Notas breves sobre sucesiones y series (Un paréntesis matemático en el curso de Programación y lenguaje Fortran.)

Carlos Calcáneo Roldán

8 de Abril de 2016

Resumen

En este escrito presentamos un brevísimo reumen de los conceptos más elementales sobre sucesiones y series, se presentan 4 ejemplos.

1 Definiciones

Una sucesión a es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Para denotar el n-ésimo elemento de la sucesión se escribe a_n en lugar de $f(n)$.

Ejemplo:

$$a_n = 1/n$$

$$a_1 = 1, a_2 = 1/2, a_3 = 1/3, a_4 = 1/4, \cdots$$

Dada una sucesión a_n podemos formar una nueva sucesión S_n de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

La sucesión S_n se llama serie, cuando consideremos un súnero infinito de términos se denota por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A los elementos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ de la sucesión original les llamamos *los términos de la serie* y a $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$les llamamos *las sumas parciales de la serie*. De esta manera, una serie es una sucesión de sumas parciales.

En las ciencias nos encontramos muy seguido con una gran variedad de series, las clasificaremos en tres tipos:

- Cuando el límite de la sucesión S_n es $\pm\infty$ decimos que la serie Sn es *divergente*.

- Ahora bien si el límite de la sucesión S_n no existe decimos que la serie Sn es *oscilante*.

- En cambio cuado la sucesión S_n tiene límite finito S decimos que la serie es *convergente*. De hecho, afirmamos que la serie *converge a* S y a S se le llama suma de la serie.

veremos, a lo largo de nuestra experiencia, que el último de estos tipos de serie será de gran utilidad en nuestro desarrollo profesional.

Un criterio para probar si una serie es convergente es el criterio del cociente. Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

verificamos si:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} <1 & \text{la serie converge.} \\ =1 & \text{debemos buscar otro criterio para probar convergencia.} \\ >1 & \text{la serie diverge.} \end{cases}$$

Una forma de obtener la suma de una serie es mediante el límite de la n-ésima suma parcial. Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

su suma, S, se obtiene de:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

2 Ejemplos

Encontremos el valor de la suma las siguientes series, en caso de que éstas converjan.

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{2n-1} + \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} \right]$

  Antes de buscar el valor de la suma de esta serie, verificamos su convergencia.

  Es posible reescribir esta expresión como:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} = S_i + S_p$$

  es decir: vamos a escribir la serie original como una suma de series, así tratamos cada parte por separado. Para la prueba de convergencia de S_i vemos que, en este caso:

$$a_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{2n-1} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \left(\frac{1}{3} \right)^{2n+1}$$

  de donde podemos formar:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{2n+1} \left(3 \right)^{2n-1} \right] = \frac{1}{3^2} < 1$$

  y decir que la serie S_i converge a un valor.

  Ahora bien, para S_p identificamos:

$$a_n = \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \right)^{2n+2}$$

  y de nuevo podemos tomar el cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{2n+2} \left(\frac{3}{2} \right)^{2n} \right] = \left(\frac{2}{3} \right)^{2} < 1$$

  y de nuevo podemos decir que la serie S_p converge.

  Así, como cada una de las partes de la serie original S convergen, podemos afirmar que S converge a algún valor.

Ahora calculemos el valor de la suma (decimos *el valor al cual converge* S). De nuevo nos conviene trabajar cada parte de la serie por separado, ya que, como ambas partes convergen a un valor, la serie completa converge a la suma de estos valors, es decir como:

$$S_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = S_I$$

y

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = S_P$$

entonces

$$S = S_I + S_P$$

Calculamos primero S_I, aquí la n-ésima suma parcial se contstruye de la siguiente manera:

$$S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

vemos que existe un factor que se repite en los términos de la serie (en este caso $(\frac{1}{3})^2$) al cual se le llama *la razón*, así que multiplicamos por este factor para obtener:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

restamos estas expresiones y vemos que a la derecha sólo sobreviven dos términos:

$$\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] S_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

por lo que la n-ésima suma parcial se puede expresar sencillamente:

$$S_n = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{8}\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right]$$

