

# APROXIMACIÓN NUMÉRICA AL ESTUDIO MECÁNICO DE OSCILADORES ACOPLADOS UNIDIMENSIONALES

**Brayan Ramírez Camacho**

Departamento de Física, Universidad de Sonora  
Blvd. Luis Encinas Johnson y Calle Av. Rosales  
Centro, 83000, Hermosillo, Son. México  
brayan\_rc@outlook.com

## Abstract

En este trabajo se presenta un estudio numérico del sistema mecánico consistente en dos osciladores acoplados por resortes, restringiendo el movimiento a una dimensión. Para resolver las ecuaciones de movimiento se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4. Se estudia el efecto de las condiciones iniciales del movimiento y se analizan los modos vibracionales del sistema. El sistema también es estudiado usando espacios de fase, o espacios fásicos. Finalmente se realiza un análisis energético de los osciladores.

**Keywords:** Osciladores acoplados, Simulación numérica, Método de Runge-Kutta, Modos vibracionales, Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Acopladas

## Introducción

El sistema mecánico que se plantea a continuación ha sido estudiado ampliamente en la literatura, ya sea desde una perspectiva dinámica [1], [2]; como modelo de la interacción electrostática entre átomos en una molécula [3]; estudiando las propiedades cualitativas del sistema oscilante [4]; así como modelando las membranas celulares de las neuronas [5], entre una gran diversidad de enfoques y aplicaciones.

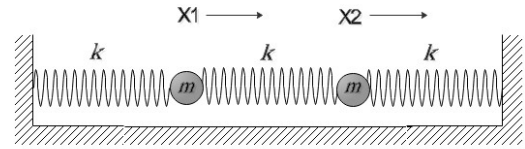
Las ecuaciones de movimiento que modelan el sistema son resueltas con el método de Runge-Kutta clásico o tradicional [6], a pesar de la existencia de múltiples variaciones del método [7], debido a su sencillez de implementación [8], además de ser uno de los métodos más eficientes para resolver ecuaciones diferenciales [9].

## Desarrollo

### Modelado físico

Consideremos el siguiente sistema de movimiento acoplado unidimensional: dos masas conectadas por resortes entre sí y a dos posiciones fijas. Cada resorte tiene una constante de rigidez  $k$ . El movimiento de este sistema está caracterizado por dos coordenadas:  $x_1$  y  $x_2$ , medidas desde las posiciones

de equilibrio de cada masa, como se ilustra en la siguiente figura:



Si desplazamos los dos bloques de su posición de equilibrio en una cantidad  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, la fuerza sentida por el bloque de la izquierda es  $-kx_1 - k(x_1 - x_2)$ , y sobre el de la derecha es  $-kx_2 - k(x_2 - x_1)$  [10]. Así, si definimos la cantidad  $\omega^2 = k/m$  y aplicamos la 2da Ley de Newton, las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2(2x_1 - x_2) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2(2x_2 - x_1) = 0 \quad (2)$$

### Implementación del método numérico

Para utilizar el algoritmo ya mencionado es necesario reducir el problema de ecuaciones diferenciales (ED) de segundo orden a ED de primer orden. Para ello, utilizamos la definición de velocidad,  $v = \frac{dx}{dt}$ , tendremos de esta manera:

$$\frac{dv_1}{dt} = \omega^2(x_2 - 2x_1) \quad (3)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \quad (4)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \omega^2(x_1 - 2x_2) \quad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \quad (6)$$

### Condiciones de la simulación

Las simulaciones y cálculos numéricos fueron realizadas en una computadora personal con procesador *intel CORE i3*, velocidad del procesador de 2.30 GHz, 8 GB de memoria RAM, y 500 GB de capacidad de disco duro.

## Resultados

Para la simulación, se usaron los valores  $k = 50 \text{ N/m}$  y  $m = 3 \text{ kg}$ . Así, al resolver numéricamente las ecuaciones (3)-(6), obtenemos distintos resultados al variar las condiciones del experimento. Las variables son: el número de puntos a evaluar,  $N$ , la duración de la simulación,  $t$ , las posiciones iniciales para la primera y la segunda masa,  $x_{1i}$  y  $x_{2i}$ , respectivamente, y las velocidades iniciales para ambas masas,  $v_{1i}$  y  $v_{2i}$ . En las siguientes figuras, los valores de dichas variables se muestran a pie de la imagen, en unidades del SI.

