

# Fluidummechanica

## Behoudsvergelijkingen langs stroomlijnen

Brecht Baeten<sup>1</sup>

<sup>1</sup>KU Leuven, Technologie campus Diepenbeek,  
e-mail: brecht.baeten@kuleuven.be

15 september 2015

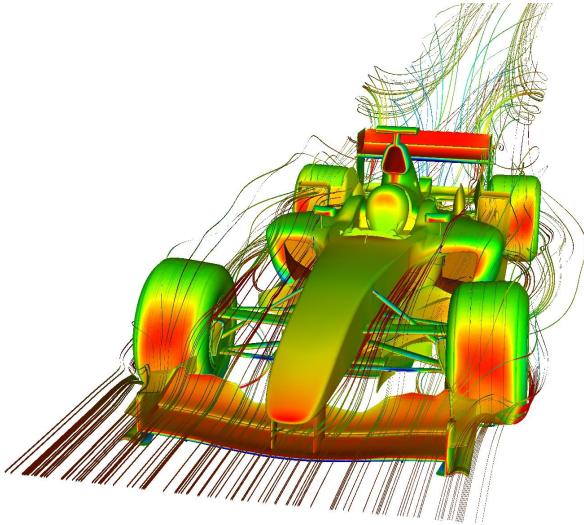
# Inhoud

1 Inleiding

2 Bewegingsvergelijking

3 Bernoulli

# Voorbeeld

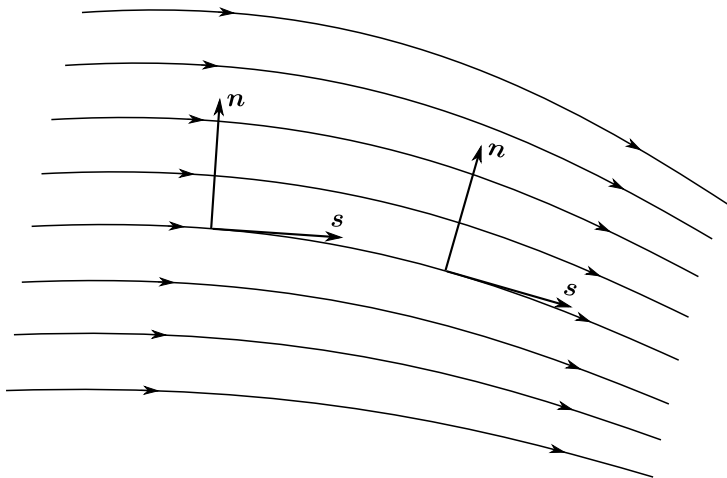


Bron: <http://www.dalco.ch/>

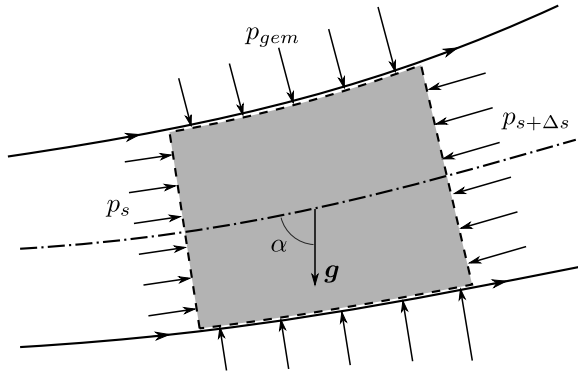
# Inhoud

- 1 Inleiding
- 2 Bewegingsvergelijking
- 3 Bernoulli

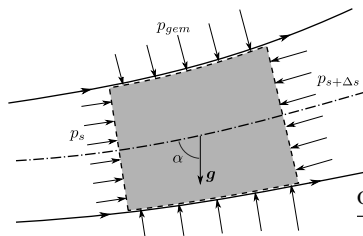
# Stroomlijncoördinaten



# Bewegingsvergelijking

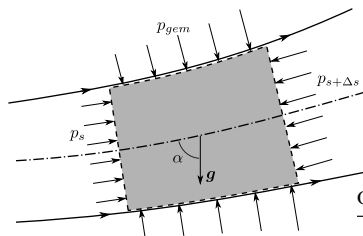


# Bewegingsvergelijking



$$\frac{d\mathbf{P}_{CV}}{dt} + \dot{\mathbf{P}}_{\partial CV} = \mathbf{F}$$

# Bewegingsvergelijking

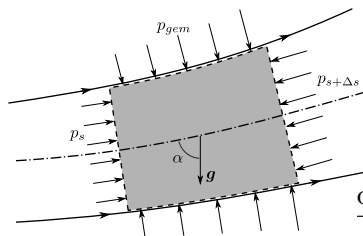


$$\frac{d\mathbf{P}_{CV}}{dt} + \dot{\mathbf{P}}_{\partial CV} = \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \rho v v_{\perp} A|_{s+\Delta s} - \rho v v_{\perp} A|_s &= p A|_s - p A|_{s+\Delta s} \\ &+ p_{gem}(A|_{s+\Delta s} - A|_s) - \rho g A_{gem} \Delta s \cos \alpha \end{aligned}$$



# Bewegingsvergelijking

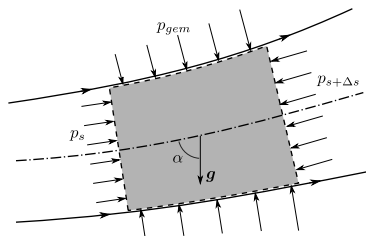


$$\frac{d\mathbf{P}_{CV}}{dt} + \dot{\mathbf{P}}_{\partial CV} = \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \rho v v_{\perp} A|_{s+\Delta s} - \rho v v_{\perp} A|_s &= pA|_s - pA|_{s+\Delta s} \\ &\quad + p_{gem}(A|_{s+\Delta s} - A|_s) - \rho g A_{gem} \Delta s \cos \alpha \end{aligned}$$

