Actividad 10
Física Computacional

Brayan Alexis Ramírez Camacho
Lic. en Física
Universidad de Sonora

28 de Mayo de 2019

1. Introducción

1.1. Ecuación de Duffing

Propuesta por el ingenierio alemán Georg Duffing en 1918, la ecuación de Duffing es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden usada para modelar osciladores con forzamiento y amortiguamiento, además de un término no lineal:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

donde α es la constante de rigidez del oscilador, γ es la amplitud de forzamiento, δ es la constante de amortiguamiento y ω es la frecuencia de forzamiento. El término cúbico es al que se debe la no linealidad del problema.

Para $\alpha > 0$, el oscilador de Duffing físicamente puede ser intrepretado como un oscilador forzado y amortiguado, con una fuerza de restauración $F = -\alpha x - \beta x^3$. Cuando $\beta > 0$, el resorte es llamado *endurecedor*, y cuando $\beta < 0$, el resorte se llama *reblandecedor*. Para $\alpha < 0$, el oscilador de Duffing describe la dinámica de una masa puntual en un potencial de doble pozo.

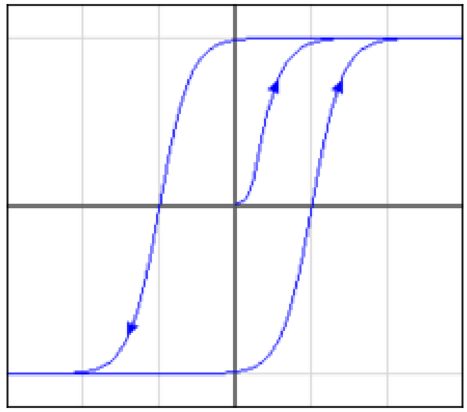
1.2. Histerésis

La histerésis se puede definir como la dependencia del estado de un sistema respecto a su historia. Es la tendencia de un material a conservar una de sus propiedades en ausencia del estímulo que la ha generado. Se aplica a fenómenos que no dependen sólo de las circunstancias actuales, sino también de cómo se ha llegado a esas circunstancias. En muchos sistemas naturales se asocia usualmente con un proceso termodinámico irreversible, como transiciones de fase, fricción interna o disipación, etc. Esta dependencia es la base de, por ejemplo, la remanencia magnética que se da en algunos tipos de minerales y que conserva un registro del campo magnético terrestre en el pasado.

Todos los sistemas que presentan el fenómeno de histéresis son no lineales y, por tanto, matemáticamente difíciles de modelar.

La histerésis se presenta en la física, la química, la biología, ingeniería, sociología, economía, entre otras.

Los ciclos de histéresis ocurren cuando se lleva al sistema repetidamente de inicio a final y de regreso.



Curva de histéresis típica

2. Desarrollo

Para resolver numéricamente la ecuación de Duffing se utiliza la función *ODE* de SciPy. Se fijan los parámetros $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}01$, $\delta = 0{,}1$ y ω varía entre 0 y 2.5 rad/s.

1. Se importan las librerías *Numpy*, *Matplotlib.pyplot*, *Math* y *Scipy.integrate*, que serán utilizadas en la resolución.

2. Se define la ecuación diferencial a resolver, separando la ecuación de Duffing en dos ecuaciones diferenciales acopladas:

```
    def f(t, z, p):
#-----------------------------------------------
# Lado derecho de las ecuaciones diferenciales
#  dx/dt = y
#  dy/dt = - *y - *dx - *x**3 + *cos(*t)
#-----------------------------------------------

, , , ,  = p                           #Parámetros
x, y = z                                    #Variables de integración
f = [y, - *y - *x - *x**3 + *cos(*t)]  #Función a integrar

return f
```

3. Se crea una instancia para resolver la ecuación diferencial a través del método 'dopri5', que utiliza el método de Runge-Kutta de 4to orden:

```
solver = ode(f)
solver.set_integrator('dopri5')
```