Comenzando por correr la simulación con distintas condiciones iniciales arbitrarias, obtenemos los siguientes resultados:

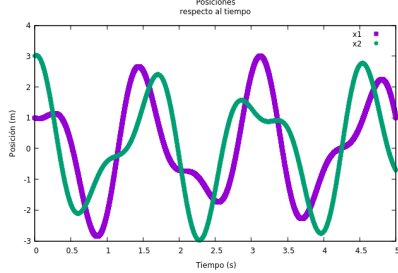


Figure 1:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = -1$ ,  $v_{2i} = 2$

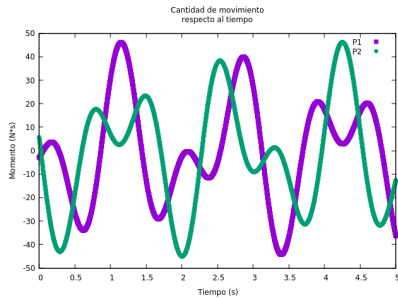


Figure 2:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = -1$ ,  $v_{2i} = 2$

Donde se aprecia que el movimiento tiene un periodo de oscilación de aproximadamente  $T = 1.7059 \pm 10^{-3} \text{ s}$  y presenta una amplitud de oscilación variable. Sabiendo que  $\omega = 2\pi/T$ , calculamos  $\omega = 3.6832 \pm 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$ . Al realizar de nuevo la simulación con condiciones iniciales distintas, obtenemos un resultado similar al anterior:

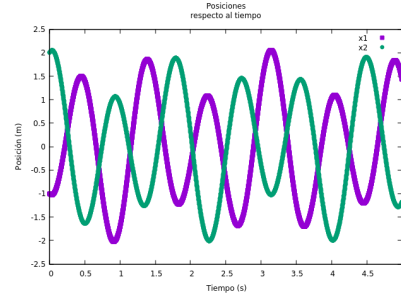


Figure 3:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = -1$ ,  $x_{2i} = 2$ ,  $v_{1i} = -2$ ,  $v_{2i} = 3$

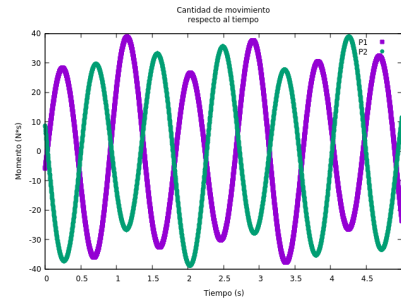


Figure 4:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = -1$ ,  $x_{2i} = 2$ ,  $v_{1i} = -2$ ,  $v_{2i} = 3$

Podemos observar que el movimiento producido en estos casos no es armónico simple. Sin embargo, existen ciertas condiciones en las cuales el movimiento es más interesante. Si el sistema inicia con desplazamientos y velocidades con la misma magnitud y dirección, obtenemos el **modo simétrico de vibración**:

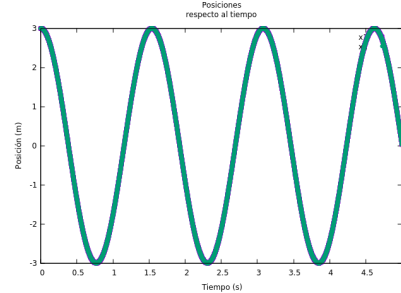


Figure 5:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 3$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

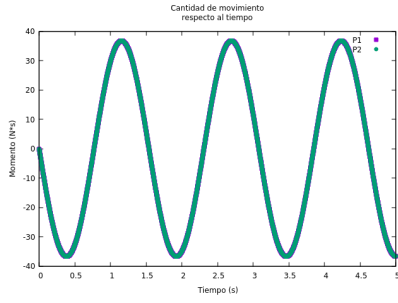


Figure 6:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 3$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

el cual es armónico simple y oscila con un periodo de  $T = 1.5000 \pm 10^{-3} s$ . El sistema posee además otro caso de particular interés dado por desplazamientos y velocidades iniciales de la misma magnitud pero en sentidos opuestos, el **modo antisimétrico de vibración**:

