Chebyshev Polynomials

Observe:

1. $\cos x = x$
2. $\cos(2x) = 2\cos^2 x + 1$
3. $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3x$
4. $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

Theorem: Recursive Expression

Let $T_n(\cos\theta) := \cos(n\theta)$, there is

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Proof:

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)x) &= \cos(nx + x) \\
&= \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) \\
&= 2\cos(nx)\cos(x) - [\cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x)] \\
&= 2\cos(nx)\cos(x) - \cos((n-1)x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\cos x) &= 2T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x) \Rightarrow \\
T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

Properties of chebyshev polynomials are listed here:

- 性质 1: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
- 性质 2: $T_n(x)$ 的最高幂次项 x^n 系数是 2^{n-1}.

Proof: 归纳法易证

- 性质 3: $|T_n(x)| \leq 1$
- 性质 4: $T_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 共有 n 个零点，为 $x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), k = 1, 2, 3, ..., n$

Proof:

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

$$T_n(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{(2k-1)\pi}{2n}(k \in \mathbb{Z})$$

$$T_n(x) = 0 \Rightarrow x = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)(k = 1, 2, 3, ...n)$$

- 性质 5: $T_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 共有 $n+1$ 个极值点，为 $x_k^* = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, ..., n$, 且这些极值点上的函数值是以 $+1, -1$ 这样的形式轮流出现的.

Proof: 证明同上.

Chebyshev Approximation

Theorem: 1

设 n 次最高项系数为 1 的多项式 $Q_n(x)$ 的 n 个根在 $(-1,1)$ 之间, 为 $x_1, x_2, ..., x_n$. 那么我们在 $0, x_1, x_2, ..., x_n, 1$ 之间取 $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$, 其中 t 夹在两个根（暂时将 0,1 算入）的开区间内. 则对于任意最高项系数为 1 的多项式$R(x)$, 我们有

$$\max_{x\in[-1,1]} |R(x)| \geq \min_{i\in\mathbb{Z}\wedge i\in[0,n]} Q(t_i)$$

Proof:

反证法: 设

$$\exists R(x), \max_{x\in[-1,1]} |R(x)| < \min_{i\in\mathbb{Z}\wedge i\in[0,n]} Q(t_i) = M$$
$$\Rightarrow |R(x)| < M(\forall x \in [-1,1])$$

令 $T(x) := R(x) - Q(x)$ 则 $T(t_0), T(t_1), ..., T(t_n)$ 一定是正负交错的(画图容易看出).

$\Rightarrow T(x)$ 至少在 $[-1,1]$ 有 n 个根, 所以它是 n 次方程, 所以最高项 x^n 的系数必定不为 0 (代数学基本定理). 然而, $R(x) = x^n + ..., Q(x) = x^n + ...$ 所以矛盾. 原命题得证. ■