Fluïdummechanica

Gelijkvormigheid en dimensieloze getallen

Brecht Baeten[1]

[1]KU Leuven, Technologie campus Diepenbeek,
e-mail: brecht.baeten@kuleuven.be

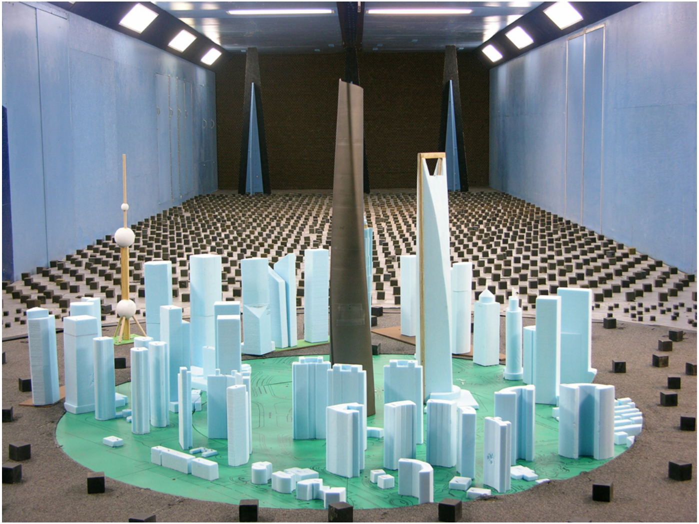
18 oktober 2016

Inhoud

Voorbeeld

Bron: http://www.nasa.gov/

Voorbeeld



Bron: http://www.autodesk.com/

Inhoud

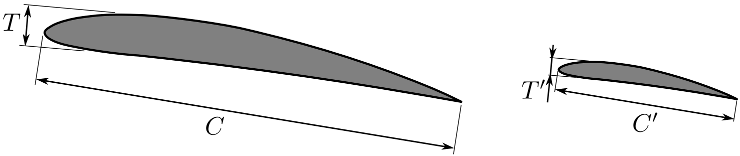
Wat is gelijkvormigheid?

Bron: http://7-themes.com/

Wat is gelijkvormigheid?

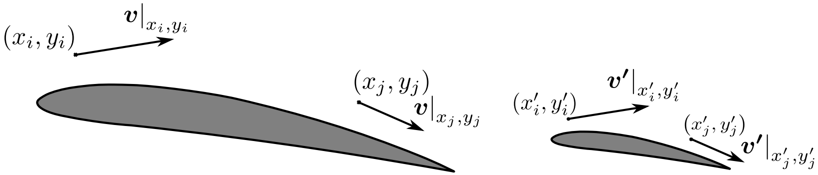
Wat is gelijkvormigheid?

- Gelijke verhoudingen van afstanden



Wat is gelijkvormigheid?

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden



Inhoud

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & s^* D_{\text{ref}} \\ v & = & v^* v_{\text{ref}} \\ t & = & t^* t_{\text{ref}} \\ p & = & p^* p_{\text{ref}} \end{array}$$

$$\rho \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial t^* t_{\text{ref}}} + \rho v^* v_{\text{ref}} \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} = -\frac{\partial p^* p_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^{*2} D_{\text{ref}}^2}$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & s^* D_{\text{ref}} \\ v & = & v^* v_{\text{ref}} \\ t & = & t^* t_{\text{ref}} \\ p & = & p^* p_{\text{ref}} \end{array}$$

$$\rho\frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial t^* t_{\text{ref}}} + \rho v^* v_{\text{ref}}\frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} = -\frac{\partial p^* p_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} + \rho g_s + \mu\frac{\partial^2 v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^{*2} D_{\text{ref}}^2}$$

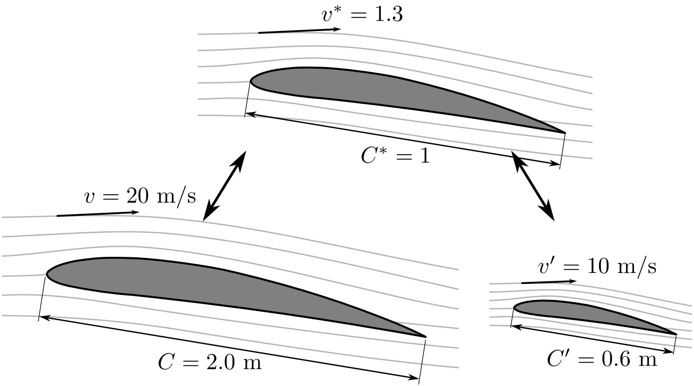
$$\frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}}\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}} v^*\frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}}\frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \rho g_s + \frac{\mu v_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}^2}\frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}}$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\mathsf{ref}}}{\rho v_{\mathsf{ref}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{g_s D_{\mathsf{ref}}}{v_{\mathsf{ref}}^2} + \frac{\mu}{\rho v_{\mathsf{ref}} D_{\mathsf{ref}}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{1}$$

Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\text{ref}}}{\rho v_{\text{ref}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{g_s D_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} + \frac{\mu}{\rho v_{\text{ref}} D_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \qquad (1)$$



Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\mathsf{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\mathsf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathsf{Re}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{2}$$

Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\mathrm{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\mathrm{Fr}^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{2}$$

Dimensieloze getallen zijn verhoudingen van referentiewaarden voor krachten

Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\mathsf{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\mathsf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathsf{Re}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{2}$$

Dimensieloze getallen zijn verhoudingen van referentiewaarden voor krachten

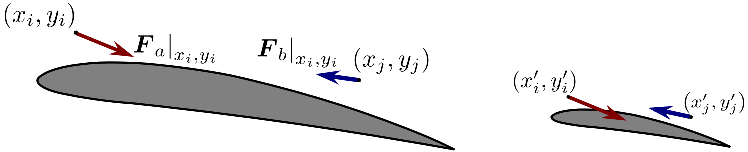
$$\begin{aligned}
\mathsf{Re} &= \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{vD}{\nu} &&= \frac{\text{traagheidskracht}}{\text{viskeuze krachten}} \\
\mathsf{Eu} &= \frac{p}{\rho v^2} &&= \frac{\text{drukkracht}}{\text{traagheidskracht}} \\
\mathsf{Fr} &= \frac{v}{\sqrt{gD}} &&= \sqrt{\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{zwaartekracht}}}
\end{aligned}$$

Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden

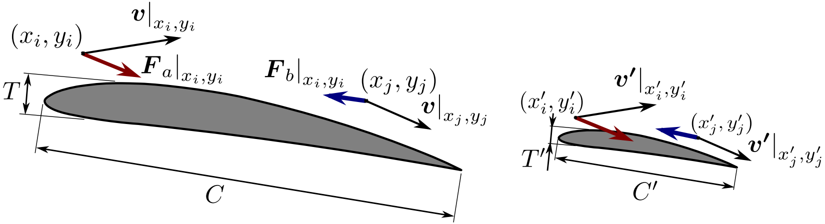
Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden
- Gelijke verhoudingen van krachten



Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden
- Gelijke verhoudingen van krachten



$$\text{Re} = \text{Re}', \quad \text{Eu} = \text{Eu}', \quad \text{Fr} = \text{Fr}'$$

Dimensieloze getallen

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c}$$

$$\mathrm{St} = \frac{fD}{v}$$

Dimensieloze getallen

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2} \qquad \mathrm{Nu} = \frac{hD}{k}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}} \qquad \mathrm{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2}$$

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c} \qquad \mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr}$$

$$\mathrm{St} = \frac{fD}{v}$$

Dimensieloze getallen

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c}$$

$$\mathrm{St} = \frac{fD}{v}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{hD}{k}$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2}$$

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr}$$

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \simeq \frac{p}{\rho N^2 D^2}$$

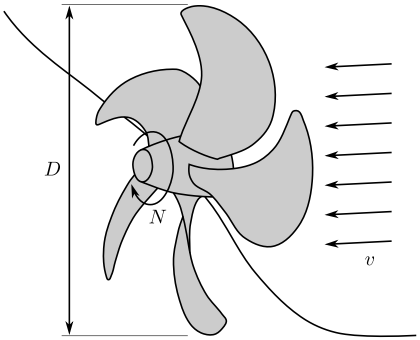
$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 A} \simeq \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 D^2}$$

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho v^3 D^2} \simeq \frac{P}{\rho N^3 D^5}$$

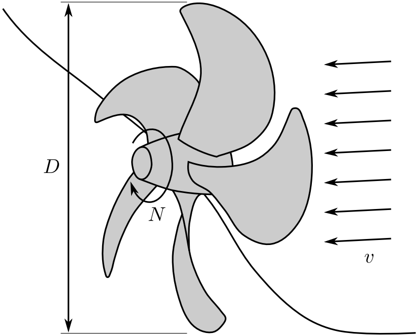
$$C_{\dot V} = \frac{\dot V}{v D^2} \simeq \frac{\dot V}{N D^3}$$