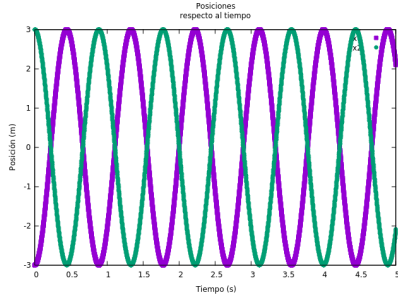


Figure 7:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = -3$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

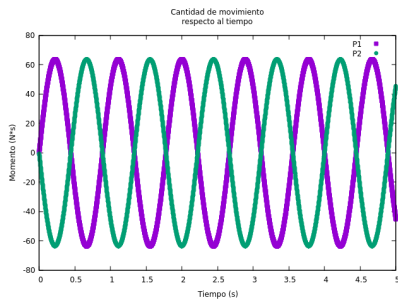


Figure 8:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = -3$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

que también oscila de manera armónica simple pero con un periodo de  $T = 2.9999 \pm 10^{-3} s$ , el cual es aproximadamente el doble del periodo para el modo simétrico de vibración. El modo simétrico y el modo antisimétrico son conocidos como **modos normales de vibración**.

En todos los casos, las gráficas de la posición y la velocidad son para una misma masa son iguales pero con

cierto desfase.

## Espacio fásico

El *espacio de fase* es una construcción matemática usada frecuentemente en mecánica, el cual es un conjunto que representa todos los posibles estados de un sistema dinámico [11].

Se visualiza gráficamente con la variación de velocidad con respecto a la posición.

El espacio fásico para el modo simétrico de vibración es el siguiente:

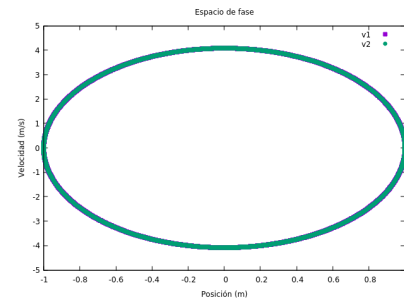


Figure 9:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 1$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

que tiene el mismo comportamiento que el modo antisimétrico de vibración, con diferencia en las magnitudes de la velocidad máxima. En la gráfica, la curva cerrada indica que el sistema es conservativo y la elipse resultante es una característica distintiva del movimiento armónico simple.

Es interesante observar también, por ejemplo, el comportamiento del sistema con condiciones iniciales de distintas magnitudes:

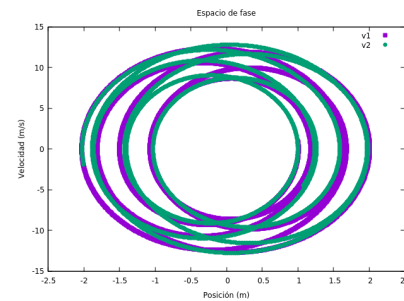


Figure 10:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = -2$ ,  $v_{1i} = 1$ ,  $v_{2i} = -2$

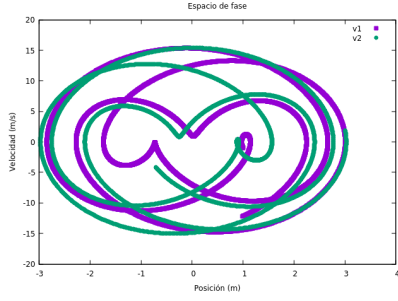


Figure 11:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = -1$ ,  $v_{2i} = 2$

## Análisis Energético

Se presentan las gráficas para la energía cinética, potencial y mecánica del sistema formado por las dos masas, para algunos de los casos más representativos:

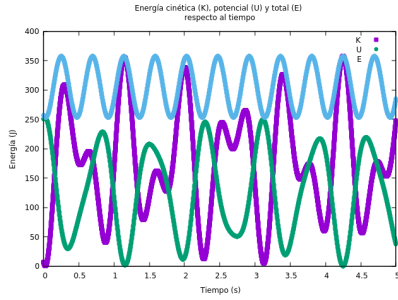


Figure 12:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = -1$ ,  $v_{2i} = 2$

Aquí la energía mecánica oscila con el paso del tiempo.

