

Neural Networks: Representation - Applications

Di Zhao, 2016-4-9

zhaodi01@mail.ustc.edu.cn

1 Non-linear classification example: XOR/XNOR

$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$, 实现函数:

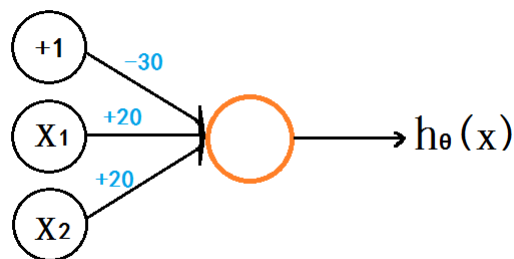
$$y = x_1 \text{ XOR } x_2,$$

$$y = x_1 \text{ NXOR } x_2 = \text{NOT}(x_1 \text{ XOR } x_2)$$

1.1 example: AND

已知sigmoid function的特点: 当 $z \geq 4.0$ 时 $g(z) \approx 1.0$, 当 $z \leq -4.0$ 时 $g(z) \approx 0$ 。

构建两层的Nuron (input和output), 第二层只有 $a_1^{(1)}$ 一个节点。且 $\Theta_1^{(1)} = [-30, 20, 20]^T$ 。则 $h_{\Theta}(x) = g(-30 + 20x_1 + 20x_2)$ 。(Figure 1)



可以得到真值表

x_1	x_2	z	$h_{\Theta}(x)$
0	0	-30	≈ 0
0	1	-10	≈ 0
1	0	-10	≈ 0
1	1	10	≈ 1

Figure 1: AND function

从真值表可以看出, 通过图1的神经网络实现了一个**AND**函数。

1.2 example: OR

类似地, 可以构造**OR**函数:

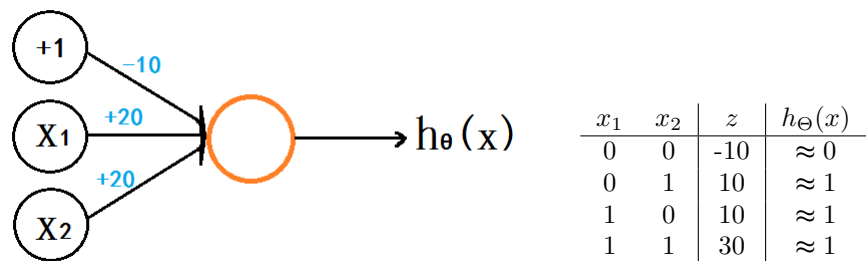


Figure 2: OR function

从真值表可以看出，通过图2的神经网络实现了一个**OR**函数。

1.3 example: NOT

函数NOT的构造：

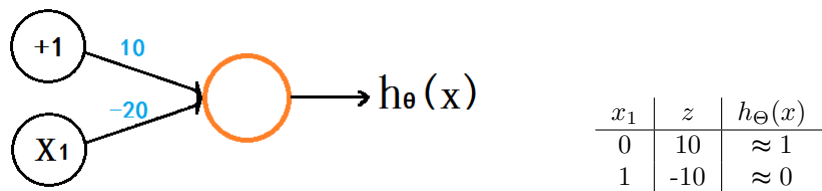


Figure 3: NOT function

1.4 Put together: x_1 NXOR x_2

注意到: $x_1 \text{ XOR } x_2 = (x_1 \text{ OR } x_2) \text{ AND } (\text{NOT } (x_1 \text{ AND } x_2))$,
 $x_1 \text{ NXOR } x_2 = (x_1 \text{ NOR } x_2) \text{ OR } (x_1 \text{ AND } x_2)$

因此可以组合得到**NXOR**函数(Figure 4)，以及真值表：

x_1	x_2	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$h_{\Theta}(x)$
0	0	0	1	≈ 1
0	1	0	0	≈ 0
1	0	0	0	≈ 0
1	1	1	0	≈ 1

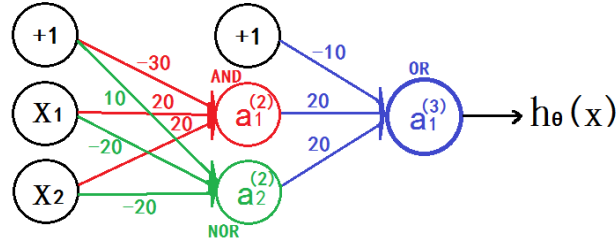


Figure 4: NXOR function

2 Multiclass Classification: one-vs-all

假设我们希望计算一个分类问题，有4个要计算的类别，那么 $h_{\Theta}(x) \in \mathbb{R}^4$. 变成了一个向量。并且我们希望 $h_{\Theta}(x) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h_{\Theta}(x) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 等等。（每个元素的值代表是否属于该类别）

相应地，训练集: $(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (x^{(m)}, y^{(m)})$ 中, y 不再是属于集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的单个值;

$$y^{(i)} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

神经网络的结构类似于:

