hw_markevich_2

niedziela, 20 października 2024 14:09

Задание 3. Эквивалентность первых двух норм.

Найдите константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1||\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_1 \leq C_2||\mathbf{x}||_2$$

Указание: в качестве подсказки можно использовать визуализацию норм из документа с теорией.

Задание 4. Евклидова и бесконечная норма.

Пусть x — вектор размерности m, а A — матрица m×n. Докажите следующие неравенства и приведите примеры таких x и A, при которых неравенства обращаются в равенства:

- $\|x\|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty$
- $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$

Задание 5. Норма Фробениуса.

Докажите, что для любой унитарной матрицы U (и для произвольной матрицы A) имеет место равенство

$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F$,

где $\| \cdot \|_F$ — норма Фробениуса.

Указание.
Задачу можно решить без вычислений, если использовать геометрический смысл нормы Фробениуса и геометрические свойства умножения на унитарную матрицу (что при умножении на неё сохраняется).

#при умножении на унитраную она сохраняет площадь, т е что-то будет мерой, что будет сохранятся. Нужно рассмотреть любую матрицу m на n

Упр 3 $c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2$ - найти такие c_i

- $\dfrac{\sum_1^n |x_i|}{n} \leq \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$ - нер-во о средних

$\dfrac{\|x_1\|}{n} \leq \dfrac{\|x_2\|}{\sqrt{n}} \Rightarrow \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x_2\| \Rightarrow c_2 = \sqrt{n}$

- $\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i<j}|x_i||x_j| \geq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2$

значит, $c_1 = 1$

Упр 4

- $\|x\|_2 \leq \sqrt{m}\|x\|_\infty$

▶ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \leq \sqrt{m \cdot (\max_i |x_i|)^2} = \sqrt{m}\|x\|_\infty$ ■

Рав-во: $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{m}|x_0| = \sqrt{m}\|x\|_\infty$

- $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$, где A - размера m×n

▶ $\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \overset{1\text{ пункт}}{\leq} \sup \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2} \leq \sqrt{n}\dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ ■

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_\infty = n;\ \|A_2\| = \sqrt{n}$

Упр 5 $\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}\,A^+A = \mathrm{tr}\,AA^+$

▶ $\exists$ U - унитарная $\Rightarrow$ $\|UA\|_F^2 = \mathrm{tr}\,A^+U^+UA = \mathrm{tr}\,A^+A = \|A\|_F^2$

$\|AU\|_F^2 = \mathrm{tr}\,AUU^+A = \mathrm{tr}\,AA^+ = \|A\|_F^2$ ■