

Fluïdummechanica

Gelijkvormigheid en dimensieloze getallen

Brecht Baeten¹

¹KU Leuven, Technologie campus Diepenbeek,
e-mail: brecht.baeten@kuleuven.be

29 november 2016

Inhoud

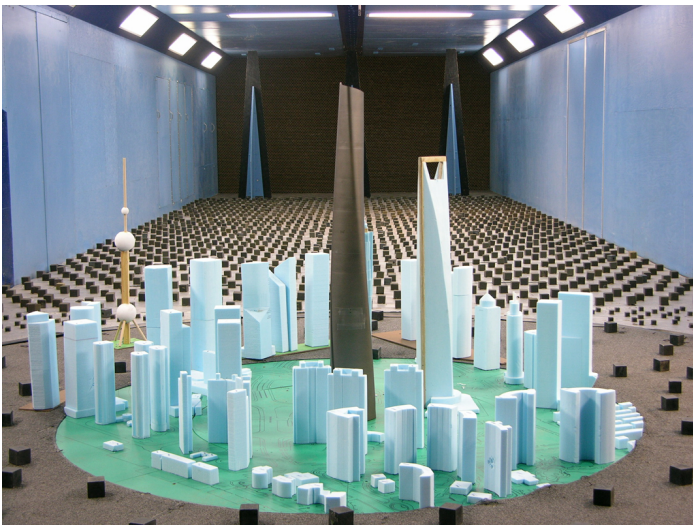
- 1 Inleiding
- 2 Gelijkvormigheid
- 3 Dimensieloze getallen
- 4 Buckingham-Pi

Voorbeeld



Bron: <http://www.nasa.gov/>

Voorbeeld



Bron: <http://www.autodesk.com/>

Inhoud

- 1 Inleiding
- 2 **Gelijkvormigheid**
- 3 Dimensieloze getallen
- 4 Buckingham-Pi

Wat is gelijkvormigheid?

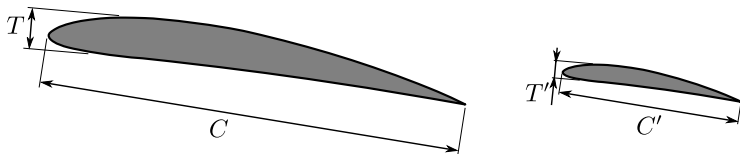


Bron: <http://7-themes.com/>

Wat is gelijkvormigheid?

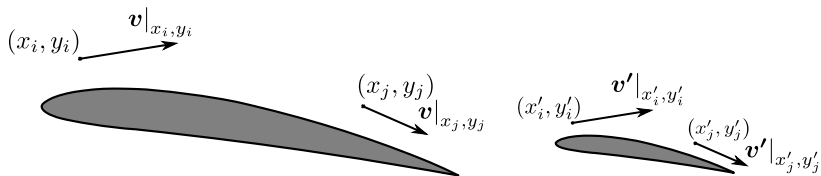
Wat is gelijkvormigheid?

- Gelijke verhoudingen van afstanden



Wat is gelijkvormigheid?

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden



Inhoud

- 1 Inleiding
- 2 Gelijkvormigheid
- 3 Dimensieloze getallen
- 4 Buckingham-Pi

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

$$\begin{aligned} s &= s^* D_{\text{ref}} \\ v &= v^* v_{\text{ref}} \\ t &= t^* t_{\text{ref}} \\ p &= p^* p_{\text{ref}} \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial t^* t_{\text{ref}}} + \rho v^* v_{\text{ref}} \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} = -\frac{\partial p^* p_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^{*2} D_{\text{ref}}^2}$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

$$\begin{aligned} s &= s^* D_{\text{ref}} \\ v &= v^* v_{\text{ref}} \\ t &= t^* t_{\text{ref}} \\ p &= p^* p_{\text{ref}} \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial t^* t_{\text{ref}}} + \rho v^* v_{\text{ref}} \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} = -\frac{\partial p^* p_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^{*2} D_{\text{ref}}^2}$$

