

Navegando alrededor de objetos celestes

El Problema de los Tres Cuerpos Restringido o de Euler.

¡POR FIN RESUELTO!

Jafet Ceballos Palomino, Melissa Fuentes Arenas, Brayan Ramirez Camacho.
Departamento de Física de la Universidad de Sonora.



“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”

Resumen

El Problema de los Tres Cuerpos consiste en determinar las posiciones y velocidades de tres cuerpos que interactúan gravitacionalmente entre sí. Conociendo las condiciones iniciales del movimiento. El matemático francés Henri Poincaré estableció que el problema carece de solución analítica y que la solución del sistema es caótica. No obstante, es posible obtener aproximaciones numéricas con bastante precisión, con lo cual se puede calcular y predecir las trayectorias. Precisamente, en este trabajo se presenta una simulación de lo que se conoce como el *Problema de los Tres Cuerpos Restringido*, o *Problema de Euler*. El cual consiste en una partícula de masa despreciable orbitando alrededor de otros dos objetos masivos, los cuales permanecen fijos en esta aproximación; en nuestro caso, se trata de una *nave espacial*, la Tierra y la Luna, respectivamente. Nuestro problema es determinar las posiciones y velocidades de la nave en cualquier instante de tiempo en el que se mueva.

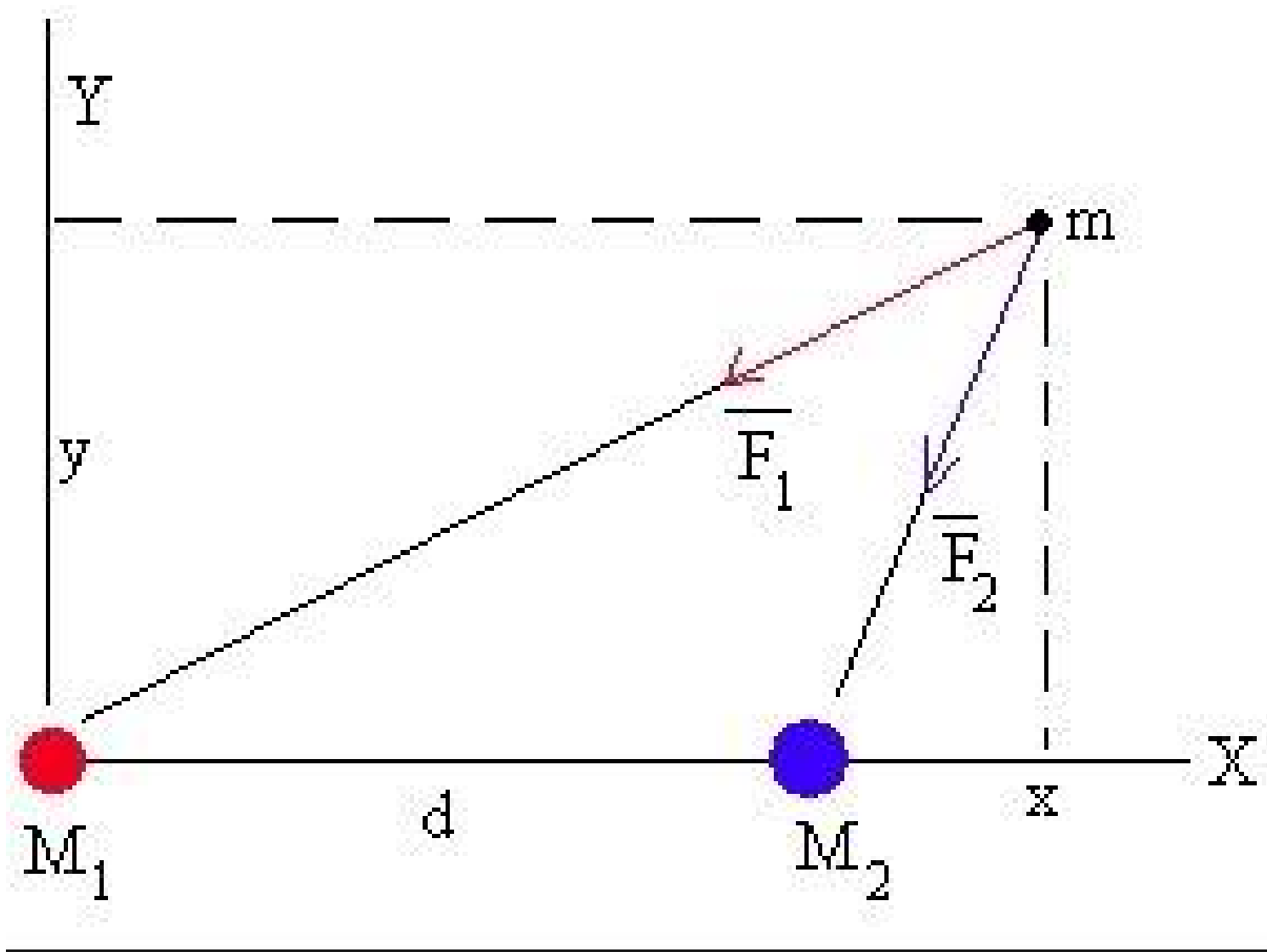


Figura 1: Esquema del sistema

Introducción

Para finalizar el curso de *Programación y Lenguaje Fortran* se nos solicitó la realización de un proyecto que consiste en simular la órbita de una nave alrededor de dos cuerpos celestes, predecir su forma a partir de la velocidad inicial de la cual ésta despega, y realizar los cálculos necesarios para conocer la energía cinética, potencial y la mecánica total (cinética + potencial).

Objetivos principales

1. Desarrollar un programa que simule la órbita producida por un objeto, bajo la interacción gravitacional de dos cuerpos celestes sobre éste.
2. Calcular las direcciones del momento y la fuerza neta en diferentes puntos de la trayectoria.
3. Generar diferentes trayectorias variando la rapidez inicial del objeto.
4. Realizar los cálculos para obtener la energía cinética, potencial y mecánica total del objeto, éstas en función del tiempo.
5. Encontrar una velocidad que genere órbitas elípticas.

Procedimiento.

