# Fluïdummechanica

## Gelijkvormigheid en dimensieloze getallen

Brecht Baeten[1]

[1]KU Leuven, Technologie campus Diepenbeek,
e-mail: brecht.baeten@kuleuven.be

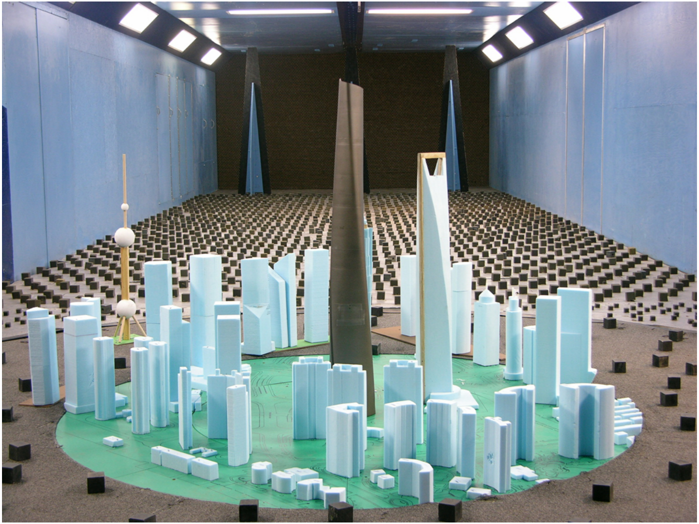
18 oktober 2016

# Inhoud

# Voorbeeld

Bron: http://www.nasa.gov/

# Voorbeeld



Bron: http://www.autodesk.com/

# Inhoud

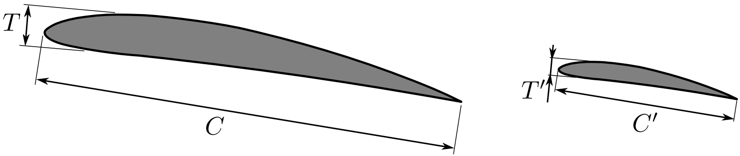
# Wat is gelijkvormigheid?


Bron: http://7-themes.com/

# Wat is gelijkvormigheid?

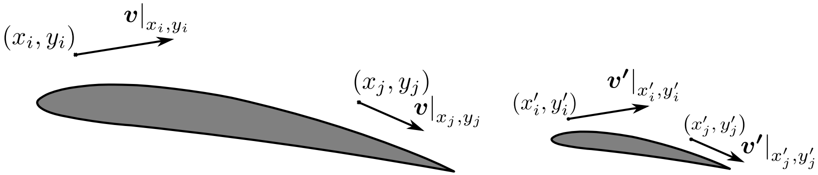
# Wat is gelijkvormigheid?

- Gelijke verhoudingen van afstanden



# Wat is gelijkvormigheid?

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden



# Inhoud

# Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

# Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{rcl} s &=& s^* D_{\text{ref}} \\ v &=& v^* v_{\text{ref}} \\ t &=& t^* t_{\text{ref}} \\ p &=& p^* p_{\text{ref}} \end{array}$$

$$\rho\frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial t^* t_{\text{ref}}} + \rho v^* v_{\text{ref}}\frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} = -\frac{\partial p^* p_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} + \rho g_s + \mu\frac{\partial^2 v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^{*2} D_{\text{ref}}^2}$$

# Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & s^* D_{\text{ref}} \\ v & = & v^* v_{\text{ref}} \\ t & = & t^* t_{\text{ref}} \\ p & = & p^* p_{\text{ref}} \end{array}$$

$$\rho \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial t^* t_{\text{ref}}} + \rho v^* v_{\text{ref}} \frac{\partial v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} = -\frac{\partial p^* p_{\text{ref}}}{\partial s^* D_{\text{ref}}} + \rho g_s + \mu \frac{\partial^2 v^* v_{\text{ref}}}{\partial s^{*2} D_{\text{ref}}^2}$$