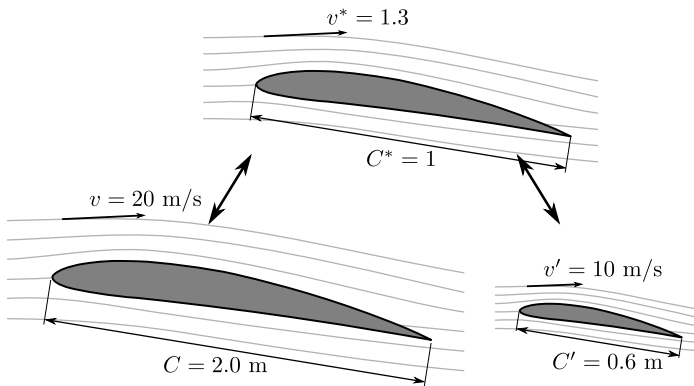
$$\frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}} v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \rho g_s + \frac{\mu v_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}}$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = - \frac{p_{\text{ref}}}{\rho v_{\text{ref}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{g_s D_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} + \frac{\mu}{\rho v_{\text{ref}} D_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (1)$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = - \frac{p_{\text{ref}}}{\rho v_{\text{ref}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{g_s D_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} + \frac{\mu}{\rho v_{\text{ref}} D_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (1)$$



Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -Eu \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (2)$$

Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -Eu \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (2)$$

Dimensieloze getallen zijn verhoudingen van referentiewaarden voor krachten

Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -Eu \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \quad (2)$$

Dimensieloze getallen zijn verhoudingen van referentiewaarden voor krachten

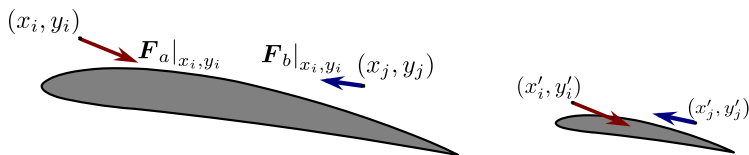
$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} = \frac{\text{traagheidskracht}}{\text{viskeuze krachten}} \\ Eu &= \frac{p}{\rho v^2} = \frac{\text{drukkracht}}{\text{traagheidskracht}} \\ Fr &= \frac{v}{\sqrt{g D}} = \sqrt{\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{zwaartekracht}}} \end{aligned}$$

Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden

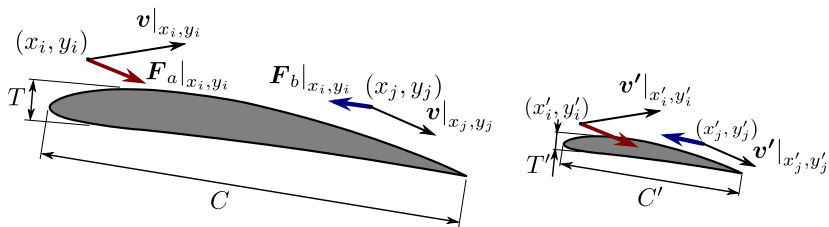
Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden
- Gelijke verhoudingen van krachten



Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden
- Gelijke verhoudingen van krachten



$$Re = Re', \quad Eu = Eu', \quad Fr = Fr'$$

Dimensieloze getallen

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$\text{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$$

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$\text{Ma} = \frac{v}{c}$$

$$\text{St} = \frac{fD}{v}$$

Dimensieloze getallen

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$\text{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$$

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$\text{Ma} = \frac{v}{c}$$

$$\text{St} = \frac{fD}{v}$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\text{Nu} = \frac{hD}{k}$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2}$$

$$\text{Ra} = \text{GrPr}$$

Dimensieloze getallen

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$\text{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$$

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$\text{Ma} = \frac{v}{c}$$

$$\text{St} = \frac{fD}{v}$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\text{Nu} = \frac{hD}{k}$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2}$$

$$\text{Ra} = \text{GrPr}$$

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \simeq \frac{p}{\rho N^2 D^2}$$

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 A} \simeq \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 D^2}$$