Inicialmente, partimos del análisis de los códigos nos fueron proporcionados para poder explicar la situación que simulan. El sistema físico que estos códigos modelaban era el de la interacción gravitacional entre la Tierra y el Sol. Con esto procedimos a realizar algunas modificaciones en el sistema, extendiendo el modelo que se nos fue dado, las primeras acciones fueron: eliminar al Sol del modelo dado y después reemplazarlo por la Tierra, la cual va a estar fija en el origen de un sistema de coordenadas, para la realización del problema; después añadimos un segundo cuerpo: la Luna; la cual, se requiere, debe estar posicionada a la "derecha" de la Tierra, para ello, la colocamos en el eje x con valor negativo. Después siguiendo las modificaciones del programa, la nave fue situada a una distancia de 10 radios terrestres del centro de la Tierra y a su izquierda en el eje x con valor positivo. Estas modificaciones provocaron una serie de grandes cambios, uno de los cuales fue el reemplazar las unidades naturales seleccionadas con las que trabajar para tener una escala de valores numéricos más pequeña del sistema. También ajustamos la precisión relacionada con el número de pasos y con el tiempo total de la simulación, el cual fue de 60 días, para no tener problemas con ellos y las órbitas que se generen. Después variamos la velocidad inicial de la nave, para encontrar una con la cual se generaran órbitas elípticas. Esto lo realizamos teniendo cuidado con las colisiones que se pudieran generar con la Luna o con la Tierra. Para controlar esto agregamos la siguiente condición en el programa:

$$IF(l0 * mag(ship - pos) < l0)EXIT \quad (1)$$

en la cual sí el resultado de la multiplicación de la unidad de longitud natural por la magnitud de la posición de la nave es menor al valor de la unidad de la longitud natural el programa se detiene. El vector momento lineal $\vec{P} = m\vec{v}$ se calcula en cada instante de tiempo según:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_{i-1} + \vec{F}\Delta t \quad (2)$$

Donde Δt es el intervalo de tiempo entre cada cálculo de la posición. Además \vec{F} , la fuerza de interacción gravitacional está dada por la *Ley de Gravitación Universal*:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (3)$$

Haciendo notar que la fuerza total sobre la nave es debido a la Tierra y a la Luna. Además, la posición de la nave se calcula en cada instante de tiempo i como:

$$\vec{x}_i = \vec{x}_{i-1} + \left(\frac{\vec{P}}{M_N} \right) \Delta t$$

Con esto realizado, procedimos a calcular la energía cinética, potencial y mecánica total de la nave, primero para el caso de la energía cinética, utilizamos:

$$K_N = \frac{|\vec{p}_N|^2}{2M_N} \quad (4)$$

Después para la energía potencial de la nave:

$$U_N = -GM_N \left(\frac{M_T}{|r_T - r_N|} + \frac{M_L}{|r_L - r_N|} \right) \quad (5)$$

Para calcular la energía mecánica total, simplemente se suma la energía cinética y la potencial.