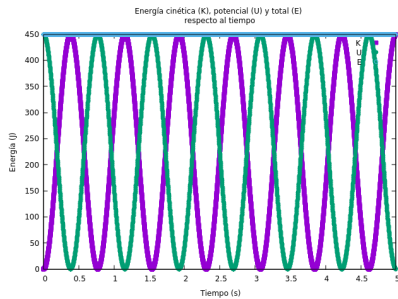


Figure 13:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 3$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

Para el modo simétrico de vibración, la energía total es constante. Además, la energía cinética es máxima cuando la energía potencial es mínima, y viceversa.

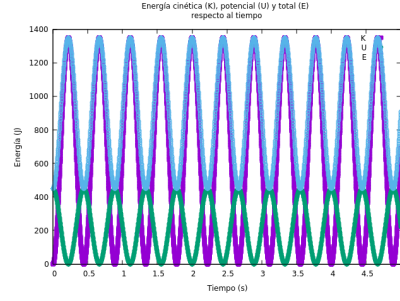


Figure 14:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = -3$ ,  $x_{2i} = 3$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

En el caso del modo antisimétrico de vibración, la energía mecánica total también es función del tiempo, esto debido a que en la oscilación, hay momentos en los que las masas están en reposo pero los resortes están estirados o comprimidos.

## Efecto del ancho de paso

Para analizar el efecto que tiene el ancho de paso en las simulaciones, se efectuó la simulación con cuatro distintos valores de  $h$ :

- $h = 10^{-3}$

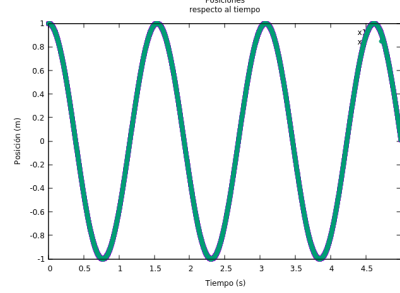


Figure 15:  $N = 5000$ ,  $t = 5$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 1$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

- $h = 10^{-2}$

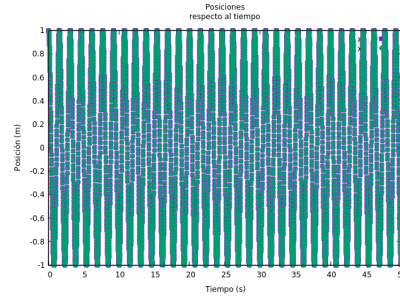


Figure 16:  $N = 5000$ ,  $t = 50$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 1$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

- $h = 10^{-1}$

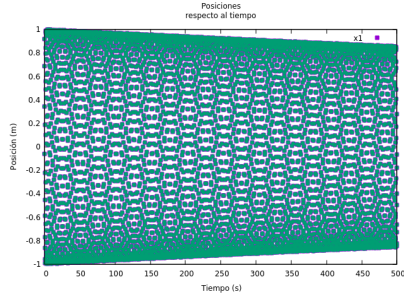


Figure 17:  $N = 5000$ ,  $t = 500$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 1$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

- $h = 1$

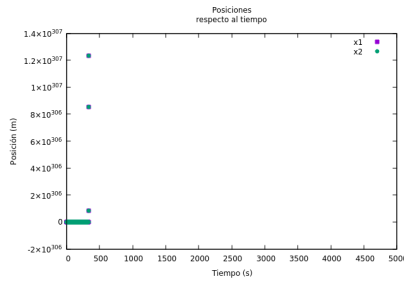


Figure 18:  $N = 5000$ ,  $t = 5000$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 1$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

Con esto es posible observar que el error se propaga muy rápido para  $h = 1$ , y que un ancho de paso óptimo para la simulación podría ser  $h = 10^{-3}$ .

### Estabilidad numérica

Para estudiar la estabilidad de la simulación, se corre el programa por un tiempo de  $t = 40s$ , que es de un orden de magnitud mayor que el tiempo estándar usado en el resto de simulaciones.