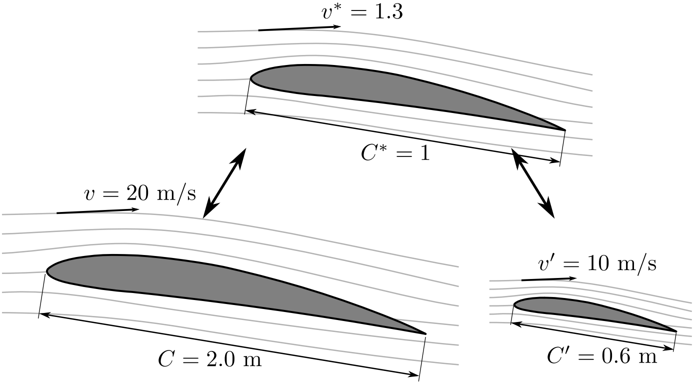
$$\frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\rho v_{\text{ref}}^2}{D_{\text{ref}}} v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \rho g_s + \frac{\mu v_{\text{ref}}}{D_{\text{ref}}^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}}$$

# Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\mathsf{ref}}}{\rho v_{\mathsf{ref}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{g_s D_{\mathsf{ref}}}{v_{\mathsf{ref}}^2} + \frac{\mu}{\rho v_{\mathsf{ref}} D_{\mathsf{ref}}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{1}$$

# Het dimensieloos maken van de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\frac{p_{\text{ref}}}{\rho v_{\text{ref}}^2} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{g_s D_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}^2} + \frac{\mu}{\rho v_{\text{ref}} D_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \qquad (1)$$



# Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\mathsf{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\mathsf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathsf{Re}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{2}$$

# Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\mathsf{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\mathsf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathsf{Re}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{2}$$

Dimensieloze getallen zijn verhoudingen van referentiewaarden voor krachten

# Dimensieloze getallen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial s^*} = -\mathsf{Eu} \frac{\partial p^*}{\partial s^*} + \frac{1}{\mathsf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathsf{Re}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial s^{*2}} \tag{2}$$

Dimensieloze getallen zijn verhoudingen van referentiewaarden voor krachten

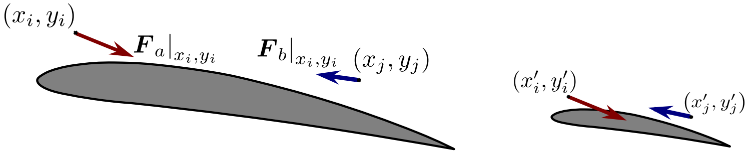
$$\begin{aligned}
\mathsf{Re} &= \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{vD}{\nu} = \frac{\text{traagheidskracht}}{\text{viskeuze krachten}} \\
\mathsf{Eu} &= \frac{p}{\rho v^2} \qquad\qquad = \frac{\text{drukkracht}}{\text{traagheidskracht}} \\
\mathsf{Fr} &= \frac{v}{\sqrt{gD}} \qquad\qquad = \sqrt{\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{zwaartekracht}}}
\end{aligned}$$

# Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden

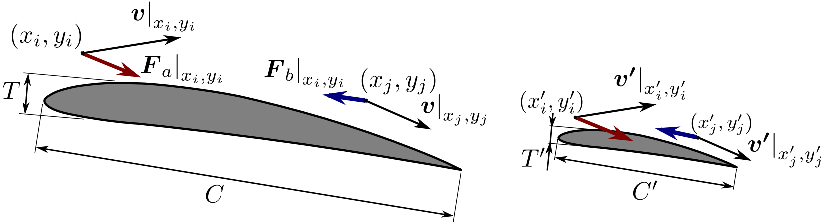
# Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden
- Gelijke verhoudingen van krachten



