

© 2015 Brecht Baeten

ir. Brecht Baeten  
Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen  
KULeuven, Technologicampus Diepenbeek  
Agoralaan gebouw B bus 1  
3590 Diepenbeek  
Email: brecht.baeten@kuleuven.be



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Basisbegrippen</b>	<b>1</b>
1.1	Inleiding . . . . .	1
1.2	Beschrijving van een continuüm . . . . .	1
1.3	Beschrijving van een fluïdum . . . . .	3
1.4	Beschrijving van een stroming . . . . .	6
1.4.1	Samendrukbaarheid van stromingen . . . . .	8
1.4.2	Viskeuze stromingen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Hydrostatica</b>	<b>11</b>
2.1	Inleiding . . . . .	11
2.2	Hydrostatische druk . . . . .	11
2.3	Hydrostatische krachten . . . . .	15
2.3.1	krachten op rechte oppervlakken . . . . .	15
2.3.2	krachten op gebogen oppervlakken . . . . .	17
2.4	Drijven en stabiliteit . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Behoudsvergelijkingen voor controlevolumes</b>	<b>23</b>
3.1	Inleiding . . . . .	23
3.2	Basis vergelijkingen voor controlemassa's . . . . .	23
3.3	Basis vergelijkingen voor controlevolumes . . . . .	24
3.3.1	Behoud van massa . . . . .	25
3.3.2	Behoud van impuls . . . . .	26
3.3.3	Behoud van energie . . . . .	27
3.4	Stationair controlevolume met één instroming en één uitstroming . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Behoudsvergelijkingen langs stroomlijnen</b>	<b>33</b>
4.1	Inleiding . . . . .	33
4.2	Bewegingsvergelijking langs de stroomlijnen . . . . .	33
4.2.1	Deeltjesversnelling . . . . .	35
4.3	Integratie van de bewegingsvergelijking . . . . .	37
4.4	Mechanische arbeid van een deeltje . . . . .	37

4.4.1	Grafische voorstelling . . . . .	38
4.5	Toepassingen . . . . .	38
4.5.1	Pitotbuis . . . . .	39
4.5.2	Venturi effect . . . . .	40
4.6	Energiebeschouwingen en irreversibiliteit . . . . .	41
4.7	Bewegingsvergelijking loodrecht op de stromingsrichting . . . . .	42
4.8	Navier-Stokes vergelijkingen . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Gelijkvormigheid</b>	<b>45</b>
5.1	Inleiding . . . . .	45
5.2	Voorwaarden voor gelijkvormigheid . . . . .	45
5.2.1	Geometrische gelijkvormigheid . . . . .	45
5.2.2	Kinematische gelijkvormigheid . . . . .	46
5.2.3	Dynamische gelijkvormigheid . . . . .	46
5.3	Dimensieloze getallen . . . . .	47
5.4	Buckingham-Pi theorema . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Uitwendige stroming</b>	<b>53</b>
6.1	Inleiding . . . . .	53
6.2	Potentiaalstroming . . . . .	53
6.2.1	Stroomfunctie . . . . .	53
6.3	Grenslagen . . . . .	57
6.3.1	Het snelheidsprofiel van een laminaire stroming over een vlakke plaat . . . . .	58
6.3.2	Impulsbalans voor de laminaire stroming over een vlakke plaat . . . . .	60
6.3.3	Turbulentie . . . . .	61
6.4	Loshechting . . . . .	63
6.5	Stroming rond een vleugelprofiel . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Open-kanaalstroming</b>	<b>71</b>
7.1	Inleiding . . . . .	71
7.2	Oppervlaktegolven . . . . .	71
7.3	Energetische beschouwingen bij open kanaal stroming . . . . .	73
7.3.1	Kritische stroming . . . . .	75
7.4	Veranderingen in diepte bij verschillende stromingstypes . . . . .	76
7.4.1	Verandering van stromingstype . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Inwendige stroming</b>	<b>79</b>
8.1	Inleiding . . . . .	79
8.2	Dimensie analyse van de drukval in een cilindrische leiding . . . . .	80
8.3	Laminaire stroming in een cilindrische leiding . . . . .	80
8.4	Turbulente stroming . . . . .	83

8.4.1	Stroming door niet cilindrische buizen . . . . .	85
<b>9</b>	<b>Leidingstelsels</b>	<b>87</b>
9.1	Inleiding . . . . .	87
9.2	Ladingsverliezen . . . . .	87
9.3	Lokale ladingsverliezen . . . . .	88
9.3.1	Ladingsverlies bij een plotse verwijding . . . . .	89
9.4	Serie en parallelschakeling van leidingen . . . . .	90
9.5	Leiding netwerken . . . . .	93
9.6	Pomp - ventilator - leiding karakteristiek . . . . .	95
9.7	Grafische voorstelling . . . . .	99
	<b>Bibliografie</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Formularium</b>	<b>103</b>
A.1	Hydrostatica . . . . .	103
A.2	Behoudsvergelijkingen . . . . .	103
A.3	Dimensieloze getallen . . . . .	104
A.4	Open kanaal stroming . . . . .	104
A.5	Stroming in leidingen . . . . .	104
<b>B</b>	<b>Tabellen en grafieken</b>	<b>105</b>



# Hoofdstuk 1

## Basisbegrippen

### 1.1 Inleiding

Overal rondom ons vinden we vloeistoffen en gassen, fluïda. In deze cursus zullen we de bewegingen die deze fluïda ondergaan en de krachten die ze op de omgeving uitoefenen bestuderen. Vaak zullen ingenieurs deze krachten en bewegingen kanaliseren en uitbuiten om een bepaald doel te realiseren, bijvoorbeeld arbeid opwekken of een kracht uitoefenen of simpelweg de verplaatsing van massa van één locatie naar een andere. Om systemen die dit doen te ontwerpen is het nodig het gedrag van de fluïda in bepaalde omstandigheden goed te kunnen voorspellen.

Een bepaalde hoeveelheid fluïdum zal steeds bestaan uit een zeer groot aantal moleculen. De hoeveelheid moleculen binnen  $1\text{m}^3$  water bij atmosfeer druk en  $20^\circ\text{C}$  is ongeveer  $10 \times 10^{30}$ . Een theorie die het gedrag van al deze moleculen zou voorspellen, bijvoorbeeld op basis van deeltjesmechanica, zou zeer complex zijn en weinig praktisch nut hebben aangezien de rekencapaciteit van huidige supercomputers verre van voldoende zou zijn om zulke systemen op te lossen. We moeten dus methodes bedenken om het globale gedrag van zulke systemen te beschrijven.

In dit hoofdstuk worden enkele principes uitgewerkt die het mogelijk maken om fluïda te bestuderen.

### 1.2 Beschrijving van een continuüm

We zullen binnen de fluïdummechanica een fluïdum niet bestuderen als een verzameling van moleculen maar als een continuüm. Deze benadering is analoog aan degene gebruikt binnen de vaste stof mechanica. We smeren als het ware de moleculen binnen het fluïdum uit over de volledige ruimte die het fluïdum inneemt (en niet enkel de ruimte die bezet wordt door de afzonderlijke moleculen). Dit brengt met zich mee dat alle afgeleide principes enkel geldig zijn indien we een volume beschouwen waarin voldoende moleculen aanwezig zijn zodat de gemiddelde eigenschappen van de aanwezige moleculen representatief zijn.

## HOOFDSTUK 1 BASISBEGRIPPEN

Beschouw als voorbeeld een bepaald volume uit een fluïdum. Aangezien de moleculen in een fluïdum een grote bewegingsvrijheid hebben zullen er steeds moleculen het volume in en uit bewegen. Wanneer het beschouwde volume echter groot genoeg is zullen er steeds ongeveer evenveel moleculen binnen het beschouwde volume zijn (de beweging van de moleculen is willekeurig dus zullen er evenveel moleculen instromen als uitstromen). De massa van het fluïdum binnen het volume is dus ook constant. Wanneer het volume echter zo klein gekozen wordt dat er slechts enkele moleculen zich binnen het volume bevinden heeft de verplaatsing van één enkele molecule een veel groter effect op de variatie van massa binnen het volume en kan de continuümaanname niet meer gerechtvaardigd worden.

Een belangrijke eigenschap voor het beschrijven van een continuüm is de *massadichtheid* of *dichtheid*. Deze wordt gedefinieerd als de massa binnen een bepaald volume gedeeld door het ingenomen volume wanneer dit volume infinitesimaal klein wordt.

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta V} \quad (1.1)$$

Onder de continuümaannames zal de dichtheid onafhankelijk zijn van de grootte van het infinitesimaal volume en heeft de bovenstaande limiet een constante waarde. De SI eenheid van dichtheid is  $\text{kg/m}^3$ .

In de mechanica zijn we steeds geïnteresseerd in de beweging en vervorming van systemen onder invloed van krachten. In de continuümveronderstelling kunnen we deze krachten onderverdelen in *volume krachten* en *oppervlakte krachten*. De meest voor de hand liggende volume kracht is de zwaartekracht. Deze zal overal in het continuüm aangrijpen en is gelijk aan het product van de massadichtheid en de valversnelling. De totale kracht die een volume kracht uitgeoefend op een systeem kunnen we berekenen door de volume-integraal van de volume kracht over het volledige volume te nemen (vandaar de naam). Zo wordt de totale zwaartekracht uitgeoefend op een systeem:

$$\mathbf{F}_{g,totaal} = \int_V \rho \mathbf{g} dV = m \mathbf{g} \quad (1.2)$$

In tegenstelling tot volume krachten zullen oppervlakte krachten enkel aan de rand van een volume inwerken. Deze kunnen beschreven worden door de spanning op een oppervlak. De spanning noteren we met het symbool  $\sigma$  of  $\tau$  en heeft een eenheid  $\text{N/m}^2$ . De totale kracht die een spanning op een oppervlak uitoefent wordt berekend als:

$$\mathbf{F}_{\sigma,totaal} = \int_A \boldsymbol{\sigma} dA \quad (1.3)$$

De spanning op een oppervlak kan steeds beschreven worden door een component loodrecht op het oppervlak, de *normaalspanning*  $\sigma$  en een component tangentieel aan het oppervlak, de *schuifspanning*  $\tau$  (Figuur 1.1).





**Figuur 1.1:** Spanning aan het oppervlak van een continuüm

### 1.3 Beschrijving van een fluïdum

Beschouw twee starre evenwijdige platen op een bepaalde afstand van elkaar met een bepaald fluïdum ertussen (Figuur 1.2). De onderste plaat staat vast opgesteld, terwijl de bovenste plaat kan bewegen zoals aangegeven op de figuur. Indien we een kracht  $F$  uitoefenen op de bovenste plaat zal deze in dezelfde richting gaan bewegen. De uiteindelijke snelheid waarmee de plaat beweegt zal afhankelijk zijn van de uitgeoefende kracht. Wanneer we de kracht uitoefenen zoals aangegeven



**Figuur 1.2:** Evenwijdige platen met een vloeistof

introduceren we een spanning in de vloeistof met grootte  $\tau$ :

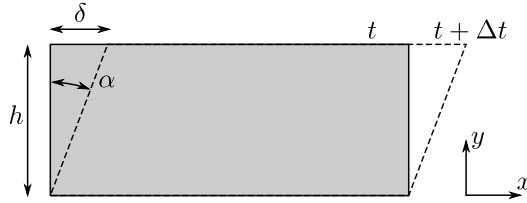
$$\tau = \frac{F}{A} \quad (1.4)$$

Met  $A$  de oppervlakte van de vloeistof in contact met één van de platen. Aangezien deze ervoor zal zorgen dat de twee platen ten opzichte van elkaar gaan schuiven wordt hierdoor de naamgeving schuifspanning ook duidelijk. Indien we een schuifspanning op een vaste stof zouden uitoefenen via de twee platen, dan zouden deze over een bepaalde afstand  $\delta$  verschuiven en dan tot stilstand komen. Bij een fluïdum zal de beweging echter niet stoppen. Hieruit volgt ook de definitie van een fluïdum:

Een fluïdum is een stof die onder invloed van een eindige kracht een oneindige vervorming aanneemt.

In de vaste stof mechanica wordt de vervorming tot de spanning gerelateerd door de elasticiteitsmodulus of de glijdingsmodulus. Aangezien er in de fluïdummechanica sprake is van oneindige

vervormingen is een zelfde aanpak niet mogelijk. Een andere aanpak is de schuifspanning te relateren aan de vervormingssnelheid. Als in het beschouwde voorbeeld de bovenste plaat een snelheid  $v_0$  heeft dan zal een deel van de vloeistof dat op tijdstip  $t$  een rechthoekige vorm had er op een tijdstip  $t + \Delta t$  eruitzien als een parallellogram (Figuur 1.3). We kunnen de vervormingssnelheid uitdrukken als de verandering van de hoek  $\alpha$ . Uit experimenten blijkt dat in de buurt van een wand



**Figuur 1.3:** Vervormingssnelheid

elk fluïdum de snelheid van de wand aanneemt. De snelheid van de vloeistof aan de bovenwand is dus ook  $v_0$ . De vervormingssnelheid wordt dan:

$$\text{vervormingssnelheid} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta t} \simeq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta}{h \Delta t} = \frac{v_0}{h} \quad (1.5)$$

Wanneer het snelheidsprofiel niet lineair is kunnen we deze uitdrukking veralgemenen tot:

$$\text{vervormingssnelheid} = \frac{dv}{dy} \quad (1.6)$$

De eenvoudigste relatie tussen vervormingssnelheid en schuifspanning is een lineaire relatie. Het verband wordt dan:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.7)$$

De evenredigheidsfactor  $\mu$  wordt de *dynamische viscositeit* of gewoon *viscositeit* genoemd met als eenheid Pa s. Vloeistoffen die aan (1.7) voldoen worden *Newtoniaanse vloeistoffen* genoemd. Vele praktische en ingenieursvloeistoffen als water, lucht, smeerolie,... voldoen zeer goed aan deze relatie.

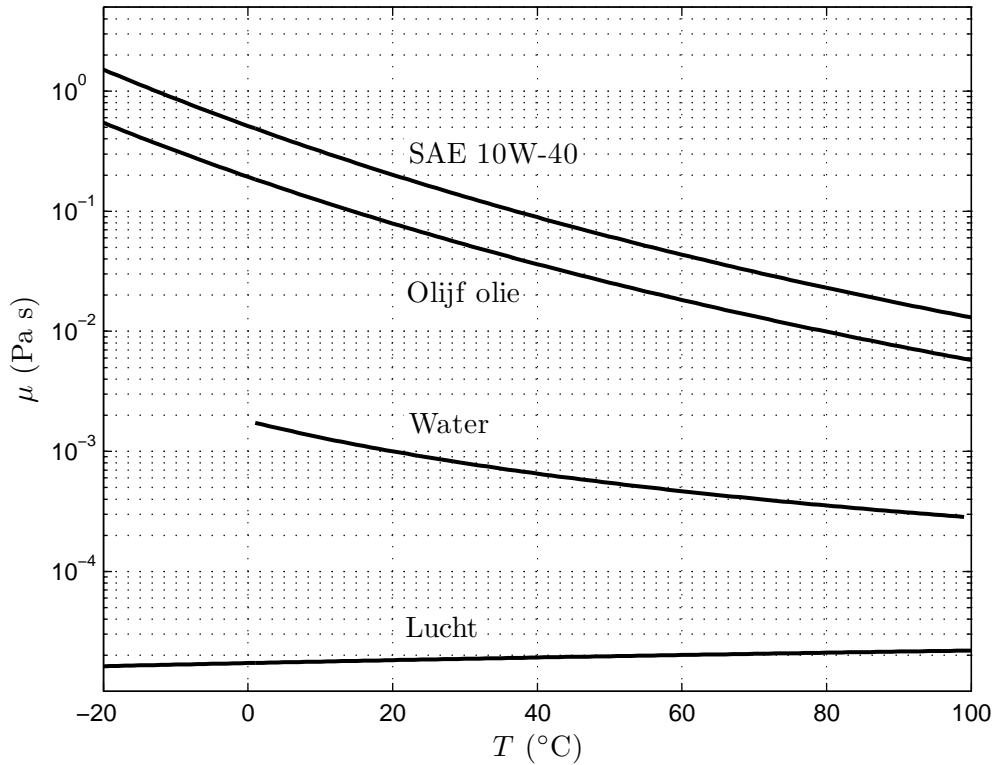
Vaak wordt de viscositeit voorgesteld als een *kinematische viscositeit*  $\nu$ . Deze wordt bekomen door de dynamische viscositeit te delen door de dichtheid van het fluïdum:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.8)$$

De eenheid van de kinematische viscositeit is  $\text{m}^2/\text{s}$ .

De viscositeit van een vloeistof is vaak sterk afhankelijk van de temperatuur. Wanneer we Figuur 1.4 bestuderen valt op dat bij vloeistoffen de viscositeit daalt bij stijgende temperatuur, terwijl bij gassen de viscositeit stijgt bij stijgende temperatuur. Dit kunnen we verklaren door op te merken dat bij vloeistoffen de verschillende moleculen dicht bij elkaar gelegen zijn. De viscositeit wordt dus hoofdzakelijk veroorzaakt door intermoleculaire krachten of cohesie. Bij hogere temperaturen nemen deze cohesiekrachten en dus ook de viscositeit af. Bij gassen is de afstand tussen de moleculen groter

en de moleculen bezitten elk een willekeurige snelheid. De viscositeit wordt dus veroorzaakt door impulsoverdracht door de moleculen. Aangezien bij stijgende temperatuur de moleculaire activiteit toeneemt zal ook de viscositeit toenemen.



**Figuur 1.4:** Viscositeit van verschillende fluïda met temperatuur

In de literatuur zijn twee vaak gebruikte correlaties terug te vinden. Voor gassen geeft de *Sutherland* vergelijking de relatie tussen dynamische viscositeit en absolute temperatuur:

$$\mu = \frac{CT^{3/2}}{T + S} \quad (1.9)$$

Met behulp van deze vergelijking kan de viscositeit bij eender welke temperatuur bepaald worden mits de kennis van viscositeit bij 2 temperaturen. Voor vloeistoffen wordt vaak gebruik gemaakt van de *Andrade* correlatie:

$$\mu = De^{B/T} \quad (1.10)$$

Ook hier zijn twee gekende punten noodzakelijk om de coëfficiënten in de vergelijking te bepalen. Een meer uitgebreide discussie over viscositeit en andere eigenschappen van fluïda is te vinden in [1].

## 1.4 Beschrijving van een stroming

Wanneer een vloeistof stroomt wil dit zeggen dat er vloeistofdeeltjes zich verplaatsen van één plaats naar een andere. Deze beweging van deeltjes kunnen we beschrijven door de positie  $\mathbf{r}$  van elk deeltje te volgen in de tijd. Indien we de positie van een deeltje op elk tijdstip kennen kunnen we ook de snelheid  $\mathbf{v}$  van het deeltje bepalen en kunnen we de stroming karakteriseren. We kunnen dus elk deeltje een label  $j$  geven en de snelheid en positie van elk deeltje beschrijven als:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_j(t) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_j(t) \quad (1.12)$$

Deze benadering wordt de Lagrange benadering genoemd en is bekend uit de deeltjesmechanica. Voor het behandelen van een continuüm is deze benadering echter niet erg praktisch. De hoeveelheid deeltjes die gevolgd zou moeten worden zou snel hoog oplopen.

Een andere benadering wordt de Euler benadering genoemd. Hier wordt de snelheid van de stroming beschreven als een vectorveld. Op elk tijdstip wordt op elke positie de snelheid bepaald onafhankelijk van welk deeltje er zich op dat tijdstip bevindt. Voor een tweedimensionale stroming wordt dit:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y) \quad (1.13)$$

Vaak zal het snelheidsveld onafhankelijk zijn van de tijd. Het snelheidsveld ziet er met andere woorden steeds hetzelfde uit. voor een tweedimensionale stroming wordt dit:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \quad (1.14)$$

We noemen dit een stationaire stroming. Veel stromingen in de ingenieurstoepassingen kunnen als stationair beschouwd worden. De stroming van water door een leiding bijvoorbeeld zal op een inloop en uitloop fenomeen na tijdsafhankelijk zijn. Ook de stroming door systemen als turbines en compressoren, met inwendig bewegende onderdelen, kunnen als stationair beschouwd worden aangezien aan de inlaat en uitlaat de stroming weinig invloed zal ondervinden van het voorbijkomen van roterende onderdelen. Zolang we enkel in de ingaande en uitgaande stroming geïnteresseerd zijn is dit geldig. Wanneer we de details van de stroming in een turbine stator en rotor willen bestuderen zullen we deze als niet stationair moeten beschouwen.

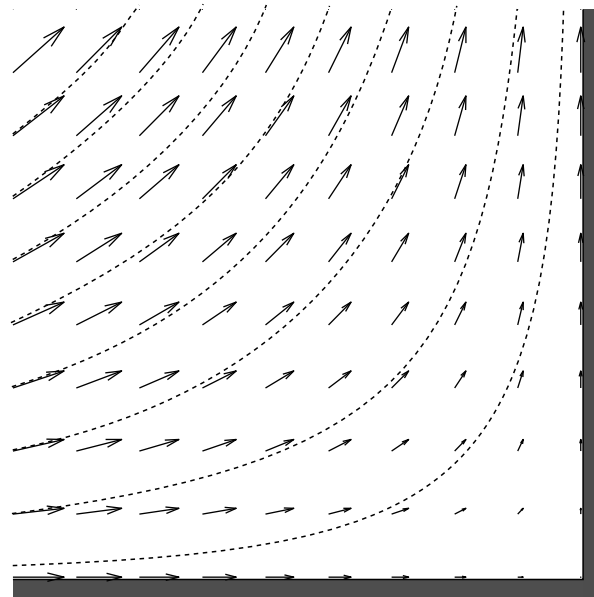
Ook systemen die op het eerste zicht geen stationaire stroming ondervinden kunnen vaak door een slimme transformatie als stationair beschouwd worden. Nemen we als voorbeeld een vliegtuig. Aangezien het vliegtuig zich door de stilstaande lucht verplaatst zal op een gegeven moment de lucht plaats moeten maken voor het vliegtuig en voldoende tijd later terug in rust zijn. De stroming is dus duidelijk niet stationair. Indien we echter de stroming relatief ten opzichte van het vliegtuig bekijken dan zal het snelheidsveld rond het vliegtuig wel stationair zijn (Figuur 1.5).

Indien ze gekend zijn kunnen de snelheidsvectoren op elk moment grafisch weergegeven worden. Indien we een set lijnen tekenen die op elk punt raken aan de snelheidsvectoren kunnen we ook



**Figuur 1.5:** Door een goede keuze van assenstelsel kan een stroming als stationair behandeld worden

op deze manier de stroming grafisch weergeven. Deze lijnen worden *stroomlijnen* genoemd (E: Streamlines). Als voorbeeld is in Figuur 1.6 een snelheidsveld gegeven voor een niet viskeuze stroming in een rechte hoek. De snelheidsvectoren worden als pijlen weergegeven op enkele discrete posities. De stroomlijnen zijn weergegeven als streeplijnen. Indien we een experimentele stroming



**Figuur 1.6:** Weergave van het snelheidsveld van een niet-viskeuze stroming in een rechte hoek

willen visualiseren is het opmeten van de snelheidsveld niet eenvoudig. Een eenvoudige manier om een stroming te visualiseren is op bepaalde posities continu kleurstof te injecteren in de stroming. De lijnen die door de kleurstof gevormd worden kunnen weergegeven worden en worden *stroombanen* genoemd (E: Streaklines). Een andere manier is om op een bepaald tijdstip op bepaalde posities een kleurstof te injecteren in de stroming en het pad van de kleurstof te volgen. We volgen dan als het ware enkele vloeistofdeeltjes als in de Lagrange benadering. De gevormde lijnen worden *padlijnen* genoemd (E: Pathlines). Bij stationaire stromingen vallen de stroomlijnen, stroombanen en padlijnen samen.

### 1.4.1 Samendrukbaarheid van stromingen

Elke stof zal wanneer er een druk op wordt uitgeoefend in zekere mate van volume veranderen. Bij vloeistoffen is deze verandering zeer klein of zelfs nauwelijks meetbaar zo zal water bij 20°C en 200bar een dichtheid hebben die minder dan 1% verschilt dan die van water bij 1bar. Gassen zijn daarentegen meestal goed samendrukbaar zo zal de dichtheid van lucht ongeveer verdubbelen ten bij een druk van 2bar ten opzicht van bij 1bar en gelijke temperatuur.

Ook al zijn vloeistoffen nauwelijks samendrukbaar, toch kunnen er zich drukgolven (zoals geluidsgolven) in voortplanten. De voortplantingssnelheid van een drukgolf in een bepaald medium wordt de *geluidssnelheid* genoemd (E: speed of sound) en is afhankelijk van de toestand van de stof. In lucht bij 20°C en atmosferedruk is de snelheid van het geluid ongeveer 340m/s. In water bij 20°C en atmosferedruk is dit ongeveer 1480m/s.

We zullen nu stromingen karakteriseren op basis van de dichtheidsveranderingen van het fluïdum. Wanneer de veranderingen zeer klein zijn spreken we van niet-samendrukbare stroming. Bij meetbare dichtheidsveranderingen kunnen we over samendrukbare stroming spreken. Merk meteen op dat volledig niet samendrukbare stroming een idealisering van de werkelijkheid is. Vaak zullen de dichtheidsveranderingen zo klein zijn dat ze geen invloed hebben op de rest van de stromingseigenschappen, de vereenvoudiging is dan verantwoord.

Algemeen kunnen stromingen als niet samendrukbaar beschouwd worden als de voorkomende snelheden veel kleiner zijn dan de snelheid van het geluid. Als praktische richtlijn wordt genomen dat indien de vrije stroomsnelheid kleiner is dan 20% van de geluidssnelheid de effecten van samendrukbaarheid verwaarloosbaar zijn [2].

Uit deze beschouwingen kunnen we besluiten dat stromingen van water bijna steeds als niet-samendrukbaar behandeld kunnen worden. Zelfs stromingen in lucht bij snelheden tot 70m/s, zoals stromingen in ventilatiekanalen of zelfs rond auto's kunnen als niet samendrukbaar beschouwd worden. Er zijn echter uitzonderingen waarbij de samendrukbaarheid van vloeistoffen tot uiting komt. Zo zal wanneer in een waterleiding een afsluitkraan zeer snel wordt gesloten er een drukgolf ontstaan die de leiding of systemen ermee verbonden kunnen beschadigen [3]. Dit fenomeen wordt *waterslag* (E: water hammer) genoemd.

In deze cursus zullen we enkel stromingen behandelen die als niet samendrukbaar beschouwd kunnen worden.

### 1.4.2 Viskeuze stromingen

Hoewel alle fluïda viskeus zijn kunnen sommige stromingen als niet-viskeus beschouwd worden. Merk namelijk op dat er enkel krachten uitgeoefend worden door viscositeit wanneer er een snelheidsgradiënt is (1.7). In grote delen van veel stromingen zal deze snelheidsgradiënt echter verwaarloosbaar klein zijn. Hier kunnen we de stroming dan als niet-viskeus beschouwen. Merk opnieuw

op dat een niet viskeuze stroming een idealisering van de werkelijkheid is. Beschouw als voorbeeld de stroming rond een plaat. In Figuur 1.7 wordt de stroming rond een plaat gevisualiseerd door op een gegeven tijdstip over de volledige breedte een kleurstof te injecteren. Deze kleurstof beweegt met de stroming mee tot ze de plaat tegenkomt. Dicht bij de plaat zal de vloeistof, en dus ook de kleurstof, afgeremd worden. Hier ontstaat een snelheidsgradiënt, dit deel van de stroming moet dus als viskeus beschouwd worden. Verder van de plaat is te zien dat de kleurstof een mooie verticale strook blijft. Hier is er dus geen snelheidsgradiënt en kan de stroming als niet-viskeus beschouwd worden.



**Figuur 1.7:** Visualisatie van de snelheid bij stroming rond een plaat. Aangepast uit [4]

In deze cursus zullen we voor niet-viskeuze stromingen een aantal eenvoudige vergelijkingen afleiden die inzicht geven in de mechanica van stromingen. Voor viskeuze stromingen zullen een aantal aspecten analytisch behandeld worden terwijl andere eerder kwalitatief uitgewerkt worden om fysische fenomenen te verklaren.





## Hoofdstuk 2

# Hydrostatica

### 2.1 Inleiding

In veel ingenieurstoepassingen komen situaties voor waar stilstaande fluïda interageren met een constructie. Het fluïdum zal ten gevolge van zijn gewicht bepaalde krachten uitoefenen op deze constructie. Het deel van de fluïdummecahnica waarin dit soort situaties bestudeerd wordt, wordt hydrostatica genoemd. In de komende secties zullen een aantal eenvoudige vergelijkingen voor het beschrijven van een stilstaand fluïdum besproken worden.

### 2.2 Hydrostatische druk

Beschouw een stilstaand fluïdum. We kunnen hieruit een balk met als grondvlak een rechthoekige driehoek afzonderen (Figuur 2). Aangezien de volledige vloeistof in rust is zal ook de vloeistof binnen de balk in rust zijn en zullen er geen schuifspanningen aanwezig zijn (de snelheid is overal 0 dus is de snelheidsgradiënt ook overal 0). We kunnen nu een krachtenevenwicht schrijven voor dit elementje. In de richtingen loodrecht op de rechthoekszijden wordt dit:

$$F_A = F_C \cos(\alpha) \quad (2.1)$$

$$F_B = F_C \sin(\alpha) \quad (2.2)$$

De uitgeoefende krachten zijn de resultante van een normaalspanning over de drie oppervlakken. Indien we het elementje klein genoeg kiezen zal deze spanning ook constant zijn over het oppervlak. Dus:

$$A\sigma_A = C\sigma_C \cos(\alpha) \quad (2.3)$$

$$B\sigma_B = C\sigma_C \sin(\alpha) \quad (2.4)$$

## HOOFDSTUK 2 HYDROSTATICA

Aangezien de driehoek rechthoekig is geldt ook dat:

$$A = C \cos(\alpha) \quad (2.5)$$

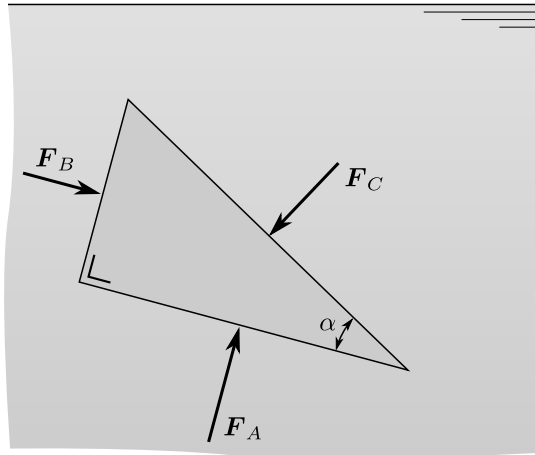
$$B = C \sin(\alpha) \quad (2.6)$$

Indien we de uitdrukkingen (2.5) en (2.6) invullen in (2.4) bekomen we:

$$\sigma_A = \sigma_C \quad (2.7)$$

$$\sigma_B = \sigma_C \quad (2.8)$$

Of de spanning op alle 3 de vlakken is dezelfde, onafhankelijk van de hoek van de driehoek. Het negatieve van deze spanning noemen we de hydrostatische druk  $p$  met als eenheid [Pa] of [N/m<sup>2</sup>]. In ingenieurstoepassingen wordt ook vaak gewerkt met de eenheid [bar] (1bar = 100000Pa) of met de Engelse eenheid [psi] (1psi  $\approx$  6895Pa). Volgens de meest gangbare conventies wordt deze in tegenstelling tot een normaalspanning positief gerekend indien ze werkt om het elementje te verkleinen. Aangezien de druk onafhankelijk is van de richting van het oppervlak waar ze op inwerkt is het een scalaire grootheid. Aangezien de druk een normaalspanning is zal ze ook steeds loodrecht op een oppervlak inwerken.