4. Se resuelve la ecuación diferencial, se toma la máxmima amplitud del movimiento y se grafica contra la variación del valor de ω en cada iteración. Primero ω varía de forma ascendente y luego de forma descendente. Para el camino 'de regreso', se toman como condiciones iniciales las condiciones finales del camino 'de ida', como se muestra a continuación:

```
        #Condiciones iniciales
t0 = 0.0
#z0 = [ x(0), v(0) ]
z0 = [1.0, 0.0]
z = 0

for i in range( 0, N ):

     = omega[i]
    val = delta, alpha, beta, gamma,
    solver.set_f_params(val)

    # Se fija el valor inical z(0) = z0
    solver.set_initial_value(z0, t0)

    # Se crea una lista de valores de tiempo para evaluar la ecuación
    # Se crea una lista para los valores obtenidos de la solución
    t1 = 20
    m = 400
    t = np.linspace(t0, t1, m)
    sol = np.empty((m, 2))
    sol[0] = z0

    #Se llama repetidamente al integrador para que avance en la solución un tiempo 'k'
    k = 1

    while solver.successful() and solver.t < t1:
        solver.integrate(t[k])
        sol[k] = solver.y
        k += 1

    x1 = sol[:,0]
    y1 = sol[:,1]

    #Actualización de las condiciones iniciales
    t0 = 0.0
    z0 = [max(x1),0]
```

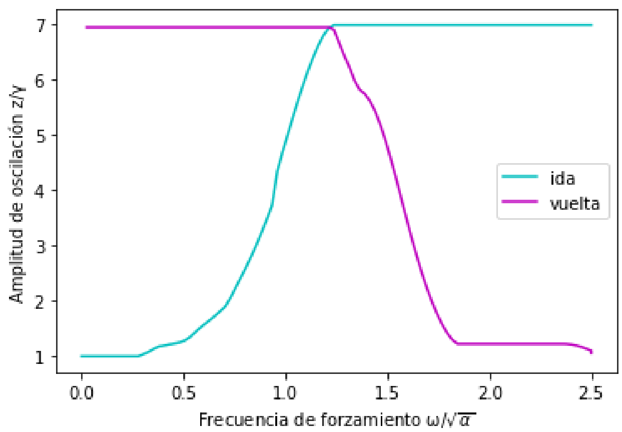
```
    w1.append()
    graf1.append(z0[0])
```

y para el camino 'de regreso':

```
        #Condiciones iniciales
t0 = 0.0
#z0 = [ x(0), v(0) ]
z0 = [1.0, 0.0]
z = 0

for i in range( 0, N ):

     = omega[i]
    val = delta, alpha, beta, gamma,
    solver.set_f_params(val)

    # Se fija el valor inical z(0) = z0
    solver.set_initial_value(z0, t0)

    # Se crea una lista de valores de tiempo para evaluar la ecuación
    # Se crea una lista para los valores obtenidos de la solución
    t1 = 20
    m = 400
    t = np.linspace(t0, t1, m)
    sol = np.empty((m, 2))
    sol[0] = z0

    #Se llama repetidamente al integrador para que avance en la solución un tiempo 'k'
    k = 1

    while solver.successful() and solver.t < t1:
        solver.integrate(t[k])
        sol[k] = solver.y
        k += 1

    x1 = sol[:,0]
    y1 = sol[:,1]

    #Actualización de las condiciones iniciales
    t0 = 0.0
    z0 = [max(x1),0]
    w1.append()
    graf1.append(z0[0])
```

3. Resultados

La gráfica obtenida para la amplitud de la oscilación en función de la frecuencia de forzamiento se muestra a continuación:



Respuesta a la frecuencia para el oscilador de Duffing

4. Conclusiones

En la gráfica se puede apreciar que existe algún valor entre 1 y 1.5 para la frecuencia impulsora en el que el algoritmo computacional se trunca y muestra un valor constante para la amplitud a partir de ese valor crítico.

Claramente se puede concluir que el oscilador de Duffing es un ejemplo en el que se presenta el fenómeno de histerésis al variar la frecuencia de forzamiento.

5. Referencias

1. *Duffing equation*. Wikipedia. Recuperado el 28 de mayo de 2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Duffingequation

2. *Duffing oscillator*. Scholarpedia. Recuperado el 28 de mayo de 2019 de: http://scholarpedia.org/article/Duffingoscillator

3. *Duffing Differential Equation*. Wolfram Math World. Recuperado el 28 de mayo de 2019 de: http://mathworld.wolfram.com/DuffingDifferentialEquation.html

4. *Hysteresis*. Wikipedia. Recuperado el 28 de mayo de 2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Hysteresis

5. P. Holmes, *A nonlinear oscillator with a strange attractor*, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 292, 419-448, 1979.

6. *What's Hysteresis?*. Cornell University. Recuperado el 28 de mayo de 2019 de: http://www.lassp.cornell.edu/sethna/hysteresis/WhatIsHysteresis.html