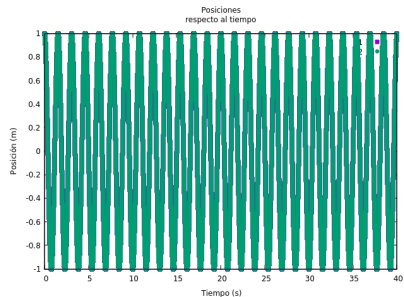


Figure 19:  $N = 40000$ ,  $t = 40$ ,  $x_{1i} = 1$ ,  $x_{2i} = 1$ ,  $v_{1i} = 0$ ,  $v_{2i} = 0$

Observando que la solución numérica sigue teniendo el mismo comportamiento para valores grandes de  $t$ , lo que es

una indicación de la poca propagación del error al realizar iteraciones del cálculo numérico.

### Conclusión

Al analizar el comportamiento de los osciladores al variar las condiciones iniciales, se puede concluir que el movimiento en general es periódico, pero sólo es armónico simple si se cumple que:  $v_{1i} = v_{2i}$  y  $x_{1i} = x_{2i}$  para el modo simétrico de vibración; y  $v_{1i} = -v_{2i}$  y  $x_{1i} = -x_{2i}$  para el modo antisimétrico de vibración.

El espacio fásico es una buena manera de visualizar si un movimiento es armónico simple o no, al observar la curva obtenida en la gráfica de velocidad contra posición.

La energía mecánica no siempre se mantiene constante, pues el comportamiento energético del sistema también es función de las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento de los osciladores.

En cuanto al efecto del ancho de paso, se concluye que la simulación no presenta demasiado error para valores de  $h$  aproximadamente menores a 0.1. La propagación del error para valores grandes de tiempo de simulación es aceptablemente pequeño.

La aplicación de estos modelos a un rango cada vez más amplio de fenómenos naturales es una afirmación de la importancia y utilidad del estudio de este tipo de sistemas.

### Agradecimientos

Se agradece enormemente la ayuda continua del M.C. Dupret Alberto Santana Bejarano, as como los comentarios del Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano. Es indispensable mencionar la colaboracin del est. Alberto Medina y la critica brindada por el L.F. Jos Daniel Castro Cisneros.

### Referencias

- [1] Seunghwan K., Park S.H., C. S. Ryu, Physical Review Letters, Multistability in Coupled Oscillator Systems with Time Delay, volumen 79 (1997).
- [2] Kerschen G. et. al., Springer, *Energy Transfers in a System of Two Coupled Oscillators with Essential Nonlinearity: 1:1 Resonance Manifold and Transient Bridging Orbits*, (2005), p. 283303.
- [3] Liu, X., Shemansky, D.E., The Astrophysical Journal, *A Simple Model for  $N_2$  Line Oscillator Strengths of the  $b'1u + (1)$ ,  $c4'1u + (0)$ ,  $b1u + (4)$ ,  $b1u + (5)$ , and  $c31u + (0)X1g + (0)$  Bands*, volumen 645 (2006).
- [4] Kopell N., Ermentrout G. B., Communications on Pure and Applied Mathematics, *Symmetry and phaselocking in chains of weakly coupled oscillators*, volumen 39 (1986), p. 623-660.
- [5] Wilson C. J. , Callaway J. C., Journal of Physiology, *Coupled Oscillator Model of the Dopaminergic Neuron of the Substantia Nigra*, volumen 83 (2000), p 3084-3100.
- [6] Chapra S., Canale R., *Mtodos numricos para ingenieros*, (5ta ed.), Ed. Mc-Graw Hill (2007), p. 740.

- [7] Evans D. J., International Journal of Computer Mathematics, A new 4th order runge-kutta method for initial value problems with error control, volumen 39 (1991), p. 217-227.
- [8] Petzold L. R., Jay L. O., Yen J., Acta Numerica, Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations, volumen 6 (1997), p. 437-483.
- [9] Butcher J. C., The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods, (1ra ed.), Wiley-Interscience (1987).
- [10] Thornton S., Marion J., Classical Dynamics of Particles and Systems, (5ta ed.), Brooks/Cole Cengage Learning (2008), p. 469.
- [11] Terman D. H., Izhikevich E. M., (2008), State space. Recuperado el 16 de diciembre de: [www.scholarpedia.org/article/State<sub>s</sub>pace](http://www.scholarpedia.org/article/State_space).