Resultados

El primer resultado que obtuvimos fue el de la órbita elíptica de la nave al rededor de la Tierra y la Luna.

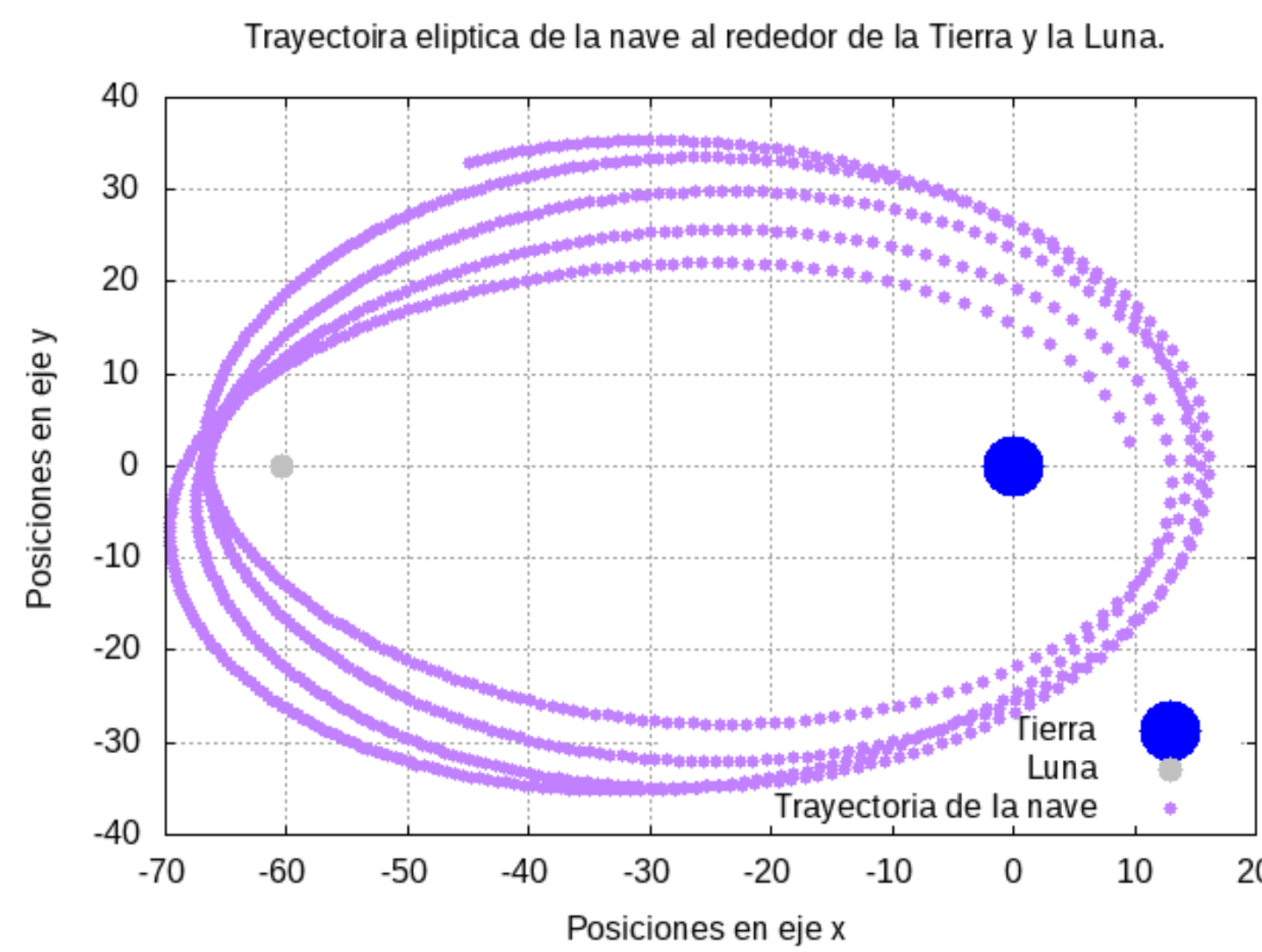