# Dimensieloze getallen en gelijkvormigheid

- Gelijke verhoudingen van afstanden
- Gelijke verhoudingen van snelheden
- Gelijke verhoudingen van krachten




$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}', \quad \mathrm{Eu} = \mathrm{Eu}', \quad \mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}'$$

# Dimensieloze getallen

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c}$$

$$\mathrm{St} = \frac{fD}{v}$$

# Dimensieloze getallen

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2} \qquad \mathrm{Nu} = \frac{hD}{k}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}} \qquad \mathrm{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2}$$

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c} \qquad \mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr}$$

$$\mathrm{St} = \frac{fD}{v}$$

# Dimensieloze getallen

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c}$$

$$\mathrm{St} = \frac{fD}{v}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{hD}{k}$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2}$$

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr}$$

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \simeq \frac{p}{\rho N^2 D^2}$$

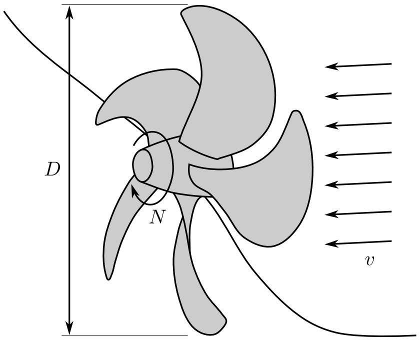
$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 A} \simeq \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 D^2}$$

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho v^3 D^2} \simeq \frac{P}{\rho N^3 D^5}$$

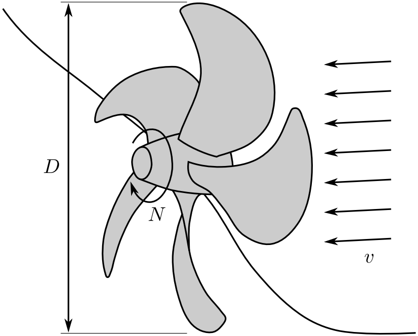
$$C_{\dot{V}} = \frac{\dot{V}}{vD^2} \simeq \frac{\dot{V}}{ND^3}$$