**Figuur 2.1:** Een driehoekig elementje afgezonderd uit een stilstaand fluïdum.

Beschouw nu een horizontaal oppervlak ondergedompeld in een stilstaand fluïdum. We kunnen de kracht die de vloeistof op één zijde van het oppervlak uitoefent bepalen door opnieuw een geschikt deel van de vloeistof af te zonderen en er een krachten evenwicht op toe te passen. Zonderen we het deel af met als begrenzing het vrije vloeistof oppervlak, het beschouwde oppervlak en de verticalen vertrekkende vanaf de randen van het begrenzende oppervlak (Figuur 2.2). Aangezien de vloeistof stilstaat werken er opnieuw geen schuifspanningen in op het afgezonderde deel. De enige inwerkende krachten zijn de zwaartekracht die inwerkt op de vloeistof en de reactiekracht van het oppervlak op de vloeistof.

$$R = G \quad (2.9)$$



**Figuur 2.2:** Vlakke horizontale plaat oppervlak ondergedompeld in een stilstaand fluïdum.

Indien we veronderstellen dat de dichtheid van het fluïdum onafhankelijk is van de positie in het fluïdum kunnen we het gewicht van het fluïdum berekenen door de dichtheid te vermenigvuldigen met de valversnelling en het beschouwde volume. De reactiekracht op het oppervlak moet opnieuw de resultante zijn van de druk. Indien we het oppervlak klein genoeg beschouwen wordt dit:

$$pdA = \rho g dAh \quad (2.10)$$

of:

$$p = \rho gh \quad (2.11)$$

Met andere woorden, de druk in het fluïdum is enkel afhankelijk van de verticale afstand tot het vrije oppervlak. In deze situatie hebben we de druk op het vrije vloeistof oppervlak verondersteld 0 te zijn. In de werkelijkheid zal ook hier een druk heersen, namelijk de druk veroorzaakt door de luchtlaag boven het vloeistof oppervlak, de atmosferedruk. Meer algemeen kunnen we het drukverschil tussen twee punten in een fluïdum met constante dichtheid berekenen als:

$$\Delta p = -\rho g \Delta z \quad (2.12)$$

Indien de dichtheid (of de valversnelling) niet constant is dienen we een integraal te berekenen tussen de twee beschouwde punten. Dit wordt:

$$\Delta p = - \int \rho g dz \quad (2.13)$$

of

$$dp = -\rho g dz \quad (2.14)$$

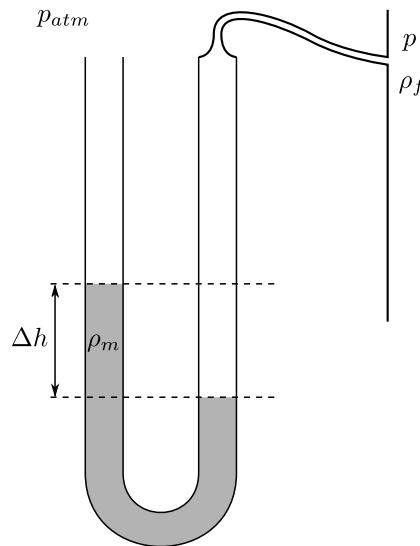
De eerder gemaakte veronderstelling dat de druk aan het vrije vloeistof oppervlak 0 is in plaats van atmosferedruk is een vaak gebruikte veronderstelling in de ingenieurswetenschappen. Aangezien in veel toepassingen de atmosferedruk overal aanwezig is heeft ze vaak geen invloed op de berekening van krachten. Vaak wordt de druk dan ook weergegeven ten opzichte van de atmosferedruk. We

noemen dit een overdruk (E: gauge pressure). De atmosferedruk heeft dus een overdruk van 0Pa. Een overdruk van 1bar betekent dat de druk 100 000Pa hoger is dan de lokale atmosferedruk. Aangezien de atmosferedruk varieert in de tijd en met positie kunnen overdrukken gemeten op verschillende tijdstippen of locaties moeilijk met elkaar vergeleken worden. Wanneer we echter geïnteresseerd zijn in krachten die uitgeoefend worden door een fluïdum kunnen overdrukken wel vergeleken worden aangezien de atmosferedruk vaak geen rol speelt bij de berekening van krachten.

Een klassieke toepassing van hydrostatica is het meten van drukken met behulp van een U-buis manometer (Figuur 2.3). Hierbij bevindt een vloeistof met hoge massadichtheid zich in een U vormige doorzichtige buis. Eén zijde van de buis wordt verbonden met de zone waar de te meten druk heerst. De andere zijde wordt vaak verbonden met de vrije atmosfeer. Aangezien wanneer de dichtheid constant is de druk enkel varieert met de hoogte zal ter hoogte van de onderste stippellijn de druk in beide benen van de manometer gelijk zijn. Ter hoogte van de bovenste stippellijn zal er dus een drukverschil heersen gelijk aan het verschil van dichtheid van de twee fluïda vermenigvuldigd met de valversnelling en het hoogteverschil tussen de twee niveaus. De overdruk in het reservoir ter hoogte van de bovenste stippellijn kan dus berekend worden als:

$$p_{over} = p - p_{atm} = (\rho_m - \rho_f)g\Delta h \quad (2.15)$$

Vroeger werd vaak kwik als meetvloeistof gebruikt omwille van zijn hoge dichtheid ( $\rho_{Hg} \simeq 13600\text{kg/m}^3$ ).



**Figuur 2.3:** U-buis manometer.

Wanneer een kwikmanometer gebruikt wordt om de druk in een gas te meten kan vaak de dichtheid van het gas verwaarloosd worden. Dit is ook de herkomst van de eenheid voor druk [mm Hg] die overeenkomt met het hoogteverschil afgelezen tussen de 2 manometer benen uitgedrukt in mm.

Ander types analoge manometers (vb. zuiger-, bourdon- of membraanmanometers) maken gebruik van veren om een druk uit te lezen. Elektronische manometers kunnen gebruik maken van rekstrookjes, piëzo elementen of andere technieken om drukken te meten.

## 2.3 Hydrostatische krachten

### 2.3.1 krachten op rechte oppervlakken

Om de kracht die door een druk op een oppervlak wordt uitgeoefend te berekenen, dienen we de druk te vermenigvuldigen met het oppervlak waarop deze inwerkt. De richting waarin de kracht werkt komt overeen met de richting waarin de druk werkt, dus loodrecht op het oppervlak.

$$F = pA \quad (2.16)$$

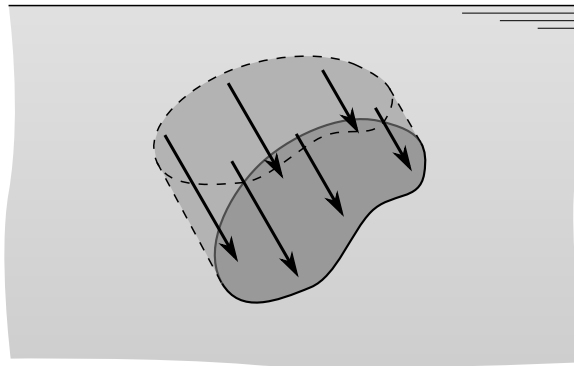
Indien de druk over een oppervlak niet constant is kunnen we het oppervlak opdelen in verschillende delen en de krachten die op de verschillende delen werken optellen. In de limiet, wanneer de delen infinitesimaal klein worden, zal de druk op elk deeltje constant zijn. De som van de verschillende krachten wordt dan een integraal over het oppervlak.

$$F = \int_A p dA \quad (2.17)$$

of

$$dF = p dA \quad (2.18)$$

Deze uitdrukking kan ook grafisch weergegeven worden. Indien we de druk die heerst in een bepaald punt als hoogte uitzetten loodrecht op het oppervlak (Figuur 2.4), dan zal de integraal (2.17) overeenkomen met het volume van de gevormde figuur.



**Figuur 2.4:** Grafische weergave van de berekening van de kracht op een recht oppervlak.

De richting waarin de kracht werkt zal nog steeds gelijk zijn aan de richting waarin de druk werkt dus loodrecht op het oppervlak. Om de inwerkende kracht volledig te karakteriseren hebben we echter ook zijn aangrijpingspunt nodig. Voor het aangrijpingspunt van de kracht moet gelden dat het moment dat de kracht rond dit punt uitoefent 0 is. Het moment dat de kracht uitoefent is de som van de momenten die de infinitesimale krachten uitoefenen. In een cartesiaans assenstelsel

wordt dit:

$$M_x = \int_A p(y - y_z) dA = 0 \quad (2.19)$$

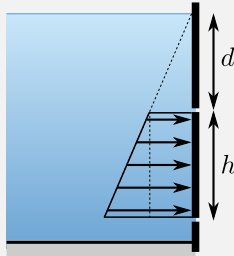
$$M_y = \int_A p(x - x_z) dA = 0 \quad (2.20)$$

Indien we opnieuw de grafische voorstelling van hierboven gebruiken, dan komen de bovenstaande vergelijkingen overeen met de definitie van het zwaartepunt van het gevormde volume. Het aangrijpingspunt van de kracht komt dus overeen met het zwaartepunt van het volume gevormd door de druk als hoogte loodrecht op het oppervlak uit te zetten.

In het geval van hydrostatisch drukken leidt dit vaak zeer eenvoudige uitdrukkingen voor de kracht en het aangrijpingspunt aangezien de druk lineair verloopt met de diepte.

### Voorbeeld 2.1:

Bepaal de grootte en het aangrijpingspunt van de resulterende kracht op het luik ondergedompeld in een fluïdum met dichtheid  $\rho$  getoond in de figuur. De bovenzijde bevindt zich op een diepte  $d$ , het luik heeft een hoogte  $h$  en breedte  $b$  (de breedte staat loodrecht op het vlak van de figuur).



Boven het fluïdum en aan de achterzijde van het luik heersen atmosferedruk. We kunnen deze dus buiten beschouwing laten aangezien ze netto geen kracht uitoefent op het luik. De druk binnen de vloeistof verloopt lineair zoals aangegeven op de figuur. Deze grootte van de kracht is dus gelijk aan het volume van de figuur gevormd door de druk uit te zetten op een verticaal vlak, dit het volume van een balk met een trapezium als grondvlak en lengte  $b$ . Het grondvlak van de figuur kan opnieuw opgesplitst worden in een rechthoek en een rechthoekige driehoek. Beide hebben dezelfde basis  $h$ . De hoogte van de rechthoek komt overeen met de druk aan het bovenste punt van het luik,  $\rho g d$ . de hoogte van de driehoek komt overeen met het drukverschil tussen het bovenste en onderste punt van het luik,  $\rho g h$ . De grootte van de kracht wordt dan:

$$\begin{aligned} F &= (A_{\text{rechthoek}} + A_{\text{driehoek}}) b \\ &= (\rho g d h + 1/2 \rho g h h) b \end{aligned}$$

Om het aangrijpingspunt te bepalen zoeken we de hoogte van het zwaartepunt van de figuur. Dit kunnen we bepalen als het gewogen gemiddelde van het zwaartepunt van de rechthoek

en de driehoek, gewogen met hun oppervlaktes:

$$y_z = \frac{y_{z,\text{rechthoek}}A_{\text{rechthoek}} + y_{z,\text{driehoek}}A_{\text{driehoek}}}{A_{\text{rechthoek}} + A_{\text{driehoek}}}$$

Aangezien het zwaartepunt van de rechthoek op  $1/2h$  van de onderzijde ligt en dat van de driehoek op  $1/3h$  wordt de afstand van het aangrijpingspunt tot de onderzijde:

$$\begin{aligned} y_z &= \frac{1/2h\rho g d h + 1/3h1/2\rho g h h}{\rho g d h + 1/2\rho g h h} \\ &= \frac{1/2dh + 1/6h^2}{d + 1/2h} \end{aligned}$$

### 2.3.2 krachten op gebogen oppervlakken

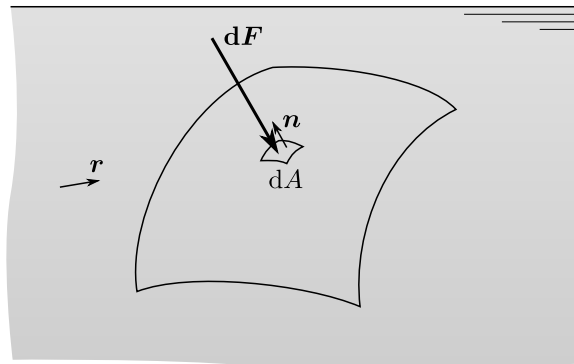
Wanneer we te maken hebben met gebogen oppervlakken zal het bepalen van de resultante krachten vaak niet meer zo eenvoudig zijn. Aangezien de druk steeds loodrecht op een oppervlak inwerkt, moeten we hier ook rekening houden met de richting van het oppervlak om de kracht in een bepaalde richting te berekenen. Beschouw als voorbeeld het oppervlak in Figuur 2.5. Beschouwen we een infinitesimaal deel van dit oppervlak met oppervlakte  $dA$ . Op dit deel werkt een kracht  $dF$  ten gevolge van de hydrostatische druk  $p$  in de richting loodrecht op het oppervlak met als grootte:

$$dF = p dA \quad (2.21)$$

Met behulp van de normaalvector op het oppervlak kunnen we de kracht vector schrijven als (vectoren zullen in deze cursus in het vet aangeduid worden.):

$$d\mathbf{F} = -p n dA \quad (2.22)$$

Indien we nu de kracht willen berekenen die in een bepaalde richting (volgens een vector  $\mathbf{r}$ ) wordt



**Figuur 2.5:** Kracht op een infinitesimaal stukje van een gebogen oppervlak.

uitgeoefend op het oppervlak kunnen we de kracht op het infinitesimaal oppervlak projecteren in de gewenste richting. Met behulp van het inwendig product van vectoren wordt dit:

$$dF_r = -p\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}dA \quad (2.23)$$

De totale kracht kunnen we opnieuw berekenen door te integreren over het volledige oppervlak:

$$F_r = \int_A -p\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}dA \quad (2.24)$$

Hierin zullen de normaalvector en de druk in veel gevallen afhankelijk zijn van de positie. Om de integraal uit te werken zullen dus afhankelijke uitdrukkingen voor  $p$  en  $\mathbf{n}$  moeten opgesteld worden.

Voor horizontale krachten kan de uitwerking van bovenstaande integraal vermeden worden. Het is namelijk steeds mogelijk een volume af te zonderen met als begrenzingen het beschouwde oppervlak, een projectie van dit oppervlak op een verticaal vlak loodrecht op de beschouwde richting en de verbinding tussen de twee. Ook voor dit volume moet een krachtenevenwicht gelden. In de horizontale richting werken er slechts twee krachten, aan de ene zijde de reactie kracht van het beschouwde oppervlak op het volume, en aan de andere zijde de hydrostatische kracht ten gevolge van het aangrenzende fluïdum. Deze krachten zijn dus gelijk en aangezien het tweede oppervlak een recht oppervlak is, bovendien een verticaal oppervlak, kan de kracht, en het aangrijpingspunt, berekend worden volgens de formules voor een recht oppervlak. De horizontale kracht op eender welk oppervlak is dus gelijk aan de kracht die inwerkt op de projectie van het oppervlak op een verticaal vlak dat loodrecht staat op de beschouwde richting. Ook het aangrijpingspunt (in elk geval de hoogte van het aangrijpingspunt) van de kracht kan volgend de formules en eenvoudige methodes voor vlakke oppervlakken berekend worden. Dit wordt voor een geval in 2 dimensies geïllustreerd in Figuur 2.6.

Ook voor verticale krachten kan de berekening vereenvoudigd worden. De kracht op zal namelijk gelijk zijn aan het gewicht van het volume boven het oppervlak alsof dit volledig met vloeistof gevuld zou zijn. Dit komt echter overeen met de berekening van een volume met een gekromd eindvlak. Hiervoor zal vaak een volume integraal uitgewerkt moeten worden wat de berekening niet steeds vereenvoudigd. Ook hier zal het aangrijpingspunt van de kracht samenvallen met het zwaartepunt van het beschouwde volume (Figuur 2.6).

Het feit dat de kracht op een oppervlak in een stilstaande vloeistof onafhankelijk is van het totale volume vloeistof in het reservoir leidt soms tot verwarring. Bekijk als voorbeeld Figuur 2.7. Ter hoogte van de onderste stippellijn zal voor alle vormen van reservoir de druk gelijk zijn. Aangezien ook de oppervlakte gelijk is zal ook de kracht die inwerkt op het oppervlak gelijk zijn. Dit is onafhankelijk van de hoeveelheid massa in het reservoir of dat er daadwerkelijk massa zich boven het oppervlak bevindt. Dit wordt vaak de hydrostatische paradox genoemd.





**Figuur 2.6:** Vereenvoudigde berekening van krachten op een gebogen oppervlak.



**Figuur 2.7:** Een voorbeeld van de hydrostatische paradox.

#### Voorbeeld 2.2:

Bereken de horizontale en verticale kracht die uitgeoefend wordt op een kwart van een cilindermantel met straal  $r$  en breedte  $b$  waarvan het bovenste punt zich op een diepte  $d$  bevindt zoals afgebeeld in Figuur 2.6.

Het horizontale gedeelte van de kracht zal gelijk zijn aan de horizontale kracht uitgeoefend op een verticaal vlak met dezelfde geprojecteerde oppervlakte en kan dus zoals in Voorbeeld 2.1 berekend worden:

$$\begin{aligned}
 F_{hor} &= (A_{\text{rechthoek}} + A_{\text{driehoek}}) b \\
 &= (\rho g d r + 1/2 \rho g r r) b \\
 y_z &= \frac{y_{z,\text{rechthoek}} A_{\text{rechthoek}} + y_{z,\text{driehoek}} A_{\text{driehoek}}}{A_{\text{rechthoek}} + A_{\text{driehoek}}} \\
 &= \frac{1/2 d r + 1/6 r^2}{d + 1/2 r}
 \end{aligned}$$

Om de verticale kracht te berekenen moeten we het volume boven het oppervlak berekenen (het donkere gedeelte op de figuur). Het gewicht van dit volume water komt overeen met de

verticale kracht. Bemerkt dat het volume niet noodzakelijk gevuld met water moet zijn. Het volume is eenvoudig te berekenen al de oppervlakte van een rechthoek min de oppervlakte van de kwart cilinder vermenigvuldigd met de lengte:

$$\begin{aligned} F_{ver} &= \rho g (A_{\text{rechthoek}} - \frac{1}{4} A_{\text{cilinder}}) L \\ &= \rho g \left( (d+r)r - \frac{1}{4} \pi r^2 \right) b \end{aligned}$$

Het aangrijppingspunt van de verticale kracht kan op dezelfde manier gevonden worden als dat van de horizontale component, enkel moet het zwaartepunt van de kwart cirkel berekend worden. Dit ligt op  $\frac{4r}{3\pi}$  van het middelpunt. De verdere uitwerking verloopt analoog als hierboven.

## 2.4 Drijven en stabiliteit

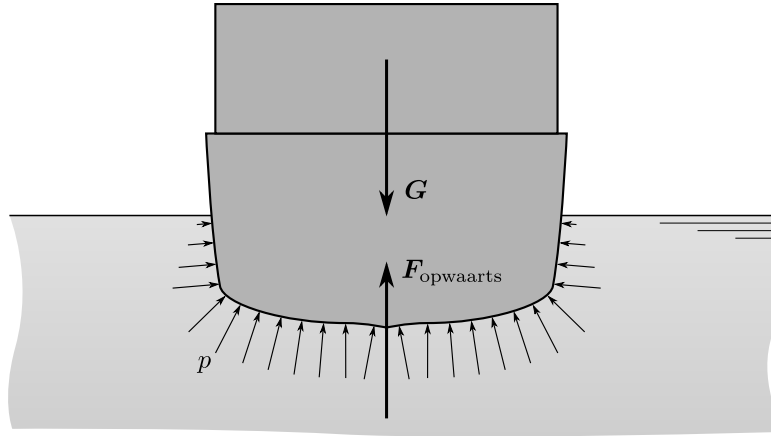
Wanneer een schip te water gelaten wordt zal het net zo diep in het water zakken totdat de resultante van de drukkrachten uitgeoefend door het water op de romp van het schip gelijk is aan het gewicht van het schip (Figuur 2.8). De resultante van deze drukkrachten kunnen we berekenen met behulp van de vereenvoudigde methode voor verticale krachten zoals hierboven uitgewerkt en wordt vaak de opwaartse kracht of Archimedeskracht genoemd. Wanneer een voorwerp volledig ondergedompeld is moeten zowel de drukkrachten aan de onderzijde als aan de bovenzijde in rekening gebracht worden. De opwaartse kracht is echter steeds gelijk aan de valversnelling vermenigvuldigd met de verplaatste massa fluïdum.

$$F_{\text{opwaarts}} = \rho_{\text{fluïdum}} g V_{\text{verplaatst}} \quad (2.25)$$

Deze vergelijking wordt ook vaak de wet van Archimedes genoemd naar de Griekse wiskundige.

Opdat een voorwerp zou kunnen drijven dient zijn massa kleiner te zijn dan de massa water die het kan verplaatsen.

Bij het ontwerp van de romp van schepen dient er steeds voor gezorgd te worden dat het schip in zekere mate rol stabiel is. Met andere woorden dat het schip geen slagzij zal maken. Wanneer het aangrijppingspunt van de opwaartse kracht of het drukingspunt (E: centre of buoyancy) hoger gelegen is dan het zwaartepunt van het schip is dit steeds gegarandeerd. Wanneer het schip een uitwijking ondervindt (bijvoorbeeld ten gevolge van golfslag) zal het vanzelf terugkeren naar de evenwichtspositie. In de meeste gevallen zal het drukingspunt echter lager gelegen zijn dan het zwaartepunt (Figuur 2.8). De stabiliteit is nu niet meer gegarandeerd. De romp dient nu zo ontworpen te worden dat wanneer het schip een uitwijking aanneemt het drukingspunt zich verder verplaatst dan het zwaartepunt. Op deze manier ontstaat er een terugwerkend moment dat het schip terug naar de evenwichtspositie zal brengen. Vanaf een bepaalde initiële uitwijking zal het



**Figuur 2.8:** De opwaartse kracht uitgeoefend op de romp van een schip ten gevolge van de hydrostatische druk.

drupunt echter minder opgeschoven zijn dan het zwaartepunt. Wanneer het schip verder dan deze hoek rolt ontstaat er een meewerkend koppel en zal het schip kapseizen.



## Hoofdstuk 3

# Behoudsvergelijkingen voor controlevolumes

### 3.1 Inleiding

Wanneer een fluïdum in beweging is zullen belangrijke grootheden (drukken, krachten) niet enkel afhankelijk zijn van de eigenschappen van het fluïdum, maar ook afhankelijk zijn van de stroming. Deze stroming kunnen we beschrijven met behulp van het snelheidsveld. Veelal is dit snelheidsveld echter ook onbekend en zijn enkel de randvoorwaarden gekend. We hebben dus een manier nodig om het snelheidsveld te bepalen en hieruit de belangrijke grootheden te berekenen.

In dit hoofdstuk worden de begrippen controle massa en controlevolume geïntroduceerd. Een aantal behoudswetten worden afgeleid en er blijkt dat in sommige gevallen we voor het berekenen van grootheden uitgemiddeld over een volume of op de rand van het volume we enkel informatie over het snelheidsveld nodig hebben op de rand van het volume.

### 3.2 Basis vergelijkingen voor controlemassa's

In de fysica en thermodynamica werden reeds een aantal natuurwetten geformuleerd. De vergelijkingen waar we in deze cursus gebruik van zullen maken zijn:

- De wet van behoud van massa
- De tweede wet van Newton
- De wet van behoud van energie

De eerste is reeds geformuleerd als een behoudsvergelijking. Deze kan meteen geschreven worden als:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

De tweede wet van Newton kan ook als een behoudswet geformuleerd worden. Indien we het begrip *impuls* invoeren als:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \quad (3.2)$$

De tweede wet van Newton kan nu algemeen geschreven worden als de wet van behoud van impuls:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.3)$$

De eerste hoofdwet van de thermodynamica is ook geformuleerd als een behoudsvergelijking, behoud van energie:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (3.4)$$

Waarin  $E$  de totale energie-inhoud van het systeem voorstelt, en  $\dot{Q}$  en  $\dot{W}$  respectievelijk de warmtestroom naar het systeem en het arbeidsvermogen uit het systeem voorstellen (stromen van een bepaalde grootte zullen in deze cursus met een punt aangeduid worden).

Deze vergelijkingen zijn geformuleerd zodat ze geldig zijn voor een bepaald stelsel van deeltjes. De massa die in de eerste twee vergelijkingen voorkomt is dan de massa van de beschouwde deeltjes. De energie in de eerste hoofdwet is de energie inhoud van de beschouwde deeltjes. We noemen zo'n stelsel een systeem of een controlemassa.

Voor het gebruik in de fluidummechanica zijn deze formuleringen echter niet zo geschikt. Een massa fluidum zal namelijk steeds van vorm veranderen en kan zelfs opgesplitst worden in verschillende delen. Het uitwerken van de behoudswetten zal in de meeste gevallen niet eenvoudig zijn.

Het beschrijven van een fluidumstroming is in de meeste gevallen eenvoudiger wanneer een deel van de ruimte wordt beschouwd waar het fluidum door stroomt. Dit deel zal een bepaald volume in de ruimte innemen en wordt een *controlevolume* genoemd.

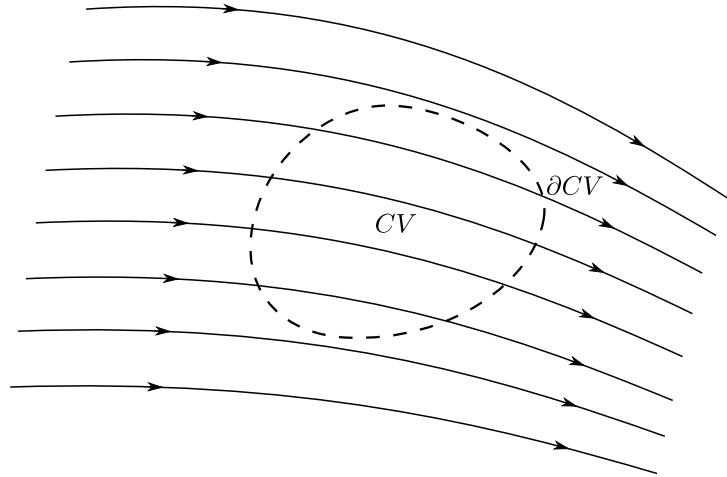
De beschouwde behoudswetten zullen nu anders geformuleerd worden zodat ze toepasbaar zijn voor een controle volume.

### 3.3 Basis vergelijkingen voor controlevolumes

In deze cursus zullen we de behoudswetten voor controlevolumes afleiden uit de behoudswetten voor controlemassa's door het extrapoleren van eenvoudige bevindingen. De behoudswetten kunnen ook rigoreus wiskundig afgeleid worden met behulp van het Reynolds transport theorema. Dit valt echter buiten het bereik van deze cursus. Geïnteresseerde lezers worden verwezen naar [5].

## 3.3.1 Behoud van massa

Om behoud van massa te herschrijven voor het gebruik in een controle volume beschouwen we een willekeurig controlevolume in een stroming (Figuur 3.1). Wanneer er netto een bepaalde hoeveelheid massa het controlevolume uitstroomt zal de hoeveel massa binnen het controlevolume net zoveel afnemen. Op dezelfde manier is de som van de netto massastroom over de grens van het controlevolume naar buiten en de verandering van massa binnen het controlevolume gelijk aan nul.



**Figuur 3.1:** Willekeurig controlevolume in een stroming

$$\left[ \begin{array}{c} \text{De verandering} \\ \text{van massa in} \\ \text{het controlevolume} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{De netto} \\ \text{massastroom uit} \\ \text{het controlevolume} \end{array} \right] = 0 \quad (3.5)$$

In symbolen wordt dit:

$$\frac{dm_{CV}}{dt} + \dot{m}_{\partial CV} = 0 \quad (3.6)$$

Deze vergelijking staat bekend als de wet van behoud van massa voor controlevolumes. Het subscript  $CV$  staat in dit geval voor het controlevolume, het subscript  $\partial CV$  staat voor de rand van het controlevolume. Om de massastroom te evalueren beschouwen we een infinitesimaal klein oppervlak (Figuur 3.2). De hoeveelheid massa die in een tijdspanne  $\Delta t$  door het oppervlak stroomt kan berekend worden als:

$$\Delta m = \rho \Delta x_{\perp} dA = \rho v_{\perp} \Delta t dA \quad (3.7)$$

De massastroom door het oppervlak  $dA$  vinden we door te delen door de tijdspanne  $\Delta t$ :

$$d\dot{m} = \rho v_{\perp} dA \quad (3.8)$$

Hierin is  $v_{\perp}$  de loodrechte projectie van de snelheid op het oppervlak. Wanneer massastroom uit het controlevolume gericht is wordt de projectie van de snelheid positief gerekend, wanneer de massastroom het controlevolume in gericht is wordt de projectie negatief gerekend. Deze conventie komt overeen met de teken conventie van de vergelijking in woorden (3.5).



**Figuur 3.2:** Massastroom door een infinitesimaal oppervlak

### 3.3.2 Behoud van impuls

Wanneer we de vergelijking van behoud van massa voor een controlevolume en een controle massa vergelijken zien we dat enkel het linker lid van vorm verandert. We kunnen dezelfde transformatie ook toepassen op de vergelijking van behoud van impuls. Dit wordt:

$$\frac{d\mathbf{P}_{CV}}{dt} + \dot{\mathbf{P}}_{\partial CV} = \mathbf{F} \quad (3.9)$$

In woorden wordt dit:

$$\begin{bmatrix} \text{De verandering} \\ \text{van impuls in} \\ \text{het controlevolume} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{De netto} \\ \text{impulsstroom uit} \\ \text{het controlevolume} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{De totale} \\ \text{kracht op het} \\ \text{controlevolume} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De impulsstroom door een infinitesimaal oppervlak  $dA$  kan als volgt berekend worden:

$$d\dot{\mathbf{P}} = d\dot{m}\mathbf{v} = \rho v_{\perp} \mathbf{v} dA \quad (3.11)$$

Deze vergelijking is net zoals de impulsvergelijking voor controlemassa's een vectorvergelijking en kan dus geprojecteerd in een gewenste richting.

De term, de totale kracht op het controlevolume, zorgt soms voor verwarring. Krachten kunnen inwerken op een controlevolume via drukspanningen (normaalspanningen) en schuifspanningen. Wanneer de rand van een controlevolume tegen een wand valt zullen deze spanningen uitgeoefend worden door de wand en zal de wand gelijke maar tegengestelde reactie spanningen ondervinden. Deze spanningen kunnen dan voorgesteld worden als een resulterende reactiekracht. Wanneer de rand van het controlevolume in het medium valt zullen ook hier spanningen uitgeoefend worden door het medium buiten het controlevolume. De meest voor de hand liggende spanning is een drukspanning die gelijk in alle richtingen aanwezig is in het medium dus ook aan de rand van het controlevolume.



### 3.3.3 Behoud van energie

Ook voor behoud van energie kunnen we dezelfde transformatie als voor massa en impuls toepassen. (3.4) wordt dan:

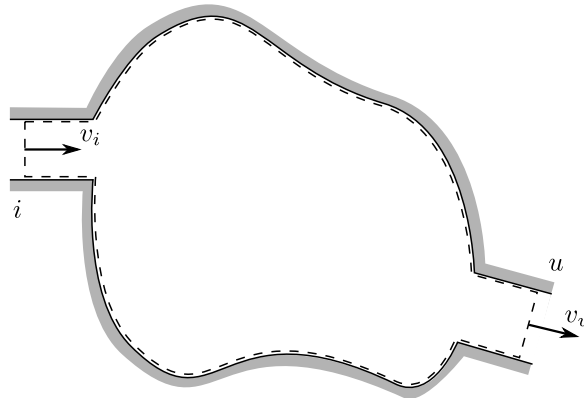
$$\frac{dE_{CV}}{dt} + \dot{E}_{\partial CV} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (3.12)$$

In woorden wordt dit:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{De verandering} \\ \text{van energie in} \\ \text{het controlevolume} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{De netto} \\ \text{energiestroom uit} \\ \text{het controlevolume} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{De warmtestroom toegevoegd} \\ \text{en arbeidsstroom onttrokken} \\ \text{aan het controlevolume} \end{array} \right] \quad (3.13)$$

## 3.4 Stationair controlevolume met één instroming en één uitstrooming

Bij ingenieurstoepassingen komt het vaak voor dat we controlevolumes beschouwen met slechts één instroming en één uitstrooming. Voorbeelden zijn een simpele leiding, een pomp of turbine, een reactorvat,... Figuur 3.3 geeft een schematische voorstelling van zo'n situatie met bijhorend controlevolume. Het controlevolume is hier net tegen de wand van het systeem gekozen. Dit heeft als groot voordeel dat de projectie van de snelheid op de normaalvector enkel aan de instroom en de uitstroom verschillend is van nul. Aan de overige randen van het controlevolume kan er enkel een snelheid tangentieel aan de wand bestaan. De loodrechte component van de snelheid is dus 0. De vergelijking voor behoud van massa (3.6) kunnen we schrijven als:



**Figuur 3.3:** Controlevolume met één instroming en één uitstrooming

$$\frac{dm_{CV}}{dt} + \dot{m}_u - \dot{m}_i = 0 \quad (3.14)$$

Dit kunnen we verder uitwerken door het massadebiet te berekenen als het gemiddelde van de dichtheid maal de loodrechte snelheid maal het oppervlak. Wanneer we ook de gemiddelde dichtheid

over de in en uitlaatsecties kennen, kunnen we (3.14) schrijven als:

$$\frac{dm_{CV}}{dt} + \rho_u v_{u,\perp} A_u - \rho_i v_{i,\perp} A_i = 0 \quad (3.15)$$

Wanneer daarbovenop we een stationaire situatie beschouwen, wordt de tijdsafgeleide in (3.15) 0:

$$\rho_i v_{i,\perp} A_i = \rho_u v_{u,\perp} A_u \quad (3.16)$$

Bovenstaande vergelijking zegt dus niets anders dan dat het ingaande massadebiet gelijk is aan het uitgaande massadebiet. Dezelfde uitdrukking is ook geldig voor een niet-stationaire, niet-samendrukbare stroming door een controlevolume waarvan het volume constant is. Bijvoorbeeld een niet-stationaire stroming van water bij een lage snelheid door een stalen buis.

