

# Neural Networks: Representation - Applications

Di Zhao, 2016-4-9

zhaodi01@mail.ustc.edu.cn

## 1 Non-linear classification example: XOR/XNOR

$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$ , 实现函数:

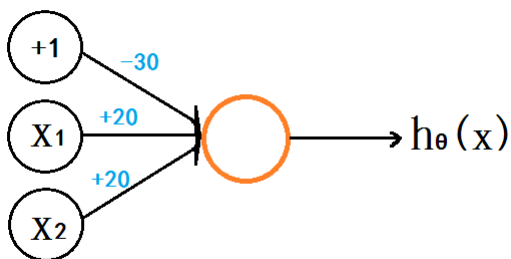
$$y = x_1 \text{ XOR } x_2,$$

$$y = x_1 \text{ NXOR } x_2 = \text{NOT}(x_1 \text{ XOR } x_2)$$

### 1.1 example: AND

已知sigmoid function的特点: 当 $z \geq 4.0$ 时 $g(z) \approx 1.0$ , 当 $z \leq -4.0$ 时 $g(z) \approx 0$ 。

构建两层的Nuron (input和output), 第二层只有 $a_1^{(1)}$ 一个节点。且 $\Theta_1^{(1)} = [-30, 20, 20]^T$ 。则 $h_{\Theta}(x) = g(-30 + 20x_1 + 20x_2)$ 。(Figure 1)



可以得到真值表

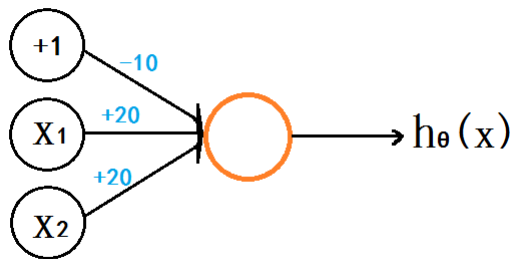
$x_1$	$x_2$	$z$	$h_{\Theta}(x)$
0	0	-30	$\approx 0$
0	1	-10	$\approx 0$
1	0	-10	$\approx 0$
1	1	10	$\approx 1$

Figure 1: AND function

从真值表可以看出, 通过图1的神经网络实现了一个**AND**函数。

### 1.2 example: OR

类似地, 可以构造**OR**函数:



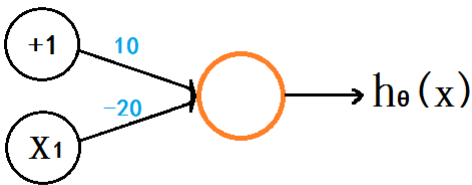
$x_1$	$x_2$	$z$	$h_{\Theta}(x)$
0	0	-10	$\approx 0$
0	1	10	$\approx 1$
1	0	10	$\approx 1$
1	1	30	$\approx 1$

Figure 2: OR function

从真值表可以看出，通过图2的神经网络实现了一个**OR**函数。

### 1.3 example: NOT

函数NOT的构造：



$x_1$	$z$	$h_{\Theta}(x)$
0	10	$\approx 1$
1	-10	$\approx 0$

Figure 3: NOT function

### 1.4 Put together: $x_1$ NXOR $x_2$

注意到:  $x_1 \text{ XOR } x_2 = (x_1 \text{ OR } x_2) \text{ AND } (\text{NOT } (x_1 \text{ AND } x_2))$ ,  
 $x_1 \text{ NXOR } x_2 = (x_1 \text{ NOR } x_2) \text{ OR } (x_1 \text{ AND } x_2)$

因此可以组合得到**NXOR**函数(Figure 4)，以及真值表：

$x_1$	$x_2$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$h_{\Theta}(x)$
0	0	0	1	$\approx 1$
0	1	0	0	$\approx 0$
1	0	0	0	$\approx 0$
1	1	1	0	$\approx 1$

## 2 Multiclass Classification: one-vs-all

假设我们希望计算一个分类问题，有4个要计算的类别，那么 $h_{\Theta}(x) \in \mathbb{R}^4$ 。变成了一个向量。并且我们希

望  $h_{\Theta}(x) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $h_{\Theta}(x) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 等等。（每个元素的值代表是否属于该类别）

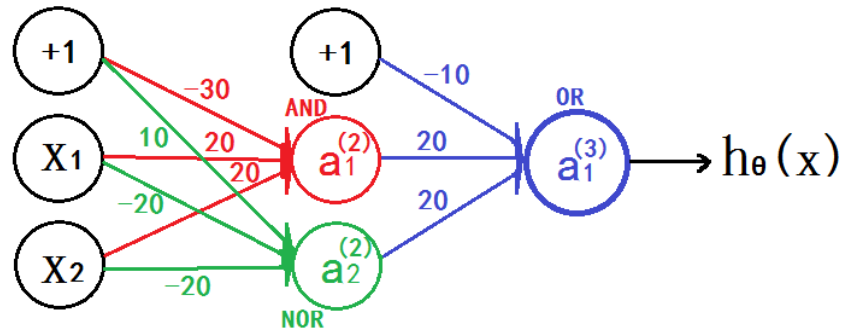


Figure 4: NXOR function

相应地，训练集：  $(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (x^{(m)}, y^{(m)})$  中，  $y$  不再是属于集合  $\{1, 2, 3, 4\}$  的单个值：

$$y^{(i)} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

神经网络的结构类似于：

