Actividad 11
Física Computacional

Brayan Alexis Ramírez Camacho
Lic. en Física
Universidad de Sonora

28 de Mayo de 2019

1. Introducción

1.1. Teoría del Caos

La Teoría del Caos es un área de la ciencia que se centra en el comportamiento de los sistemas dinámicos que dependen fuertemente de las condiciones iniciales de movimiento. Estos sistemas poseen un comportamiento que en principio puede ser predicho, pero son predecibles solo por un tiempo y después "parecen"volverse aleatorios.

Esta teoría describe que un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede resultar gran diferencia en un estado posterior del movimiento, como ya lo hace ver Edward Lorenz, el padre de la teoría del caos, al describir a ésta como çuando el presente determina el futuro, pero el presente aproximado no determina aproximadamente el futuro".

Los antecedentes de la teoría del caos se hallan en los trabajos de Poincaré sobre el problema de los 3 cuerpos, al hallar que existen órbitas que no son periódicas y que no se acercan a ningún punto fijo. Estudios posteriores de Birkhoff, Kolmogorov, Cartwright, Littlewood y Smale sobre gravitación, turbulencia y sistemas radiofónicos, respectivamente, se toparon con dificultades similares a Poincaré en el sentido de oscilaciones no periódicas.

Edward Lorenz fue un pionero en ésta área; En 1961, mientras realizaba predicciones meteorológicas, intentó reproducir un resultado con valores ligeramente diferentes a los del cálculo anterior para ahorrar tiempo de cómputo. Encontró que el sistema difería enormemente del cálculo previo para tiempos lejanos al inicial, mostrando que, en general, no se pueden realizar predicciones a largo plazo en un sistema caótico.

1.2. Oscilador de Duffing

La ecuación de Duffing, propuesta en 1918 por el ingeniero alemán Georg Duffing, es una ecuación diferencial no lineal que describe el movimiento de un oscilador con amortiguamiento, con coeficiente de elasticidad no lineal y al cual se le aplica un forzamiento periódico:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma\cos(\omega t)$$

donde α es la constante de rigidez del oscilador, γ es la amplitud de forzamiento, δ es la constante de amortiguamiento y ω es la frecuencia de forzamiento. El término cúbico es al que se debe la no linealidad del problema. El oscilador de Duffing es un ejemplo de sistema dinámico que exhibe un comportamiento caótico.

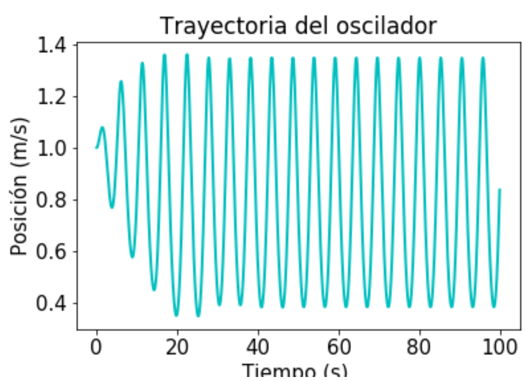
2. Desarrollo

Para simular el movimiento del oscilador de Duffing se resuelve la Ecuación de Duffing mediante el método numérico de expansión en serie de Taylor hasta quinto orden.

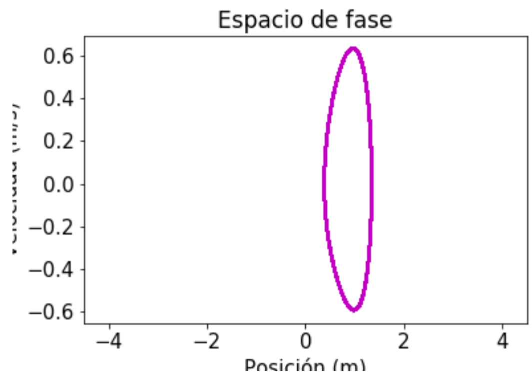
- Primeramente se define el valor numérico de los parametros. En este caso se utilizan los valores de: $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\delta = 0{,}3$ y $\omega = 1{,}2$; en esta simulación, γ toma los valores de $[0{,}2, 0{,}28, 0{,}29, 0{,}37, 0{,}5, 0{,}65]$
- Se toma un ancho de paso de $h = 10^{-1}$ y un tiempo de simulación de $T = 30000$ s. Las condiciones iniciales del movimiento son $x(0) = 1$ m y $v(0) = 0$ m/s.