Passen we nu behoud van impuls toe op hetzelfde controlevolume uit Figuur 3.3. We kunnen opnieuw gebruik maken van de gemiddelde eigenschappen bij de in en uitstroming.

$$\frac{d\mathbf{m}\mathbf{v}_{CV}}{dt} + \rho_u v_{u,\perp} \mathbf{v}_u A_u - \rho_i v_{i,\perp} \mathbf{v}_i A_i = \mathbf{F} \quad (3.17)$$

In de tweede en derde term van bovenstaande vergelijking staat telkens de combinatie  $\rho v_{\perp} A$  die gelijk is aan het massadebiet. Voor een stationaire stroming kunnen we (3.17) dus verder vereenvoudigen aangezien ook hier de tijdsafgeleide 0 wordt:

$$\dot{m}(\mathbf{v}_u - \mathbf{v}_i) = \mathbf{F} \quad (3.18)$$

Let wel, de krachten en snelheden voorkomend in deze vergelijking zijn vectoren, de vergelijking is dus een vectorvergelijking en kan geprojecteerd worden in verschillende richtingen. Als voorbeeld wordt (3.18) geprojecteerd op de assen van een cartesiaans assenstelsel. We bekomen:

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{m}(v_{x,u} - v_{x,i}) \\ F_y &= \dot{m}(v_{y,u} - v_{y,i}) \\ F_z &= \dot{m}(v_{z,u} - v_{z,i}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Voor het bepalen van de inwerkende krachten moet ook hier rekening gehouden worden met de krachten aan de instroming en de uitstroming. De aan de instroming heersende druk zal namelijk een kracht  $\mathbf{F} = pA\mathbf{n}$  uitoefenen op het controlevolume:

$$\begin{aligned} F_{x,R} &= p_u A_u n_{x,u} - p_i A_i n_{x,i} + \dot{m}(v_{x,u} - v_{x,i}) \\ F_{y,R} &= p_u A_u n_{y,u} - p_i A_i n_{y,i} + \dot{m}(v_{y,u} - v_{y,i}) \\ F_{z,R} &= p_u A_u n_{z,u} - p_i A_i n_{z,i} + \dot{m}(v_{z,u} - v_{z,i}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

We kunnen ook behoud van energie toepassen op het beschouwde controlevolume. De energie kunnen we opsplitsen in inwendige, kinetische en potentiële energie. Deze kunnen we op hun beurt schrijven als de gemiddelde waarde van de specifieke grootheden vermenigvuldigd met de massa:

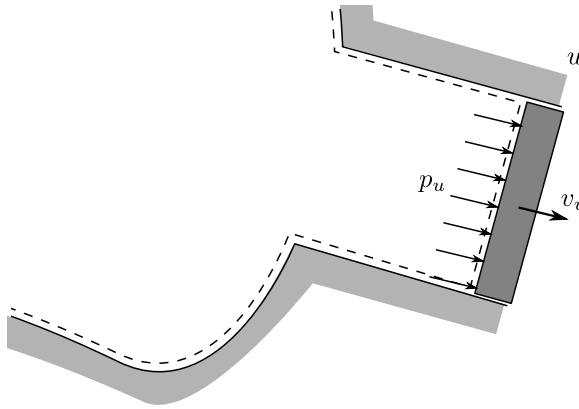
$$E = E_{inwendig} + E_{kinetisch} + E_{potentieel} = mu + m\frac{1}{2}v^2 + mgz \quad (3.21)$$

### 3.4 STATIONAIR CONTROLEVOLUME MET ÉÉN INSTROMING EN ÉÉN UITSTROMING

Behoud van energie in een het stationair controlevolume wordt dan:

$$\rho_u v_{u,\perp} (u_u + \frac{1}{2} v_u^2 + g z_u) A_u - \rho_i v_{i,\perp} (u_i + \frac{1}{2} v_i^2 + g z_i) A_i = \dot{Q} - \dot{W} \quad (3.22)$$

Wanneer we de ingang en de uitgang naderbij bestuderen zien we dat hier arbeid wordt uitgeoefend op het controlevolume. Dit kunnen we eenvoudig inzien indien we een controlemassa beschouwen die zich aan de uitgang, net buiten het controlevolume bevindt (Figuur 3.4). Aangezien aan de uitgang een bepaalde druk heerst zal op de controlemassa een kracht worden uitgeoefend door het controlevolume. En aangezien de massa met de uitgaande snelheid beweegt wordt er dus een vermogen onttrokken aan het controlevolume. Aan de ingang kan een analoge redenering gevolgd worden. We kunnen dus de arbeidsvermogen uitgeoefend door het controlevolume op de omgeving



**Figuur 3.4:** Uitgang van een controlevolume met een aangrenzende controlemassa

opsplitsen in twee delen. Een eerste deel bestaat uit het vermogen geleverd aan de stroming aan de in en uitgangen. Dit noemen we de stromingsarbeid. Het overige vermogen zal uitgeoefend worden op bijvoorbeeld een schoepenrij in het controlevolume. Dit deel zal meestal omgevormd worden naar een mechanisch vermogen op een as, het wordt dan ook asvermogen genoemd.

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_a \quad (3.23)$$

Het stromingsvermogen kunnen we uitwerken als de uitgeoefende kracht vermenigvuldigd met de snelheid van de stroming aan de in en uitgangen. Met in acht name van de tekenconventie wordt dit:

$$\dot{W}_s = p_u A_u v_u - p_i A_i v_i \quad (3.24)$$

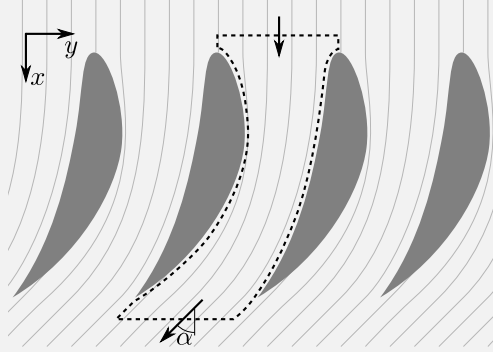
Wanneer we (3.23) en (3.24) invullen in (3.22) bekommen we na omvorming en invullen van het massadebiet:

$$\dot{m} (u_u + \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2} v_u^2 + g z_u) - \dot{m} (u_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{1}{2} v_i^2 + g z_i) = \dot{Q} - \dot{W}_a \quad (3.25)$$

De termen  $u + \frac{p}{\rho}$  kennen we reeds uit de thermodynamica als de enthalpie  $h$ .

**Voorbeeld 3.1:**

Bereken de axiale en tangentiële kracht die uitgeoefend wordt op één schoep van de stilstaande schoepenrij in onderstaande figuur met hoogte  $h$ , de afstand tussen 2 schoepen is  $b$ . Door de schoepenrij stroomt een fluïdum met dichtheid  $\rho$ , voor de schoepenrij is verloopt de stroming axiaal en is de snelheid  $v_{in}$ . Na de schoepenrij maak en de stroomlijnen een hoek  $\alpha$  met de axiale richting en is de druk  $p_{uit}$ . De stroming is stationair en adiabatisch en er zijn geen energieverliezen.



Beginnen de analyse door een geschikt controlevolume te tekenen zoals aangeduid in de figuur. Het controle volume loopt volgens de stroomlijnen tussen twee schoepen door en wordt afgesloten door twee vlakken volgens de tangentiële richting. Definieer ook een geschikt assenstelsel.

Om de krachten uit te rekenen kunnen we de vergelijking van behoud van impuls uitschrijven voor het controlevolume. Aangezien dit volgens de stroomlijnen loopt hebben we een controlevolume met één inlaat en één uitlaat. Behoud van impuls wordt dan:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \dot{m} (v_{uit,x} - v_{in,x}) \\ \sum F_y &= \dot{m} (v_{uit,y} - v_{in,y})\end{aligned}$$

De snelheids componenten kunnen we halen uit de vergelijkingen voor behoud van massa. dit geeft:

$$\rho v_{in} b h = \rho v_{uit} b h \cos \alpha$$

of:

$$v_{uit} = \frac{v_{in}}{\cos \alpha}$$

dus:

$$v_{in,x} = v_{in}$$

$$v_{uit,x} = v_{in}$$

$$v_{in,y} = 0$$

$$v_{uit,y} = -v_{in} \tan \alpha$$

Het massadebiet is halen we uit de doorstroom oppervlakte en de ingaande snelheid:

$$\dot{m} = \rho b h v_{in}$$

Bovenstaande uitdrukkingen invullen geeft:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= -\rho b h v_{in}^2 \tan \alpha\end{aligned}$$

In de  $x$ -richting worden er krachten op het controlevolume uitgeoefend door de druk aan de boven en onderzijde van het controle volume en door de schoepen:

$$\sum F_x = p_{in} b h - p_{uit} b h - F_{schoep,x}$$

In de  $y$  richting wordt er enkel door de schoepen een kracht uitgeoefend, de druk krachten links en rechts heffen elkaar op.

$$\sum F_y = -F_{schoep,y}$$

Door het min teken in te voeren bij de schoepkrachten stellen deze de kracht voor die de stroming uitoefent op de schoep, zoals gevraagd. In de vergelijking voor behoud van impuls staat namelijk de kracht die op het controlevolume wordt uitgeoefend.

Om de druk voor de schoepenrij te berekenen kunnen we behoud van energie toepassen. Aangezien er geen verliezen zijn en de stroming adiabatisch verloopt is er geen toegevoegde warmte of onttrokken arbeid en blijft de inwendige energie constant:

$$\dot{m} \left( \frac{p_{uit}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{uit}^2 \right) - \dot{m} \left( \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{in}^2 \right) = 0$$

of:

$$\begin{aligned}p_{uit} - p_{in} &= \frac{1}{2} \rho (v_{in}^2 - v_{uit}^2) \\ &= \frac{1}{2} \rho v_{in}^2 \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho v_{in}^2 \tan^2 \alpha\end{aligned}$$

Met deze uitdrukkingen kunnen we de schoepkrachten uitrekenen als:

$$\begin{aligned}F_{schoep,x} &= \rho b h v_{in}^2 \frac{1}{2} \tan^2 \alpha \\ F_{schoep,y} &= \rho b h v_{in}^2 \tan \alpha\end{aligned}$$



## Hoofdstuk 4

# Behoudsvergelijkingen langs stroomlijnen

### 4.1 Inleiding

### 4.2 Bewegingsvergelijking langs de stroomlijnen

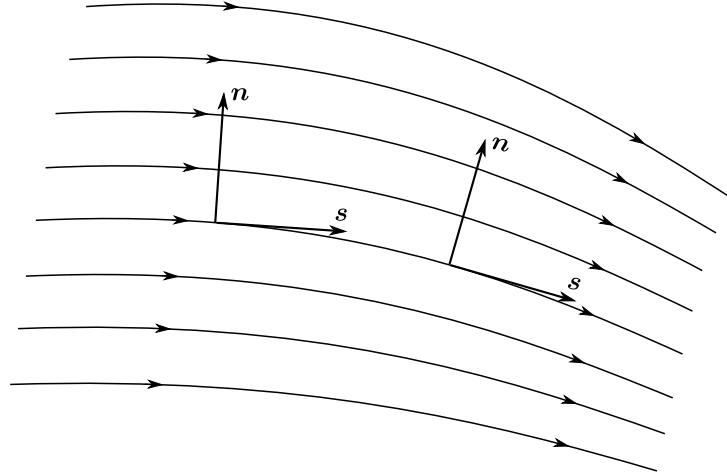
De uitwerking van de bewegingsvergelijking in cartesische coördinaten is niet voor de hand liggend en biedt weinig inzicht. Een eenvoudig alternatief is de uitwerking in stroomlijn coördinaten. Kies hiervoor een  $s$  coördinaat die de stroomlijnen volgt in de richting van de stroming. Een  $n$  coördinaat vector kunnen we nu definiëren door de  $s$  vector  $90^\circ$  in tegenwijzerzin te draaien (Figuur 4.1). We kunnen dan elk punt in de stroming karakteriseren door de stroomlijn die door dit punt gaat ( $n$ ) en de afstand langs de stroomlijn tot een bepaalde referentie ( $s$ ). De richtingen van  $s$  en  $n$  coördinaat zullen nu wel in elk punt van de stroming verschillen.

Beschouw nu een willekeurige stationaire niet viskeuze stroming. Kiezen we een controle volume in de stroming tussen twee stroomlijnen met lengte  $\Delta s$  zoals in Figuur 4.2. Indien we de stroomlijnen dicht genoeg bij elkaar kiezen en we het controlevolume zeer kort houden zal de snelheid over de ingang en de uitgang ongeveer uniform zijn, en de stroming niet van richting veranderen. De impulsbalans in de richting van de gemiddelde stroomlijn voor dit controlevolume wordt dan:

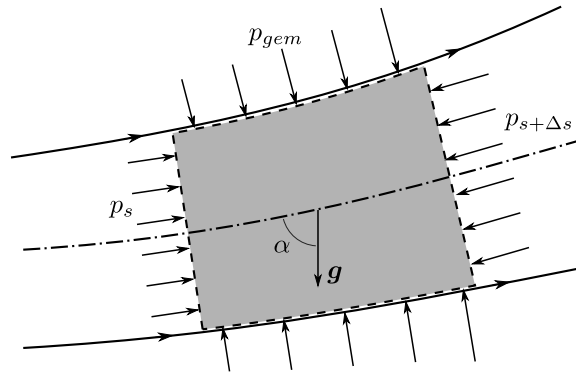
$$\rho v v_\perp A|_{s+\Delta s} - \rho v v_\perp A|_s = pA|_s - pA|_{s+\Delta s} + p_{gem}(A|_{s+\Delta s} - A|_s) - \rho g A_{gem} \Delta s \cos \alpha \quad (4.1)$$

Aangezien het controle volume langs een stroomlijn ligt staat de snelheid steeds loodrecht op het ingaande en uitgaande oppervlak. De cosinus in de laatste term kunnen we uitdrukken in functie van de verhouding van hoogteverandering  $z|_{s+\Delta s} - z|_s$  tot  $\Delta s$ . Indien we (4.1) delen door  $\Delta s$  krijgen we:

$$\frac{\rho v v A|_{s+\Delta s} - \rho v v A|_s}{\Delta s} = -\frac{pA|_{s+\Delta s} - pA|_s}{\Delta s} + p_{gem} \frac{A|_{s+\Delta s} - A|_s}{\Delta s} - \rho g A_{gem} \frac{z|_{s+\Delta s} - z|_s}{\Delta s} \quad (4.2)$$



**Figuur 4.1:** Voorbeeld van stroomlijncoördinaten



**Figuur 4.2:** Controlevolume tussen twee stroomlijnen

Indien we de limiet van bovenstaande uitdrukking nemen voor  $\Delta s$  gaande naar 0 zullen de gemiddelde druk en de gemiddelde oppervlakte naar respectievelijk de druk en de oppervlakte in het punt  $s$  streven. We krijgen dan:

$$\frac{d\rho v v A}{ds} = -\frac{dpA}{ds} + p \frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds} \quad (4.3)$$

De afgeleiden in de eerste termen in het linker en rechter lid kunnen we uitwerken via de kettingregel:

$$\rho v A \frac{dv}{ds} + v \frac{d\rho v A}{ds} = -A \frac{dp}{ds} - p \frac{dA}{ds} + p \frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds} \quad (4.4)$$

In de tweede term van het linker lid staat de afgeleide van  $\rho v A$ . Dit komt overeen met de afgeleide van het massadebiet naar de lengte van de stroomlijn. Aangezien de stroming stationair is, volgt uit behoud van massa dat deze term 0 is. Na deling door de oppervlakte tussen de stroomlijnen en herschikken krijgen we:

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0 \quad (4.5)$$

Deze vergelijking staat bekend als de vergelijking van Euler. Het is de bewegingsvergelijking van een deeltje in een stationaire niet viskeuze stroming. Het is dus het analogon voor de tweede wet



van Newton ( $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ) voor een fluïdum stroming. Uit deze vergelijking kan, zoals de naam doet vermoeden, de beweging van de verschillende deeltjes in de stroming worden geïntegreerd. Aangezien ze voortvloeit uit een krachten evenwicht stelt elke term een bepaalde kracht voor die op het beschouwde fluïdum deeltje inwerkt. In de eerste term herkennen we de versnelling of de traagheidskracht, de tweede term is afkomstig van drukkrachten en de derde term is afkomstig van de zwaartekracht. Een fluïdum deeltje zal dus enkel versnellen of vertragen indien er bepaalde krachten op inwerken.

### 4.2.1 Deeltjesversnelling

Ook in een stationaire stroming (onafhankelijk van de tijd) kunnen de fluïdum deeltjes dus een versnelling ondergaan. Aangezien de snelheid niet overal in het stromingsveld constant moet zijn en een individueel deeltje zich door het stromingsveld verplaatst zal het inderdaad een versnelling ondergaan. Dit soort versnelling noemen we een convectieve versnelling. Ook andere eigenschappen van het fluïdum deeltje kunnen veranderen wanneer het deeltje zich door de stroming beweegt (vb. temperatuur, druk,...). Algemeen kunnen we dan spreken over een convectieve verandering van de stromingsgrootheden.

Wanneer de stroming niet stationair is kunnen de grootheden in de stroming ook veranderen ten gevolge van een verandering in de tijd. We spreken dan van een lokale verandering. De totale verandering van de eigenschappen van een bepaald deeltje in een stroming is dan de som van de lokale en de convectieve verandering.

De verandering van de eigenschap van een deeltje komt vaak voor in de fluïdummechanica. De totale differentiaal is een wiskundig begrip dat dit weergeeft. In carthesiaanse coördinaten wordt dit:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.6)$$

Hierin is de eerste term de lokale verandering, de overige termen vormen de convectieve verandering. De totale differentiaal is een manier om de verandering van de eigenschappen van een specifiek deeltje (dat zich op een bepaald tijdstip op een bepaalde positie bevindt) te relateren aan informatie uit een veld voorstelling (Euleriaanse voorstelling).

Met behulp van de deeltjesversnelling kunnen de vergelijking van Euler intuïtief uitbreiden naar niet stationaire stromingen. We doen dit door de convectieve versnelling in de vergelijking van Euler (4.5) te vervangen door de deeltjesversnelling. In vector notatie wordt dit:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (4.7)$$

**Voorbeeld 4.1:**

Bepaal voor het stationair snelheidsveld in een horizontaal vlak uit figuur 1.6 de deeltjesversnelling en het drukveld indien de stroming zich niet viskeus gedraagt. Het snelheidsveld wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}v_x &= -Ax \\v_y &= Ay\end{aligned}$$

Voor een twee dimensionale stroming wordt de deeltjesversnelling in  $x$  en  $y$  richting:

$$\begin{aligned}\frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\end{aligned}$$

Aangezien de stroming stationair is vallen de eerste termen weg. De deeltjesversnelling wordt dus:

$$\begin{aligned}\frac{Dv_x}{Dt} &= A^2 x \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= A^2 y\end{aligned}$$

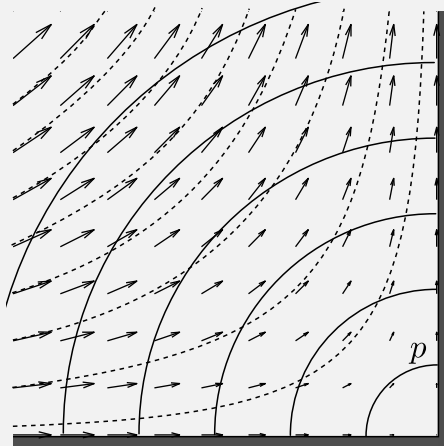
We kunnen nu de vergelijking van Euler in de  $x$  en  $y$  richting uitwerken:

$$\begin{aligned}\frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}$$

Dus:

$$p = \frac{1}{2}A^2(x^2 + y^2) + C$$

De isobaren zijn dus concentrische cirkels met het hoekpunt als middelpunt.



### 4.3 Integratie van de bewegingsvergelijking

Indien we in een stroming de stroomlijnen kennen kunnen we de bewegingsvergelijking (4.5) integreren. Langs een stroomlijn wordt dit:

$$\int \rho v \frac{dv}{ds} ds + \int \frac{dp}{ds} ds + \int \rho g \frac{dz}{ds} ds = Cst \quad (4.8)$$

Indien de dichtheid constant is langs de stroomlijn kunnen we de integralen verder uitwerken tot:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = Cst \quad (4.9)$$

Deze vergelijking werd als eerste gepubliceerd door Daniel Bernoulli en werd nadien de vergelijking van Bernoulli genoemd. Ze geeft de relatie weer tussen snelheid, druk en hoogte van een deeltje dat zich verplaatst in een stationaire stroming. Met behulp van deze vergelijking kunnen we indien we de grootheden van de stroming in een bepaald punt kennen (randvoorwaarden) de grootheden in andere punten berekenen. Het is een vergelijking die zeer vaak gebruikt wordt in de fluïdummechanica, maar jammer genoeg ook vaak onterecht gebruikt wordt. Bij het gebruik van de vergelijking van Bernoulli moeten we steeds controleren dat er aan de voorwaarden gebruikt tijdens de afleiding voldaan wordt. Deze voorwaarden zijn:

- Stationaire stroming
- Niet-viskeuze stroming
- Evaluatie langs een stroomlijn
- Constante dichtheid langs de stroomlijn

### 4.4 Mechanische arbeid van een deeltje

Berekenen we de arbeid uitgeoefend door de krachten die inwerken op een deeltje in een stationaire niet viskeuze stroming terwijl het zich verplaatst van één punt naar een ander. De arbeid uitgeoefend door een kracht kunnen we berekenen als de kracht geprojecteerd in de verplaatsingsrichting maal de afgelegde weg. Beschouw een deeltje dat zich verplaatst langs een stroomlijn over een afstand  $ds$ . Uit de vergelijking van Euler (4.5) zien we dat de inwerkende krachten (druk en zwaartekracht) een versnelling veroorzaken. De arbeid die op het deeltje uitgeoefend wordt door deze krachten zal dus een verandering van de kinetische energie veroorzaken:

$$\int_1^2 \rho v \frac{dv}{ds} ds = - \int_1^2 \frac{dp}{ds} ds - \int_1^2 \rho g \frac{dz}{ds} ds \quad (4.10)$$

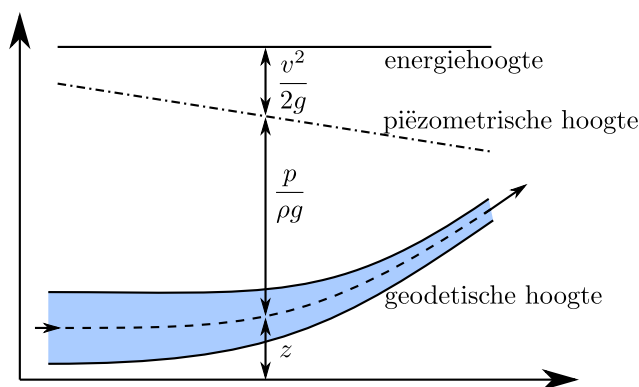
Indien de dichtheid constant is kunnen we bovenstaande integralen uitwerken en na herschikking bekomen we

$$\rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + (p_2 - p_1) + \rho g (z_2 - z_1) = 0 \quad (4.11)$$

Dit is opnieuw de vergelijking van Bernoulli (4.9). We kunnen Bernoulli dus ook interpreteren als een vergelijking van behoud van mechanische energie. De som van kinetische energie, arbeid veroorzaakt door drukkrachten en potentiële energie van een fluïdum deeltje blijft constant, of de mechanische energie van een deeltje dat beweegt door een stationaire, niet-samendrukbare, niet-viskeuze stroming blijft constant.

#### 4.4.1 Grafische voorstelling

De verschillende termen in de vergelijking van Bernoulli kunnen op eenvoudige wijze weergegeven worden in een diagram. Beschouw bijvoorbeeld een eenvoudige leiding met veranderlijke doorsnede en hoogte waardoor een niet-viskeuze, niet-samendrukbare stroming stroomt (Figuur 4.3). Binnen deze leiding is het eenvoudig een stroomlijn te tekenen waarlangs we de vergelijking van Bernoulli kunnen toepassen. De verschillende termen van (4.9) kunnen allen in de eenheid m gezet worden door de vergelijking te delen door  $\rho g$ . De verschillende termen stellen nu elk een energiehogte voor. De eenvoudigste term  $z$  is de geodetische hoogte of de hoogte van de buis ten opzichte van een bepaald referentie niveau. Wanneer we hier de term  $\frac{p}{\rho g}$  bij optellen bekomen we de piëzometrische hoogte. Tellen we hier de term  $\frac{v^2}{2g}$  dan bij op bekomen we de energiehogte. Voor een niet-samendrukbare stroming zonder energieverliezen moet deze volgens de vergelijking van Bernoulli constant zijn.



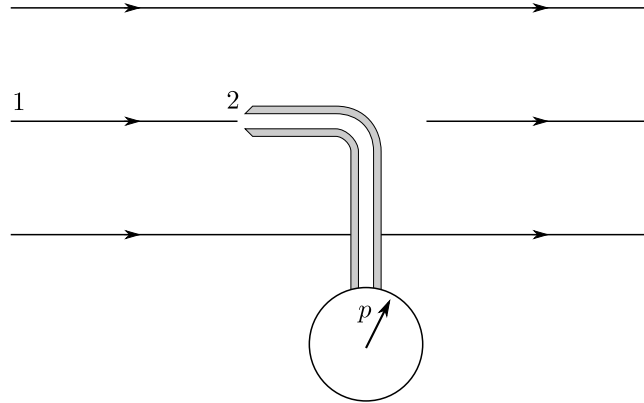
**Figuur 4.3:** Grafische voorstelling van de vergelijking van Bernoulli in energiehogtes

## 4.5 Toepassingen

Met behulp van de vergelijking van Bernoulli kunnen we een aantal interessante toestellen analyseren.

### 4.5.1 Pitotbuis

Een Pitotbuis (genoemd naar Henri Pitot) is een instrument dat kan gebruikt worden voor het bepalen van de snelheid van een stroming. Het bestaat uit een buis met een opening die evenwijdig aan de snelheid in de stroming geplaatst wordt (Figuur 4.4) waarop een manometer aangesloten is. Schrijven we nu de vergelijking van Bernoulli uit langs de stroomlijn die in de opening van de



**Figuur 4.4:** Een pitotbuis in een stroming

pitotbuis uitmond. Als startpunt kiezen we een punt ver van de pitotbuis, stroomopwaarts (punt 1). Hier zal het deeltje de zelfde eigenschappen hebben als zijn omliggende deeltjes (aangezien de pitotbuis geen invloed uitoefent). De snelheid is dus de snelheid van de stroming en de druk is de heersende druk (we veronderstellen dat de hoogte constant blijft). Aangezien de pitotbuis door de drukmeter afgesloten wordt zal het fluïdum binnen in de pitotbuis stilstaan. Aan de opening van de pitotbuis zal er dus ook geen fluïdum de pitotbuis in kunnen stromen. De snelheid van de stroming in het punt 2 zal dus ook 0 zijn. Een punt waar de snelheid van de stroming daalt tot 0 of met andere woorden waar de stroming tot stilstand komt noemen we een *stagnatiepunt*. De vergelijking van Bernoulli tussen punt 1 en punt 2 wordt dus:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = p_2 \quad (4.12)$$

De druk die we aflezen op de manometer is dus de druk in de vrije stroming plus de kinetische energie in de vrije stroming. We noemen dit de *stagnatiedruk*. De werkelijke druk die heerst in punt 1 noemen we de *statische druk*.

$$p_{\text{statisch}} = p \quad (4.13)$$

$$p_{\text{stagnatie}} = p + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (4.14)$$

Bij een niet-samendrukbare, stationaire, niet viskeuze stroming is de druk die heerst in een stagnatiepunt dus de stagnatiedruk.

Wanneer we in een leiding als in Figuur 4.3 op verschillende plaatsen pitot buizen in de leiding plaatsen en aansluiten op een vloeistof manometers zullen de vloeistof hoogten in alle manometers

ook gelijk zijn. De drukken die heersen in de verschillende manometers zijn namelijk de dynamische drukken en aangezien de manometer zich op een hoogte  $z$  bevindt wordt de totale hoogte in manometer  $i$ :

$$\frac{v_i^2}{2g} + \frac{p_i}{\rho g} + z_i \quad (4.15)$$

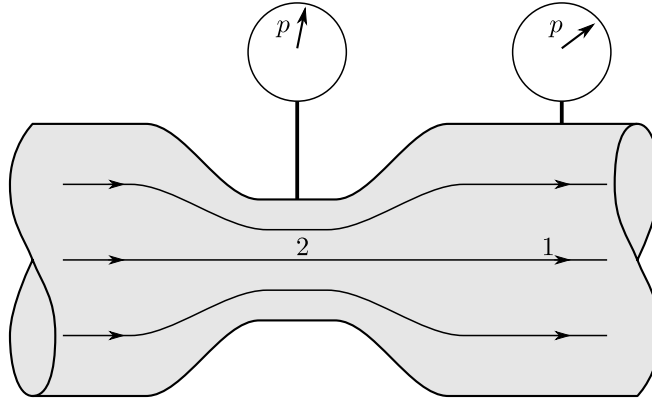
Dit is net het linkerlid van de vergelijking van Bernoulli en is dus constant.

Met behulp van een pitotbuis en een statische drukmeting kan nu de snelheid van de vrije stroming bepaald worden. Wanneer we inderdaad de statische druk van de dynamische druk aftrekken (door bijvoorbeeld het verschil tussen statische en dynamische druk te meten) houden we de kinetische energie van de vrije stroming over. Wanneer nu de dichtheid van het fluïdum gekend is kunnen we de snelheid berekenen.

Een toestel dat de dynamische druk met de statische druk vergelijkt noemen we een Pitot-statisch buis (vaak wordt dit toestel ook gewoon pitotbuis genoemd). Deze toestellen vormen nog steeds de basis voor snelheidsmetingen in de luchtvaart.

#### 4.5.2 Venturi effect

Het venturi effect (genomd naar Giovanni Battista Venturi) is een fenomeen dat optreedt bij een lokale vernauwing in een buis (Figuur 4.5). In de vernauwing zal volgens het behoud van massa de



**Figuur 4.5:** Een vernauwing in een buis

snelheid stijgen. Uit de vergelijking van Bernoulli weten we dat wanneer de snelheid stijgt en de hoogte constant blijft de druk zal dalen. Tussen punt 1 en 2 wordt dit:

$$p_2 = p_1 - \rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = p_1 - \rho \frac{1}{2} v_1^2 \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) \quad (4.16)$$

Wanneer er in punt 1 atmosferedruk heerst zal er in punt 2 dus een onderdruk heersen. Wanneer we een kanaal aansluiten op de buis in de vernauwing kunnen we dus een ander fluïdum aanzuigen door dit kanaal en mengen met de hoofd stroming. Dit principe werd vroeger gebruikt in de carburator

van benzine wagens. De lucht die de cilinders in stroomt werd door een vernauwing geleid. Op deze vernauwing was een kanaal aangesloten waardoor brandstof aangezogen werd. Wanneer het luchtdebiet stijgt zal ook de onderdruk in de vernauwing stijgen en wordt er dus meer brandstof aangezogen. Dit principe is echter verdrongen door de brandstof injectie bij personenwagens sinds de jaren 90. Bij motoren wordt de carburator wel nog vaak gebruikt.