Figura 2: Trayectoria elíptica de la nave al orbitar la Tierra y la Luna

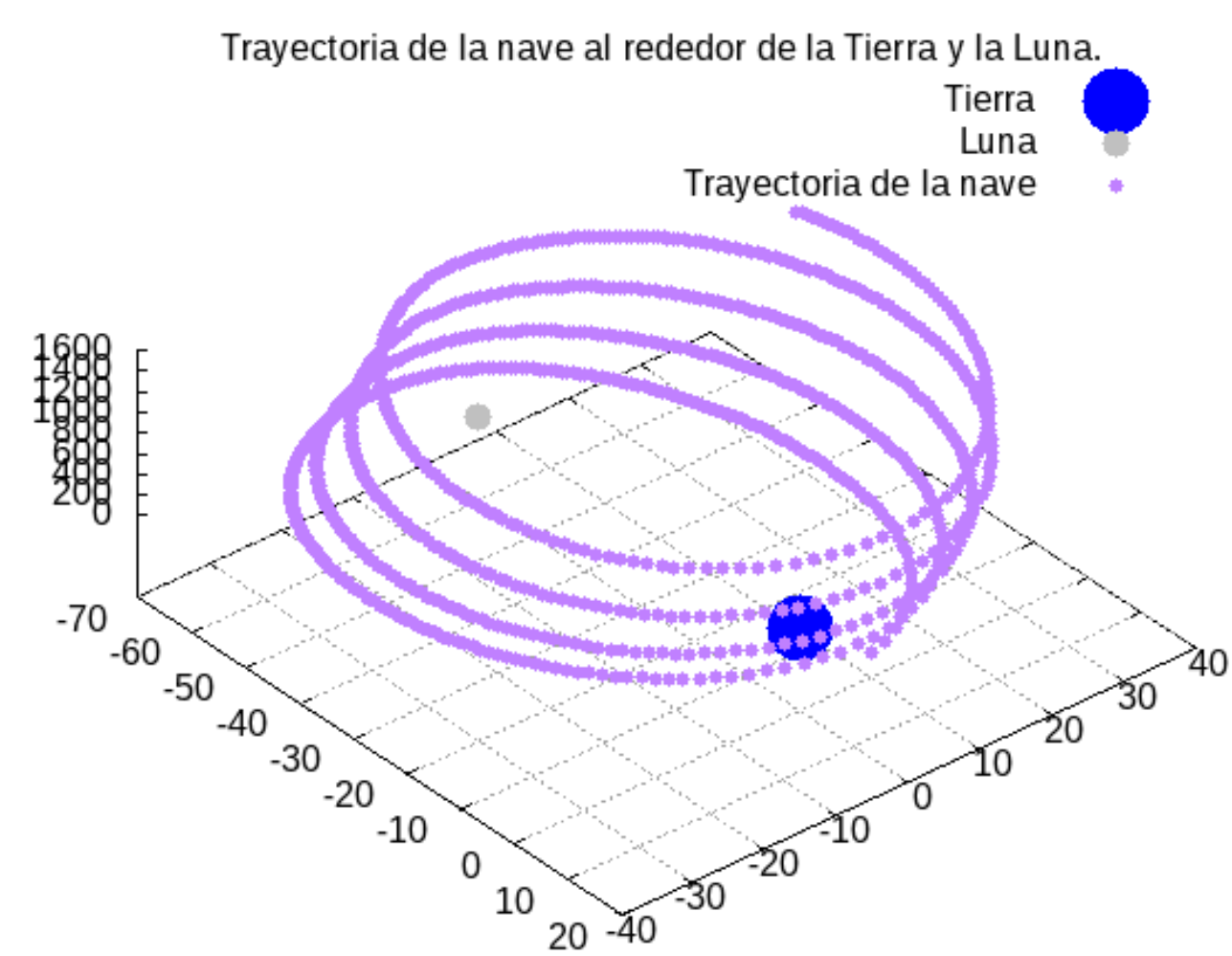


Figura 3: Trayectoria seguida por la nave al orbitar, mostrando el avance del tiempo.