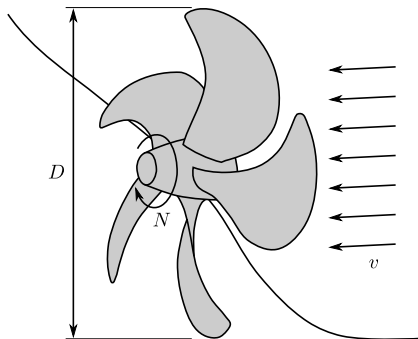
$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho v^3 D^2} \simeq \frac{P}{\rho N^3 D^5}$$

$$C_{\dot{V}} = \frac{\dot{V}}{vD^2} \simeq \frac{\dot{V}}{ND^3}$$

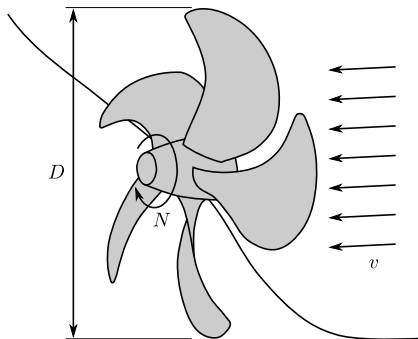
Inhoud

- 1 Inleiding
- 2 Gelijkvormigheid
- 3 Dimensieloze getallen
- 4 Buckingham-Pi**

Voorbeeld

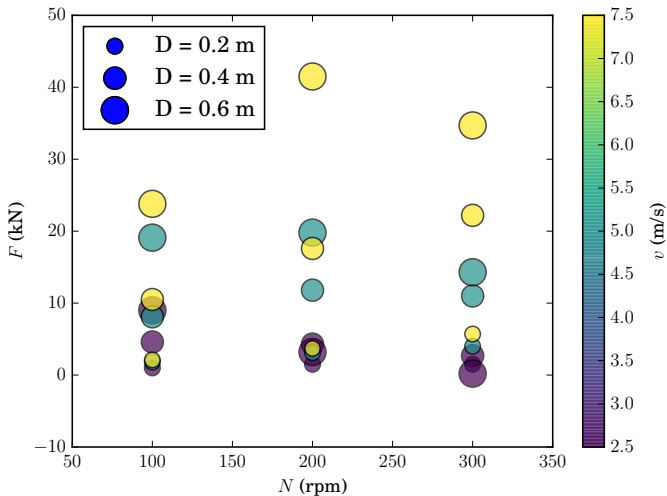


Voorbeeld



Meting	N (rpm)	D (m)	v (m/s)	F (kN)
1	100	0.20	2.5	1.0
2	200	0.20	2.5	1.5
3	300	0.20	2.5	1.5
4	100	0.40	2.5	4.6
5	200	0.40	2.5	4.3
6	300	0.40	2.5	2.7
7	100	0.60	2.5	9.0
8	200	0.60	2.5	3.2
9	300	0.60	2.5	0.2
10	100	0.20	5.0	1.8
11	200	0.20	5.0	3.1
12	300	0.20	5.0	4.0
13	100	0.40	5.0	8.1
14	200	0.40	5.0	11.8
15	300	0.40	5.0	11.0
16	100	0.60	5.0	19.1
17	200	0.60	5.0	19.8
18	300	0.60	5.0	14.3
19	100	0.20	7.5	2.1
20	200	0.20	7.5	3.7
21	300	0.20	7.5	5.7
22	100	0.40	7.5	10.5
23	200	0.40	7.5	17.6
24	300	0.40	7.5	22.2
25	100	0.60	7.5	23.8
26	200	0.60	7.5	41.5
27	300	0.60	7.5	34.7

Voorbeeld



Eenheden

Grootheid	Dimensie	Eenheid
Lengte	L	m
Massa	M	kg
Tijd	T	s
Dichtheid	ML^{-3}	kg/m^3
Druk	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2
Dynamische viscositeit	$MT^{-1}L^{-1}$	Pas
Energie (arbeid)	ML^2T^{-2}	J
Impuls	MLT^{-1}	kgm/s
Kinematische viscositeit	L^2T^{-1}	m^2/s
Kracht	MLT^{-2}	N
Snelheid	LT^{-1}	m/s
Vermogen	ML^2T^{-3}	J/s
Versnelling	LT^{-2}	m/s^2
Volume	L^3	m^3