Een andere toepassing van het venturi effect is de venturi vacuüm pomp. Hier wordt de drukdaling in de vernauwing gebruikt om een vacuüm te genereren.

## 4.6 Energiebeschouwingen en irreversibiliteit

In het voorgaande gedeelte bekwamen we dat de vergelijking van Bernoulli een energievergelijking is voor een niet-viskeuze, niet-samendrukbare stroming langs een stroomlijn. In Hoofdstuk 3 bekwamen we echter reeds een vergelijking voor behoud van energie voor een stationair controle-volume met één instroming en één uitstroming (3.25). Indien we deze vergelijking delen door het massadebiet bekomen we:

$$(u_u + \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u) - (u_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i) = q - w_a \quad (4.17)$$

Hierin is  $q$  de toegevoegde warmte en  $w_a$  de onttrokken arbeid per eenheid massa die door het controlevolume stroomt. Indien deze beiden 0 zijn kunnen we op dezelfde wijze als in sectie (4.2) deze vergelijking schrijven langs een stroomlijn van een stationaire stroming:

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = \text{Cst} \quad (4.18)$$

Nu zien we dat in deze vergelijking enkel de term van de inwendige energie verschillend is met de vergelijking van Bernoulli. Aangezien de vergelijking van Bernoulli enkel geldig was voor niet viskeuze stromingen en we deze voorwaarde niet hebben bij de bovenstaande vergelijking komen we tot de conclusie dat bij niet-samendrukbare viskeuze stromingen een gedeelte van de mechanische energie zal omgezet worden in inwendige energie.

De inwendige energie van een fluïdum komt tot uiting als zijn temperatuur. De meeste vloeistoffen hebben echter zo'n grote warmtecapaciteit dat de temperatuursverandering ten gevolge van een verlies van mechanische energie niet merkbaar is. Neem als voorbeeld een stroming van water die ten gevolge van energieverliezen een drukverandering van 1bar ondergaat. Dit komt overeen met een mechanisch energieverlies van ongeveer 100J/kg. De warmtecapaciteit van water bij 20°C is 4180J/kg K. De drukverandering komt dus overeen met een temperatuursverandering van 0.024°C. Deze verandering is zeer klein en bijna niet meetbaar.

Uit de thermodynamica weten we dat wanneer de dichtheid constant blijft een stijging van inwendige energie gepaard gaat met een stijging van entropie ( $Tds = du + pdv$ ). Aangezien er geen warmte toe of afgevoerd wordt kan deze stijging enkel veroorzaakt worden door irreversibiliteiten. Dus bij

een niet-samendrukbare stroming is de omzetting van mechanische energie naar inwendige energie irreversibel.

## 4.7 Bewegingsvergelijking loodrecht op de stromingsrichting

Ook in de richting loodrecht op de stroomlijnen kunnen we het behoud van impuls toepassen. Stellen we voor de eenvoud dat de stroming twee-dimensionaal is (in dit geval is de richting loodrecht op de stroomlijnen eenduidig bepaald). Beschouwen we hierin een infinitesimaal klein controle volume tussen twee stroomlijnen met diepte  $\Delta z$ . Bij verwaarlozing van de zwaartekracht wordt de vergelijking van behoud van impuls:

$$\rho v_{\parallel} v_{\perp} \Delta n \Delta z|_{s+\Delta s} - \rho v_{\parallel} v_{\perp} \Delta n \Delta z|_s = p \Delta s \Delta z|_n - p \Delta s \Delta z|_{n+\Delta n} \quad (4.19)$$

Waarin  $v_{\parallel}$  de component van de snelheid evenwijdig met de rand van het controlevolume voorstelt. De krachten die in deze richting op het controle volume inwerken zijn de drukkrachten aan weerszijden. We kunnen het controle volume steeds zo kiezen dat de snelheid parallel aan de ingang van het controle volume 0 is. Wanneer we de kromtestraal  $R$  van de gemiddelde stroomlijn kennen, kunnen we de parallelle snelheid aan de uitgang schrijven als:

$$v_{\parallel}|_{s+\Delta s} = \frac{v}{R} \Delta s \quad (4.20)$$

Hierin gebruiken we de conventie dat  $R$  steeds groter dan 0 is en dat  $\mathbf{n}$  van het middelpunt van de aanliggende cirkel weg staat. Na deling door  $\Delta s$ ,  $\Delta n$  en  $\Delta z$  en het nemen van de limiet voor  $\Delta n$  gaande naar nul wordt de impulsbalans:

$$\rho \frac{v^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.21)$$

Hierin zien we dat er enkel een variatie in druk loodrecht op de stroomlijnen kan bestaan indien de stroomlijnen een eindige kromtestraal hebben. Indien de stroomlijnen rechten zijn, is de kromtestraal oneindig en dus de drukverandering loodrecht op de stroomlijnen 0.

## 4.8 Navier-Stokes vergelijkingen

Wanneer de viscositeit wel invloed heeft op de stroming dienen we deze invloed in de bewegingsvergelijkingen te verwerken. Dit werd voor het eerst gedaan door Claude-Louis Navier en George Stokes. De resulterende bewegingsvergelijkingen werden dan ook naar hun vernoemd. De afleiding van deze vergelijkingen valt buiten het bereik van deze cursus. We zullen de resultaten echter wel kort bespreken.

De Navier-Stokes vergelijkingen kunnen zeer compact geschreven worden met behulp van enkele vector operators. Voor een niet-samendrukbare stroming van een Newtoniaanse vloeistof geeft dit:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (4.22)$$



Geprojecteerd op de  $x$ -richting van een carthesiaans assenstelsel geeft dit:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (4.23)$$

In het linkerlid vinden we de versnelling van het deeltje terug. In het rechterlid de verschillende krachten die op het deeltje inwerken. De eerste twee termen in het rechterlid zijn herkenbaar van in de vergelijking van Euler (4.5) als de krachten ten gevolge van drukverschillen en ten gevolge van de zwaartekracht. De derde term geeft de viskeuze krachten in een Newtoniaanse niet-samendrukbare stroming weer.

Het oplossen van de Navier-Stokes vergelijkingen naar het snelheidsveld en drukveld bij bepaalde begin en randvoorwaarden is echter nog niet mogelijk. De vergelijkingen hebben namelijk slechts 3 componenten (één in elke coördinaat richting) en er zijn 4 onbekenden:  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  en  $p$ . De extra vergelijking nodig voor het bepalen van een oplossing vinden we in de vergelijking van behoud van massa. Ook deze kan in differentiaalvorm geschreven worden.

Beschouw een infinitesimaal kubusvormig controlevolume met ribben  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  in een willekeurige niet-samendrukbare stroming. Voor dit controlevolume kunnen we de massabalans opstellen. Aangezien het over een infinitesimaal controle volume gaat kunnen we de snelheid door een oppervlak als constant beschouwen. Dit resulteert in:

$$0 = (\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z + (\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z + (\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y \quad (4.24)$$

Delen we deze vergelijking door het volume van het elementje krijgen we:

$$0 = \frac{\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \quad (4.25)$$

Indien we nu de limiet nemen van deze vergelijking met het volume van het elementje gaande naar 0, dan kunnen de twee termen in het rechter lid geschreven worden als de afgeleiden van de snelheid. Na herschikking wordt dit:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.26)$$

Met de introductie van de divergentie als vector operator ( $\nabla$ ) kan dit compact geschreven worden als:

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.27)$$

Voor een niet-samendrukbare stroming zal de dichtheid constant blijven en kunnen we deze dus voor de afgeleide brengen en weglaten. In vector notatie wordt dit:

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (4.28)$$

In een niet-samendrukbare stroming betekent behoud van massa dus dat de divergentie van het snelheidsveld nul is.

Het stelsel van de 3 Navier-Stokes vergelijkingen samen met de continuïteitsvergelijking kan, indien voldoende rand- en beginvoorwaarden gegeven zijn, opgelost worden naar de drie snelheidscomponenten en het drukveld. Aangezien het hier echter gaat over een stelsel gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen is het vinden van zo'n oplossing enkel in zeer eenvoudige gevallen haalbaar. In meer realistische situaties moet men beroep doen op numerieke oplossingstechnieken die onder de noemer Computational Fluid Dynamics (CFD) vallen.

## Hoofdstuk 5

# Gelijkvormigheid

### 5.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we de differentiaalvergelijkingen die de stroming beheersen afgeleid. Voor praktische problemen is een oplossing voor deze vergelijkingen vinden alles behalve eenvoudig. Er moet gebruik gemaakt worden van numerieke oplossingsmethoden en zelfs dan is de modellering van turbulentie moeilijk.

Vaak is het nodig om experimentele resultaten te bekomen. Experimenten met prototypes zijn echter vaak niet mogelijk omwille van de kosten van deze prototypes of de schaal van het prototype. Het is bijvoorbeeld niet mogelijk een nieuwe vorm van romp voor een olietanker tijdens de ontwerpfase op volle schaal te testen om de stromingsweerstand te bepalen. Om deze redenen wordt vaak gebruik gemaakt van experimenten op schaalmodellen.

In dit hoofdstuk zullen we de gebruiksvoorwaarden voor schaalmodellen opstellen en een methode ontwikkelen om experimenteel bepaalde gegevens te vertalen naar de volle schaal geometrie. Het werkelijke probleem zal vanaf nu het prototype genoemd worden, terwijl het schaalmodel waarop experimenten gebeuren het model genoemd wordt. Grootheden die betrekking hebben op het model worden met een accent genoteerd.

### 5.2 Voorwaarden voor gelijkvormigheid

#### 5.2.1 Geometrische gelijkvormigheid

De eerste en meest logische voorwaarde voor gelijkvormigheid is geometrische gelijkvormigheid. Deze stelt dat alle lengte verhoudingen gelijk moeten zijn voor het model en het prototype. In Figuur 5.1 betekent dit dat de verhouding van koorde tot dikte in het model gelijk moet zijn aan

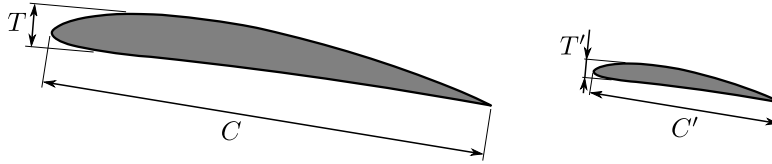
de verhouding van koorde tot dikte in het prototype.

$$\frac{T'}{C'} = \frac{T}{C} \quad (5.1)$$

Of meer algemeen:

$$\frac{\Delta x'_i}{\Delta x'_j} = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_j}, \forall i, j \quad (5.2)$$

Deze gelijkheid van lengteverhoudingen moet kloppen voor alle verhoudingen. Zo zal bijvoorbeeld



**Figuur 5.1:** Geometrische gelijkvormigheid

ook de ruwheid van de oppervlakken mee geschaald moeten worden. Dit kan in de praktijk gebeuren door andere materialen of bewerkingen te kiezen. Sommige geometrische details zullen de interessante grootheden slechts weinig beïnvloeden. Het weglaten van zulke details is dan ook zeer interessant om de kosten van het model te drukken. De kunst bestaat erin de details die weinig invloed zullen hebben te herkennen.

### 5.2.2 Kinematische gelijkvormigheid

Als tweede voorwaarde beschouwen we kinematische gelijkvormigheid. Dit komt er op neer dat het snelheidsveld voor het model en prototype gelijkvormig zijn. De verhoudingen tussen eender welke snelheden in het model moet dus gelijk zijn aan de verhouding van snelheden op de corresponderende punten in het prototype:

$$\frac{v'|_{x'_i, y'_i}}{v'|_{x'_j, y'_j}} = \frac{v|_{x_i, y_i}}{v|_{x_j, y_j}}, \forall i, j \quad (5.3)$$

Voor de meeste problemen zijn bovenstaande voorwaarden echter niet voldoende.

### 5.2.3 Dynamische gelijkvormigheid

De laatste voorwaarde voor gelijkvormigheid is dynamische gelijkvormigheid. Dit wil zeggen dat elke verhouding van krachten in het model gelijk moet zijn aan de corresponderende verhouding in het prototype.

$$\frac{F'_a|_{x'_i, y'_i}}{F'_b|_{x'_j, y'_j}} = \frac{F_a|_{x_i, y_i}}{F_b|_{x_j, y_j}}, \forall a, b, i, j \quad (5.4)$$

Vaak wordt de traagheidskracht die aangrijpt op een fluïdumdeeltje als referentiekraft genomen:

$$\frac{F'|_{x', y'}}{F'_{\text{traagheid}}|_{x', y'}} = \frac{F|_{x, y}}{F_{\text{traagheid}}|_{x, y}} \quad (5.5)$$

Om deze voorwaarde te garanderen kunnen we een hulpmiddel gebruiken: het dimensieloos maken van de toepasbare vergelijkingen.

### 5.3 Dimensieloze getallen

Beschouwen we de bewegingsvergelijking van een deeltje in een niet samendrukbare stroming met viskeuze krachten (4.22) en projecteren we deze op de stoomrichting:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad (5.6)$$

Elke term in deze vergelijking heeft de eenheid kracht per volume ( $\text{N/m}^3$ ). De verschillende termen stellen de verschillende krachten voor die op een fluïdumdeeltje uitgeoefend worden. De term  $-\frac{dp}{ds}$  is afkomstig van de kracht ten gevolge van drukverschillen per eenheid van volume. De term  $\rho g_s$  is afkomstig van de zwaartekracht per eenheid van volume geprojecteerd in de  $s$  richting. De term  $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$  stelt de viskeuze kracht voor inwerkend op het deeltje. De term  $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$  stelt de lokale versnelling van het deeltje voor en de term  $\rho v \frac{dv}{ds}$  stelt de convectieve versnelling van een deeltje voor en kunnen we dus voorstellen als de traagheidskracht per eenheid van volume.

We kunnen de veranderlijken in deze vergelijking allen schrijven als een dimensieloze veranderlijke vermenigvuldigd met een vaste referentie. Kiezen we bijvoorbeeld  $D_{\text{ref}}$  als referentie voor de lengte,  $t_{\text{ref}}$  als referentie voor de tijd  $v_{\text{ref}}$  als referentie voor de snelheid en  $p_{\text{ref}}$  als referentie voor de druk. De dimensieloze veranderlijken noteren we met een  $*$ :

$$\begin{aligned} s &= s^* D_{\text{ref}} \\ v &= v^* v_{\text{ref}} \\ t &= t^* t_{\text{ref}} \\ p &= p^* p_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Indien we deze waarden invullen in (5.6) verkrijgen we:

$$\rho \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial t^* t_{\text{ref}}} + \rho v^* v_{\text{ref}} \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} = -\frac{\partial p^* p_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^{*2} D_{\text{ref}}^2} \quad (5.8)$$

Merk nu echter op dat dat de referentie tijd niet onafhankelijk is. Willen we een consistente dimensieloze snelheid bekomen dan moet  $t_{\text{ref}} = D_{\text{ref}}/v_{\text{ref}}$ :

$$\frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}} v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \rho g_s + \frac{\mu v_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (5.9)$$

Elke term in de vergelijking is nu geschreven als een constante maal een dimensieloze veranderlijke. Elke van de constante factoren moet dus een referentie waarde voor een bepaalde kracht voorstellen zoals hierboven besproken. We kunnen de verhoudingen van de krachten die inwerken op een deeltje dus schrijven als het quotiënt van de factoren in vergelijking (5.9). De voorwaarde voor dynamische

gelijkvormigheid (5.5) kunnen we nu bekomen door de quotiënten van de factoren in (5.9) constant te houden voor model en prototype.

Delen we (5.9) door  $\frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}}$  (de referentiefactor voor traagheidskracht) verkrijgen we:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\text{ref}}}{\rho v_{\text{ref}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{g_s D_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} + \frac{\mu}{\rho v_{\text{ref}} D_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (5.10)$$

In de eerste term van (5.10) zien we de dimensieloze deeltjesversnelling terug. De overige termen stellen de verhoudingen van krachten voor die op het deeltje inwerken. Indien we deze constant kunnen houden tussen model en prototype, wordt de beweging van een deeltje in het model en het prototype beschreven door dezelfde differentiaalvergelijking. De relatieve beweging van elk deeltje zal dan ook hetzelfde zijn. We hebben dus een voorwaarde die dynamische gelijkvormigheid garandeert.

De coëfficiënten in (5.10) kunnen allen gerelateerd worden aan dimensieloze getallen. Zo kan vergelijking (5.10) geschreven worden als:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\text{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\text{Fr}^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (5.11)$$

De voorkomende dimensieloze getallen zijn het Euler getal, het Froude getal en het Reynolds getal. Deze relateren respectievelijk de druk kracht, zwaartekracht en viskeuze kracht tot de traagheidskracht. In de definitie van de dimensieloze getallen wordt het subscript "ref" ook weggelaten aangezien het hier steeds over de referentiegrootheden gaat. Enkele in de stromingsmechanica vaak voorkomende dimensieloze getallen zijn:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} = \frac{\text{traagheidskracht}}{\text{viskeuze krachten}} \quad (5.12)$$

$$\text{Eu} = \frac{p}{\rho v^2} = \frac{\text{drukkracht}}{\text{traagheidskracht}} \quad (5.13)$$

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{g D}} = \sqrt{\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{zwaartekracht}}} \quad (5.14)$$

$$\text{Ma} = \frac{v}{c} = \frac{\text{traagheidskracht}}{\text{samendrukbaarheidskrachten}} \quad (5.15)$$

Een zeer belangrijke en zeer vaak gebruikte grootheid in de fluïdum mechanica is het Reynoldsgetal, genoemd naar Osbourne Reynolds. Dit getal vormt de verhouding van de traagheidskracht tot de viskeuze krachten die inwerken op een fluïdum deeltje. Wanneer het Reynoldsgetal voor een bepaalde stroming zeer laag is zullen viskeuze krachten de stroming overheersen. Zo'n stroming wordt ook kruipende stroming (E: creeping flow) genoemd. Wanneer het Reynoldsgetal echter zeer groot is zullen viskeuze krachten weinig invloed hebben. In dit geval kunnen we gebruik maken van de vergelijkingen van Euler en Bernoulli die in het vorige hoofdstuk afgeleid werden. Bij hoge Reynoldsgetallen zal er echter een ander fenomeen optreden: turbulentie. We zullen dieper op dit fenomeen ingaan in hoofdstuk 6 en hoofdstuk 8.

Het Froude getal, genoemd naar William Froude, geeft de verhouding tussen de traagheidskrachten en de zwaartekracht weer. In de meeste stromingen zal de zwaartekracht enkel zorgen voor een

lineaire drukverdeling met de hoogte in de vloeistof. Bij een specifieke klasse stromingsproblemen heeft de zwaartekracht echter wel een belangrijke invloed op de beweging van individuele deeltjes. Dit zijn problemen waarbij er een vrij vloeistof oppervlak aanwezig is (E: Free surface flow). Voorbeelden zijn de stroming van een rivier onder invloed van de zwaartekracht, golven in de oceaan ten gevolge van de wind of de boeggolf van een schip dat zich door het water beweegt.

## 5.4 Buckingham-Pi theorema

Een andere kijk op dimensieloze grootheden kunnen we bekomen door middel van dimensie analyse. Elke vergelijking met een fysische betekenis moet namelijk homogeen in de eenheden zijn. Dit wil zeggen dat alle termen in de vergelijking dezelfde eenheden moeten hebben. Als eenvoudig voorbeeld kunnen we de tweede wet van Newton  $F = ma$  aanhalen. Hierin heeft het linkerlid de eenheid van kracht [N]. Het rechterlid heeft als eenheid  $[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$  wat in het meter-kilogram-seconde stelsel net de definitie van de eenheid van kracht [N] is. Een meer fluïdummechanisch voorbeeld is de vergelijking van Bernoulli (4.9). Hierin hebben alle termen de eenheid  $[\frac{\text{J}}{\text{m}^3}]$  ofwel energie per eenheid van volume. Elke fysische vergelijking (en dus elke vergelijking in deze cursus) moet op deze manier homogeen zijn in de eenheden.

Elke fysische grootte heeft een eenheid die op een bepaalde manier gerelateerd kan worden aan enkel basiseenheden. Enkele veel voorkomende grootheden zijn gegeven in Tabel 5.1. Hierin is te zien dat de dimensies allen gevormd kunnen worden met behulp van enkele basis dimensies: L als dimensie van lengte, M als dimensie van massa, T als dimensie van tijd, en  $\theta$  als dimensie van temperatuur. We kunnen elke fysische vergelijking dus ook schrijven met behulp van deze basis dimensies. Zo heeft de vergelijking van Bernoulli de dimensie  $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ .

Het Buckingham-pi theorema stelt dat wanneer een fysische grootte  $a$  afhankelijk is van  $n$  parameters  $a_1$  tot  $a_n$  waarvan  $k$  grootheden onafhankelijke dimensies hebben:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (5.16)$$

Dan kan deze uitdrukking herschreven worden tot een dimensieloze vergelijking met slechts  $n - k$  dimensieloze parameters:

$$\pi = \phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) \quad (5.17)$$

Edgar Buckingham formaliseerde dit principe in 1914 en presenteerde een manier om de dimensieloze parameters op een gestructureerde manier te vinden. Het principe werd echter reeds gebruikt door Baron Rayleigh in 1877. Het theorema kan formeel bewezen worden, dit valt echter buiten het bereik van deze cursus. Geïnteresseerde lezers worden verwezen naar [6] waar het thema zeer uitgebreid beschouwd wordt.

Grootheid	Dimensie	Eenheid
Lengte	L	m
Massa	M	kg
Tijd	T	s
Dichtheid	$ML^{-3}$	$kg/m^3$
Druk	$ML^{-1}T^{-2}$	$N/m^2$
Dynamische viscositeit	$MT^{-1}L^{-1}$	Pas
Energie (arbeid)	$ML^2T^{-2}$	J
Impuls	$MLT^{-1}$	$kgm/s$
Kinematische viscositeit	$L^2T^{-1}$	$m^2/s$
Kracht	$MLT^{-2}$	N
Snelheid	$LT^{-1}$	$m/s$
Vermogen	$ML^2T^{-3}$	$J/s$
Versnelling	$LT^{-2}$	$m/s^2$
Volume	$L^3$	$m^3$
Temperatuur	$\theta$	K
Conductiecoëfficiënt	$MT^{-3}\theta^{-1}$	$W/m^2K$
Energie (warmte)	$MLT^{-2}$	J
Warmteoverdrachtscoëfficiënt	$MT^{-3}L\theta^{-1}$	$W/mK$

**Tabel 5.1:** Vaak voorkomende grootheden met hun dimensie en eenheden**Voorbeeld 5.1:**

Om de kracht van het theorema aan te tonen beschouwen we bij wijze van voorbeeld de stroming van water rond een schepsschroef. We zijn geïnteresseerd in de kracht die de schroef uitoefent op de stroming en hebben hier een aantal experimenten voor uitgevoerd. Uit de experimenten blijkt dat de kracht afhankelijk is van de snelheid van de stroming, de dichtheid, de viscositeit, het toerental van de schroef en de diameter van de schroef:

$$F = f(v, \rho, \nu, N, D)$$

De dimensies in deze relatie zijn:  $v$ :  $LT^{-1}$ ,  $\rho$ :  $ML^{-3}$ ,  $\nu$ :  $L^2T^{-1}$ ,  $N$ :  $T^{-1}$ ,  $D$ : L.

Hierin zijn slechts 3 grootheden dimensioneel onafhankelijk. Zo kan bijvoorbeeld de dimensie van  $N$  geschreven worden als  $LT^{-1}/L$ , de dimensie van  $v$  gedeeld door die van  $D$  en de dimensie van  $\nu$  kunnen we bekomen als de dimensie van  $D$  maal de dimensie van  $v$ . In termen van het Buckingham-pi theorema is  $n = 5$  en  $k = 3$ . We zullen de relatie dus herschrijven als een dimensieloze vergelijking met  $n - k = 2$  parameters:

$$\pi = \phi(\pi_1, \pi_2) \tag{5.18}$$



Door even naar de betrokken parameters te kijken en uit de voorgaande analyse kunnen we de  $\pi$  termen gemakkelijk terug vinden. Deze worden:

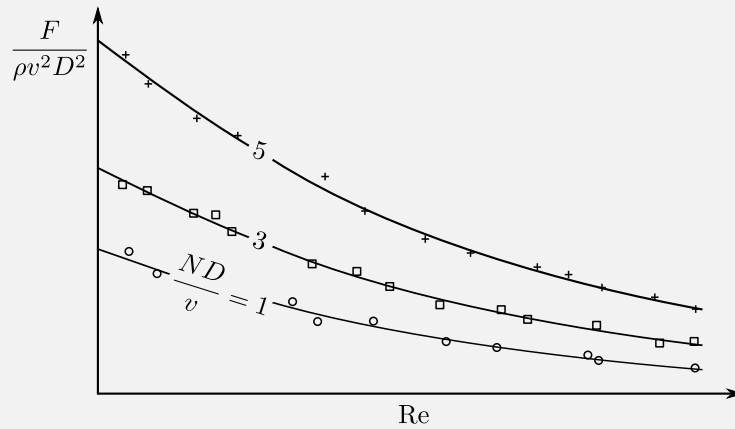
$$\begin{aligned}\pi &= \frac{F}{\rho v^2 D^2} \\ \pi_1 &= \frac{vD}{\nu} \\ \pi_2 &= \frac{ND}{v}\end{aligned}$$

De dimensieloze relatie wordt dus:

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = \phi\left(\frac{vD}{\nu}, \frac{ND}{v}\right)$$

De  $\pi$  termen in deze relatie zijn nu ook heel herkenbaar. In het linkerlid vinden we een dimensieloze kracht. De functie in het rechterlid heeft twee parameters. De eerste herkennen we als het Reynoldsgetal. De tweede is het dimensieloze toerental van de schroef, of de verhouding tussen de tipsnelheid en de stroomsnelheid (de snellopendheid).

We kunnen de relatie die oorspronkelijk 5 parameters had dus schrijven als een relatie met slechts 2 parameters. Deze relatie kunnen we (indien de experimenten echt gebeurd zijn) eenvoudig weergeven in een grafiek door een set met krommen weer te geven. Bijvoorbeeld de dimensieloze kracht in functie van het Reynoldsgetal voor verschillende waarden van het dimensieloze toerental. Met behulp van deze grafiek kunnen we de kracht voor elke schroef die geometrisch gelijkvormig is, in elk fluïdum met elke snelheid en elk toerental berekenen.



Indien de analyse op voorhand gebeurd is kan zelfs het aantal nodige experimenten sterk beperkt worden, van bijvoorbeeld  $2^5 = 32$  experimenten, om een lineair verband te bepalen tot  $2^2 = 4$  experimenten. Hiervoor is wel een goede inschatting van de invloedrijke parameters nodig.



## Hoofdstuk 6

# Uitwendige stroming

### 6.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zullen een aantal hulpmiddelen voor het beschrijven van stroming uitwendig aan een voorwerp beschreven worden. Als eerste wordt een analytische methode voor niet viskeuze tweedimensionale stroming besproken. Nadien wordt het gedrag van een viskeuze uitwendige stroming beschreven. In het laatste deel wordt de stroming rond een vleugelprofiel, een in de ingenieurstoepassing vaak voorkomende vorm, beschreven.

### 6.2 Potentiaalstroming

Uit de vectorveld analyse weten we dat wanneer een vectorveld rotatievrij is er een scalaire potentiaalfunctie bestaat waaruit de componenten van het vectorveld kunnen worden afgeleid.

Wanneer er geen viskeuze krachten op een fluïdum inwerken zal de rotatie van het snelheidsveld 0 zijn. Het met andere woorden: het snelheidsveld is rotatievrij. Er zal dus een potentiaalfunctie bestaan waaruit de componenten van het snelheidsveld kunnen worden afgeleid.

Dit vereenvoudigt de oplossing van het snelheidsveld voor gegeven randvoorwaarden aanzienlijk. Voor een tweedimensionale niet-samendrukbare stroming moet normaal gezien een stelsel van 3 gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen opgelost worden (één voor elke richting en de continuïteitsvergelijking). Onder de voorwaarden van potentiaalstroming vereenvoudigt dit tot één partiële differentiaalvergelijking.

#### 6.2.1 Stroomfunctie

Beschouw een willekeurige tweedimensionale stroming met stroomlijnen zoals in Figuur 6.1. Berekenen



**Figuur 6.1:** Stroomlijnen van een tweedimensionale stroming

we nu het debiet  $d\dot{V}$  tussen twee stroomlijnen op een afstand  $dn$ .

$$d\dot{V} = v dn \quad (6.1)$$

De snelheid kan beschreven worden door zijn 2 componenten,  $v_x$  en  $v_y$ . We kunnen de vector  $dn$  beschrijven met zijn componenten  $dx$  en  $dy$  (Figuur 6.2). De componenten van  $\mathbf{v}$  loodrecht op het oppervlak  $dn$  kunnen nu berekend worden als:

$$v_{x,\perp} = v_x \frac{dy}{dn} \quad (6.2)$$

$$v_{y,\perp} = -v_y \frac{dx}{dn} \quad (6.3)$$

Hierin wordt bij  $dx$  een min teken toegevoegd aangezien  $dx$  zoals hier getekend een negatieve waarde zal hebben. Het debiet wordt nu:

$$d\dot{V} = v_x \frac{dy}{dn} dn - v_y \frac{dx}{dn} dn = v_x dy - v_y dx \quad (6.4)$$

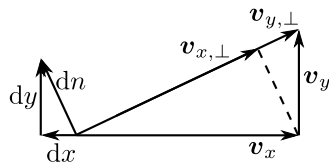
Beschouw nu de onbekende stroomfunctie  $\psi$  die een scalaire functie is in  $x$  en  $y$ . De verandering van deze stroomfunctie kan met behulp van de kettingregel geschreven worden in functie van zijn partiële afgeleiden naar de twee coördinaten:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (6.5)$$

Indien we nu (6.4) en (6.5) vergelijken zien we dat we de stroomfunctie kunnen definiëren als het debiet tussen een stroomlijn en een vaste referentie stroomlijn. De snelheidscomponenten kunnen dan uit de stroomfunctie afgeleid worden als:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6.6)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.7)$$



**Figuur 6.2:** Vectoren van de stroomlijn coördinaten

Een belangrijke eigenschap van de stroomfunctie is dat contouren van constante stroomfunctie de stroomlijnen beschrijven. Dit kan rechtstreeks afgeleid worden uit de interpretatie van de stroomfunctie als debiet.

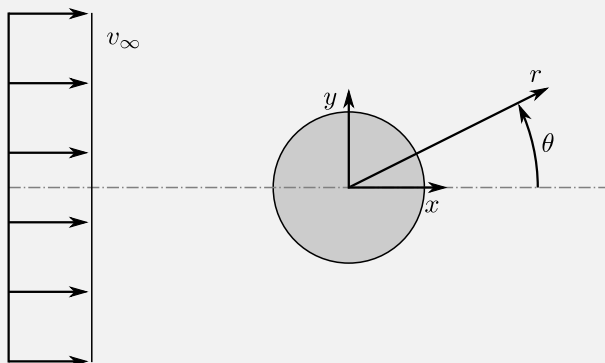
Uit de vector analyse volgt dat voor een rotatievrije stroming de stroomfunctie moet voldoen aan de Laplacevergelijking.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.8)$$

Analytische oplossingen voor deze vergelijking bestaan voor een groot aantal verschillende randvoorwaarden. Een bijkomend voordeel van deze formulering is dat de Laplacevergelijking een lineaire partiële differentiaalvergelijking is. Hierop is het superpositieprincipe van toepassing. Een lineaire combinatie van oplossingen zal dus ook voldoen aan de vergelijking. Met behulp hiervan kunnen een aantal problemen analytisch behandeld worden.

**Voorbeeld 6.1:**

Bepaal en teken de stroomlijnen voor een stroming met snelheid  $v_\infty$  rond een cilinder met straal  $R$ .