Otro de los resultados que obtuvimos con el programa, como se dijo anteriormente, fue la obtención de las energías, las cuales se muestran a continuación.

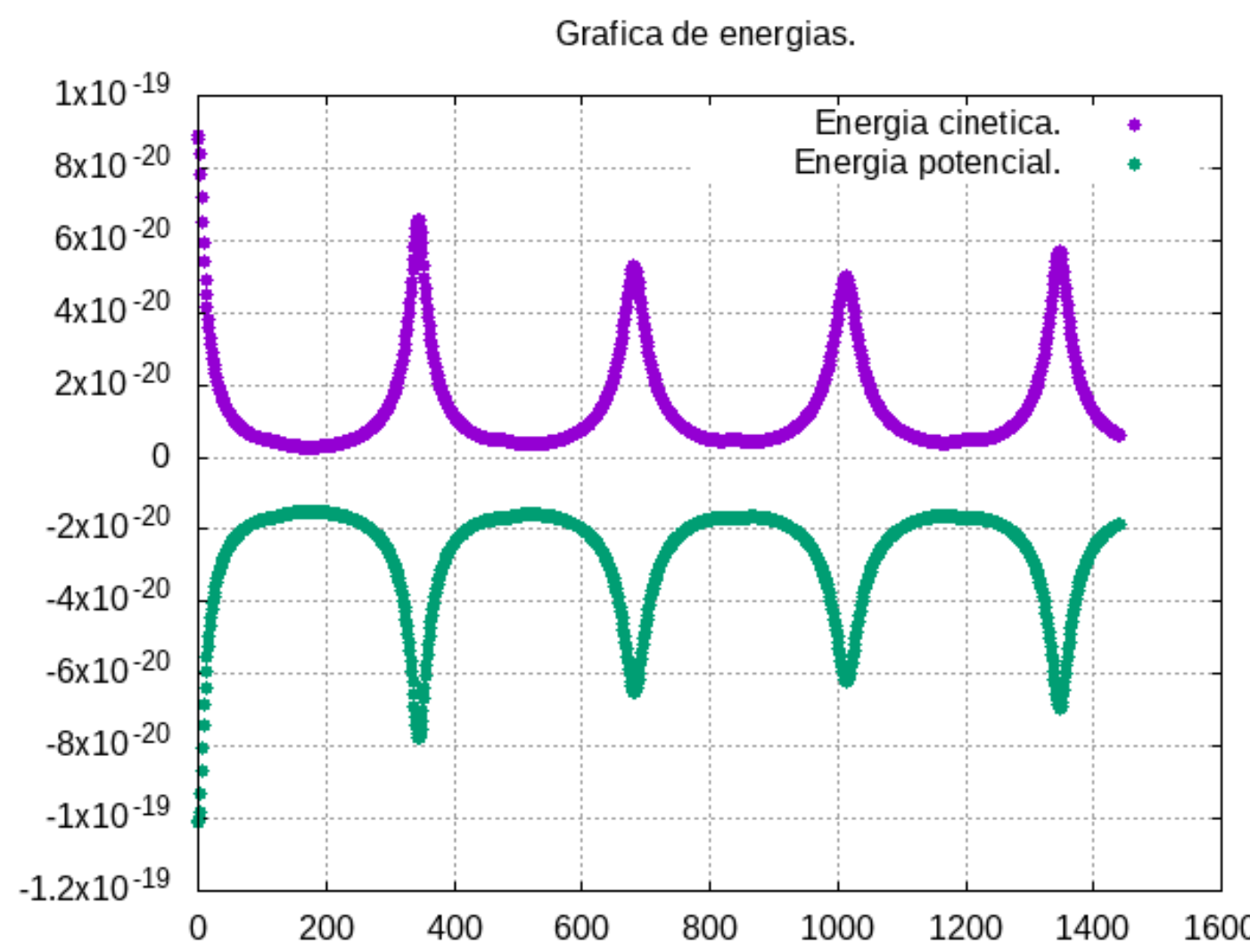


Figura 4: Energía cinética y potencial de la nave durante su movimiento.