3. Resultados

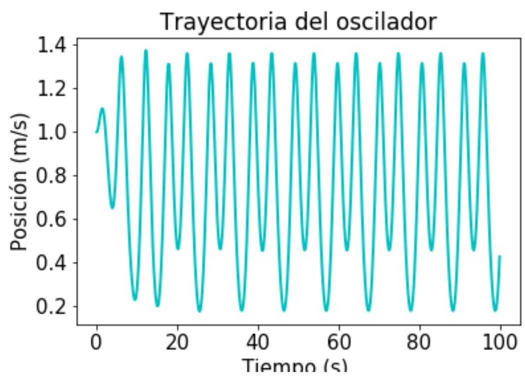
A continuación se muestran los resultados de la simulación obtenidos para los diferentes valores de γ.



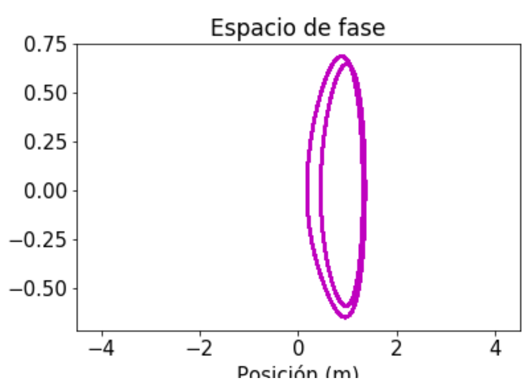
Gráfica de la posición para $\gamma = 0{,}2$



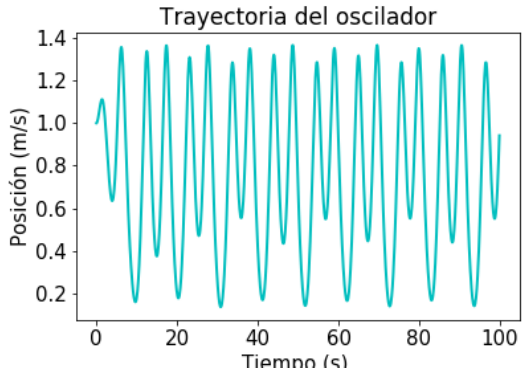
Gráfica del retrato fásico para $\gamma = 0{,}2$



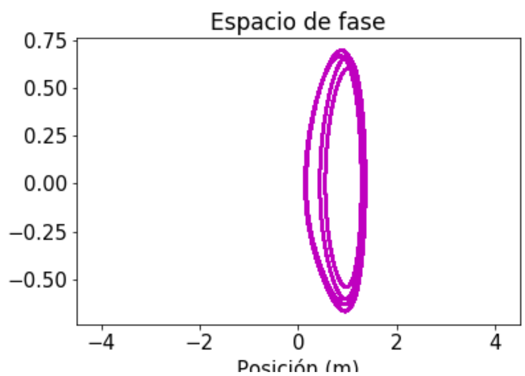
Gráfica de la posición para $\gamma = 0{,}28$



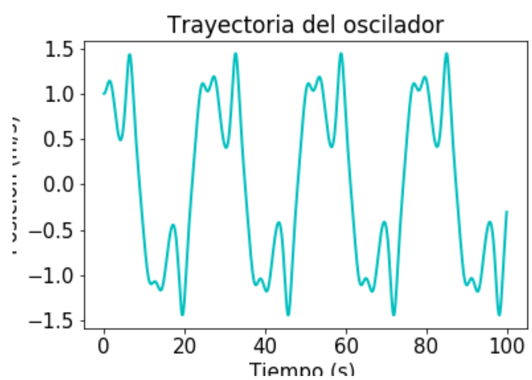
Gráfica del retrato fásico para $\gamma = 0{,}28$



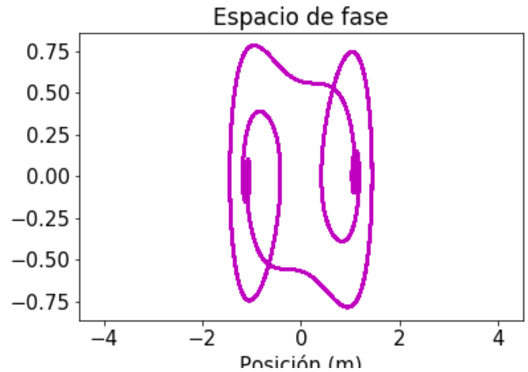
Gráfica de la posición para $\gamma = 0{,}29$