Buckingham-Pi theorema

Een relatie:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

met k grootheden met onafhankelijke dimensies

Buckingham-Pi theorema

Een relatie:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

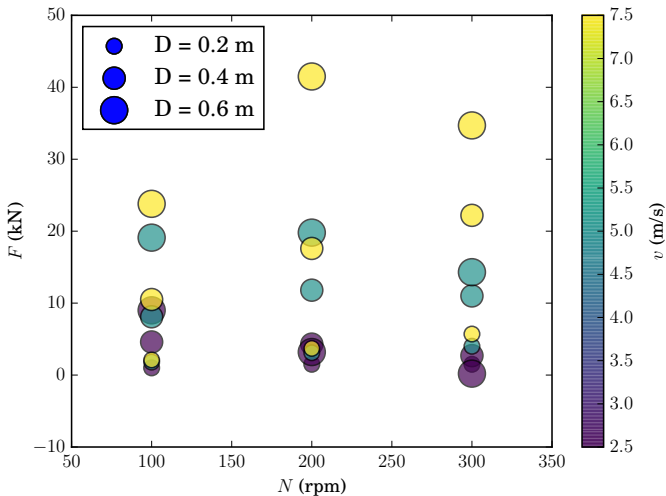
met k grootheden met onafhankelijke dimensies

kan herschreven worden als:

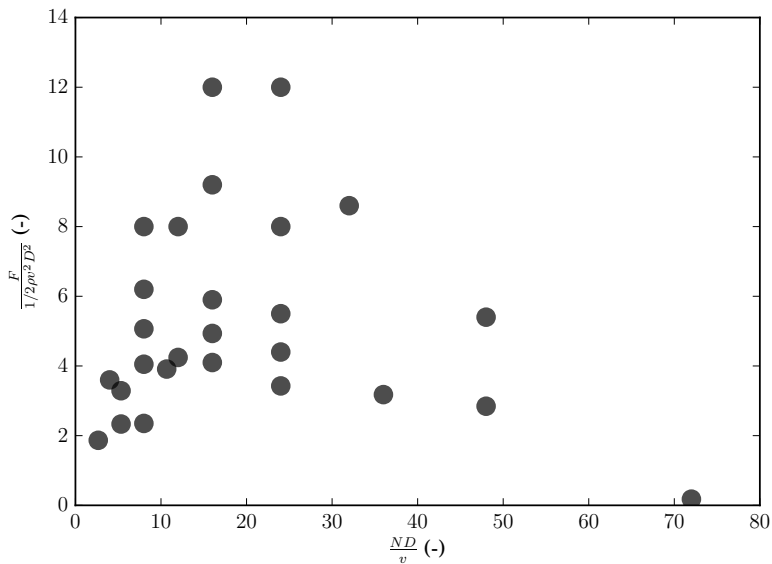
$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k})$$

met $\pi, \pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ dimensieloze grootheden

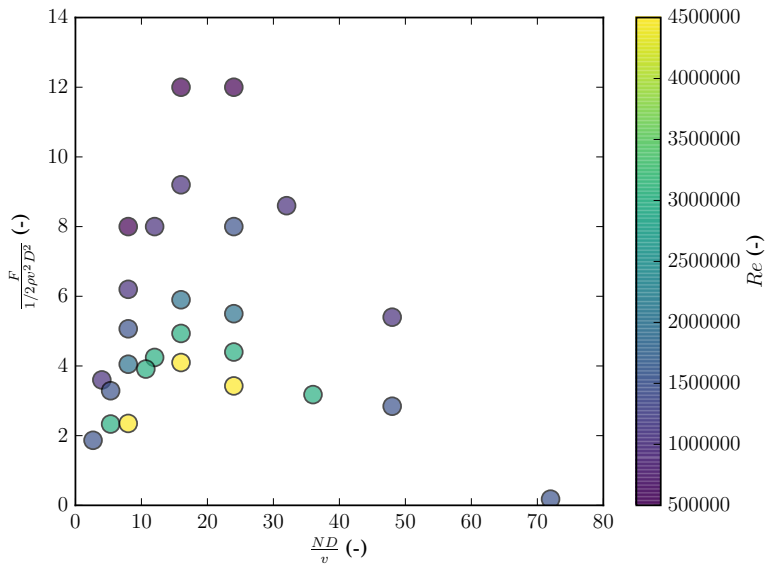
Voorbeeld



Voorbeeld



Voorbeeld



Voorbeeld