De stroomfunctie voor de stroming rond een cilinder kan worden gevonden door de superpositie van een uniforme stroming en een doublet. Aangezien we rond een cilinder werken is het aangewezen om in poolcoördinaten te werken. De stroomfunctie van een uniforme stroming wordt dan:

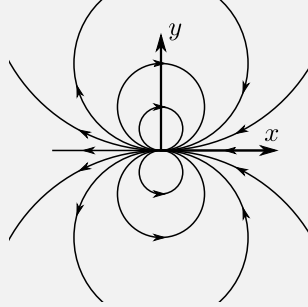
$$\psi = v_\infty r \sin \theta$$

Een doublet wordt gevormd wanneer een bron van fluïdum en een put infinitesimaal dicht

bij elkaar geplaatst worden. De stroomfunctie kan geschreven worden als:

$$\psi = -\frac{K \sin \theta}{r}$$

De stroomlijnen zien er als volgt uit:



De gezochte stroomfunctie wordt dus:

$$\psi = v_{\infty} r \sin \theta - \frac{K \sin \theta}{r}$$

De sterkte van het doublet  $K$  moet zo gekozen worden zodat de cilinderomtrek een stroomlijn is. Dit betekent dat op  $r = R$ ,  $v_r$  nul moet zijn met de partieel afgeleiden in cilindercoördinaten wordt de radiale snelheid:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= v_{\infty} \cos \theta - \frac{K \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

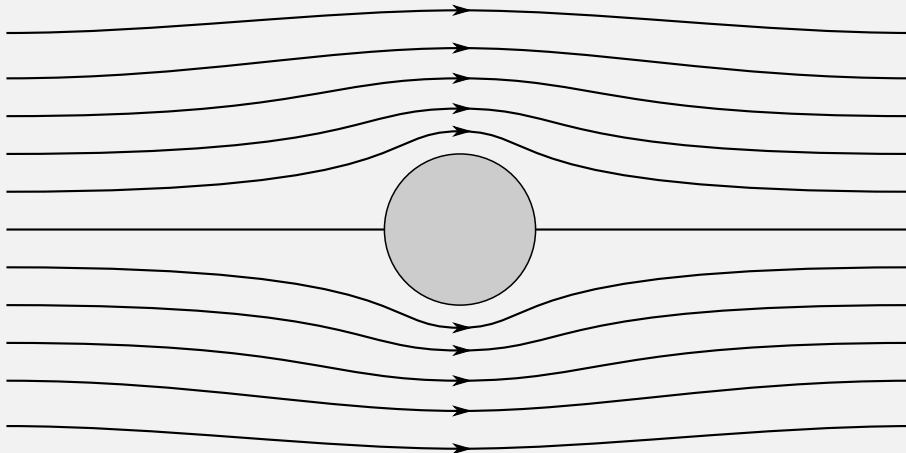
Dus op de cilindermantel:

$$0 = v_{\infty} \cos \theta - \frac{K \cos \theta}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v_{\infty} \cos \theta R^2 - K \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad K = v_{\infty} R^2$$

De stroomfunctie wordt:

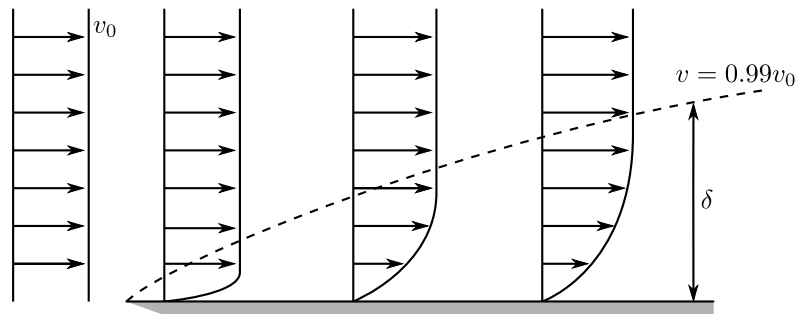
$$\psi = v_{\infty} r \sin \theta - \frac{v_{\infty} R^2 \sin \theta}{r}$$

De stroomlijnen kunnen nu getekend worden:



## 6.3 Grenslagen

Beschouw vlakke plaat waar langs één zijde een viskeus fluïdum over stroomt (Figuur 6.3). Vlak voor de plaat is de stroming uniform, de snelheid varieert niet met de hoogte. Bij het begin van de plaat zullen de deeltjes het dichtst bij de plaat door de wrijvingskrachten afgeremd worden tot stilstand. De deeltjes verder van de plaat worden op deze plaats echter nog niet beïnvloed door de plaat. Wanneer het fluïdum verder over de plaat stroomt zullen de deeltjes die iets verder van de plaat stromen ook afgeremd worden door de deeltjes het dichtst bij de plaat. De deeltjes ver van de plaat ondervinden echter nog steeds geen invloed van de plaat.



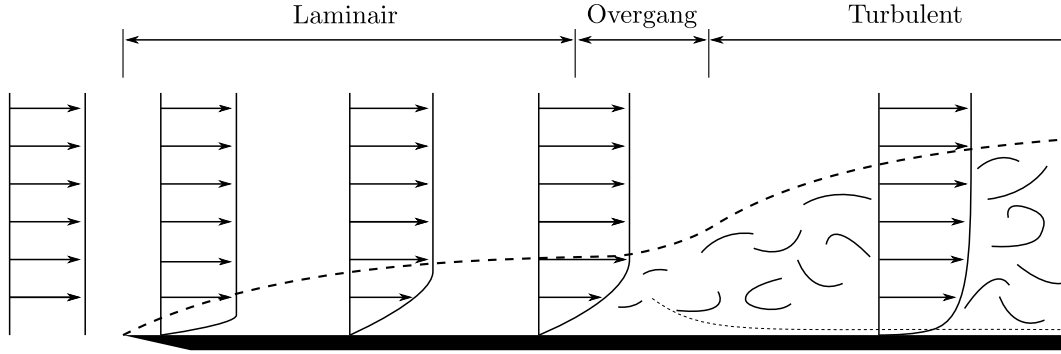
**Figuur 6.3:** Vorming van een grenslaag bij stroming over een vlakke plaat

Hoe verder we van het begin van de plaat kijken hoe groter de zone waarin de fluïdum deeltjes het effect van de plaat ondervinden zal worden. De zone waarin de snelheid van het fluïdum kleiner is dan 99% van de ongestoorde snelheid wordt de *grenslaag* genoemd.

Bij elke viskeuze stroming die in aanraking komt met een wand op een andere snelheid wordt een grenslaag gevormd. Deze vormt een handig hulpmiddel voor de analyse van viskeuze stromingen rond voorwerpen aangezien slechts een gedeelte van het stroomveld in rekening gebracht moet worden (het gedeelte binnen de grenslaag). De bepaling van de dikte van een grenslaag is echter niet zo eenvoudig en zal niet behandeld worden in deze cursus.

Wanneer de dikte van de grenslaag echter gekend is kan gemakkelijk een snelheidsprofiel verondersteld worden. Hieruit kunnen dan de schuifspanningen aan de wand berekend worden en uit deze volgt de viskeuze weerstandskracht die de vloeistof op de wand uitoefent.

In het voorgaande voorbeeld liepen alle snelheidsvectoren in dezelfde richting. Indien we de stroomlijnen in deze stroming zouden tekenen is te zien dat deze allemaal parallel lopen. De stroming wordt als het ware door de ongestoorde snelheid gedwongen in verschillende lagen te stromen. Zo'n stroming noemen we *laminair*. Wanneer we ons nog verder over de wand verplaatsen zal de grenslaag steeds dikker worden. Op een gegeven moment wordt de grenslaag zo dik dat de stroming binnen de grenslaag onstabiel wordt. Er zullen variaties van de grootte en richting van de snelheid optreden naargelang de plaats en het tijdstip waarop we kijken (Figuur 6.4). We noemen dit een turbulente grenslaag.



**Figuur 6.4:** Vorming van een turbulente grenslaag bij stroming over een vlakke plaat

In een turbulente grenslaag zal het fluïdum niet meer netjes in lagen stromen. Zeer dicht bij de wand zal er wel een kleine zone van laminaire stroming zijn. Hier zorgt de wand voor de stabilisatie van de stroming. We noemen deze laag de laminaire sublaag.

In een turbulente grenslaag wordt de weerstandskracht niet enkel meer bepaald door de viscositeit. Buiten de laminaire sublaag beweegt de vloeistof onregelmatig door elkaar. Er zal dus convectieve impulsoverdracht plaatsvinden over de lagen heen. De schuifspanning wordt hier veroorzaakt door de onregelmatigheid van de snelheden en wordt de turbulente schuifspanning of Reynoldsspanning genoemd. Het correct bepalen van deze spanningen is tot op heden niet mogelijk en vormt één van de blijvende uitdagingen in de fluïdummechanica. Er bestaan wel meerdere ad hoc benaderingen voor de Reynoldsspanningen die in bepaalde gevallen voldoende betrouwbare resultaten geven.

Binnen de laminaire sublaag zal de laminaire schuifspanning terug domineren. Aangezien er in het turbulente gedeelte meer impuls overdracht is zal een turbulent snelheidsprofiel steeds een grotere gradiënt hebben in de buurt van de wand en vlakker zijn verder van de wand. De uitgeoefende viskeuze weerstandskracht is dan ook steeds groter bij een turbulente stroming dan bij een laminaire stroming.

### 6.3.1 Het snelheidsprofiel van een laminaire stroming over een vlakke plaat

Beschouw een niet-samendrukbare, laminaire stroming van een newtoniaanse vloeistof over een vlakke plaat. Deze stroming voldoet aan de Navier-Stokes vergelijking (4.23). Indien we de stroming als stationair beschouwen en het effect van de zwaartekracht verwaarlozen wordt dit:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (6.9)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (6.10)$$

De continuïteitsvergelijking (4.26) in differentiaalvorm wordt:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.11)$$



Wanneer we de randvoorwaarden toevoegen dat ver van de wand de snelheid de vrije stroomsnelheid  $v_0$  is en op aan de wand de snelheid 0 is, hebben we voldoende voorwaarden om het probleem op te lossen. Er is echter nog geen analytische oplossing gevonden voor dit probleem. Om het probleem op te lossen moeten we enkele vereenvoudigingen invoeren.

Aangezien de grenslaag zich dicht tegen de plaat bevindt is het aannemelijk dat de snelheid in de richting loodrecht op de plaat ( $v_y$ ), veel kleiner is dan de snelheid in de richting van de plaat ( $v_x$ ). Ook zal de verandering van variabelen in de loodrechte richting ( $\frac{\partial}{\partial y}$ ) veel kleiner zijn dan de verandering in de stroomrichting ( $\frac{\partial}{\partial x}$ ). Uit experimenten weten we ook dat de druk in de volledige stroming ongeveer constant is.

Met deze vereenvoudigingen zal de impuls vergelijking in de  $y$ -richting niet meer belangrijk zijn. In de impulsvergelijking in de  $x$ -richting kunnen we de drukterm schrappen. Aangezien in de viskeuze kracht term de tweede afgeleide naar  $y$  staat en deze veel kleiner is dan de tweede afgeleide naar  $x$  kunnen we ook deze schrappen. De impulsvergelijking in de  $x$ -richting wordt dan:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \quad (6.12)$$

De randvoorwaarden worden:

$$v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0 \quad (6.13)$$

$$v_x|_{y \rightarrow \infty} = v_0 \quad (6.14)$$

Deze partiële differentiaalvergelijking kan door middel van een coördinaten transformatie omgevormd worden tot een gewone differentiaal vergelijking die eenvoudig numeriek kan opgelost worden. De uitwerking hiervan werd het eerst gedocumenteerd door Paul Richard Heinrich Blasius in 1908 maar valt buiten het bereik van deze cursus geïnteresseerde lezers worden verwezen naar [7] waar dit probleem en vele andere grenslaag problemen zeer goed uitgewerkt worden.

De numeriek oplossing gebruikt een getransformeerde coördinaat  $\eta = y \left( \frac{v_0}{\nu x} \right)^{1/2}$ . De relatieve snelheid in de grenslaag in functie van deze coördinaat wordt gegeven in Figuur 6.5. Merk op dat deze figuur kan gebruikt worden om de snelheid in de grenslaag op alle hoogtes en alle afstanden van de rand van de plaat te berekenen aangezien de coördinaat  $\eta$  zowel de  $y$  als  $x$  coördinaat bevat.

Uit de Figuur 6.5 valt af te leiden dat de grenslaagdikte (de positie waar de relatieve snelheid 0.99 is) overeenkomt met  $\eta = 5$ . Hieruit kunnen we het verloop van grenslaagdikte met de afstand tot het aanstroompunt bepalen:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}} \quad (6.15)$$

Aangezien het snelheidsprofiel volgens Blasius geen analytische uitdrukking heeft is het niet eenvoudig om berekeningen mee uit te voeren. We kunnen het snelheidsprofiel echter zeer goed benaderen met een kwadratisch snelheidsprofiel zoals getoond in Figuur 6.5. Dit benaderende snelheidsprofiel



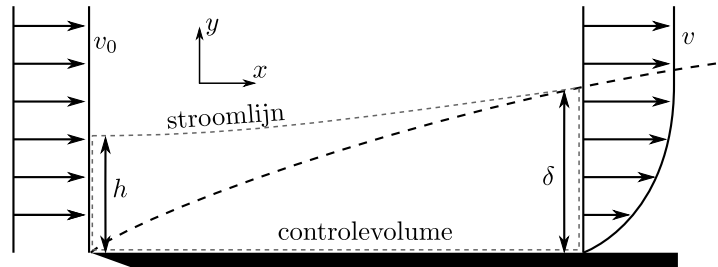
**Figuur 6.5:** Blasius oplossing van de snelheid in de grenslaag bij laminaire stroming over een vlakke plaat

kunnen we uitdrukken als:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{2}{5}\eta - \frac{1}{25}\eta^2 \quad (6.16)$$

### 6.3.2 Impulsbalans voor de laminaire stroming over een vlakke plaat

Voor een laminaire stroming over een vlakke plaat kunnen we de weerstandskracht uitwerken door een controlevolume te beschouwen rond de grenslaag. Kies als randen voor het controle volume de vlakke plaat zelf, een verticale aan het begin van de plaat, een verticale op de beschouwde positie  $x$  en een stroomlijn die op positie  $x$  door de rand van de grenslaag stroomt. Ter hoogte van het begin van de plaat bevindt deze stroomlijn zich op een hoogte  $h$  (Figuur 6.6).



**Figuur 6.6:** Controle volume in de laminaire stroming over een vlakke plaat voor de berekening van de weerstandskracht

We kunnen nu de impulsbalans voor dit controlevolume in de  $x$ -richting uitschrijven. Aangezien het een stationair controlevolume met één ingang en één uitgang is wordt dit:

$$F_x = \int_0^\delta \rho v(y)^2 b dy - \int_0^h \rho v_0^2 b dy \quad (6.17)$$

Hierin stelt  $b$  de breedte van de plaat voor. De krachten die inwerken op de het controlevolume zijn de schuifspanning aan de wand  $\tau_w$ , de druk aan de in en uitlaat, en de druk ter hoogte van de

stroomlijn. Uit experimenten weten we dat de druk in de volledige stroming constant is. De druk zal dus geen resulterende kracht uitoefenen op het controlevolume. De totale kracht uitgeoefend op het controlevolume is dan het negatieve van de weerstandskracht uitgeoefend op de plaat:

$$F_x = -F_d = - \int_0^x \tau_w b dx \quad (6.18)$$

Om de hoogte  $h$  van de stroomlijn aan het begin van de plaat te berekenen kunnen we de massabalans opstellen. Na vereenvoudiging wordt dit:

$$\rho v_0 b h = \int_0^\delta \rho v(y) b dy \quad (6.19)$$

Indien we beide leden vermenigvuldigen met  $v_0$  bekomen we in het linker lid een uitdrukking die gelijk is aan de tweede term in het rechterlid van (6.17). Na invullen van bovenstaande resultaten wordt dit:

$$-F_d = \int_0^\delta \rho v(y)^2 b dy - \int_0^\delta \rho v_0 v(y) b dy \quad (6.20)$$

In het rechterlid van deze vergelijking kunnen we de integralen combineren tot:

$$F_d = \rho b \int_0^\delta v(y)(v_0 - v(y)) dy \quad (6.21)$$

Deze vergelijking illustreert dat de weerstandskracht door viskeuze wrijving gebalanceerd wordt door een impuls daling in de grenslaag. Hoe verder we ons op de plaat bewegen hoe meer weerstand er zal uitgeoefend worden. De totale impuls in de grenslaag moet dus dalen en als gevolg van behoud van massa zal de grenslaag dikte groter worden.

### 6.3.3 Turbulentie

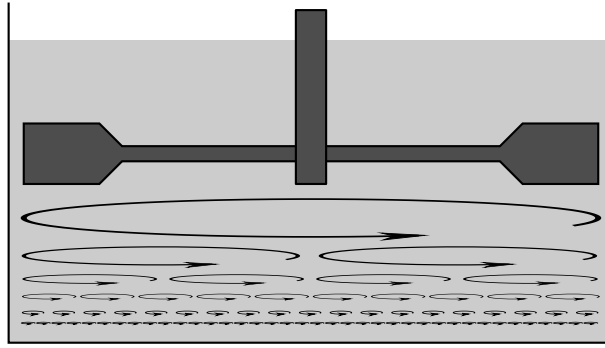
Wanneer het Reynoldsgetal in een stroming groot genoeg is zal de stroming turbulent worden. Het snelheidsveld dat de stroming beschrijft bevat dan schijnbaar willekeurige variaties in grootte en richting van de snelheid. Het fenomeen werd als eerste beschreven en gekwantificeerd door Osbourne Reynolds voor een stroming in een buis. Een turbulente stroming wordt gekarakteriseerd door:

- Wanordelijke, schijnbaar willekeurige stroming
- Zeer gevoelig aan begincondities
- Grote menging en dissipatie
- Grote variatie in lengte en tijdschalen
- 3 dimensionaal

Wanneer in een stroming energie toegevoegd wordt op een grote lengte schaal zal deze energie door wervelingen overgedragen worden naar steeds kleinere lengteschalen, tot een schaal waar de viscositeit overheerst en de energie gedissipeerd wordt tot warmte door viskeuze wrijving. Dit principe werd in 1922 poëtisch beschreven door Lewis Fry Richardson:

Big whorls have little whorls,  
which feed on their velocity;  
And little whorls have lesser whorls  
and so on to viscosity.

Dit principe kan geïllustreerd worden aan de hand van een grote tank met een roer installatie (Figuur 6.7). De roerder voegt energie toe en creëert een grote wervel op de schaal van de tank zelf. Deze wervel zal zijn energie overdragen aan kleinere wervels met hogere snelheid, die op hun beurt de energie overdragen aan nog kleinere wervels. Dit proces gaat door to de lengte schaal zo klein is en de snelheid zo groot dat de viscositeit terug domineert en de mechanische energie omgezet wordt in warmte. Dit principe noemt men ook de energie cascade.



**Figuur 6.7:** Illustratie van de energie cascade bij een turbulente menging in een tank waarbij energie toegevoegd wordt door een roerder.

De oorzaak van de energiecascade kunnen we illustreren met een eenvoudig voorbeeld. Beschouw een stroming met een sinusvormige verstoring in de  $x$ -richting ( $v_x = \sin(\omega x)$ ). De convectieve term van de deeltjesversnelling in de  $x$ -richting wordt nu:

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = \omega \sin(\omega x) \cos(\omega x) = \frac{1}{2} \omega \sin(2\omega x) \quad (6.22)$$

Een aanwezige verstoring wordt dus met een half zo kleine golflengte overgedragen naar de versnelling. Er wordt dus een nieuwe verstoring gecreëerd met een kleinere golflengte en hogere frequentie. Hierdoor zal een globale verstoring evolueren tot een variatie in snelheid op zeer kleine schaal.

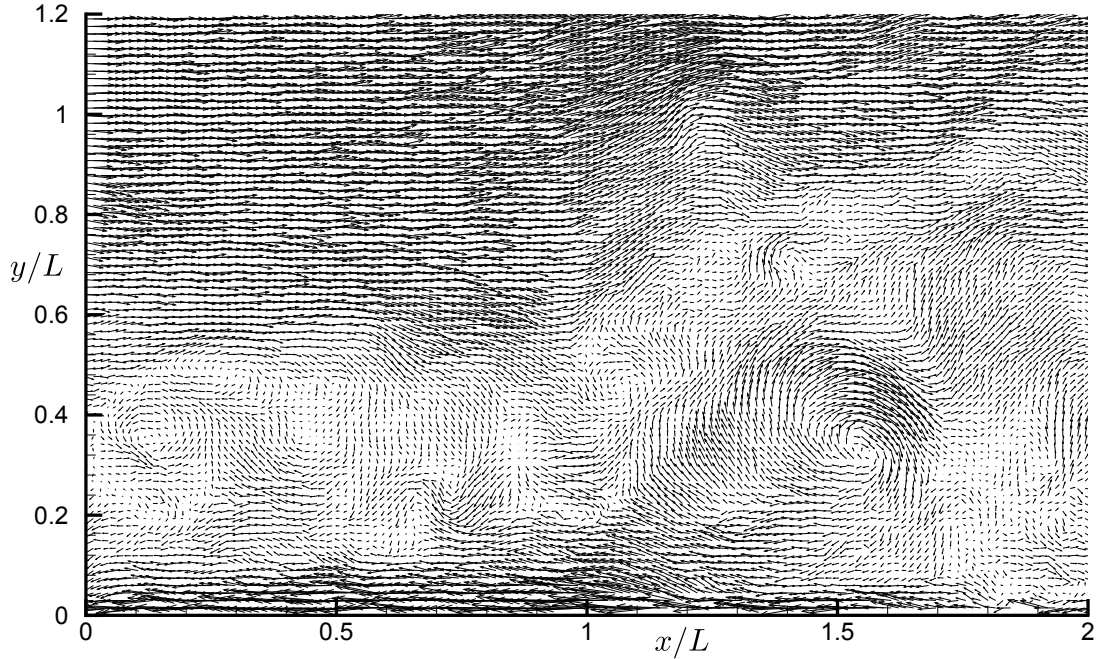
Een turbulente stroming wordt nog steeds beschreven door de Navier-Stokes vergelijking (4.22). Door de niet lineaire convectieve termen in de deeltjesversnelling ( $v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ ) is het gekomen van een oplossing voor de vergelijkingen tot nog toe niet mogelijk. Wel bestaan er technieken die het numeriek benaderen van turbulente stroming mogelijk maken.

Het Reynolds getal (verhouding tussen traagheidskrachten en viskeuze krachten) is een goede maatstaf voor het inschatten van turbulentie. De Reynoldsgetallen waarbij turbulentie optreedt zijn echter sterk afhankelijk van de specifieke situatie. Bij de grenslaagstroming over een vlakke plaat

zoals hierboven beschreven zal turbulentie optreden vanaf een Reynoldsgetal van 350000 - 1000000 [7]. Het Reynoldsgetal word in dit geval gedefinieerd als:

$$Re_x = \frac{vx}{\nu} \quad (6.23)$$

Hierin is  $x$  de afstand van het beschouwde punt tot de rand van de plaat. Een voorbeeld van de ogenblikkelijke snelheidsvectoren van een turbulente stroming over een vlakke plaat is gegeven in Figuur 6.8.



**Figuur 6.8:** Ogenblikkelijke snelheidsvectoren opgemeten bij een turbulente grenslaag over een vlakke plaat [8].

Meer informatie over turbulentie is te vinden in [9].

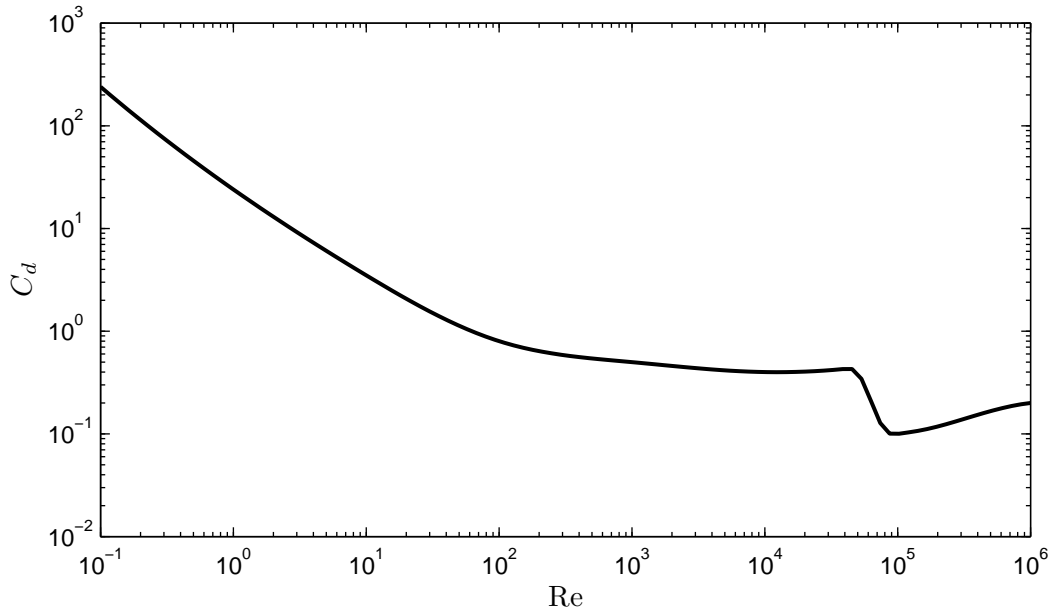
## 6.4 Loshechting

Beschouw de stroming rond een cilinder. Wanneer we de stroomlijnen tekenen voor verschillende Reynolds getallen kunnen we enkel duidelijke regimes onderscheiden (Figuur 6.10).

Bij zeer lage snelheden zullen de viskeuze krachten overheersen (Figuur 6.10(a) en Figuur 6.10(b)). De stroming is zeer viskeus en de snelheid zal in het gehele stroomveld het effect van de cilinder ondervinden. De grenslaag is in dit geval zeer groot. We kunnen een wrijvingscoëfficiënt berekenen als:

$$C_d = \frac{F_d}{1/2 \rho v^2 A_{\perp}} \quad (6.24)$$

Deze zal bij lage Reynoldsgetallen zeer groot zijn en sterk afhankelijk zijn van het Reynoldsgetal (Figuur 6.9). De wrijving wordt echter slechts gedeeltelijk door viskeuze wrijving (ten gevolge van de grenslaag) veroorzaakt. Het overige gedeelte wordt veroorzaakt door het drukverschil tussen de voor en achterzijde.

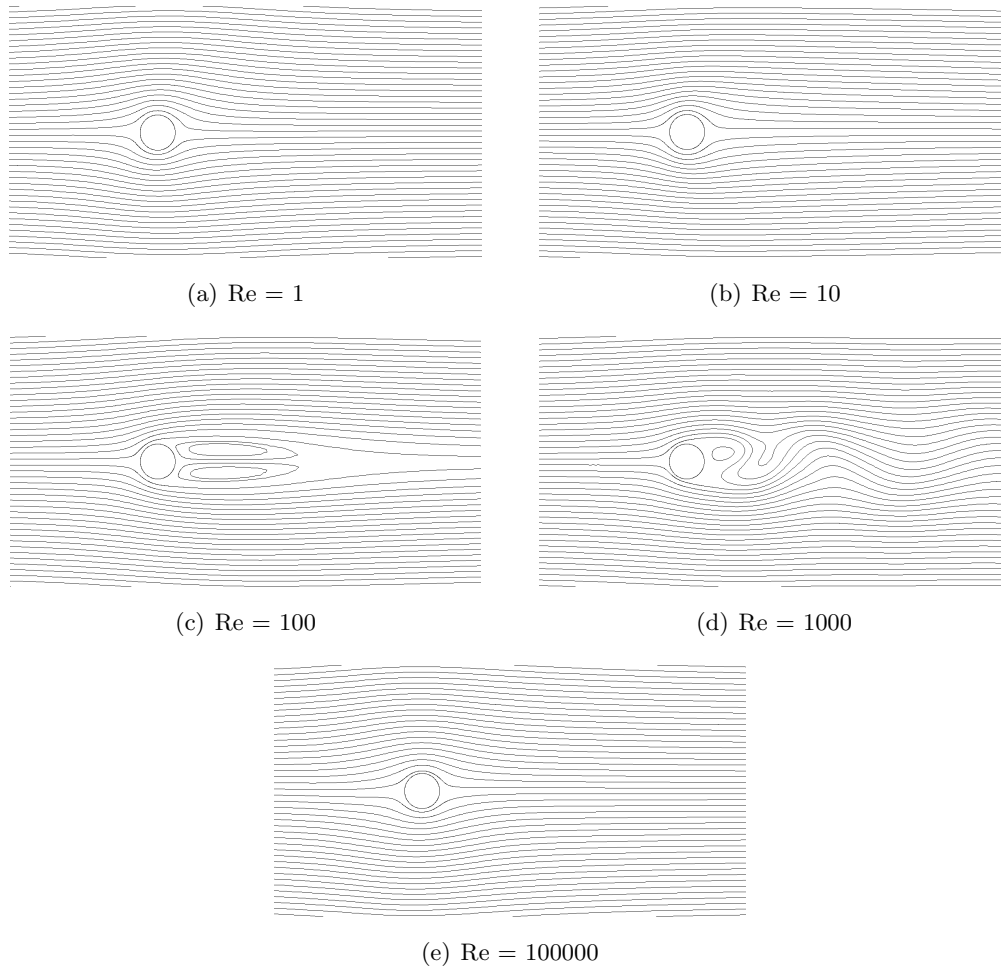


**Figuur 6.9:** Wrijvingsfactor bij stroming van rond een cilinder

Bij hogere Reynoldsgetallen zien we dat er een zog met circulatie stroming achter de cilinder ontstaat (Figuur 6.10(c)). De wrijvingscoëfficiënt daalt ook niet meer zo sterk als verwacht onder invloed van de dalende viskeuze krachten. Dit verschijnsel wordt *afscheiding* of *loshechting* genoemd. Bij gemiddeld grote Reynolds getallen zal het gedeelte waarin afscheiding optreedt stabiel zijn. Bij hogere Reynolds getallen zal de stroming beurtelings langs de ene en de andere zijde loshechten waardoor er wervelingen ontstaan die zich in de stroming voortplanten (Figuur 6.10(d)). Deze periodische loshechting brengt een periodische kracht loodrecht op de gemiddelde stroomrichting met zich mee. De frequentie van het loshechten kan gekarakteriseerd worden door het Strouhal getal ( $St = fD/v$ ) dat voor de stroming rond een cilinder ongeveer 0.2 is.

Bij nog hogere waarden van het Reynolds getal zal de afgescheiden zone achter de cilinder terug verkleinen terwijl ook de wrijvingscoëfficiënt terug daalt (Figuur 6.10(e)).

Om deze waarnemingen te verklaren bekijken we ook de stroming bij de afwezigheid van viskeuze krachten (potentiaalstroming). In deze situatie ontstaat er een hoge druk zone voor de cilinder met een stagnatiepunt waar de stroming helemaal tot stilstand komt. Aan de zijkanten (op 90° en 270°) zal de snelheid van het fluïdum het grootst zijn. De druk is hier minimaal. Wanneer we verderop in de stroming kijken zal aan de achterzijde van de cilinder (180°) ook een stagnatiepunt zijn waar de snelheid 0 is en de druk maximaal. Er wordt met andere woorden energie omgezet van druk

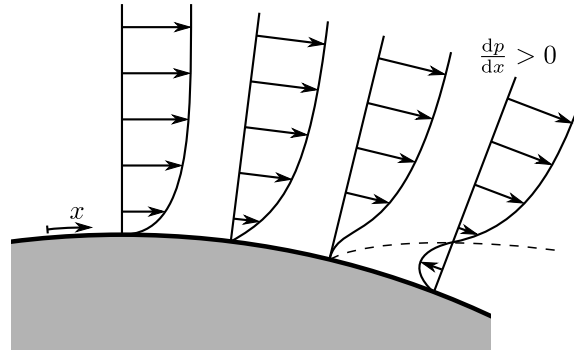


**Figuur 6.10:** Stroomlijnen bij stroming rond een cilinder voor verschillende Reynolds getallen

aan de voorzijde van de cilinder naar kinetische energie aan de randen en terug naar druk aan de achterzijde van de cilinder. Aan de achterzijde van de cilinder zal de druk stijgen, er heerst een positieve drukgradiënt.