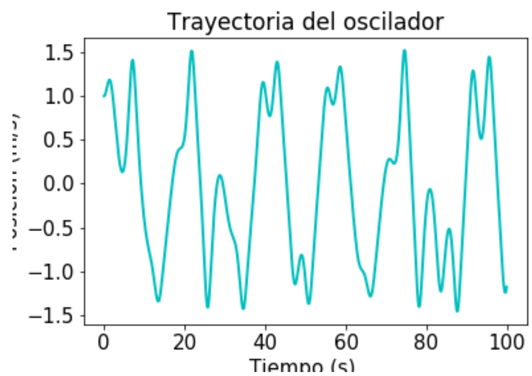
Gráfica del retrato fásico para $\gamma = 0{,}29$



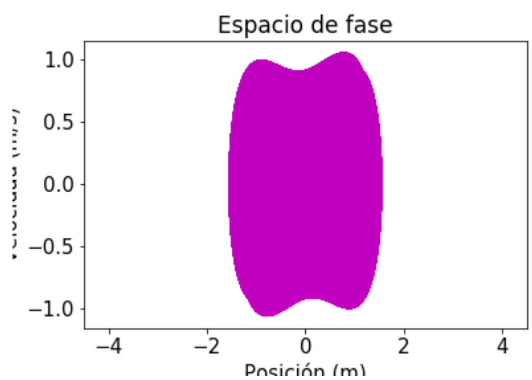
Gráfica de la posición para $\gamma = 0{,}37$



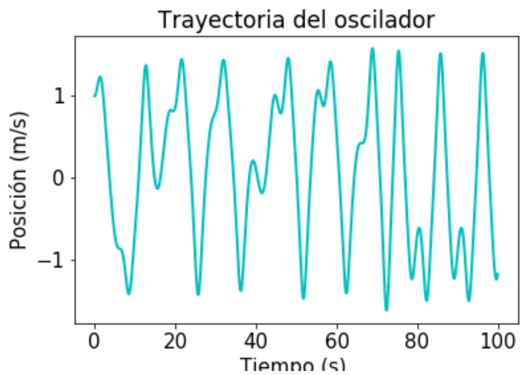
Gráfica del retrato fásico para $\gamma = 0{,}37$



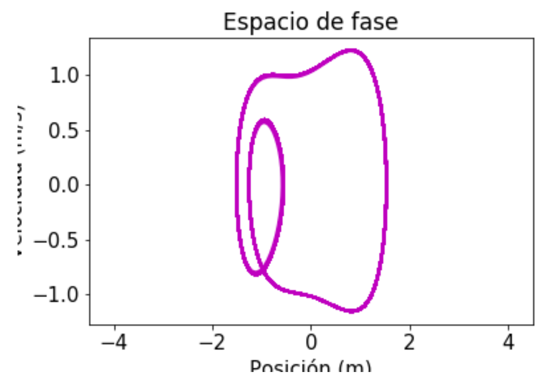
Gráfica de la posición para $\gamma = 0{,}5$



Gráfica del retrato fásico para $\gamma = 0{,}5$



Gráfica de la posición para $\gamma = 0{,}65$



Gráfica del retrato fásico para $\gamma = 0{,}65$

4. Conclusión

Al analizar brevemente el comportamiento del oscilador de Duffing en función de la amplitud de forzamiento se puede apreciar que éste sistema presenta un comportamiento muy sensible a las condiciones iniciales y, por tanto, de naturaleza caótica.

5. Bibliografía

- Wikipedia, *Chaos Theory*. Recuperado el 28 de Mayo de 2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Chaostheory
- Boeing, Geoff. *Chaos Theory and the Logistic Map*. Recuperado el 28 de Mayo de 2019 de: https://geoffboeing.com/2015/03/chaos-theory-logistic-map/
- Boeing, Geoff (2016). *Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction.*
- Wikipedia, *Dynamical system*. Recuperado el 28 de Mayo de 2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamicalsyste

- Mosko M.S., Damon F.H. (2005). *On the order of chaos. Social anthropology and the science of chaos*. Oxford: Berghahn Books.