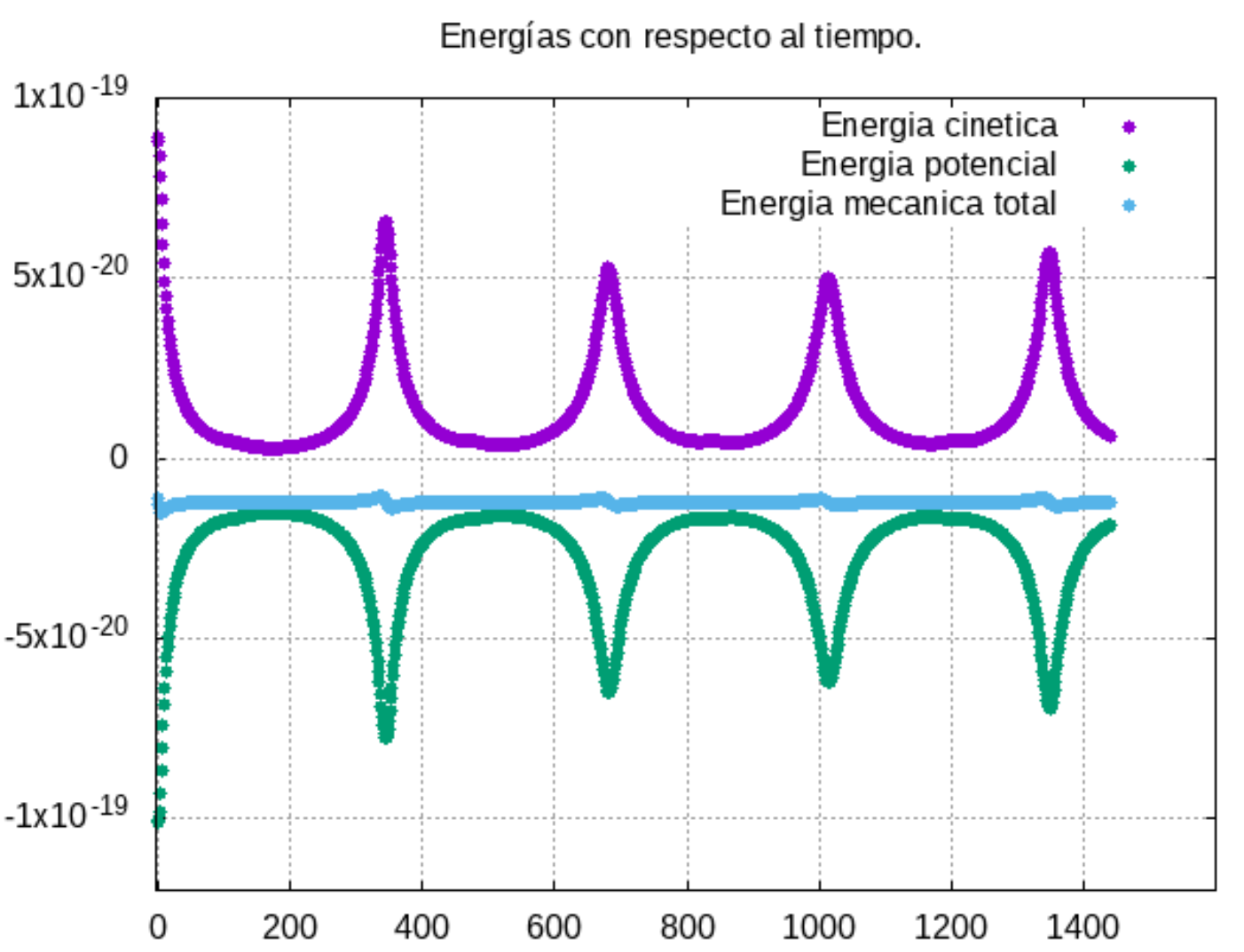


Figura 5: Energía mecánica total.

Conclusiones

Podemos concluir, principalmente, que es posible obtener muy buenas aproximaciones para este tipo de sistemas y predecir diferentes comportamientos orbitales con el paso del tiempo. Incluso existe la posibilidad de modificar o extender este programa, para estudiar otro tipo de sistemas, por ejemplo, proyectos para poner en órbita satélites artificiales, órbitas de cometas alrededor del Sol que pasen cerca de la Tierra, etc.

Agradecimientos

Se agradecen muchísimo los comentarios y ayuda de los profesores Dr. Carlos Antonio Calcáneo Roldán y del M.C. Dupret Alberto Santana Bejarano; además del invaluable apoyo por parte de los estudiantes de la Lic. en Física de la Universidad de Sonora.