hw_markevich_4

понедельник, 25 ноября 2024 г. 02:31

3. Правдоподобие для гауссовой вероятностной модели.

Пусть дана выборка точек на прямой $\{x_i\}$.

Максимизируйте правдоподобие (или его логарифм) в гауссовой вероятностной модели:

$$\prod_i p(x_i) \to \max_{\mu,\sigma} \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Обозн. $P = \prod p(x_i) \Rightarrow \ln P = \sum_i \left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}(2\ln\sigma + \ln 2\pi)\right)$

$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu} = \sum_i \frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \mu$

$\frac{\partial \ln P}{\sigma} = \sum_i \left(\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}\right) = 0 \Rightarrow \overline{(x-\mu)^2} = \sigma^2$ ч.т.д.

4. Гауссовы интегралы для МНК.

На лекции обсуждался учет влияния систематической погрешности путем усреднения решения задачи МНК по гауссовому нормальному распределению для y-координат точек выборки: $\tilde{y}_i \sim \mathcal{N}(y_i, s^2)$, где погрешность по оси ординат считалась равной s. Обобщите этот вывод на случай, когда каждая точка имеет свою y-погрешность s_i. Для этого проведите усреднение по многомерному нормальному распределению для $\tilde{y}_i$ с произвольной симметричной матрицей ковариации A^{-1}:

$$\tilde{y} \sim \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det(A))^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^T A^{-1}(\tilde{y}-y)}{2}\right), \quad (1)$$

где $y = \begin{pmatrix} y_i & \dots & y_N \end{pmatrix}^T$, а $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_i & \dots & \tilde{y}_N \end{pmatrix}^T$.

1. Покажите, что распределение (1) правильно нормировано. Указание: Выполните замену координат $\tilde{y} - y = Sz$, где матрица S диагонализует A.
2. Вычислите неприводимые парные корреляторы $\langle\langle \tilde{w}_i \tilde{w}_j \rangle\rangle$, усредняя по распределению (1). Указание: Сделайте замену $\tilde{y} - y = Y$. Для вычисления гауссового интеграла с предэкспонентой вычислите интеграл $\int d^N Y \exp\left(-Y^T A^{-1} Y/2 + J^T Y\right)$ и выполните дифференцирование по параметрам J_i (компоненты вектора J).

1) $y = (y_1 \dots y_\ell)^T$

$S^T A S = \Lambda$; S ~ ортог; Λ – диаг

$\tilde{y} - y = Sz$, $\det S = \det S^T = 1 \Rightarrow \det A = \det \Lambda$

переписал условие

Тогда $\tilde{y} \sim \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}\sqrt{\det A^{-1}}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^T A(\tilde{y}-y)}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}\sqrt{\det A^{-1}}} \exp\left(-\frac{z^T S^T A S z}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \frac{1}{\sqrt{\det A^{-1}}} \times$

$\times \exp\left(-\frac{z^T \Lambda z}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \frac{1}{\sqrt{\det A^{-1}}} \exp\left(-\frac{z^T \Lambda z}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{(\lambda_i)^{-1/2}} \exp\left(-\frac{z_i^2 \lambda_i}{2}\right)$

Тогда $\int \langle \dots \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} \prod_{i=1}^{\ell} \sqrt{\lambda_i} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda_i}} = 1 \Rightarrow$ да, правильно нормировано

2) $\langle \tilde{y}_i, \tilde{y}_j \rangle \overset{\text{def}}{=} A_{ij}$

5. Систематические погрешности в МНК.

Выполните в условиях предыдущей задачи.

1. Оцените систематические погрешности параметров модели w_α, следуя вычислению, приведенному на лекции, и используя корреляторы, полученные в предыдущем пункте.
2. Запишите решение в частном случае диагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_N)$. Как следует выбирать величины A_i для моделирования y-погрешности i-ой точки, равной s_i ?

1) $\sigma_{w_\alpha}^2 \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{w}_\alpha, \tilde{w}_\alpha \rangle = Q_{\alpha i} Q_{\alpha j} \langle \tilde{y}_i \tilde{y}_j \rangle = \langle QAQ^T \rangle_{\alpha\alpha}$; $Q = (X^T X)^{-1} X^T$

2) $A = \operatorname{diag}(A_1 \dots A_\ell)$

$QQ^T = \underbrace{(X^T X)^{-1} X^T X}_{E} (X^T X)^{-T} = (X^T X)^{-1} \Rightarrow \sigma_{w_\alpha}^2 = (X^T X)^{-1}_{\alpha\alpha} A_i$

$\operatorname{cov}(\tilde{y}_i' \tilde{y}_i') = A_i = S_i^2$

Итого $\sigma_{w_k}^2 = (X^T X)^{-1}_{\alpha\alpha} S_i^2$; $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - K^2}$

$\sigma_b = 2\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ [illegible]

Итого $\sigma^2_{w_\alpha} = (X^TX)^{-1}_{\alpha\alpha} S_i$; $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} - k^2}$

$\sigma_b = \sigma\sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$

$y = Xw = kx + b$, $\underset{2\times 1}{w = \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix}}$; $\underset{n\times 2}{X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}$; $\underset{2\times n}{X^T = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}$; $X^TX = \begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & n \end{pmatrix}$

$(X^TX)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{n\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}_{= n^2\sigma^2 x}} \begin{pmatrix} n & -\Sigma x_i \\ -\Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix}$

$\Delta_{\text{случ}} w_k = \sqrt{\frac{\sigma^2 y}{\sigma^2 x \cdot n}}$, $\Delta w_b = \sqrt{\frac{\sigma^2 y \,\Sigma x_i^2}{n^2 \sigma^2 x}}$