hw_markevich_23

15 декабря 2024 г. 21:15

1. Локализация корней.

$a_3 = 1, \; a_0 = 20$

Локализовать действительные корни в уравнении:

$$f(x) = 20x^3 - 4x^2 - 5x + 1.$$

$A = \max\{4, 5, 1\} = 5, \quad B = \max\{20, 4, 5\} = 20 \Rightarrow$ Все вещ. корни на отрезке $[\alpha, \beta]$

$\alpha = \frac{|a_3|}{|a_3| + B} = \frac{1}{1+20} = \frac{1}{21}; \quad \beta = 1 + \frac{A}{|a_0|} = 1 + \frac{5}{20} = \frac{5}{4}$

на $\left[\frac{1}{21}, \frac{5}{4}\right] \cup \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{21}\right]$

Th Декарта:
$$\left.\begin{aligned} f(a_0) &= 158301 > 0 \\ f(a_1) &= -1323 < 0 \\ f(a_2) &= -2574 < 0 \\ f(a_3) &= 12 > 0 \end{aligned}\right) \Rightarrow$$
2 смены знака
$\Rightarrow$ либо 2, либо 0 веществ. полож. корней

$f(\alpha) > 0, \quad f(\beta) < 0, \quad f(-\beta) < 0, \quad f(-\alpha) > 0$

$f'(x) = 60x^2 - 8x - 5$

$f'(\alpha) < 0, \quad f'(\beta) > 0, \quad f'(-\beta) > 0, \quad f'(-\alpha) < 0$

$f''(x) = 120x - 8$

$f''(\alpha) < 0, \quad f''(\beta) > 0, \quad f''(-\beta) < 0, \quad f''(-\alpha) < 0$

$f'''(x) = 120$

$f'''(\alpha) > 0, \quad f'''(\beta) > 0, \quad f'''(-\beta) > 0, \quad f'''(-\alpha) > 0$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_+ &= S(\alpha + 0) - S(\beta - 0) = 2 - 0 = 2 \\ \Delta_- &= S(-\beta + 0) - S(-\alpha - 0) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}\right) \Rightarrow$$
2 полож на $[\alpha, \beta]$
1 отр на $[-\beta, -\alpha]$

2. Порядок сходимости итерационного метода.

Определить порядок сходимости итерационного метода при вычислении квадратного корня $x^* = \sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{11x_n^4 - 4x_n^2 a + a^2}{16x_n^5}(x_n^2 - a)$$

Если p – порядок сходимости, то $|x_{n+1} - x^*| \le C|x_n - x^*|^p$, $x^* = \sqrt{a}$

$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{11x_n^4 - 4x_n^2 a + a^2}{16x_n^5}(x_n^2 - a)$

$\varphi(x^*) = 0, \quad \varphi'(x^*) = 0, \quad \varphi''(x^*) = 0, \quad \varphi'''(x^*) = 0, \quad \varphi^{IV}(x^*) \ne 0 \Rightarrow$ 4ый порядок сх-сти

3. Метод Ньютона и Гаусса-Ньютона.

Решение проблемы многомерной линейной регрессии нормальным уравнением очень похоже на обобщение метода Ньютона на многомерный случай. Но это не так. Укажите, в чём различие между методами. В одномерном случае

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Обобщение метода Ньютона на многомерный случай выглядит так.

$$F(\vec{\beta}) \approx F(\vec{\beta^{(0)}}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\vec{\beta^{(0)}})}{\partial \beta_i}(\beta_i - \beta_i^0) = 0$$

3. Метод Ньютона и Гаусса-Ньютона.

Решение проблемы многомерной линейной регрессии нормальным уравнением очень похоже на обобщение метода Ньютона на многомерный случай. Но это не так. Укажите, в чём различие между методами. В одномерном случае

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Обобщение метода Ньютона на многомерный случай выглядит так.

$$F(\vec{\beta}) \approx F(\vec{\beta^{(0)}}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\vec{\beta^{(0)}})}{\partial \beta_i}(\beta_i - \beta_i^0) = 0$$

$$F(\vec{\beta^{(0)}}) + \nabla F(\vec{\beta^{(0)}})\vec{p} = 0$$

В случае поиска минимума функции F к нулю приравниваем частные производные F

$$\frac{\partial F(\vec{\beta})}{\partial \beta_i} \approx \frac{\partial F(\vec{\beta^{(0)}})}{\partial \beta_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(\vec{\beta^{(0)}})}{\partial \beta_i \partial \beta_j}(\beta_i - \beta_i^0) = 0$$

Хинт: покажите, что

$$2J^T J \neq H_{ij}$$

H_{ij} - гессиан F.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $f'(x) = \frac{5}{2}|x|^{3/2}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{5}|x_n|$

$\varphi'(x) = 1 - \frac{2}{5}\,\mathrm{sgn}(x) \neq 0 \Rightarrow$ 1ый порядок

$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - 1 + \frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \overset{x=x_*}{=\!=} 0$

$\varphi''(x) = \frac{(f'f'' + ff''')(f')^2 - 2ff''f'f''}{(f')^4} = \frac{(f')^3 f'' + f(f')^2 f''' - 2ff'(f'')^2}{(f')^4} \overset{x=x^*}{=\!=} \frac{f''}{f'} \neq 0 \Rightarrow$ 2ой поряд.