Inhoud

Voorbeeld

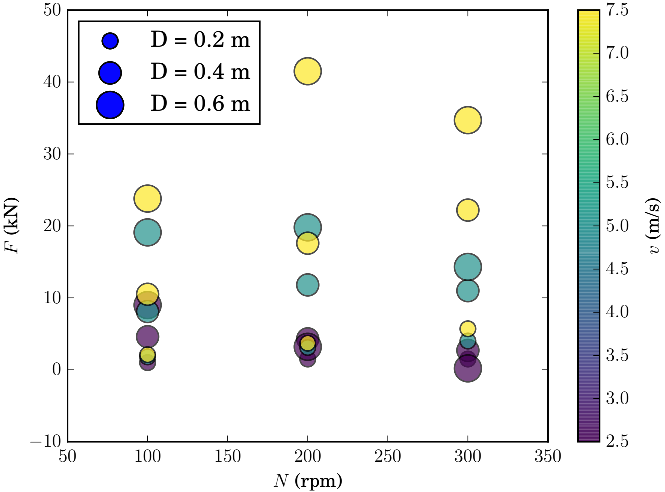


Voorbeeld



Meting	N (rpm)	D (m)	v (m/s)	F (kN)
1	100	0.20	2.5	1.0
2	200	0.20	2.5	1.5
3	300	0.20	2.5	1.5
4	100	0.40	2.5	4.6
5	200	0.40	2.5	4.3
6	300	0.40	2.5	2.7
7	100	0.60	2.5	9.0
8	200	0.60	2.5	3.2
9	300	0.60	2.5	0.2
10	100	0.20	5.0	1.8
11	200	0.20	5.0	3.1
12	300	0.20	5.0	4.0
13	100	0.40	5.0	8.1
14	200	0.40	5.0	11.8
15	300	0.40	5.0	11.0
16	100	0.60	5.0	19.1
17	200	0.60	5.0	19.8
18	300	0.60	5.0	14.3
19	100	0.20	7.5	2.1
20	200	0.20	7.5	3.7
21	300	0.20	7.5	5.7
22	100	0.40	7.5	10.5
23	200	0.40	7.5	17.6
24	300	0.40	7.5	22.2
25	100	0.60	7.5	23.8
26	200	0.60	7.5	41.5
27	300	0.60	7.5	34.7

Voorbeeld


D = 0.2 m
D = 0.4 m
D = 0.6 m
50
40
30
20
10
0
−10
50
100
150
200
250
300
350
F (kN)
N (rpm)
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
v (m/s)

Eenheden

Grootheid	Dimensie	Eenheid
Lengte	L	m
Massa	M	kg
Tijd	T	s
Dichtheid	ML^{-3}	kg/m^3
Druk	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2
Dynamische viscositeit	$MT^{-1}L^{-1}$	Pas
Energie (arbeid)	ML^2T^{-2}	J
Impuls	MLT^{-1}	kgm/s
Kinematische viscositeit	L^2T^{-1}	m^2/s
Kracht	MLT^{-2}	N
Snelheid	LT^{-1}	m/s
Vermogen	ML^2T^{-3}	J/s
Versnelling	LT^{-2}	m/s^2
Volume	L^3	m^3

Buckingham-Pi theorema

Een relatie:

$$a = f\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$$

met k grootheden met onafhankelijke dimensies

Buckingham-Pi theorema

Een relatie:

$$a = f\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$$

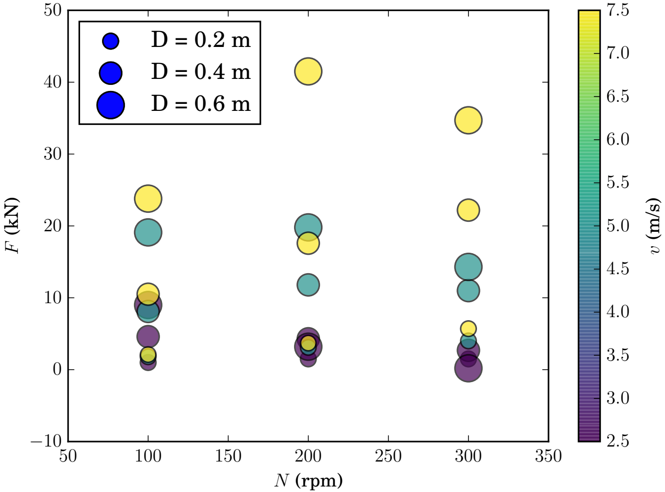
met k grootheden met onafhankelijke dimensies

kan herschreven worden als:

