Problema 1. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ un parámetro con el cual se define* $A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$. *Determine para qué valores de α y β, A es no singular.*

Solución. Procederemos por casos:

i) $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$. En este caso A es una matriz triangular, entonces $\det(A) = \prod_{i=1}^{4} a_{ii} = \alpha^4 \neq 0$. Por tanto, la matriz A es no singular.

ii) $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq 0$. Para este caso usaremos el siguiente teorema

> **Teorema**
>
> $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible, si y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

Para obtener el determinante de A haremos operaciones elementales por fila

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \underset{\sim}{f_2 \leftarrow f_2 - f_4} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \underset{\sim}{f_4 \leftarrow f_4 - \frac{\beta}{\alpha} f_1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} & \beta & \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{f_3 \leftarrow f_3 - \frac{\beta}{\alpha} f_2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 2\beta \\ 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} & \beta & \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha} \end{pmatrix} \underset{\sim}{f_4 \leftarrow f_4 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} f_2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 2\beta \\ 0 & 0 & \beta & \frac{\alpha^2-2\beta^2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{f_4 \leftarrow f_4 - \frac{\beta}{\alpha} f_3} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha^2-4\beta^2}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Usando el hecho que la matriz obtenida después del proceso de escalonamiento es triangular superior y dado que solo realizamos operaciones elementales del tipo $f_i \leftarrow f_i + \lambda f_j$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $j, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, se obtiene que

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha^2-4\beta^2}{\alpha} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha^2 - (2\beta)^2}{\alpha} = \alpha^2(\alpha^2 - (2\beta)^2) = \alpha^2(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta)$$

Así, A es no singular, si y sólo si, $\alpha \neq 2\beta$ y $\alpha \neq -2\beta$.

iii) Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$. En este caso la matriz tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, dado que las fila 1 y 3 son iguales, entonces $\det(A) = 0$ y por tanto A es singular.

iv) $\alpha = \beta = 0$. Dado que A es la matriz nula, $\det(A) = 0$, por tanto A es singular.

$\square$