Hetzelfde geldt voor het niet viskeuze gedeelte (het gedeelte buiten de grenslaag) van de bovenstaande stromingen. Uit de grenslaag theorie volgt dat er binnen de grenslaag geen drukvariaties met de hoogte zijn. Aan de achterzijde van de cilinder vinden we dus ook binnen de grenslaag een positieve drukgradiënt. Binnen de grenslaag wordt er echter ook energie gedissipieerd door de viskeuze wrijving. De stroming zal dus voor het normale stagnatiepunt ( $\theta = 180^\circ$ ) tot stilstand komen. Aangezien er buiten de grenslaag wel nog steeds een positieve drukgradiënt heerst zal de stroming binnen de grenslaag zelfs van richting veranderen en terugstromen over het oppervlak van de cilinder (6.11).

Bij hogere Reynoldsgetallen zal het gebied in afscheiding terug afnemen. Dit wordt veroorzaakt doordat de stroming turbulent wordt aan het oppervlak van de cilinder. Bij turbulente stroming is de convectieve impulsoverdracht veel groter (het snelheidsprofiel wordt vlakker) er wordt dus meer

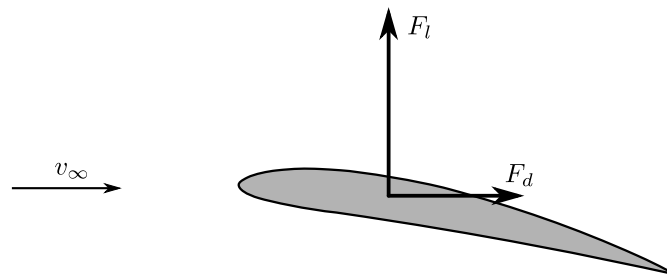


**Figuur 6.11:** Afscheiding van een viskeuze stroming onder invloed van een positieve drukgradiënt

energie van de vrije stroming naar de grenslaag overgedragen zodat de drukstijging gemakkelijker overwonnen kan worden. Aan de achterzijde van de cilinder ontstaat een turbulent zog. Bij nog hogere Reynoldsgetallen zal dit zog terug uitbreiden wanneer de volledige grenslaag turbulent wordt.

## 6.5 Stroming rond een vleugelprofiel

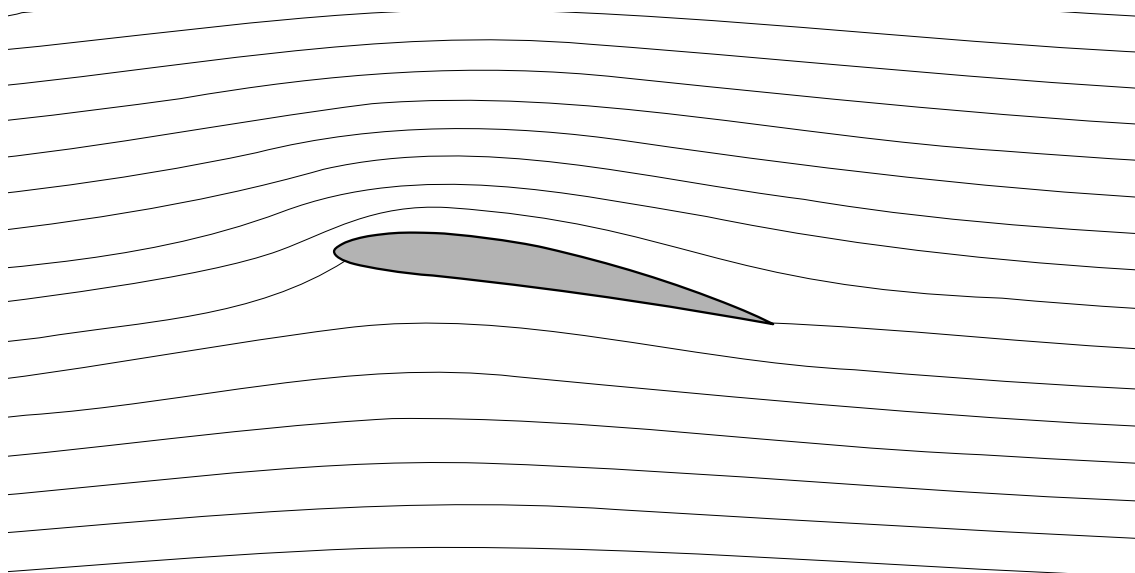
Een in de ingenieurstoepassingen veel voorkomend voorwerp is een vleugelprofiel. Onder de term vleugelprofiel vallen alle voorwerpen waarvan het doel is dat wanneer ze door een stroming bewegen ze een kracht loodrecht op de stroming ondervinden. Een vleugelprofiel zal dus niet enkel een *weerstandskracht* in de richting van de stroming ondervinden maar ook een kracht loodrecht op de stroming, de *liftkracht* (Figuur 6.12).



**Figuur 6.12:** Weerstandskracht en liftkracht op een vleugelprofiel

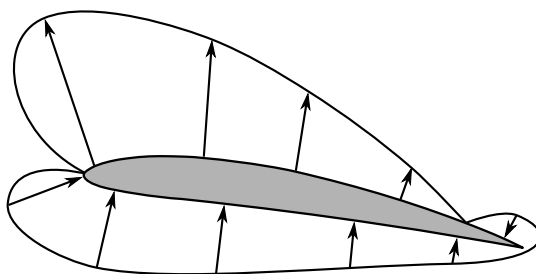
Wanneer we de stroomlijnen van een stationaire stroming rond een vleugelprofiel visualiseren (Figuur 6.13) Zien we dat de stroming door het profiel naar beneden afgebogen wordt. Volgens de wet van behoud van impuls (3.9) zal de stroming dus een verticale reactiekracht op het profiel uitoefenen. De liftkracht en een gedeelte van de weerstandskracht worden door de druk in de stroming uitgeoefend op het profiel. Wanneer we deze druk uitzetten op over profiel (Figuur 6.14) zien we dat aan de bovenzijde er een onderdruk heerst terwijl er aan de onderzijde overdruk heerst. Aan de wand van





**Figuur 6.13:** Stroomlijnen rond een vleugelprofiel

het vleugelprofiel zal ook een grenslaag ontstaan die naargelang het Reynoldsgetal van de stroming laminair of turbulent kan zijn.

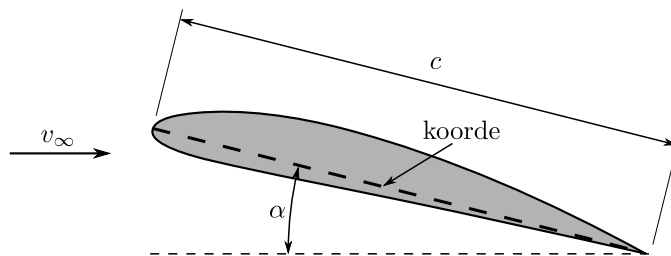


**Figuur 6.14:** Drukverdeling rond een vleugelprofiel

De grootte van de lift- en weerstandskracht die gegenereerd worden door het profiel zullen afhangen van de mate waarin de stroming afgebogen wordt. De afbuiging zal sterk afhangen van hoek die het profiel maakt met de vrije stroomrichting. De *koorde* van een profiel wordt gedefinieerd als de verbindingslijn tussen de aanvalsboord en de achterraand. We kunnen nu de aanvalshoek definiëren als de hoek  $\alpha$  tussen de koorde en de vrije stroomsnelheid (Figuur 6.15). We kunnen nu de lift en weerstandskracht uitzetten ten opzichte van de aanvalshoek. We kunnen deze krachten onafhankelijk van de snelheid weergeven als twee krachtcoëfficiënten, de liftcoëfficiënt en de weerstands- of dragcoëfficiënt

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 A} \quad (6.25)$$

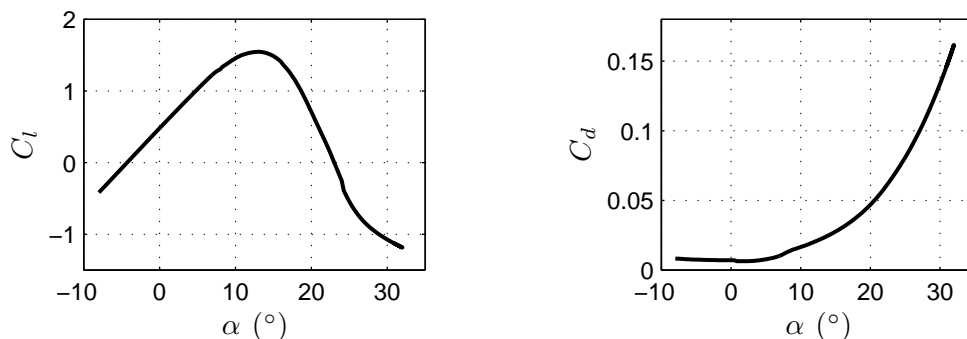
$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 A} \quad (6.26)$$

**Figuur 6.15:** Koorde en aanvalshoek bij een vleugelprofiel

Aangezien deze krachten sterk afhankelijk van de aanvalshoek zullen zijn moeten we de krachtcoëfficiënten onafhankelijk van de aanvalshoek definiëren. Dit kunnen we door het oppervlak  $A$  onafhankelijk van de aanvalshoek te kiezen als de koorde  $c$  maal de lengte  $L$  van het profiel:

$$A = cL \quad (6.27)$$

Wanneer we de lift- en weerstandscoefficiënten uitzetten ten opzichte van de aanvalshoek krijgen we het resultaat van Figuur 6.16.

**Figuur 6.16:** lift- en weerstandscoefficiënten van een NACA 4412 profiel bij variërende aanvalshoek

Bij kleine aanvalshoeken zien we dat de liftcoëfficiënt ongeveer lineair stijgt met de aanvalshoek, terwijl de weerstandscoefficiënt langzaam stijgt. Vanaf een gegeven aanvalshoek zal de liftkracht niet meer stijgen en op een gegeven moment terug beginnen dalen. Tegelijk stijgt de weerstandscoefficiënt sterk. Dit gebeurt bij een hoek die veel kleiner is dan we zouden verwachten door middel van behoud van impuls.

Aan de bovenzijde van het profiel heerst een onderdruk die net na de aanvalsboord het grootst is. Aan de achterzijde van het profiel is de druk ongeveer de omgevingsdruk. Er is dus een stijgende druk aan de bovenzijde van het profiel. In combinatie met de gevormde grenslaag zorgt dit ervoor dat de stroming zal loshechten van het profiel. Er ontstaat een zog op omgevingsdruk dat ervoor zorgt dat de lift vermindert en de weerstand stijgt.

De weerstandkracht die aangrijpt op het profiel kan opgesplitst worden in 2 componenten. De aanwezigheid van een grenslaag impliceert dat er schuifspanningen op het oppervlak zullen uitgeoefend worden. Deze resulteren in viskeuze weerstand (E: Viscous drag, skin friction). Deze vorm van weerstand is dominant bij voorwerpen die een aanzienlijke oppervlakte hebben maar waar deze oppervlakte voornamelijk in de richting van de stroming georiënteerd is of gestroomlijnde voorwerpen.

Wanneer we de drukverdeling rond het vleugelprofiel in Figuur 6.14 bestuderen valt op dat de druk aan de aanvalsboord van het profiel groter is dan aan de achterzijde. Deze variatie zal ook resulteren in een kracht in de richting van de stroming, een weerstandskracht dus. We noemen dit vormweerstand (E: form drag, pressure drag). Bij voorwerpen die niet gestroomlijnd zijn of stompe voorwerpen zal deze vorm van weerstandskracht domineren.

We zien dus dat bij vleugelprofielen beide vormen van weerstandskracht terugkomen. Bij kleine aanvalshoeken is het vleugelprofiel een zeer gestroomlijnd voorwerp en zal de vormweerstand zeer klein zijn. De viskeuze weerstand blijft echter aanwezig. Bij grotere aanvalshoeken zal het vleugelprofiel zich meer en meer gedragen als een stomp voorwerp en wordt de vormweerstand veel belangrijker dan de viskeuze weerstand. In het diagram voor de weerstandscoefficiënt van Figuur 6.16 is dit duidelijk terug te vinden. Bij kleine aanvalshoeken blijft de weerstandscoefficiënt quasi constant, bij grotere hoeken stijgt deze zeer snel.

Ook bij andere voorwerpen dan vleugelprofielen is de weerstandskracht steeds op te splitsen in een viskeus deel en een vorm component.

Uit de gelijkvormigheidstheorie weten we verder dat de krachten ook afhankelijk zullen zijn van het Reynolds getal:

$$C_d = C_d(\text{Re}) \quad (6.28)$$

$$C_l = C_l(\text{Re}) \quad (6.29)$$

Deze effecten komen echter pas tot uiting bij verandering van het Reynoldsgetal over meerdere grootte ordes en hoeven bij de meeste toepassingen niet in rekening worden gebracht.



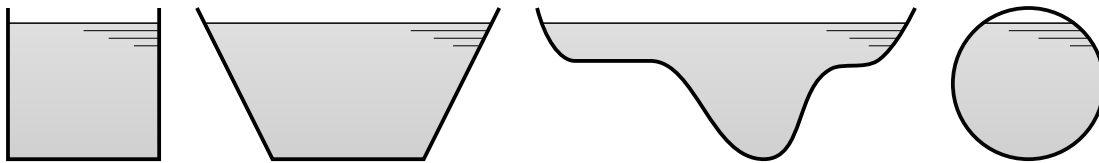
## Hoofdstuk 7

# Open-kanaalstroming

### 7.1 Inleiding

Veel van de stromingen die we in het dagelijks leven tegenkomen hebben een vrij oppervlak. Hiermee wordt bedoeld dat een deel van het vloeistof oppervlak grenst aan een ander fluïdum. Vaak is dit ander fluïdum de lucht in de atmosfeer. Er wordt gesproken over vrij oppervlak stroming (E: free surface flow) aangezien het oppervlak van de vloeistof vrij is om te vervormen.

Een interessante subsectie van de vrije oppervlakte stromingen is de kanaal stroming. Hier stroomt een vloeistof in een kanaal waarvan één dimensie veel groter is dan de andere 2 en waar een vrij oppervlak ontstaat. Denk maar aan de stroming van beken en rivieren, kanalen (vandaar de naam) of zelfs leidingen die niet volledig gevuld zijn (Figuur 7.1).



**Figuur 7.1:** Voorbeelden van doorsnedes van open kanalen

De beweging van deze stromingen wordt voornamelijk veroorzaakt door de zwaartekracht. In de volgende secties zullen we enkele basisbegrippen noodzakelijk voor de analyse van de stroming in open kanalen afleiden of definiëren.

### 7.2 Oppervlaktegolven

Beschouw een kanaal met breedte  $b$  waarin een golf met een kleine uitwijking  $\Delta y$  ten opzichte van de diepte van het kanaal  $y$  zich voortplant. De golf beweegt met een nog onbekende snelheid  $c$ .

Deze stroming kunnen we als stationair beschouwen indien we een controlevolume kiezen dat met de golf mee beweegt zoals in 7.2. We kiezen het controlevolume zo dat de ene zijde overeenkomt met de top van de golf en de andere zijde met de ongestoorde vloeistof. Door de beweging van



**Figuur 7.2:** Stationair controlevolume dat meebeweegt met een golf met een kleine uitwijking

het controlevolume is het alsof er aan de linkerkzijde een gemiddelde stroomsnelheid, gelijk aan de golfsnelheid  $c$  heerst. Aangezien aan de rechterzijde de hoogte lager is zal hier de gemiddelde snelheid groter zijn  $c + \Delta v$ . Schrijven we nu de vergelijking van behoud van massa uit:

$$0 = (c + \Delta v)by - cb(y + \Delta y) \quad (7.1)$$

Hieruit kunnen we de golfsnelheid bepalen als:

$$c = y \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (7.2)$$

We kunnen ook behoud van impuls uitschrijven in de voortplantingsrichting van de golf. De enige krachten die op het controlevolume inwerken zijn de drukkrachten aan de linker en rechterzijde:

$$\frac{1}{2}\rho g(y + \Delta y)^2b - \frac{1}{2}\rho g y^2b = \rho b(y + \Delta y)c(c + \Delta v - c) \quad (7.3)$$

Na uitwerking en deling door  $\rho b \Delta y^2$  en herschikking wordt dit:

$$g \left( \frac{y}{\Delta y} + \frac{1}{2} \right) = c \left( \frac{y}{\Delta y} + 1 \right) \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (7.4)$$

Hieruit kunnen we de verhouding van snelheidsverandering ten opzichte van de hoogteverandering bepalen:

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{g \frac{y}{\Delta y} + \frac{1}{2}}{c \frac{y}{\Delta y} + 1} \quad (7.5)$$

Als nu  $\Delta y$  veel kleiner is dan  $y$  dan is de verhouding  $\frac{\frac{y}{\Delta y} + \frac{1}{2}}{\frac{y}{\Delta y} + 1}$  ongeveer gelijk aan 1. Dus:

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{g}{c} \quad (7.6)$$

Indien we deze uitdrukking invullen in (7.2) krijgen we:

$$c = \sqrt{gy} \quad (7.7)$$

De golfsnelheid van een kleine golf is dus enkel afhankelijk van de diepte van het kanaal en de valversnelling en niet van de dichtheid van het fluïdum.

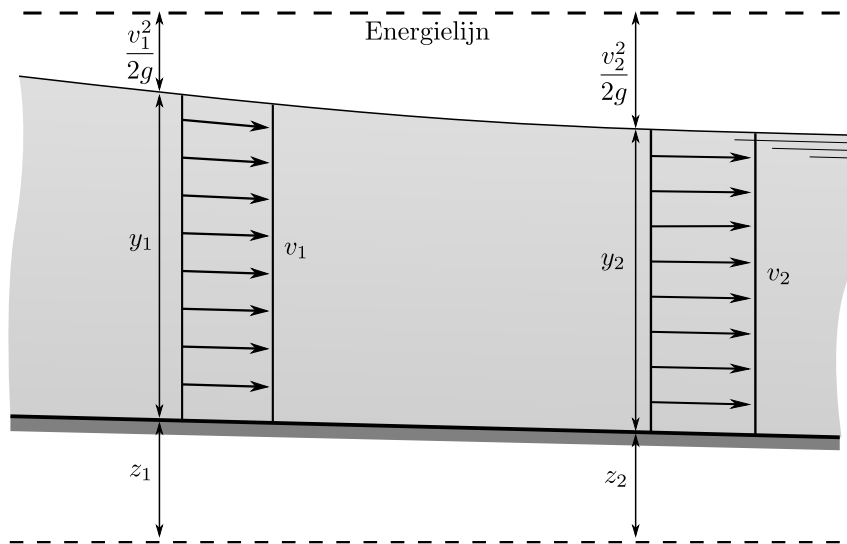
De uitwerking hierboven is enkel geldig voor een alleenstaande golf met een zeer kleine uitwijking. Wanneer verschillende golven met een bijvoorbeeld een sinusoidaal profiel na elkaar beschouwd worden wordt de uitwerking veel complexer. De golfsnelheid wordt dan niet alleen afhankelijk van de diepte maar ook van de golflengte  $\lambda$  (de afstand tussen 2 golf toppen) [10]. Hieruit volgt dat bovenstaande uitdrukking (7.7) voor de golfsnelheid enkel geldig is wanneer de golflengte veel groter is dan de diepte ( $\frac{\lambda}{y} > 20$ , dus een enkele golf). Wanneer de golflengte in dezelfde grootteorde of kleiner is dan de diepte  $\frac{\lambda}{y} < 3$  wordt de golfsnelheid benaderd door:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (7.8)$$

Met geavanceerde uitdrukkingen van de golfsnelheid in functie van de diepte en golflengte is het mogelijk met behulp van Fourierreeksen zeer ingewikkelde golfprofielen te beschrijven.

### 7.3 Energetische beschouwingen bij open kanaal stroming

Beschouw een stationaire uniforme stroming in een eenvoudig rechthoekig kanaal met een bepaalde helling (Figuur 7.3). Noem  $z$  de hoogte tot de bodem van het kanaal ten opzichte van een bepaalde referentie en  $y$  de verticale afstand van het vloeistof oppervlak tot de bodem. Indien de stroming



**Figuur 7.3:** Stationaire uniforme stroming in een open kanaal met energielijnen

niet-viskeus en niet-samendrukbaar is, kunnen we tussen 2 punten op de bodem van het kanaal de vergelijking van Bernoulli uitschrijven:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \quad (7.9)$$

De druk in het kanaal zal voornamelijk veroorzaakt worden door hydrostatische druk. De druk onderaan het kanaal kunnen we dus schrijven als  $p = \rho g y$ . Dus:

$$y_1 + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \quad (7.10)$$

In de bovenstaande vergelijking kunnen de eerste twee termen in het linker en rechter lid op een gegeven positie in het kanaal veranderen. De hoogte van het kanaal kan dit uiteraard niet. Het is nu interessant om de eerste twee termen te bundelen. Deze term wordt de *specifieke energie* genoemd. De vergelijking van Bernoulli voor een open kanaal wordt dan:

$$E_1 + z_1 = E_2 + z_2 \quad (7.11)$$

Met de specifieke energie  $E$  gedefinieerd als:

$$E = y + \frac{v^2}{2g} \quad (7.12)$$

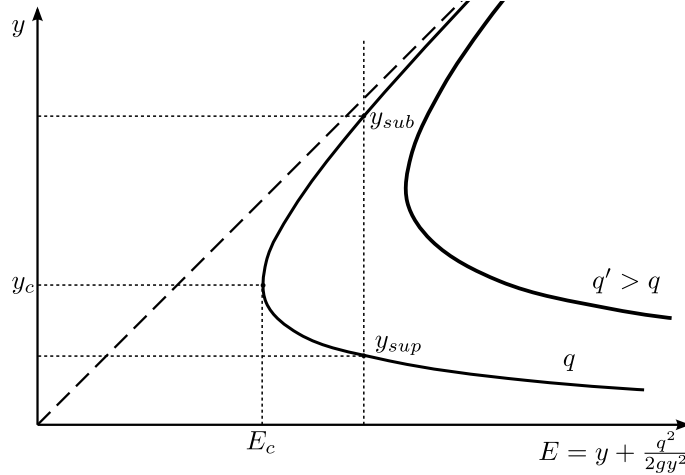
Wanneer er geen viskeuze verliezen zijn zal dus de som van de specifieke energie en de hoogte van de bodem van het kanaal constant blijven.

De specifieke energie is enkel afhankelijk van de diepte van de stroming en de stroomsnelheid. Voor een kanaal met gegeven afmetingen zijn deze echter niet onafhankelijk. Aangezien het debiet constant is in het kanaal zal indien de snelheid stijgt, de hoogte dalen. De breedte van het kanaal  $b$  speelt hier echter ook een rol. We kunnen dus de specifieke energie herschrijven in functie van het debiet per eenheid van breedte van het kanaal  $q = \dot{V}/b$ :

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (7.13)$$

Voor een kanaal met constante breedte zal  $q$  constant blijven. We kunnen dus een diagram maken van de diepte in functie van de specifieke energie, het specifieke energie diagram (Figuur 7.4). Op dit diagram zijn een aantal interessante punten aan te duiden. Vooreerst zien we dat bij een bepaald debiet niet alle waarden van specifieke energie mogelijk zijn. De specifieke energie heeft bij een bepaalde vloeistof hoogte een minimum. Deze diepte noemen we de kritische diepte  $y_c$ , de stroming bij de *kritische diepte* noemen we *kritische stroming*. We zien ook dat het diagram 2 asymptoten heeft. Voor grote dieptes wordt de specifieke energie gelijk aan de diepte, de snelheid streeft dus naar 0. Voor kleine dieptes evolueert de specifieke energie zelf naar 0. Voor waarden hoger dan de minimale specifieke energie zien we ook dat er telkens 2 mogelijke vloeistof hoogtes zijn (als je de vergelijking bekijkt zijn het er 3 maar één hiervan is steeds negatief en dus niet fysisch).





**Figuur 7.4:** Het specifieke energie diagram voor 2 verschillende debieten

### 7.3.1 Kritische stroming

Laten we nu de kritische diepte zoeken. Het minimum van de specifieke energie kunnen we vinden door zijn afgeleide naar de diepte gelijk aan 0 te stellen en dit op te lossen naar de diepte  $y$ .

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0 \quad (7.14)$$

Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen naar  $y$ :

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (7.15)$$

De snelheid bij kritische stroming  $v_c$  kunnen we nu bepalen uit de uitdrukking voor het debiet  $q = v_c y_c$ .

$$y_c^3 = \frac{v_c^2 y_c^2}{g} \quad (7.16)$$

Dus wordt de kritische snelheid:

$$v_c = \sqrt{gy_c} \quad (7.17)$$

Deze uitdrukking zijn we al eens tegengekomen, het is namelijk de voortplantingssnelheid van een oppervlakte golf met een grote golflengte (7.7). We kunnen dus zeggen dat wanneer de stroomsnelheid  $v$  gelijk is aan de golfsnelheid  $c$  we spreken over kritische stroming. Wanneer de stroomsnelheid lager is dan de golfsnelheid spreken we over *sub-kritische stroming*. De diepte is dan groter dan de kritische diepte. Wanneer de stroomsnelheid hoger is dan de golfsnelheid spreken we over *super-kritische stroming*. De diepte is dan kleiner dan de kritische diepte.

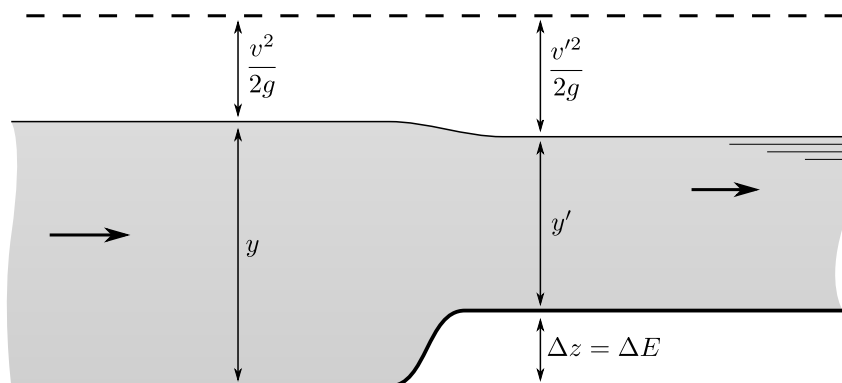
We kunnen nu ook een dimensieloos getal vormen door de de snelheid te delen door de kritische snelheid  $\frac{v}{v_c}$ . Ook deze uitdrukking zijn we reeds eerder tegengekomen, het is namelijk het Froude getal (5.15):

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gy}} \quad (7.18)$$

De betekenis ervan wordt nu ook duidelijker. Het Froude getal is de verhouding van de traagheidskrachten ten opzichte van de zwaartekracht, of de snelheid, die gerelateerd kan worden aan de traagheidskracht, ten opzichte van de golfsnelheid, die gerelateerd kan worden aan de zwaartekracht. Bij een Froude getal van 1 hebben we kritische stroming en zullen de traagheidskrachten en zwaartekracht elkaar in evenwicht houden. Bij een Froude getal groter dan 1 spreken we over super-kritische stroming en overheersen de traagheidskrachten. Bij een Froude getal kleiner dan 1 spreken we over sub-kritische stroming en overheerst de zwaartekracht.

## 7.4 Veranderingen in diepte bij verschillende stromingstypes

Een interessante vraag is hoe de hoogte van het vloeistofoppervlak in een kanaal zal reageren op een verandering van hoogte is het kanaal. Beschouw hiervoor een eenvoudig kanaal met stationaire stroming waarvan de bodem een plotse stijging ondervindt (Figuur 7.5). We kunnen deze situatie



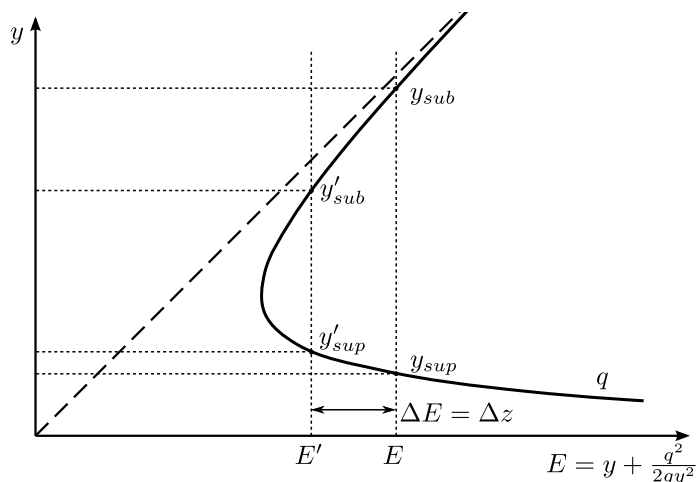
**Figuur 7.5:** Een plotse stijging van de bodem in een subkritische stroming veroorzaakt een daling van de diepte.

analyseren met behulp van het specifieke energie diagram (Figuur 7.6).

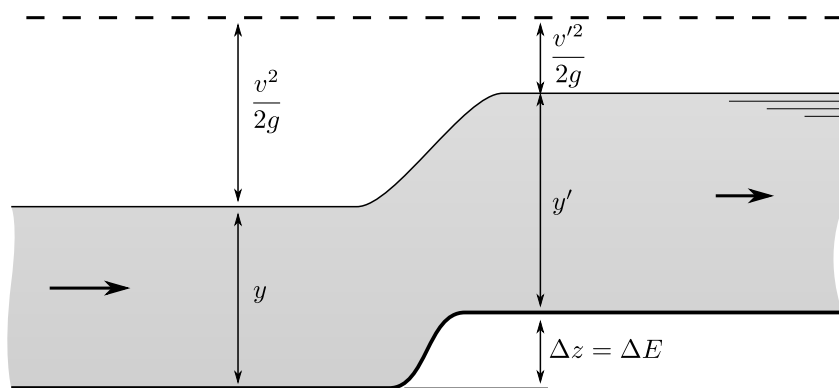
Het debiet door het kanaal voor en na de verhoging zal niet veranderen,  $q$  is dus constant en we kunnen dus enkel op één curve bewegen. We kunnen veronderstellen dat de hoogte verandering bijna geen energieverliezen met zich meebrengt, de totale energie zal dus constant blijven, aangezien de hoogte  $z$  stijgt moet dan de specifieke energie  $E$  dalen. We bewegen ons dus naar links in het specifieke energie diagram van  $E$  naar  $E'$

Indien de stroming sub-kritisch is, bevinden we ons in het bovenste been van het specifieke energie diagram. Een stijging van de bodem zal dus leiden tot een daling van de vloeistof hoogte. Dit gaat steeds gepaard met een stijging van de snelheid.

Indien de stroming superkritisch is, bevinden we ons in het onderste been van het specifieke energie diagram. Een stijging van de bodem zal nu een stijging van de diepte en een daling van de snelheid veroorzaken (Figuur 7.7).



**Figuur 7.6:** Specifieke energie diagram voor een plotse stijging van de hoogte van de bodem van een kanaal.



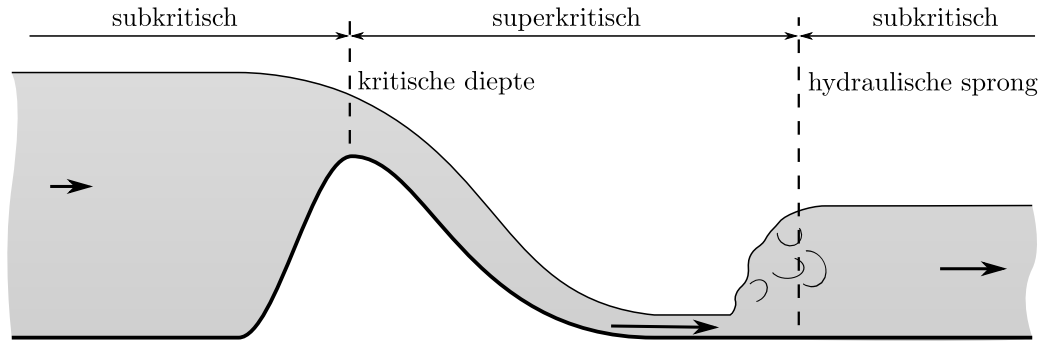
**Figuur 7.7:** Een plotse stijging van de bodem in een superkritische stroming veroorzaakt een stijging van de diepte.

### 7.4.1 Verandering van stromingstype

Uit de voorgaande beschouwingen kunnen we afleiden dat voor een subkritische stroming een verhoging van de bodem tot een bepaalde hoogte ervoor zal zorgen dat de stroming kritisch wordt. Indien na de verhoging de bodem terug zal dalen ontstaat er een superkritische stroming (Figuur 7.8). De overgang van subkritische naar superkritische stroming gebeurt vrijwel zonder verliezen.