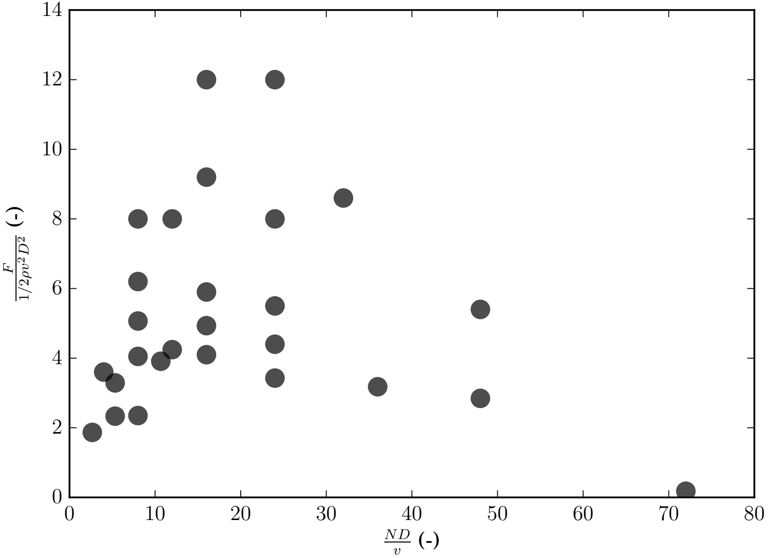
$$\pi = f\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-k}\right)$$

met $\pi, \pi_1, \ldots, \pi_{n-k}$ dimensieloze grootheden

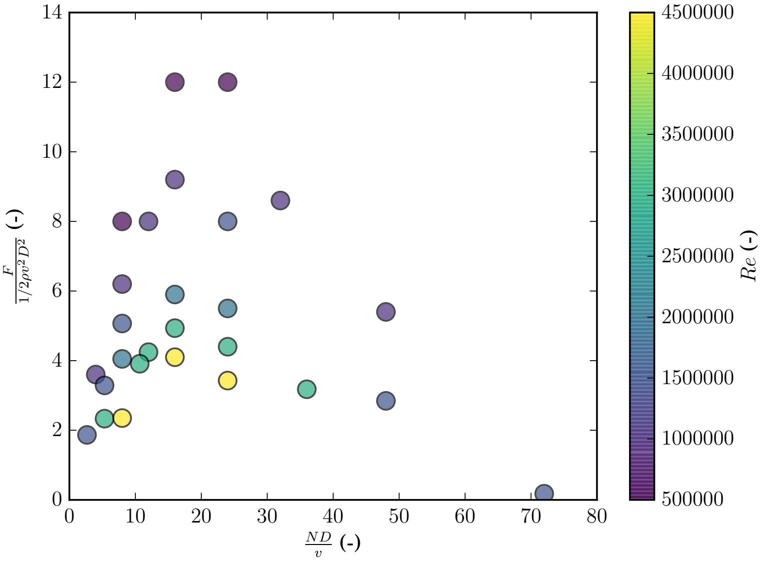
Voorbeeld


D = 0.2 m
D = 0.4 m
D = 0.6 m
F (kN)
N (rpm)
v (m/s)
50
40
30
20
10
0
−10
50
100
150
200
250
300
350
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5

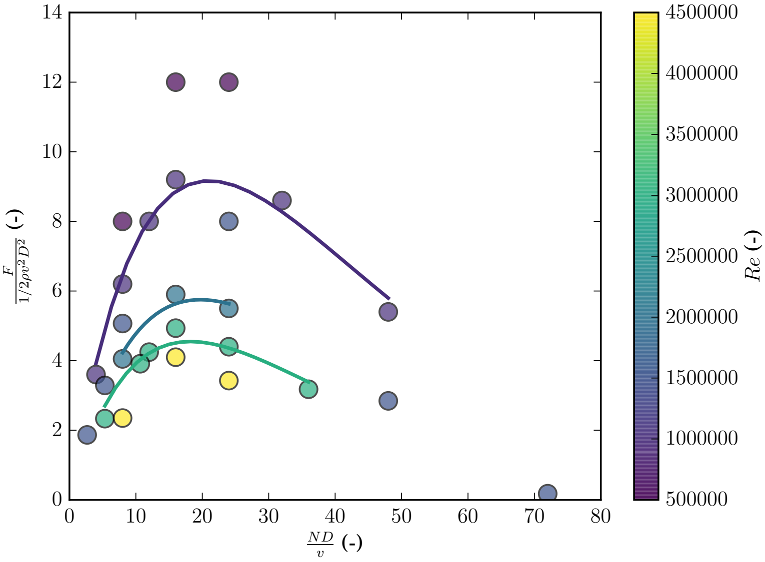
Voorbeeld



Voorbeeld


14
12
10
8
6
4
2
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80
$\frac{F}{1/2\rho v^2 D^2}$ (-)
$\frac{ND}{v}$ (-)
4500000
4000000
3500000
3000000
2500000
2000000
1500000
1000000
500000
Re (-)

Voorbeeld


$\frac{F}{1/2\rho v^2 D^2}$ (-)
$\frac{ND}{v}$ (-)
Re (-)
0
2
4
6
8
10
12
14
0
10
20
30
40
50
60
70
80
500000
1000000
1500000
2000000
2500000
3000000
3500000
4000000
4500000