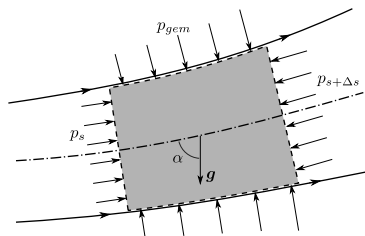
$$\begin{aligned} \frac{\rho v v A|_{s+\Delta s} - \rho v v A|_s}{\Delta s} &= - \frac{pA|_{s+\Delta s} - pA|_s}{\Delta s} \\ &\quad + p_{gem} \frac{A|_{s+\Delta s} - A|_s}{\Delta s} - \rho g A_{gem} \frac{z|_{s+\Delta s} - z|_s}{\Delta s} \end{aligned}$$

# Bewegingsvergelijking



$$\frac{dpvA}{ds} = -\frac{dpA}{ds} + p\frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

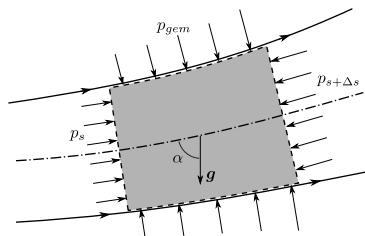
# Bewegingsvergelijking



$$\frac{d\rho v v A}{ds} = -\frac{dpA}{ds} + p\frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

$$\rho v A \frac{dv}{ds} + v \frac{d\rho v A}{ds} = -A \frac{dp}{ds} - p \frac{dA}{ds} + p \frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

# Bewegingsvergelijking



$$\frac{d\rho v v A}{ds} = -\frac{dpA}{ds} + p\frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

$$\rho v A \frac{dv}{ds} + v \frac{d\rho v A}{ds} = -A \frac{dp}{ds} - p \frac{dA}{ds} + p \frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0 \quad (1)$$

# Deeltjesversnelling

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

# Deeltjesversnelling

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

# Inhoud

1 Inleiding

2 Bewegingsvergelijking

3 Bernoulli

# Integratie van de bewegingsvergelijking

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$



# Integratie van de bewegingsvergelijking

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\int \rho v \frac{dv}{ds} ds + \int \frac{dp}{ds} ds + \int \rho g \frac{dz}{ds} ds = \text{Cst}$$

# Integratie van de bewegingsvergelijking

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\int \rho v \frac{dv}{ds} ds + \int \frac{dp}{ds} ds + \int \rho g \frac{dz}{ds} ds = \text{Cst}$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = \text{Cst} \tag{4}$$

# Bernoulli

# Bernoulli

- stationaire stroming

# Bernoulli

- stationaire stroming
- langs een stroomlijn

# Bernoulli

- stationaire stroming
- langs een stroomlijn
- niet-viskeuze stroming

# Bernoulli

- stationaire stroming
- langs een stroomlijn
- niet-viskeuze stroming
- constante dichtheid

# Bernoulli

- stationaire stroming
- langs een stroomlijn
- niet-viskeuze stroming
- constante dichtheid

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{Cst}$$



# Mechanisch arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

# Mechanisch arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

$$\int_1^2 \rho v \frac{dv}{ds} ds = - \int_1^2 \frac{dp}{ds} ds - \int_1^2 \rho g \frac{dz}{ds} ds$$

# Mechanisch arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

$$\int_1^2 \rho v \frac{dv}{ds} ds = - \int_1^2 \frac{dp}{ds} ds - \int_1^2 \rho g \frac{dz}{ds} ds$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}$$

$$\rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -(p_2 - p_1) - \rho g (z_2 - z_1)$$

# Mechanisch arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

$$\int_1^2 \rho v \frac{dv}{ds} ds = - \int_1^2 \frac{dp}{ds} ds - \int_1^2 \rho g \frac{dz}{ds} ds$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}$$

$$\rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -(p_2 - p_1) - \rho g (z_2 - z_1)$$

$$\rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + (p_2 - p_1) + \rho g (z_2 - z_1) = 0 \quad (5)$$

# Energiebeschouwingen en irreversibiliteit

$$\dot{m}(u_u + \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u) - \dot{m}(u_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i) = \dot{Q} - \dot{W}_a$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}, \dot{Q} = 0, \dot{W}_a = 0$$

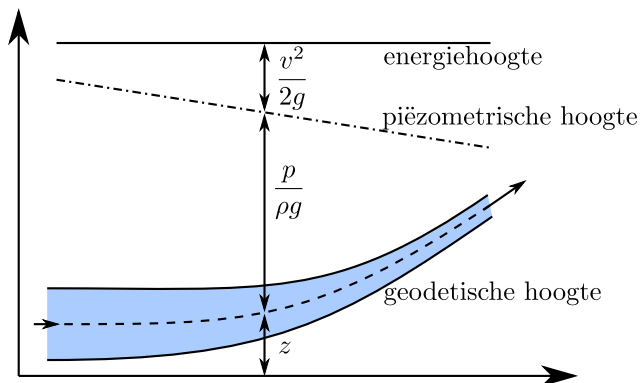
$$u_u + \frac{p_u}{\rho} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u = u_i + \frac{p_i}{\rho} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i$$

$$\rho u + p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{Cst}$$

vs

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{Cst}$$

# Grafische voorstelling



# Toepassing

