Efectos gravitacionales sobre las mareas: un estudio numérico

Brayan Ramírez
Adrián Valenzuela
Daniel Gaytán

Agosto 2019

Partiendo de la segunda Ley de Newton aplicada a un elemento diferencial de marea, se tiene que

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_E}{r^2}\hat{r} - GM\left(\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2}\right) \tag{1}$$

donde M_E es la masa de la Tierra y M la de la Luna; R es la distancia Tierra-Luna y d es la magnitud del vector que va del centro de la Luna al elemento de marea.

Es posible reescribir términos como:

$$\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{\vec{d}}{d^3} - \frac{\vec{R}}{R^3}$$

del diagrama se observa que

$$\vec{d} = \vec{R} + \vec{r}$$

por lo que

$$\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{\vec{R} + \vec{r}}{d^3} - \frac{\vec{R}}{R^3}$$

factorizando tenemos que

$$\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} = \vec{R}\left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{R^3}\right) + \frac{\vec{r}}{d^3} \tag{2}$$

expandiendo en serie de Taylor el término d^{-3}

$$d^{-3} = R^{-3}\left(1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2}$$

al sustituir en (2) se obtiene:

$$\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{\vec{R}}{R^3}\left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2} - 1\right] + \frac{\vec{r}}{R^3}\left(1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2}$$

por lo que (1) se puede reescribir como

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_E}{r^3}\vec{r} - GM\left\{\frac{\vec{R}}{R^3}\left[\left(1+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2}-1\right]+\frac{\vec{r}}{R^3}\left(1+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2}\right\} \quad (3)$$

donde se utilizó que $\vec{R} = R\hat{R}$ y $\vec{r} = r\hat{r}$.
En la figura se aprecia que $\hat{R} = (-1, 0, 0)$, lo cual implica

$$\vec{R}\cdot\vec{r} = R\hat{R}\cdot\vec{r}$$

$$\vec{R}\cdot\vec{r} = R(-1,0,0)\cdot(x,y,z) = -xR$$

que permite escribir

$$\left(1+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2} = R^3(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}$$

sustituyendo en (3) y reacomodando

$$\ddot{\vec{r}} = -G\left[\frac{M_E}{r^3}+M(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}\right]\vec{r} - GM\left[(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}-R^{-3}\right]\vec{R}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -G\left[\frac{M_E}{r^2}+Mr(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}\right]\hat{r} - GM\left[R(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}-R^{-2}\right]\hat{R}$$

además

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

y sabiendo que

$$\hat{r} = \frac{1}{r}(x,y,z)$$

separando en componentes

$$\ddot{x} = -\frac{GM_E}{r^3}x - GM(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}x + GMR(R^2+r^2-2xR)^{-3/2} - \frac{GM}{R^2} \quad (4)$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM_E}{r^3}y - GM(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}y \quad (5)$$

$$\ddot{z} = -\frac{GM_E}{r^3}z - GM(R^2+r^2-2xR)^{-3/2}z \quad (6)$$

para resolver las ecuaciones (4), (5) y (6) numéricamente con el método de Runge-Kutta, es necesario transformarlas a ecuaciones diferenciales de primer orden, así

$$u = \dot{x}$$

$$v = \dot{y}$$

$$w = \dot{z}$$

Los resultados obtenidos al resolver las ecuaciones de movimiento se muestran a continuación:

$$\boxed{Añadir - gráficas}$$