El valor de la suma de la serie es el límite de la n-ésima suma parcial, en este caso:

$$\lim_{n\to\infty} Sn = S_I$$

al tomar el límite obtenemos el valor al cual converge la primera parte de la serie original:

$$\boxed{S_I = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{8}\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right] = \frac{3}{8}}$$

Ahora calculamos S_P, en este caso la n-ésima suma parcial es:

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

aquí la razón es $(\frac{2}{3})^2$ y al multiplicar obtenemos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}$$

y en este caso la n-ésima suma spacial es:

$$S_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{5}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}\right]$$

por lo que el valor al cual converge la segunda parte de la serie original es:

$$\boxed{S_P = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{5}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}\right] = \frac{4}{5}}$$

Así, el valor de la suma de la serie es:

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right] = \frac{47}{40}}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$

  Con ayuda del ejecrcicio anterior podrás demostrar que esta serie converge al valor:

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = 2}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

  Este es un ejemplo de serie alternante (oscilante), en este caso la convergencia está garantizada por:

  El criterio de Leibnitz:

  Dada la Serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Si a_n es decreciente (es decir $a_{n+1} < a_n$) y $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie converge. Por ejemplo, no es difícil encontrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$$

  converge ♯

  Además, para el caso de series alternantes, tenemos el siguiente teorema que nos permite calcular, de entrada, el error cometido al sumar la serie hasta un término K:

  Teorema:

  El error numérico que se comete al detenerse hasta un término K de una serie alternante que converge es siempre menor que el valor absoluto del término siguiente $(K+1)$. Por ejemplo el error al detenerse en el cuarto término de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

  es menor que $\frac{1}{5} = 0.2$ ♯

Para la serie propuesta tenemos:

$$a_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

el criterio de Leibnitz nos permite asegurara que esta serie converge.

El error al tomar sólo los primeros K términos de esta serie, es decir:

$$S_{[1,K]} = \sum_{n=1}^{K} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$$

es igual al valor absoluto del $(K+1)$-ésimo término:

$$error \leq \frac{2^{3K+3}}{3^{2K+2}}$$

.

Sin embargo, también podemos calcular analíticamente el valor de la serie, empecemos, como en el primer problema, por separar la serie en dos partes, una positiva y otra negativa:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{2n-1} = S_p - S_n$$

Empleando la misma técnica que en el primer problema encontramos que las series S_p y S_n convergen, respectivamente, a los valores:

$$\boxed{S_P = \frac{64}{17} \quad \text{y} \quad S_N = \frac{72}{17}}$$

por lo que la serie completa converge al valor:

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = -\frac{8}{17}}$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$

  A esta serie se le llama *serie geométrica* y es muy socorrida en algunos problemas de Física, primero corroboramos su convergencia. En este caso formamos:

  $$a_n = ax^n \quad \text{y} \quad a_{n+1} = ax^{n+1}$$

  por lo tanto tenemos que, para esta serie, si

  $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \begin{cases} < 1 & \text{converge} \\ = 1 & \text{inconcluso} \\ > 1 & \text{diverge} \end{cases}$$

  procedemos a calcular el valor de la suma de la serie, tomando en cuenta solo valores tales que $|x| < 1$. Ahora la n-ésima suma parcial es:

  $$S_n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n$$

  aquí la razón que acompaña a todos los términos es x, entonces formamos

  $$xS_n = ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^n + ax^{n+1}$$

  restando ambas expresiones y agrupando obtenemos que sólo dos términos sobreviven del lado derecho:

  $$(1 - x)S_n = a(1 + x^{n+1})$$

  por lo tanto la n-ésima suma parcial se escribe sencillamente como:

  $$S_n = a\frac{1 + x^{n+1}}{1 - x}$$

  ahora bien, la condición de convergencia ($|x| < 1$) también permite obtener el límite de esta suma parcial:

  $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1 + x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}$$

  por lo que hemos encontrado que, para $|x| < 1$, la suma de la serie geométrica es:

  $$\boxed{S = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1 - x}}$$

Referencia

- "Theory and problems of advanced Calculus". Murray R. Spiegel, Schaum's outline series in mathematics. Primera edición 1963. McGraw-Hill Publishing Company.