De overgang van superkritische stroming naar subkritische stroming verloopt echter anders. Wanneer door bijvoorbeeld een obstructie stroomafwaarts van een superkritische stroming de stroming terug subkritisch wordt ontstaat er *hydraulische sprong* (E: Hydraulic jump). De diepte van de stroming zal hier plots stijgen en golven en wervelingen zullen terugklappen op de aankomende stroming (Figuur 7.8).

In een hydraulische sprong zal door de sterke werveling veel energie gedissipeerd worden. Dit kan nuttig zijn wanneer bijvoorbeeld een stroming te veel energie bevat. Zou men een superkritische



**Figuur 7.8:** De overgang van subkritische naar superkritische stroming gebeurt zonder veel energieverliezen terwijl de overgang van superkritische naar subkritische stroming gepaard gaat met een hydraulische sprong met grote energieverliezen.

stroming over een zacht materiaal laten stromen dan zal door de hoge snelheid dit materiaal snel weg eroderen. Indien men ervoor kan zorgen dat er een hydraulische sprong optreed voor het zachte materiaal zal een groot deel van de energie door viskeuze krachten gedissipeerd worden terwijl de snelheid van de stroming zal dalen en het gevaar voor erosie afneemt.

In [11] worden bovenstaande concepten evenals meer geavanceerde onderwerpen zeer duidelijk beschreven. Geïnteresseerde lezers worden dan ook hier naar verwezen.

## Hoofdstuk 8

# Inwendige stroming

### 8.1 Inleiding

In ingenieurstoepassingen komt het vaak voor dat een fluïdum van één plaats naar een andere getransporteerd moet worden. Denk aan de waterleiding die drinkwater van een reservoir tot bij je thuis brengt of de brandstofleiding in een wagen die de brandstof van de tank naar de brandstof injector brengt. De aangewezen manier om dit te doen is door een leiding die volledig met het fluïdum gevuld is. Aangezien het fluïdum in de leiding volledig begrensd is door de leiding spreken we van inwendige stroming. De meest voorkomende leidingen zijn cilindrisch omdat een cirkelvormige sectie geschikt is om hoge drukken te weerstaan. Wanneer het gemiddelde drukniveau in de leiding niet veel groter is dan de atmosferedruk kan uit praktische overwegingen ook voor andere doorsnedes gekozen worden. Dit wordt bijvoorbeeld gedaan bij luchtkanalen voor gebouwventilatie die vaak een rechthoekige doorsnede hebben die gemakkelijker in het gebouw te integreren is.

Beschouw nu een vloeistof die een cilindrische leiding instroomt uit een groot reservoir. Wanneer we zeer sterk inzoomen op de grens tussen reservoir en leiding, kunnen we dit benaderen als een vlakke plaat. In het reservoir zal de snelheid quasi uniform zijn. Er zal dus zoals besproken in het hoofdstuk 6 een grenslaag ontstaan. Zoals besproken in Sectie 6.3.2 zal de wrijving uitgeoefend door schuifspanningen aan de rand van de leiding gepaard gaan met een daling van de impuls en het verdikken van de grenslaag. Men noemt dit *ontwikkende stroming*.

Een belangrijk verschil met uitwendige stroming is echter dat de grenslaag zich over de volledige omtrek van de leiding opbouwt. Op een gegeven moment zullen de grenslagen dus samenkomen in het centrum van de leiding (Figuur 8.1). Verdere opbouw van de grenslaag is dan niet meer mogelijk. Het verder afnemen van de impuls is dus ook niet meer mogelijk. De wrijvingskracht uitgeoefend aan de wanden zal dus door een ander fenomeen opgevangen moeten worden, een drukdaling. Dit type inwendige stroming wordt *volledig ontwikkelde stroming* genoemd.



**Figuur 8.1:** Opbouw van de grenslaag over de volledige omtrek van een leiding, ontwikkelende stroming

## 8.2 Dimensie analyse van de drukval in een cilindrische leiding

Het is interessant om voor het bepalen van de drukval voor specifieke situaties een dimensie analyse uit te voeren. Hiermee kunnen we onze resultaten controleren en in een toepasselijke vorm schrijven.

Uit experimenten, of fysische inzicht kunnen we beredeneren dat de drukval in een cilindrische leiding afhankelijk zal zijn van de lengte van de leiding, de diameter, de gemiddelde snelheid van de stroming, de viscositeit en de dichtheid. dit kunnen we schrijven als:

$$\Delta p = \phi(L, D, v, \mu, \rho) \quad (8.1)$$

Volgens het Buckingham-pi theorema kunnen we dus de dimensieloze drukval schrijven als functie van 2 dimensieloze parameters ( $n = 5, k = 3$ ). Deze parameters kunnen we eenvoudig vinden als de relatieve lengte ( $L/D$ ) en het Reynoldsgetal ( $\rho v D / \mu = v D / \nu$ ). Om de druk dimensieloos te maken kunnen we deze delen door de snelheidsdruk ( $\frac{1}{2} \rho v^2$ ):

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2} = f(L/D, Re) \quad (8.2)$$

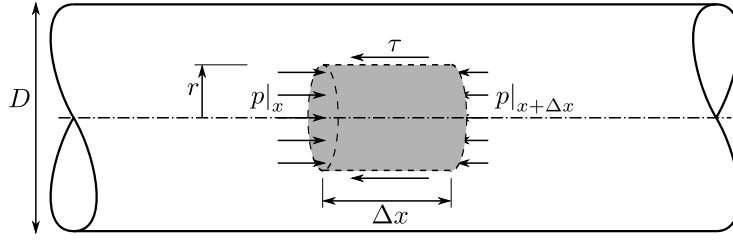
Uit logische overwegingen moet het drukverlies evenredig zijn met de lengte van de buis:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{L}{D} f(Re) \quad (8.3)$$

Het dimensieloze drukverschil zal dus gelijk zijn aan de relatieve lengte van de buis vermenigvuldigd met een nog onbekende functie van het Reynoldsgetal. Deze onbekende functie noemen we de wrijvingsfactor. We zullen nu trachten het drukverschil te berekenen en in deze vorm te schrijven.

## 8.3 Laminaire stroming in een cilindrische leiding

Beschouw een stationaire, laminaire, volledig ontwikkelde stroming in een cilindrische buis (Figuur 8.2). Om het snelheidsprofiel van de stroming uit te rekenen beschouwen we een cilindrisch controlevolume en passen we hier de wet van behoud van impuls (3.9) op toe in de stroomrichting.



**Figuur 8.2:** Laminaire stroming in een cilindrische buis

Aangezien de stroming stationair is zal de verandering van impuls binnen het controlevolume 0 zijn. Aangezien de stroming laminair is, is het controlevolume een deel van een stroombuis. De netto uitstroom van impuls uit het controlevolume is dus ook 0. Vergelijking 3.9 wordt dan:

$$F_x = 0 \quad (8.4)$$

De inwerkende krachten bestaan in dit geval uit drukkrachten aan de linker en rechterzijde van het controlevolume en een schuifspanning aan de omtrek van het controlevolume. Dit geeft:

$$p\pi r^2|_x - p\pi r^2|_{x+\Delta x} - \tau 2\pi r \Delta x = 0 \quad (8.5)$$

Na deling door  $2\pi r \Delta x$  en de limiet te nemen voor  $\Delta x$  gaande naar 0 bekomen we een uitdrukking voor de schuifspanning:

$$-\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} r = \tau \quad (8.6)$$

Indien we een Newtoniaanse vloeistof veronderstellen kunnen we de schuifspanning schrijven als:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \quad (8.7)$$

Het min-teken wordt hier ingevoerd aangezien de afstand tot de wand afneemt met stijgende  $r$ . Dit resultaat invullen in (8.6) geeft:

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} r = \mu \frac{dv}{dr} \quad (8.8)$$

Of na omvorming:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r \quad (8.9)$$

Deze vergelijking kunnen we integreren over de straal. We bekomen dan een uitdrukking voor de snelheid.

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C \quad (8.10)$$

De integratie constante  $C$  halen we uit de no-slip randvoorwaarde:

$$v|_{r=R} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 + C = 0 \quad (8.11)$$

Dus:

$$C = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \quad (8.12)$$

De het snelheidsprofiel van een stationaire, laminaire, Newtoniaanse vloeistof in een cilindrische buis wordt dan:

$$v = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (8.13)$$

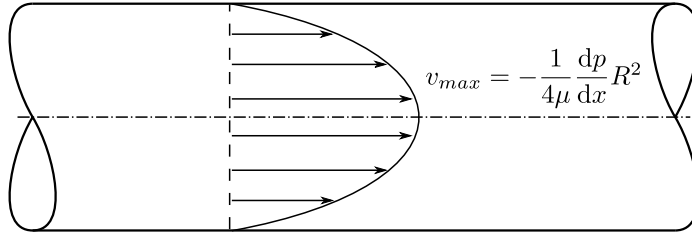
We vinden een kwadratisch snelheidsprofiel terug met als maximale snelheid:

$$v_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \quad (8.14)$$

We kunnen het snelheidsprofiel dus dimensieloos schrijven als:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (8.15)$$

Een stroming met dit soort snelheidsprofiel wordt Poiseuille stroming genoemd naar de Franse fysicus Jean Louis Marie Poiseuille en is weergegeven in Figuur 8.3:



**Figuur 8.3:** Snelheidsprofiel bij laminaire stroming in een cilindrische buis

Voor het maken van berekeningen is het interessant om de drukverandering te kunnen schrijven in functie van de gemiddelde snelheid in de buis. We kunnen de gemiddelde snelheid in de buis berekenen door het debiet te delen door de oppervlakte. Het debiet in de buis kan berekend worden als de integraal van de snelheid over de volledige oppervlakte:

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^R v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = v_{\max} \frac{\pi R^2}{2} \quad (8.16)$$

De gemiddelde snelheid wordt dan:

$$v_{\text{gem}} = \frac{v_{\max}}{2} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \quad (8.17)$$

Voor ingenieurs is het handiger om met de diameter  $D$  van de buis te werken in plaats van met de straal  $R$ . We kunnen het drukverlies over een horizontale leiding met lengte  $L$  dan uitdrukken als:

$$\Delta p = -32\mu \frac{v_{\text{gem}} L}{D^2} \quad (8.18)$$

Uit de dimensie analyse weten we dat de drukval afhankelijk moet zijn van  $\frac{1}{2}\rho v^2$  aangezien deze samen de dimensieloze drukcoëfficiënt vormen. Indien we het vorige resultaat herschrijven bekomen we inderdaad:

$$\Delta p = 64 \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\mu}{\rho v D} \frac{L}{D} = \frac{64}{Re} \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} \quad (8.19)$$



We hebben nu een vergelijking om de drukval over een cilindrische leiding voor laminaire, niet-samendrukbare stroming te berekenen. Deze vergelijking staat bekend als de wet van Hagen-Poiseuille. Hierin is de drukcoëfficiënt afhankelijk van twee dimensieloze combinaties,  $64/Re$  en  $L/D$ , zoals voorspeld in sectie 8.2. Voor laminaire stroming is de wrijvingsfactor  $f$  dus gelijk aan  $64/Re$ .

## 8.4 Turbulente stroming

Wanneer de diameter van de buis of de snelheid in de buis groot genoeg is zal de stroming in de buis niet meer laminair zijn. Er zijn fluctuaties in de snelheid die ervoor zorgen dat het snelheidsprofiel niet meer stationair is. Dit gedrag werd experimenteel waargenomen door Osbourne Reynolds. Hij zag dat wanneer de dimensieloze combinatie  $\frac{vD}{\nu}$  laag genoeg bleef, de stroming in een buis laminair was. De dimensieloze combinatie is dan ook naar hem vernoemd en kennen we als het Reynoldsgetal.

In cilindrische buizen blijft de stroming laminair tot een Reynoldsgetal van ongeveer 2300. Bij een Reynoldsgetal groter dan 10000 zal de stroming daarentegen meestal turbulent zijn. Bij Reynoldsgetalen tussen 2300 en 10000 is het zowel mogelijk dat de stroming laminair of turbulent is. Deze zone noemt met het overgangsgebied.

Wanneer we dit vergelijken met de waarnemingen die we gedaan hebben bij de vlakke wand in Sectie 6.3, zien we een gelijkaardig gedrag. In een buis zal er een axis-symmetrische grenslaag ontstaan die in het midden van de buis samenkomt. Wanneer de diameter van de buis dus klein genoeg blijft (kleiner dan de kritische grenslaag dikte) zal de stroming laminair blijven. Wanneer de diameter van de buis groter wordt, wordt de stroming turbulent. Ook de manier waarop de weerstandskracht uitgeoefend wordt verloopt gelijkaardig. In het centrale turbulente gedeelte is er impulsoverdracht (of wrijving) door de onregelmatigheid van de snelheid (turbulente schuifspanning). In de laminaire sublaag dicht bij de wand is er wrijving door de viscositeit (laminaire schuifspanning). Er ontstaat dus een centraal vlakker gemiddeld snelheidsprofiel met een zeer plots overgang aan de wanden van de buis (Figuur 8.4). Deze grote snelheidsgradiënt brengt grote schuifspanningen en dus een grotere drukval met zich mee.

In de literatuur zijn verschillende experimentele correlaties voor het gemiddelde snelheidsprofiel van een turbulente stroming terug te vinden. Een correlatie met aanvaardbare nauwkeurigheid en eenvoudig gebruik is het *power-law* snelheidsprofiel [12]:

$$\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad (8.20)$$

Waarbij  $n$  een functie is van het Reynoldsgetal van de stroming. Een waarde van  $n = 7$  wordt vaak gebruikt aangezien dit steeds een redelijke benadering geeft. Hoewel de waarde van de snelheid goed benaderd wordt, wordt de snelheidsgradiënt in de buurt van de wand en op de aslijn niet goed weergegeven. Aan de wand gaat de gradiënt naar oneindig terwijl deze op de aslijn niet 0 wordt.

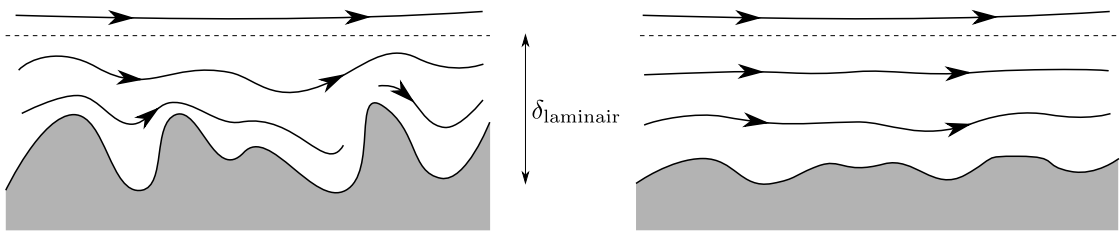


**Figuur 8.4:** Snelheidsprofiel bij turbulente stroming in een cilindrische buis

Bij metingen van het drukverlies bij turbulente stroming door een horizontale buis blijkt dat deze afhankelijk wordt van het type buis dat gebruikt werd. Meer bepaald de ruwheid van de buis zal een rol te spelen. We zullen dus (8.3) moeten aanpassen. Dit kan eenvoudig door de relatieve ruwheid te definiëren als de ruwheid gedeeld door de diameter. De dimensieloze relatie wordt dan:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{L}{D} f(Re, \varepsilon/D) \quad (8.21)$$

De wrijvingsfactor wordt dus afhankelijk van het Reynoldsgetal en de relatieve ruwheid (De gebruikte waarde van ruwheid komt overeen met de diameter van de ruwheidskorrels). De verschillende afhankelijkheid van de drukval van de relatieve ruwheid bij laminaire en turbulente stroming kunnen we verklaren door naar de laminaire sublaag aan de wand van de buis te kijken (Figuur 8.5). Wanneer de wand ruw is zullen de ruwheidspieken tot ver in de laminaire sublaag doordringen. Aangezien bij turbulente stroming grootste deel van de wrijving in deze laminaire sublaag wordt gegenereerd zal de ruwheid een invloed hebben op de weerstand. Bij laminaire stroming strekt de laminaire laag zich uit over heel de buis. De ruwheid dringt dus slechts in een zeer klein deel hiervan door en zal dus bijna geen invloed hebben op de totale weerstand.



**Figuur 8.5:** De invloed van de relatieve ruwheid op de laminaire sublaag

Waarden van karakteristieke ruwheden voor verschillende materialen zijn weergegeven in Tabel 8.1. Het drukverlies wordt dus:

$$\Delta p = f \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} \quad (8.22)$$

Na vele experimenten door onder andere Johann Nikuradse [14] werd de relatie tussen de wrijvingsfactor, het Reynoldsgetal en de relatieve ruwheid vastgesteld. Deze relatie kan benaderd worden

Oppervlak	Ruwheid (mm)
Commercieel glad messing, lood, koper of kunststof	0.0015
Staal en smeedijzer	0.046
Gegalvaniseerd staal of ijzer	0.152
Gietijzer	0.259

**Tabel 8.1:** Karakteristieke ruwheidswaarden voor verschillende materialen (uit ASHRAE Handbook of Fundamentals [13])

door de formule van Colebrook [15]. Deze heeft een relatieve nauwkeurigheid van 5% voor gladde leidingen en 10% voor ruwe leidingen.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.72} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (8.23)$$

Dit is een impliciete formule die niet in gesloten vorm naar  $f$  kan worden opgelost. Ze kan wel iteratief worden opgelost. Om dit probleem te verhelpen wordt de wrijvingsfactor in grafische vorm weergegeven in het Moody diagram (Appendix B.1) genoemd naar Lewis F. Moody die het als eerste voorstelde in 1944 [16].

Wanneer we het diagram bestuderen zien we dat bij grote waarden van het Reynoldsgetal de wrijvingsfactor niet meer afhankelijk is van het Reynoldsgetal maar enkel nog van de relatieve ruwheid. In dit geval wordt de stroming volledig ruw genoemd.

#### 8.4.1 Stroming door niet cilindrische buizen

Bij volledig ontwikkelde stroming door volledig gevulde niet cilindrische buizen of kanalen kunnen gelijkaardige formules als hierboven toegepast worden op voorwaarde dat de diameter  $D$  van de buis wordt vervangen door de hydraulische diameter  $D_h$  gedefinieerd als:

$$D_h = \frac{4A}{P} \quad (8.24)$$

Met  $A$  de doorstroom sectie en  $P$  de bevochtigde omtrek van de sectie.



## Hoofdstuk 9

# Leidingstelsels

### 9.1 Inleiding

Ingenieurstoepassingen hebben vaak te maken met het transport van een fluïdum van één locatie naar een andere. Dit kan gebeuren in een leidingstelsel. In het voorgaande hoofdstuk hebben we reeds berekend welke drukverliezen veroorzaakt worden door de viskeuze spanningen in een horizontale leiding. Een praktisch leidingstelsel zal echter bestaan uit een aaneenschakeling van meerdere leidingen, bochten, veranderingen van diameter, kranen, aanzuigmonden, pompen,...

In dit hoofdstuk zullen we trachten enkele basis componenten van een leidingstelsel uit te lichten en te analyseren.

### 9.2 Ladingsverliezen

In het vorige hoofdstuk hebben we de drukverliezen van een viskeuze stroming in een leiding bepaald. Hierbij zijn we er telkens vanuit gegaan dat de viskeuze krachten in evenwicht waren met de drukkrachten. Het verschil in druk aan het begin en het einde van de leiding was met andere woorden de drijvende kracht van de stroming. Wanneer een leiding onder een helling staat zal de zwaartekracht echter ook een kracht uitoefenen op het fluïdum en dus een deel van de drijvende kracht vormen. We moeten het drukverlies uit het vorige hoofdstuk dus op een andere manier beschouwen. Dit kan door het te beschouwen als een energieverlies. Door de viscositeit zal een deel van de mechanische energie aanwezig in een stroming gedissipeerd worden. Het drukverlies uit het vorige hoofdstuk komt dus ook overeen met een energieverlies. Wanneer we de eenheden beschouwen zien we dat de eenheid [Pa] inderdaad overeenkomt met een hoeveelheid energie per volume [J/m<sup>3</sup>].

In sectie 4.4 hebben we de vergelijking van Bernoulli beschouwd als behoud van mechanische energie van een niet-viskeuze, stationaire stroming langs een stroomlijn. In een leiding zullen er steeds

stroomlijnen de leiding volgen. De precieze ligging van deze stroomlijnen in de leiding is niet belangrijk aangezien we in de gemiddelde grootheden overheen de leiding geïnteresseerd zijn. Bij viskeuze stromingen zal echter een deel van de mechanische energie verloren gaan. We kunnen (4.11) dus herformuleren voor een viskeuze stroming:

$$p_2 + \rho \frac{1}{2} v_2^2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho \frac{1}{2} v_1^2 + \rho g z_1 - \Delta E \quad (9.1)$$

Met  $\Delta E$  het energieverlies ten gevolge van de viskeuze dissipatie zoals berekend in het vorige hoofdstuk. Een vaak gebruikte voorstelling van deze vergelijking is de weergave als energiehoogtes. De vergelijking wordt dan:

$$\frac{p_2}{\rho g} + \rho \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_1}{\rho g} + \rho \frac{v_1^2}{2g} + z_1 - h_L \quad (9.2)$$

Hierin wordt  $h_L$  het *ladingsverlies* (E: head loss) genoemd. In woorden stelt de vergelijking dat de mechanische energie in punt 2 gelijk is aan de mechanische energie in punt 1 min het ladingsverlies. De uitdrukking voor dit ladingsverlies in eenvoudig af te leiden uit (8.22) door te delen door  $\rho g$ :

$$h_L = f \frac{v^2}{2g} \frac{L}{D} \quad (9.3)$$

In ingenieurstoepassingen zijn we vaak niet geïnteresseerd in de gemiddelde snelheid van de stroming in een leiding. We zijn geïnteresseerd in het debiet dat door deze leiding stroomt. Dit debiet kunnen we echter eenvoudig berekenen met behulp van de gemiddelde snelheid en de diameter als  $\dot{V} = v\pi D^2/4$ . We kunnen dus vergelijking (9.3) herschrijven als:

$$h_L = 8f \frac{\dot{V}^2}{g\pi^2} \frac{L}{D^5} \quad (9.4)$$

### 9.3 Lokale ladingsverliezen

Wanneer een fluïdum door een kraan stroomt zal er een bepaald ladingsverlies optreden ten gevolge van de stand van de kraan. Aangezien dit ladingsverlies, in tegenstelling tot het ladingsverlies in een leiding, aan één specifieke locatie kan toegewezen worden wordt er gesproken over lokale ladingsverliezen. Voor de meeste componenten is het moeilijk de lokale ladingsverliezen analytisch te bepalen. Voor de bepaling ervan wordt vaak gebruik gemaakt van een empirisch bepaalde verliescoëfficiënt gedefinieerd zodat:

$$h_{L,lokaal} = \zeta \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{\dot{V}^2}{2gA^2} \quad (9.5)$$

Uit dimensie analyse blijkt dat de verliescoëfficiënt een functie moet zijn van de geometrie en het Reynoldsgetal.

$$\zeta = \zeta(\text{geometrie}, Re) \quad (9.6)$$

In vele gevallen zal de invloed van het Reynoldsgetal echter verwaarloosd kunnen worden. Dit komt omdat in kranen, bochten,... de energieverliezen voornamelijk veroorzaakt worden door richtingsveranderingen (traagheidskrachten) in in mindere mate door viskeuze krachten. Bij een bocht

kunnen we bijvoorbeeld het ladingsverlies opsplitsen in een ladingsverlies ten gevolge van de richtingsverandering (Reynolds onafhankelijk) en een ladingsverlies ten gevolge van de lengte van de bocht (Reynolds afhankelijk). Het ladingsverlies ten gevolge van de lengte van de bocht kan berekend worden met behulp van de formules voor een rechte leiding en wordt dan ook meestal bij de gewone ladingsverliezen gerekend.

De waarden van de verliescoëfficiënt voor enkele veel voorkomende leidingsonderdelen zijn gegeven in Appendix B.

De lokale ladingsverliezen worden ook soms uitgedrukt als een equivalente leiding lengte. De component wordt dan beschouwd als een extra deel leiding met dezelfde diameter als de leiding waarin het is ingebouwd dat hetzelfde ladingsverlies zou veroorzaken als de werkelijke component. De equivalente lengte wordt dan:

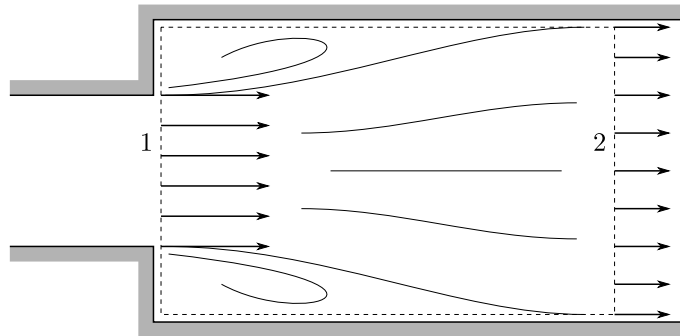
$$L_{equivalent} = \frac{\zeta D}{f} \quad (9.7)$$

Uit (9.5) blijkt dat we de verliescoëfficiënt beschouwen als de fractie van de kinetische energie van de stroming die in de beschouwde component verloren gaat. Om dit te illustreren zullen we de verliescoëfficiënt bij een plotse verwijding bepalen. Dit is één van de weinige leidingsonderdelen waarvoor het ladingsverlies analytisch kan uitgerekend worden.

### 9.3.1 Ladingsverlies bij een plotse verwijding

Beschouw een plotse verwijding in een leiding als in Figuur 9.1. Ter hoogte van de verwijding zal er een jet-achtige stroming ontstaan. Voldoende verderop zal de stroming opnieuw volledig ontwikkeld zijn. Beschouwen we nu een impulsbalans voor het aangeduide controlevolume. Ter hoogte van de ingang lopen alle stroomlijnen parallel. Er kan dus geen drukverandering zijn loodrecht op de stroomlijnen. De druk op de linkerzijde van het controlevolume is met andere woorden constant en gelijk aan de druk vlak voor de verwijding. Indien we een uniforme snelheid veronderstellen (Geldig bij zeer hoge Reynoldsgetallen) aan de instroming en uitstroming bekomen we:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho A_2 v_2 (v_2 - v_1) \quad (9.8)$$



**Figuur 9.1:** Plotse verwijding in een leiding

De energie vergelijking wordt hier:

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} - h_L \quad (9.9)$$

Wanneer we deze twee vergelijkingen combineren bekomen we:

$$h_L = \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - 2\frac{v_2}{v_1} + \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) \quad (9.10)$$

Indien we hierin de verhouding van snelheden vervangen door de verhouding van oppervlaktes (behoud van massa) verkrijgen we:

$$h_L = \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (9.11)$$

De verliescoëfficiënt wordt dus:

$$\zeta = \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (9.12)$$

De verliescoëfficiënt is hier dus enkel een functie van de geometrie. Dit resultaat is in goede overeenstemming met experimenteel bepaalde waarden. Wanneer we de oppervlakte  $A_2$  naar oneindig laten gaan bekomen we de verliescoëfficiënt voor een uitstroming in een zeer groot reservoir. De verliescoëfficiënt is dan 1. Met andere woorden de volledige kinetische energie wordt gedissipeerd tijdens de uitstroming in een reservoir.

## 9.4 Serie en parallelschakeling van leidingen

Aangezien leidingstelsels niet uit enkelvoudige rechte leidingen bestaan maar een vaak veel complexere structuur hebben (zie Figuur 9.2), is het aangewezen deze structuur op te delen in enkele basis bouwstenen. De eenvoudigste van deze bouwstenen is de serie schakeling van elementen. Bij een serie schakeling (Figuur 9.3) zal logischerwijze het totale ladingsverlies gelijk zijn aan de som der ladingsverliezen. Voor een serieschakeling van  $n$  componenten kunnen we dus schrijven:

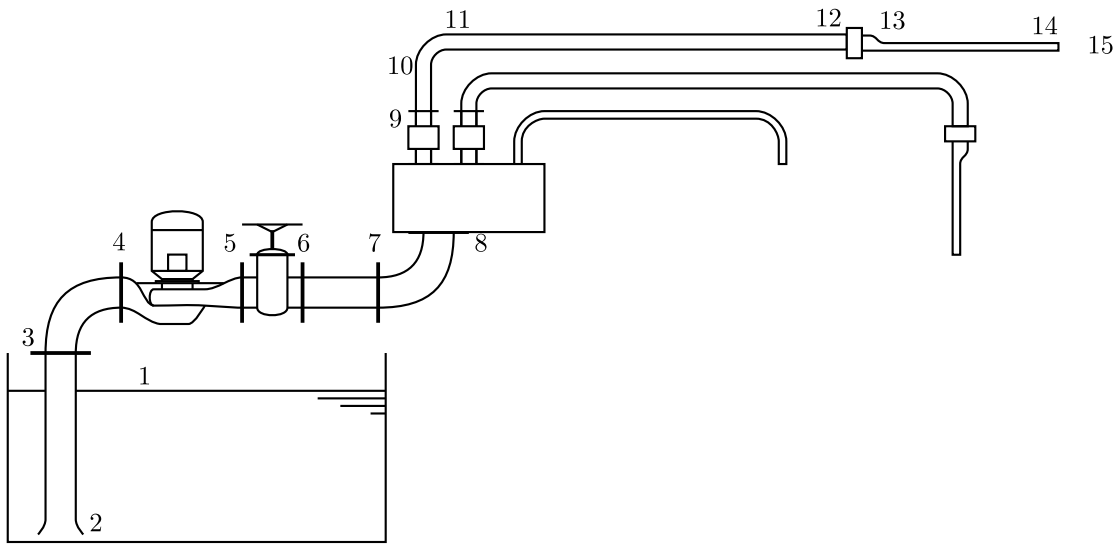
$$h_{L,serie} = \sum_i^n h_{L,i} \quad (9.13)$$

Aangezien het debiet in alle componenten gelijk is wordt dit voor een serieschakeling van leidingen:

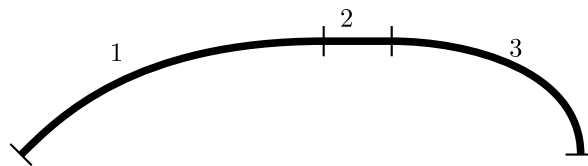
$$h_{L,serie} = \sum_i^n 8f_i \frac{\dot{V}^2}{g\pi^2} \frac{L_i}{D_i^5} \quad (9.14)$$

Een iets complexere structuur is de parallelschakeling (9.4). Bij een parallelschakeling van leidingen zal de stroming zich opsplitsen tussen de verschillende elementen. Het totale ladingsverlies tussen het begin en het einde van de parallelschakeling kunnen we bekomen door op te merken dat het ladingsverlies door elk van de elementen die deel uitmaken van de schakeling hetzelfde ladingsverlies

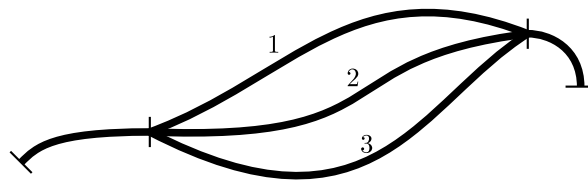




**Figuur 9.2:** Voorbeeld van een leidingstructuur



**Figuur 9.3:** Serieschakeling van componenten



**Figuur 9.4:** Parallelschakeling van componenten

moeten veroorzaken. Het totaal debiet zal dus zodanig opgesplitst worden dat het ladingsverlies in alle componenten gelijk is:

$$h_{L,parallel} = h_{L,i} \quad i = 1..n \quad (9.15)$$

Voor een parallelschakeling van leidingen wordt dit:

$$h_{L,parallel} = 8f_i \frac{\dot{V}_i^2}{g\pi^2} \frac{L_i}{D_i^5} \quad i = 1..n \quad (9.16)$$

Samen met de continuïteitsvergelijking levert dit een stelsel van  $n + 1$  vergelijkingen en  $n + 1$  onbekenden ( $h_{L,parallel}$  en  $\dot{V}_i, i = 1..n$ ):

$$\begin{cases} h_{L,parallel} &= 8f_i \frac{\dot{V}_i^2}{g\pi^2} \frac{L_i}{D_i^5} \quad i = 1..n \\ \dot{V} &= \sum_i^n \dot{V}_i \end{cases} \quad (9.17)$$

Bij het toepassen van bovenstaande uitdrukkingen op ingenieurstoepassingen ontstaan er meteen enkele problemen. Wanneer de debieten in de leidingen gekend zijn kunnen we met behulp van het Moody diagram de ladingsverliezen (en dus de drukken in elk punt van de leidingen) berekenen. Dit is echter niet het enige type probleem dat we kunnen tegenkomen. Algemeen zijn er drie types problemen te onderscheiden:

- Het berekenen van ladingsverliezen uit het debiet en de geometrie
- Het berekenen van het debiet uit gekende ladingsverliezen en geometrie
- Het berekenen van de geometrie met gekende ladingsverliezen bij een bepaald debiet

Het eerste type probleem is zeer eenvoudig en kan bij een serieschakeling van elementen zonder problemen gedaan worden. Wanneer er echter een parallelschakeling in het leidingstelsel voorkomt wordt ook dit probleem iets ingewikkelder. Naar alle waarschijnlijkheid zal de debietverdeling in de verschillende componenten van de parallelschakeling niet gekend zijn. We dienen dus het stelsel (9.17) op te lossen. Hierin zijn de wrijvingsfactoren  $f_i$  echter afhankelijk van het Reynoldsgetal en dus het debiet (dat niet gekend is). Bij turbulente stroming is deze relatie zelfs sterk niet lineair en moeilijk in gesloten vorm weer te geven. Daarbovenop is het stelsel (9.17) zelf ook niet lineair. Er is dus geen garantie dat er een oplossing bestaat. Indien de oplossing echter wel bestaat kunnen we met behulp van iteratieve technieken wel tot deze oplossing komen. Een stappenplan om tot een oplossing te komen gaat als volgt:

1. Maak een veronderstelling voor het debiet in de verschillende leidingen
2. Bereken de Reynoldsgetallen en de wrijvingsfactoren voor elke leiding met behulp van het Moody diagram
3. Los het stelsel (9.17) op naar de debieten met de veronderstelde wrijvingsfactoren
4. Indien de debieten sterk afwijken van de voorgaande debieten ga naar stap 2, indien niet is de oplossing gevonden.

