# hw_markevich_1

poniedziałek, 30 września 2024 13:59

**Упражнение 3 - Погрешности**

1. Оценить погрешность в определении корней уравнения $ay^3 + d = 0$, если величины $a = 1$ и $d = 8$ заданы с точностью $\Delta(a) = 10^{-3}$ и $\Delta(d) = 10^{-3}$.

2. Определить оптимальный шаг численного дифференцирования $h_{\text{opt}}$ при использовании для вычисления производной приближенной формулы

$$u'(x) \approx \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h}, \quad = u^{(1)}$$

Какой порядок аппроксимации имеет эта формула? Известно, что, $\left|u^{(5)}(t)\right| \le M_5$, а значения функций вычисляются с точностью $\Delta u$.

**Упражнение 4 - Погрешность определения корня уравнения**

С каким числом верных знаков (или относительной погрешностью) должен быть известен свободный член в уравнении $x^2 - 2x + 0.999993751 = 0$, чтобы корни имели четыре верных знака?

**Упражнение 5 - Рост погрешности в последовательности**

Пусть задана последовательность чисел $x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, причем $5x_{n+1} - x_n = 4$, а $x_0$ известно с относительной погрешностью $10^{-6}$. При каких значениях $x_0$ относительная погрешность при вычислении $x_n$ будет быстро возрастать с ростом $n$ ?

**Упр 3**

1) $y^3 = -\frac{d}{a} = (-2)^3 \Rightarrow y = -2$

$$3y^2 \Delta y = \left(\frac{d\Delta a + a\Delta d}{a^2}\right) \Rightarrow \Delta y = \left|\left(\frac{d\Delta a + a\Delta d}{3y^2a^2}\right)\right| = \frac{9\cdot 10^{-3}}{12} = 0{,}75\cdot 10^{-3}$$

2) $\varepsilon_{method} = |u'(x_0) - u^{(1)}(x_0)|$

тейлорим: $u(x_0 \pm h) = u(x_0) \pm u'(x_0)\cdot h + \frac{u''(x_0)\cdot h^2}{2} \pm \frac{u''' h^3}{6} + \frac{u^{(IV)}(x_0)\, h^4}{24} \pm \frac{u^{(V)}(x_0) h^5}{120} + \bar{o}(h^5)$

$u(x_0 \pm 2h) =$ — // —, но $h \mapsto 2h$

- $\varepsilon_{method} = \frac{1}{12h}\left| u^{(V)}(x_0)\left(-\frac{4}{15} - \frac{4}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)h^5\right| \le \frac{h^4 \cdot M_5}{30}$, где $u^{(5)} \le M^5$ – верхн. оценка

$\varepsilon_{meth} = o(h^4)$ – четвертый порядок аппрокс.

- $\varepsilon_{round} = \frac{18\Delta u\cdot h + (\ldots)\Delta h}{h^2} \approx \frac{18\Delta u}{h}$ ← числитель

$$\varepsilon = \varepsilon_{meth} + \varepsilon_{round} = \frac{h^4 M_5}{30} + \frac{18\Delta u}{h}; \quad \varepsilon' = \frac{2h^3 M_5}{15} - \frac{18\Delta u}{h^2} = 0 \Rightarrow h = \sqrt[5]{135\frac{\Delta u}{M_5}}$$

**Упр 4**

$$x^2 - 2x + \underbrace{0{,}999993751}_{y} = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 \approx 0{,}9975 \\ x_2 \approx 1{,}0025 \end{array}$$

Хотим 4 знака $\Rightarrow x = \alpha,\beta\gamma\varepsilon\xi$

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2\cdot 10^3} = \frac{1}{5\cdot 10^3} = 2\cdot 10^{-4}$$

$$\Delta y = \Delta(x^2 - 2x) = 2x\Delta x + 2\Delta x = 2\Delta x(x+1) \le 4\cdot 10^{-4}(x+1)x \le 4\cdot 10^{-4}(x_1+1)x_1 \approx 0{,}000797$$

Различие в 4 знаке $\Rightarrow y = 0{,}9999$ (4 знака)

**Упр 5**

$5x_{n+1} - x_n = 4$; $\delta_0 = \frac{\Delta x_0}{x_0} = 10^{-6}$

При каких $x_0$ погрешность $x_n$ возрастает с ростом $n$?

Замена: $y_n = x_n + 1$, $y_{n+1} = x_{n+1} + 1 \Rightarrow 5y_{n+1} - 5 - y_n + 1 = 4$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{5} \Rightarrow y_n = \frac{y_0}{5^n} = \frac{x_0 - 1}{5^n} = x_n + 1$$

$$x_n = \frac{x_0 - 1}{5^n} + 1 \Rightarrow \Delta x_n = \frac{\Delta x_0}{5^n}$$

Погрешность: $\varepsilon_{x_n} = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \frac{\Delta x_0}{5^n}\frac{5^n}{(x_0 - 1 + 5^n)} = \frac{\Delta x_0}{x_0\left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{5^n}{x_0}\right)} = \varepsilon_{x_0}\frac{1}{1 + \frac{5^n - 1}{x_0}}$

При $\forall$ фикс $x_0$ погрешность уменьшается