrónico consta de dos subsistemas, digamos A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se suponen las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} P(\text{A falle}) &= 0.20, \\ P(\text{B solo falle}) &= 0.15, \\ P(\text{A y B fallen}) &= 0.15. \end{aligned}$$

Calcular las probabilidades siguientes

a) P(A falle | B haya fallado)

b) P(A falle solamente)

30. Cada vez que se hace un experimento, la probabilidad de ocurrencia de un suceso particular A es igual a 0.2. El experimento se repite, independientemente, hasta que A ocurre. Calcule la probabilidad de que sea necesario realizar un cuarto experimento.

31. Suponga que un mecanismo tiene N tubos, todos los cuales son necesarios para su funcionamiento. Para localizar el tubo que funciona mal, se reemplaza sucesivamente cada uno de ellos por uno nuevo. Calcular la probabilidad de que sea necesario verificar N tubos si la probabilidad(constante) de que un tubo esté dañado es p.

32. Probar: Si $P(A|B) > P(A)$ entonces $P(B|A) > P(B)$.

33. Un tubo al vacío puede provenir de uno cualquiera de 3 fabricantes con probabilidades p_1 =0.25 p_2 =0.50 y p_3 =0.25. Las probabilidades de que el tubo funcione correctamente durante un período de tiempo especificado son iguales a 0.1, 0.2 y 0.4, respectivamente, para los tres fabricantes. Calcular la probabilidad de que un tubo elegido aleatoriamente funcione durante el período de tiempo especificado.

34. Un sistema eléctrico consta de dos interruptores del tipo A, uno del tipo B y cuatro del tipo C, conectados como aparece en la figura 2. Calcule la probabilidad de que no se pueda eliminar una falla en el circuito, con la llave K si los interruptores A, B y C están abiertos; es decir, fuera de servicio, con probabilidades 0.3, 0.4, 0.2, respectivamente y si ellos funcionan independientemente.

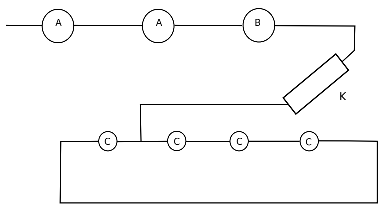

Figura 2:

35. La probabilidad de que un sistema se sobrecargue es 0.4 durante cada conjunto de ensayos independientes de un experimento. Calcule la probabilidad de que el sistema deje de funcionar en tres ensayos independientes del experimento si las probabilidades de fallar en 0, 1 o 3 ensayos son iguales a 0.2, 0.5 y 0.8, respectivamente.

36. Se emiten cuatro señales de radio sucesivamente. Si la recepción de cualquier señal es independiente de la recepción de otra y estas probabilidades son 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4, respectivamente, calcule la probabilidad de que la señal k sea recibida por k=0,1,2,3,4.

37. Un aficionado usa el siguiente sistema para pronosticar el tiempo atmosférico. Clasifica dada día como "seco.º "mojadoz supone que la probabilidad de que cualquier día dado sea igual al precedente está dado por una constante $p(0 < p < 1)$. Con base en anotaciones anteriores, se supone que el primero de enero tiene una probabilidad β de ser "seco". Suponiendo que $\beta_n =$ probabilidad(el n-ésimo día del año es "seco"), obtener una expresión para β_n en función de β y p. Evaluar también $\lim_{n\to\infty} \beta_n$ e interpretar su resultado. Sugerencia: Exprese β_n en función de β_{n-1}.

38. En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 20 % lee A, 16 % lee B y 14 % lee C, 8 % lee A y B, 5 % lee A y C, y 2 % lee A,B y C. Para un adulto escogido al azar, calcular la probabilidad de que:

    a) no lea ninguno de los periódicos
    b) lea exactamente uno de los periódicos
    c) lea al menos A y B si se sabe que lee al menos uno de los periódicos publicados.

39. Una moneda normal se lanza $2n$ veces.

    a) Obtener la probabilidad de que haya un número igual de caras y sellos.
    b) Verificar que la probabilidad calculada en a) es una función decreciente de n.

40. Cada una de las urnas, numeradas como $U_1, U_2, \dots U_n$ contiene α esferas blancas y β esferas negras. Se pasa una esfera de la urna 1 a la urna 2 y luego se pasa una de la urna 2 a la urna 3, y así sucesivamente. Finalmente, se escoge una esfera de la urna n. Si la primera esfera que se pasó era blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la última esfera elegida sea blanca? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

    [Sugerencia: Sea $p_n =$ probabilidad(n-ésima esfera pasada sea blanca) y expresar p_n en función de p_{n-1}.]

41. La urna 1 contiene α esferas blancas y β esferas negras mientras que una urna 2 contiene α esferas blancas y β esferas negras. Se escoge una esfera(de una de las urnas) y luego se devuelve a esa urna. Si la esfera escogida es blanca, se escoge la esfera siguiente de la urna 1; si la esfera escogida es negra, se escoge la siguiente de la urna 2. Continúe de esta manera. Como la primera esfera escogida proviene de la urna 1, obtener probabilidad(n-ésima esfera escogida sea blanca) y también el límite de esta probabilidad cuando $n \to \infty$.

42. Una máquina impresora puede imprimir n "letras", digamos $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Esta máquina es operada por impulsos eléctricos y cada letra es producida por un impulso diferente. Suponga que existe una probabilidad constante p de imprimir la letra correcta y también suponga independencia. Uno de los n impulsos, escogido al azar, alimentó la máquina dos veces y la dos veces se imprimió la letra α_1. Calcule la probabiliudad de que el impulso escogido estuviera proyectado para imprimir α_1.