Voor het tweede type problemen (Bepaling van het debiet bij een gekend ladingsverlies) kan bovenstaande oplossingsmethode ook gebruikt worden. Dit type problemen komt voor bij stroming die wordt veroorzaakt door hoogteverschillen tussen 2 reservoirs of bij stroming tussen een leiding op gekende druk en een reservoir.

Het derde type probleem is een typische ingenieursprobleem waarbij een bepaald debiet fluïdum van een locatie naar een andere getransporteerd dient te worden. De diameter van de leidingen moet zo gekozen worden dat het ladingsverlies over elk onderdeel beperkt blijft. Het toegelaten ladingsverlies bepaalt hoeveel vermogen er nodig is voor het transport en dus de grootte van pompen of ventilatoren en de energie nodig voor het transport. Aangezien het Reynoldsgetal (en dus ook de wrijvingsfactor) ook afhankelijk is van de diameter van de leiding, hebben we opnieuw een iteratieve techniek nodig om dit probleem op te lossen. Indien we het bovenstaande stappenplan licht aanpassen bekomen we:

1. Maak een veronderstelling voor de diameter van de leiding
2. Bereken de Reynoldsgetallen en de wrijvingsfactoren voor elke leiding met behulp van het Moody diagram
3. Bepaal met behulp van (9.4) de diameter
4. Indien de diameters sterk afwijken van de voorgaande waarden ga naar stap 2, indien niet is de oplossing gevonden.

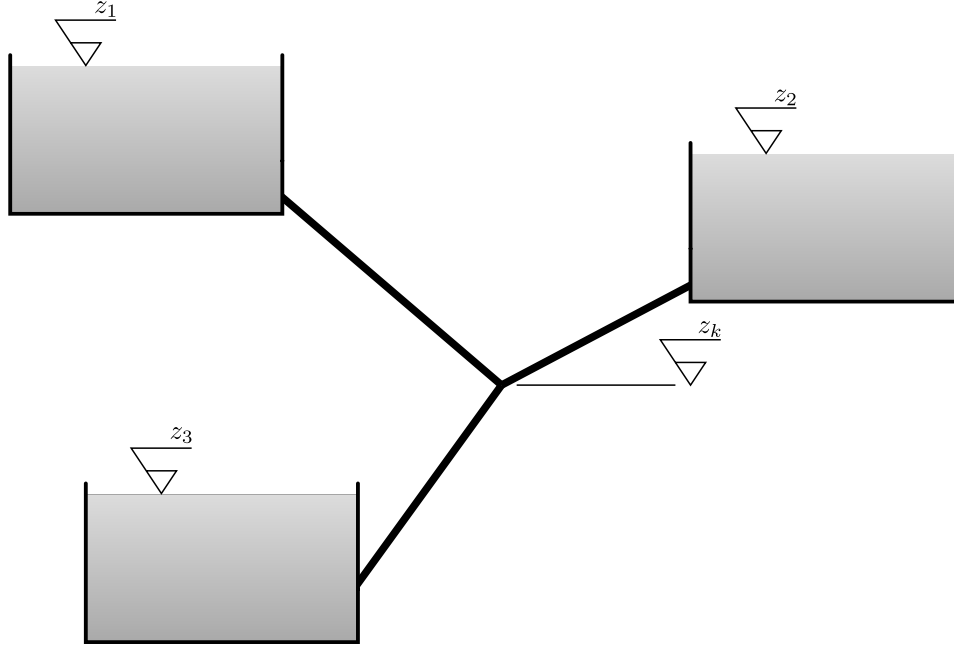
Aangezien de diameters van leidingen sterk genormeerd zijn kan de eerstvolgende grotere leiding gekozen worden en dienen er nooit veel iteraties uitgevoerd te worden.

## 9.5 Leiding netwerken

Niet alle structuren van leidingen kunnen opgesplitst worden in eenvoudige serie- en parallelschakelingen zoals hierboven beschreven. In Figuur 9.5 is een leiding structuur gegeven met slechts drie leidingen die niet als een serie- of parallelschakeling kan beschouwd worden. Zo'n structuur noemen we een leidingnetwerk. Indien we de leidingen vertrekkende uit reservoir  $i$  aanduiden met de index  $i$  kunnen we voor dit systeem met zekerheid 3 stroomlijnen tekenen. Namelijk de stroomlijnen vertrekkende van het oppervlak van reservoir  $i$  en aankomend in het knooppunt. Voor elk van deze stroomlijnen kunnen we de energievergelijking uitschrijven:

$$\begin{aligned}\frac{p_k}{\rho g} + z_k &= \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - h_{L,1} \\ \frac{p_k}{\rho g} + z_k &= \frac{p_2}{\rho g} + z_2 - h_{L,2} \\ \frac{p_k}{\rho g} + z_k &= \frac{p_3}{\rho g} + z_3 - h_{L,3}\end{aligned}\tag{9.18}$$

Bij het opschrijven van deze vergelijkingen hebben we impliciet stroomrichtingen verondersteld. In leiding 1 en 2 hebben de stroming naar het knooppunt toe verondersteld, terwijl in leiding 3 de



Figuur 9.5: Leiding netwerk

stroming van het knooppunt weg verondersteld is. Ook hebben we verondersteld dat de kinetische energie in het knooppunt verwaarloosbaar is ten opzichte van de druk en de hoogte. Dit is een veel gemaakte veronderstelling die in de meeste gevallen gerechtvaardigd is. De ladingsverliezen kunnen we ook schrijven in functie van de debieten in de 3 leidingen. Indien we de wrijvingsfactoren gekend veronderstellen (wat mogelijk is door het gebruik van een iteratieve techniek) hebben we dus een stelsel van 3 vergelijkingen en 4 onbekenden ( $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$  en  $p_k$ ). Er is dus nog één vergelijking nodig om dit stelsel te kunnen oplossen. Deze vinden we in de vorm van de continuïteitsvergelijking. In het knooppunt moet namelijk evenveel massa toekomen als vertrekken. Het volledige stelsel wordt dus:

$$\begin{cases} \frac{p_k}{\rho g} + z_k = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - 8f_1 \frac{\dot{V}_1^2}{g\pi^2} \frac{L_1}{D_1^5} \\ \frac{p_k}{\rho g} + z_k = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 - 8f_2 \frac{\dot{V}_2^2}{g\pi^2} \frac{L_2}{D_2^5} \\ \frac{p_3}{\rho g} + z_3 = \frac{p_k}{\rho g} + z_k - 8f_3 \frac{\dot{V}_3^2}{g\pi^2} \frac{L_3}{D_3^5} \\ \dot{V}_3 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \end{cases} \quad (9.19)$$

Bij het opstellen van deze vergelijkingen is voor de 3 leidingen reeds een stroomrichting verondersteld. Er wordt namelijk verondersteld dat de stroming van 1 en 2 naar het knooppunt gaat en van het knooppunt naar 3. Dit stelsel van vergelijkingen is dus enkel geldig indien achteraf ook blijkt dat de stromingen in deze richting lopen. Dit komt erop neer dat de gebruikte debieten  $\dot{V}_1, \dot{V}_2$  en  $\dot{V}_3$  allen groter dan nul moeten zijn.

Aangezien 3 van de 4 vergelijkingen in het stelsel (9.19) kwadratisch zijn in het onbekende de-

biet, zal het stelsel meer dan één oplossing hebben. Indien het stelsel met behulp van analytische rekensoftware wordt opgelost zullen al deze oplossingen weergegeven worden. Het is dan aan de probleemoplosser op de juiste oplossing te selecteren. De juiste oplossing moet namelijk voldoen aan de hierboven genoemde voorwaarde, alle debieten moeten groter dan nul zijn.

Het is echter ook mogelijk dat de oplossing van het bovenstaande stelsel geen enkele oplossing geeft waarvoor alle debieten groter zijn dan nul. Geen enkel van de oplossingen van het stelsel geeft dan de gezochte debieten aangezien het stelsel niet meer geldig is.

Wanneer dit voorvalt wil het zeggen dat één of meerdere stromingsrichtingen verkeerd gekozen zijn. We moeten dus het stelsel aanpassen zodat het overeenkomt met een nieuwe veronderstelling voor de stroomrichtingen.

In het geval van Figuur 9.5 is het, afhankelijk van de getalwaarden voor de hoogtes, leiding lengtes en diameters, best mogelijk dat de stroming niet van punt 2 naar het knooppunt gaat, maar van het knooppunt naar punt 2. We moeten dan de energievergelijking tussen punt 2 en het knooppunt en de continuïteitsvergelijking aanpassen:

$$\begin{cases} \frac{p_k}{\rho g} + z_k = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - 8f_1 \frac{\dot{V}_1^2}{g\pi^2} \frac{L_1}{D_1^5} \\ \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{p_k}{\rho g} + z_k - 8f_2 \frac{\dot{V}_2^2}{g\pi^2} \frac{L_2}{D_2^5} \\ \frac{p_3}{\rho g} + z_3 = \frac{p_k}{\rho g} + z_k - 8f_3 \frac{\dot{V}_3^2}{g\pi^2} \frac{L_3}{D_3^5} \\ \dot{V}_3 + \dot{V}_2 = \dot{V}_1 \end{cases} \quad (9.20)$$

Met dit nieuwe stelsel van vergelijkingen kan nu wel een correcte oplossing, waarvoor alle 3 de debieten groter zijn dan nul bekomen worden.

## 9.6 Pomp - ventilator - leiding karakteristiek

In de voorgaande secties werd het debiet in een leiding of leidingstelsel veroorzaakt door een hoogteverschil of het debiet werd verondersteld gekend te zijn. Het is echter ook mogelijk dat het de stroming wordt veroorzaakt door een pomp of ventilator. Dit zijn toestellen met als doel een bepaald debiet te genereren. Een pomp of ventilator zal dus net zoveel energie aan de stroming toevoegen totdat de toegevoegde energie gelijk is aan de energie die nodig is om hoogte of drukverschillen te overwinnen en de gedisperseerde energie. We kunnen de vergelijking van Bernoulli dus nogmaals uitbreiden naar situatie waar er energie aan de stroming toegevoegd wordt. Dit geeft:

$$\frac{p_2}{\rho g} + \rho \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_1}{\rho g} + \rho \frac{v_1^2}{2g} + z_1 - h_L + h_P \quad (9.21)$$

Hierin stelt  $h_P$  de opvoerhoogte van de aanwezige pompen voor. De opvoerhoogte van een pomp is een maat voor de energie die de pomp aan de stroming toegevoegd. Vaak komt deze tot uiting

als een drukverhoging van de inlaat tot de uitlaat van de pomp. Indien de we de hoogteverschillen en verschillen in kinetische energie tussen inlaat en uitlaat verwaarlozen vinden we het drukverschil tussen in en uitlaat als:

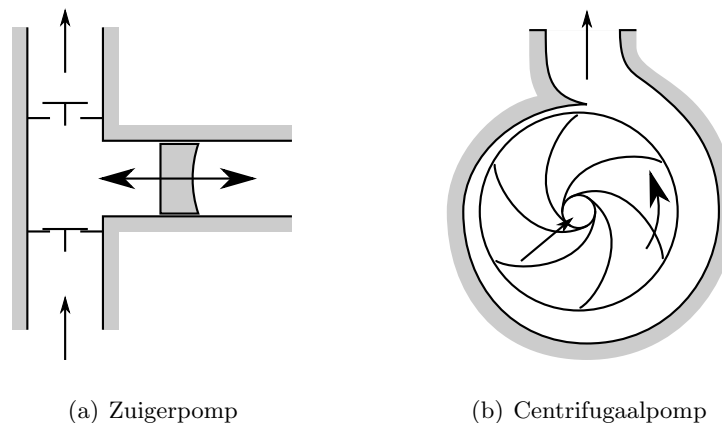
$$\Delta p = \rho g h_P \quad (9.22)$$

Vergelijking (9.21) wordt ook wel de mechanische energievergelijking genoemd.

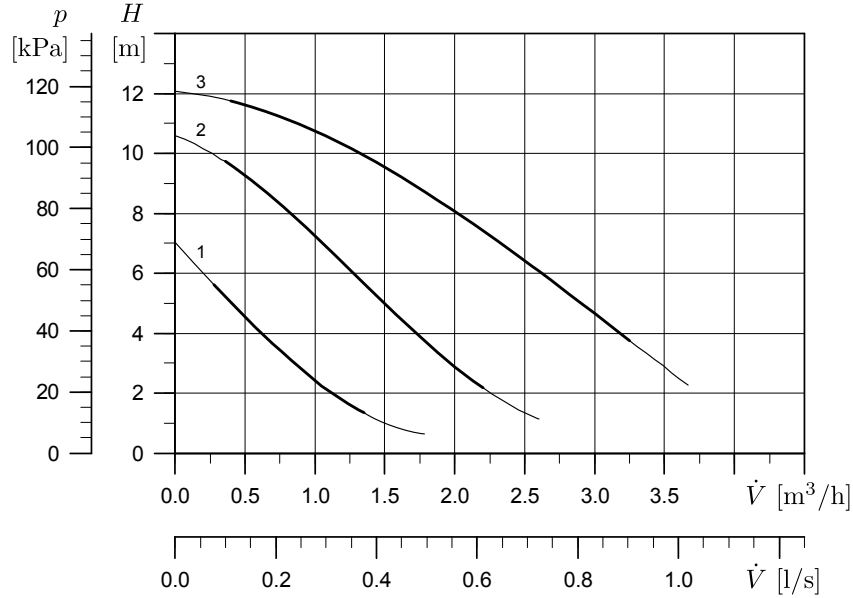
Pompen kunnen we praktisch onderverdelen in twee types: *Volumetrische pompen* en *Turbopompen*. Bij volumetrische pompen (E: Positive displacement pump) zal er steeds een vast volume vloeistof verplaatst worden onafhankelijk van het drukverschil tussen in en uitlaat. Het meest voor de hand liggende voorbeeld is de zuigerpomp waar een zuiger of plunjer in samen werking met enkele kleppen voor de verplaatsing van de vloeistof zorgt. Een schets van het werkingsprincipe van een zuigerpomp is gegeven in Figuur 9.6(a)

Bij een turbopomp zal er door middel van een rotor eerst kinetische energie aan de stroming toegevoegd worden. Nadien wordt deze kinetische energie in een diffusor omgezet naar druk energie. Een typische voorbeeld is de centrifugaal pomp (Figuur 9.6(b)). Vloeistof treedt binnen door een centrale opening. De stroming wordt door een rotor met schoepen radiaal naar buiten versneld waarna de bekomen kinetische energie in de diffusor in de vorm van een slakkenhuis wordt omgezet in druk.

Bij een turbopomp zal de geleverde opvoerhoogte wel afhankelijk zijn van het debiet. De relatie tussen de twee wordt vaak weergegeven in een pompkarakteristiek. Dit is een grafiek met op de  $x$ -as het debiet en op de  $y$ -as de opvoerhoogte. Vaak worden er verschillende krommen gegeven voor de werking bij verschillende toerentallen. Een voorbeeld van een pompkarakteristiek voor een centrifugaal pomp is gegeven in Figuur 9.7. De algemene trend is dat bij turbopompen de opvoerhoogte daalt bij stijgend debiet. Het is ook mogelijk een pompkarakteristiek te tekenen voor een volumetrische pomp. Dit is een verticale lijn bij het debiet dat de pomp levert. De opvoerhoogte is namelijk onafhankelijk van het debiet.



**Figuur 9.6:** Schematische voorstelling van een zuiger- en centrifugaal pomp



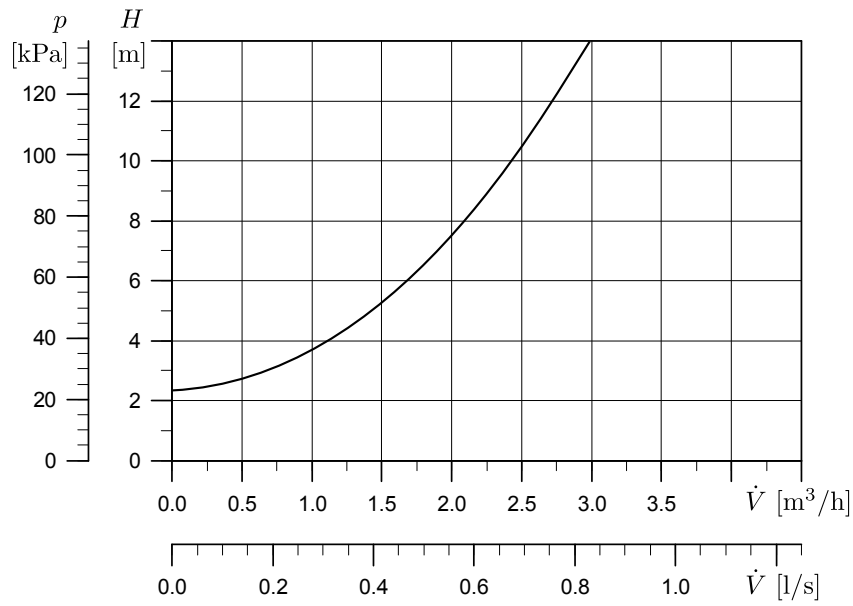
**Figuur 9.7:** Voorbeeld van een pompkarakteristiek van een centrifugaalpomp

Ook voor het leidingstelsel kunnen we de nodige opvoerhoogte uitzetten in functie van het debiet. Deze kromme noemen we de leidingskarakteristiek. Indien we veronderstellen dat de wrijvingsfactor niet sterk verandert zien we uit vergelijking (9.4) dat het ladingsverlies evenredig is met het kwadraat van het debiet. Een leidingskarakteristiek zal er dus kwalitatief uitzien als in Figuur 9.8. Wanneer we de pompkarakteristiek (Figuur 9.7) en leidingskarakteristiek (9.8) combineren kunnen we het werkingpunt van het systeem aflezen als het snijpunt van de twee krommen (Figuur 9.9). In dit punt zal de opvoerhoogte geleverd door de pomp net gelijk zijn aan de energie nodig om her fluïdum door de leiding te verplaatsen. Het zoeken van het werkingpunt op deze manier komt neer op het grafisch oplossen van de mechanische energievergelijking. De pompkarakteristiek en leidingskarakteristiek kunnen we namelijk schrijven als:

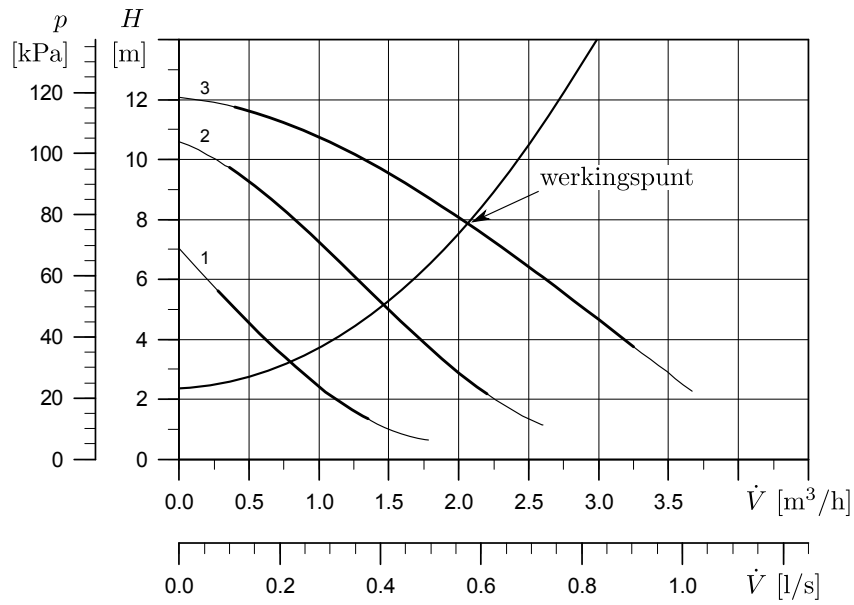
$$h_P(\dot{V}) \quad (9.23)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + h_L(\dot{V}) \quad (9.24)$$

Indien we deze twee aan elkaar gelijkstellen bekomen we de mechanische energievergelijking die we kunnen oplossen naar  $\dot{V}$  om het werkingpunt te vinden.



**Figuur 9.8:** Voorbeeld van een leidingskarakteristiek



**Figuur 9.9:** De combinatie van pomp en leidingskarakteristiek leidt tot het werkingpunt

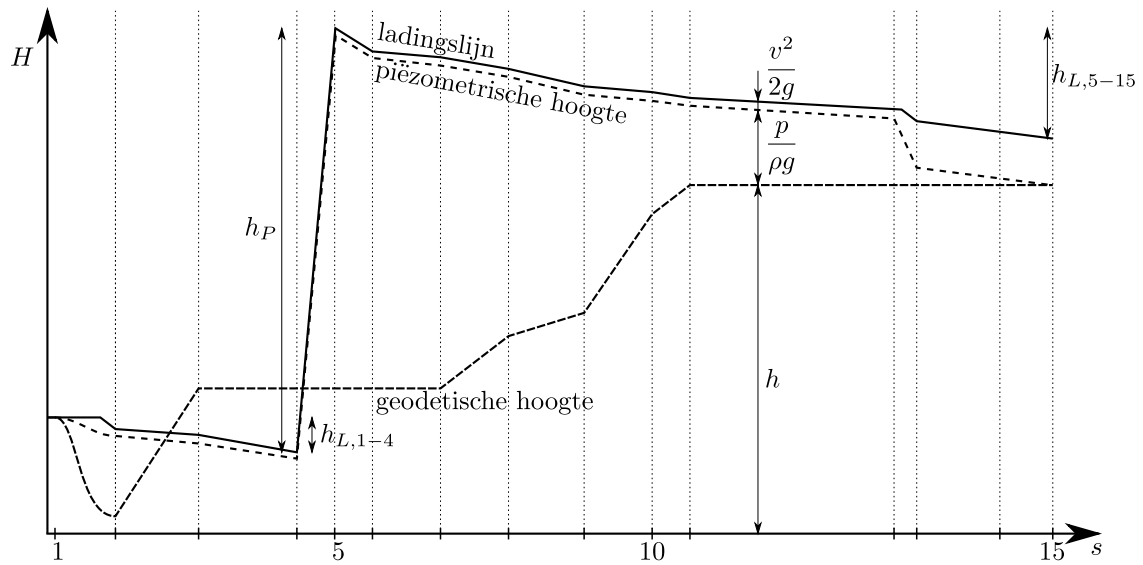


## 9.7 Grafische voorstelling

In sectie 4.4 zijn we reeds een grafische voorstelling van de vergelijking van Bernoulli tegengekomen. We kunnen dezelfde grafische voorstelling ook maken voor de mechanische energievergelijking toegepast op een enkelvoudig leidingstelsel (langs één stoomlijn). De totale energiehogte of ladingslijn zal nu echter niet meer horizontaal lopen. Ten gevolge van ladingsverliezen in leidingen of lokale ladingsverliezen zal de energiehogte afnemen. Ter hoogte van een pomp of ventilator zal de energiehogte toenemen met de opvoerhoogte van de pomp. Een voorbeeld wordt gegeven in Figuur 9.10. Het tekenen van dit diagram gaat als volgt:

1. Zet de lengte van verschillende leidingen uit op de  $x$ -as.
2. Teken de hoogte van ieder punt.
3. Bepaal de druk in ieder punt en zet dit bovenop de hoogte uit, dit is de piëzometrische lijn
4. Bepaal de kinetische energie in ieder punt en zet deze bovenop de piëzometrische lijn

Met behulp van dit diagram kan eenvoudig weergegeven worden hoe de verschillende vormen van energie zich op elk punt in de leiding verhouden. Ook kan eenvoudig nagegaan worden waar er in de leiding onderdruk heerst en dus eventueel ontluchtingskranen dienen voorzien te worden.



**Figuur 9.10:** Grafische weergave van de mechanische energievergelijking voor het leidingstelsel in Figuur 9.2

# Bibliografie

- [1] Bruce E. Poling, John M. Prausnitz, and John P. O’Connell. *The Properties of Gases and Liquids*. McGraw Hill, 2001.
- [2] Franz Durst. *Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 2008.
- [3] Mohamed S. Ghidaoui, Ming Zhao, David H. Axworthy, and Duncan A. McInnis. A review of water hammer theory and practice. *Applied Mechanics Reviews*, 58:49–76, 2005.
- [4] Frederick Abernathy. Fundamentals of boundary layers. Video, <https://www.youtube.com/watch?v=7SkWxEUXIoM>, 1966.
- [5] Meinhard T. Schobeiri. *Fluid Mechanics for Engineers*. Springer-Verlag, 2010.
- [6] L.P. Yarin. *The Pi Theorem*. Springer, 2012.
- [7] Herman Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 1979.
- [8] C. D. Tomkins. A particle image velocimetry study of coherent structures in a turbulent boundary layer. Master’s thesis, University of Illinois, 1997.
- [9] J. M. McDonough. *Introductory Lectures on Turbulence*. 2007.
- [10] F. M. Henderson. *Open Chanel Flow*. Macmillan Publisching Co, 1966.
- [11] M.H. Chaudhry. *Open-Channel Flow*. Springer, 2007.
- [12] Bruce R. Munson, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch, and Alric P. Rothmayer. *Fluid Mechanics*. Wiley, 2010.
- [13] Mark S. Owen, editor. *ASHRAE Handbook of Fundamentals*. ASHRAE, 2009.
- [14] J. Nikuradse. *Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen*. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Vdi-verlag, 1926.
- [15] C.F. Colebrook and C.M. White. Experiments with fluid friction in roughened pipes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 191 (906):367–381, 1937.

## BIBLIOGRAFIE

- [16] Lewis F. Moody. Friction factors for pipe flow. *Transactions of the A.S.M.E.*, 66(8):671–684, November 1944.
- [17] I.G. Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw-Hill, 2003.
- [18] C. Pozrikidis. *Fluid Dynamics*. Springer, 2009.
- [19] Cameron Tropea, Alexander L. Yarin, and John F. Foss. *Handbook of Experimental Fluid Mechanics*. Springer, 2007.
- [20] UFA. *Lubricant Handbook*. UFA, 2008.

# Bijlage A

## Formularium

### A.1 Hydrostatica

Hydrostatische druk:

$$dp = \rho g dz \quad (\text{A.1})$$

Hydrostatische kracht:

$$F = \int p dA \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Behoudsvergelijkingen

Behoudvergelijkingen in integraal vorm

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{\partial CV} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (\text{A.3})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \mathbf{v} dV + \int_{\partial CV} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{\partial CV} \rho \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (\text{A.5})$$

Behoudvergelijkingen bij een stationaire stroming met één instroming en één uitstroming:

$$0 = \dot{m}_{uit} - \dot{m}_{in} \quad (\text{A.6})$$

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m} (\mathbf{v}_{uit} - \mathbf{v}_{in}) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_t = \dot{m} \left( u_{uit} - u_{in} + \frac{p_{uit}}{\rho_{uit}} - \frac{p_{in}}{\rho_{in}} + \frac{v_{uit}^2}{2} - \frac{v_{in}^2}{2} + gz_{uit} - gz_{in} \right) \quad (\text{A.8})$$

Behoudvergelijkingen in differentiaal vorm:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{A.10})$$

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Uitgebreide vergelijking van Bernoulli

$$\frac{1}{2} \frac{v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - h_L + h_P = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad (\text{A.12})$$

### A.3 Dimensieloze getallen

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{g D}} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Ma} = \frac{v}{c} \quad (\text{A.16})$$

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho v^2} \cong \frac{p}{\rho N^2 D^2} \quad (\text{A.17})$$

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v^2 A} \quad (\text{A.18})$$

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho v^3 D^2} \cong \frac{p}{\rho N^3 D^5} \quad (\text{A.19})$$

$$C_p = \frac{\dot{V}}{v D^2} \cong \frac{\dot{V}}{N D^3} \quad (\text{A.20})$$

### A.4 Open kanaal stroming

Golfsnelheid:

$$c = \sqrt{g y} \quad (\text{A.21})$$

$$c = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}} \quad (\text{A.22})$$

Kritische diepte:

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (\text{A.23})$$

### A.5 Stroming in leidingen

Ladingsverlies bij stroming in een rechte cilindrische leiding met diameter D:

$$h_L = f \frac{v^2}{2g} \frac{L}{D} = 8f \frac{\dot{V}^2}{g \pi^2} \frac{L}{D^5} = R \dot{V}^2 \quad (\text{A.24})$$

Wrijvingsfactor bij laminaire stroming in cilindrische buizen:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (\text{A.25})$$

Wrijvingsfactor bij turbulente stroming in cilindrische buizen volgens Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.71} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (\text{A.26})$$

Ladingsverlies bij stroming door leidingsonderdelen:

$$h_L = \zeta \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{\dot{V}^2}{2g A^2} = R \dot{V}^2 \quad (\text{A.27})$$

Ladingsverlies bij een plotse verwijding:

$$h_L = \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta \frac{v_1^2}{2g} \quad (\text{A.28})$$

Gebruik van de correctiefactor op de verliescoëfficiënt:

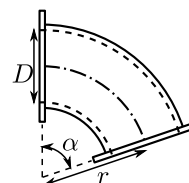
$$\zeta_{corr} = k \zeta \quad (\text{A.29})$$

## Bijlage B

### Tabellen en grafieken

**Tabel B.1:** Verliescoëfficiënt bij stroming door een cirkelvormige bocht van  $90^\circ$

$r/D$	1	2	4	6	10
$\zeta$ glad	0.21	0.14	0.11	0.09	0.11
$\zeta$ ruw	0.51	0.30	0.23	0.18	0.20

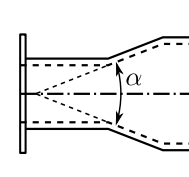


**Tabel B.2:** Correctiefactor voor cirkelvormige bochten met andere hoeken

$\alpha$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$k$	0.4	0.7	1	1.25	1.5	1.7

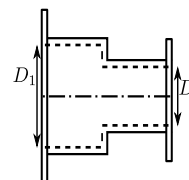
**Tabel B.3:** Correctiefactor voor geleidelijke verwijding

$\alpha$	$6^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
$k$	0.14	0.20	0.30	0.40	0.70	0.90	1.00	1.10	1.10	1.00



**Tabel B.4:** Verliescoëfficiënt bij stroming door een plotse vernauwing

$D_1/D_2$	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.3	1.1	1.0
$\zeta$	0.45	0.43	0.42	0.40	0.37	0.28	0.20	0.01	0



**Figuur B.1:** Moody diagram