# Inhoud

# Voorbeeld

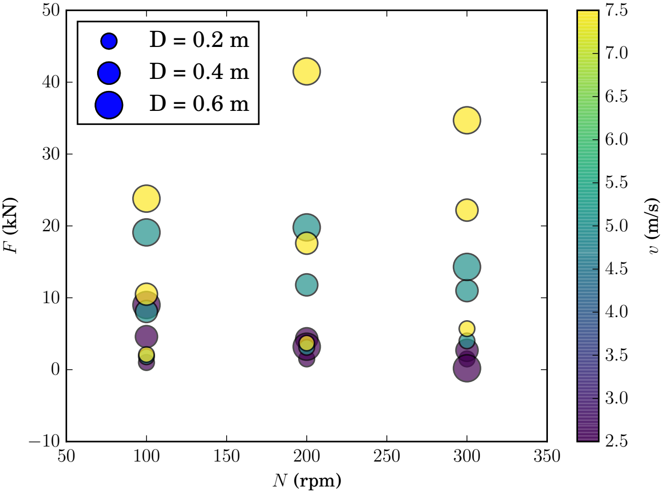


# Voorbeeld




| Meting | $N$ (rpm) | $D$ (m) | $v$ (m/s) | $F$ (kN) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 0.20 | 2.5 | 1.0 |
| 2 | 200 | 0.20 | 2.5 | 1.5 |
| 3 | 300 | 0.20 | 2.5 | 1.5 |
| 4 | 100 | 0.40 | 2.5 | 4.6 |
| 5 | 200 | 0.40 | 2.5 | 4.3 |
| 6 | 300 | 0.40 | 2.5 | 2.7 |
| 7 | 100 | 0.60 | 2.5 | 9.0 |
| 8 | 200 | 0.60 | 2.5 | 3.2 |
| 9 | 300 | 0.60 | 2.5 | 0.2 |
| 10 | 100 | 0.20 | 5.0 | 1.8 |
| 11 | 200 | 0.20 | 5.0 | 3.1 |
| 12 | 300 | 0.20 | 5.0 | 4.0 |
| 13 | 100 | 0.40 | 5.0 | 8.1 |
| 14 | 200 | 0.40 | 5.0 | 11.8 |
| 15 | 300 | 0.40 | 5.0 | 11.0 |
| 16 | 100 | 0.60 | 5.0 | 19.1 |
| 17 | 200 | 0.60 | 5.0 | 19.8 |
| 18 | 300 | 0.60 | 5.0 | 14.3 |
| 19 | 100 | 0.20 | 7.5 | 2.1 |
| 20 | 200 | 0.20 | 7.5 | 3.7 |
| 21 | 300 | 0.20 | 7.5 | 5.7 |
| 22 | 100 | 0.40 | 7.5 | 10.5 |
| 23 | 200 | 0.40 | 7.5 | 17.6 |
| 24 | 300 | 0.40 | 7.5 | 22.2 |
| 25 | 100 | 0.60 | 7.5 | 23.8 |
| 26 | 200 | 0.60 | 7.5 | 41.5 |
| 27 | 300 | 0.60 | 7.5 | 34.7 |

# Voorbeeld


D = 0.2 m
D = 0.4 m
D = 0.6 m
F (kN)
N (rpm)
v (m/s)
50
40
30
20
10
0
−10
50
100
150
200
250
300
350
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5

# Eenheden

| Grootheid | Dimensie | Eenheid |
|---|---|---|
| Lengte | $L$ | $m$ |
| Massa | $M$ | $kg$ |
| Tijd | $T$ | $s$ |
| Dichtheid | $ML^{-3}$ | $kg/m^3$ |
| Druk | $ML^{-1}T^{-2}$ | $N/m^2$ |
| Dynamische viscositeit | $MT^{-1}L^{-1}$ | $Pas$ |
| Energie (arbeid) | $ML^2T^{-2}$ | $J$ |
| Impuls | $MLT^{-1}$ | $kgm/s$ |
| Kinematische viscositeit | $L^2T^{-1}$ | $m^2/s$ |
| Kracht | $MLT^{-2}$ | $N$ |
| Snelheid | $LT^{-1}$ | $m/s$ |
| Vermogen | $ML^2T^{-3}$ | $J/s$ |
| Versnelling | $LT^{-2}$ | $m/s^2$ |
| Volume | $L^3$ | $m^3$ |

# Buckingham-Pi theorema

Een relatie:

$$a = f\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$$

met $k$ grootheden met onafhankelijke dimensies

# Buckingham-Pi theorema

Een relatie:

$$a = f\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$$

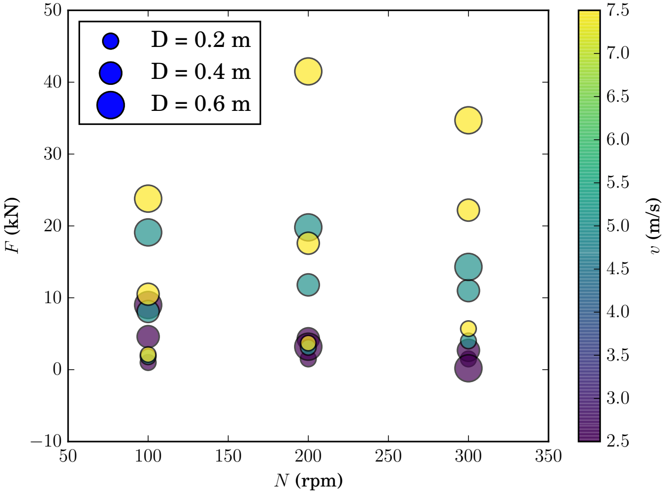
met $k$ grootheden met onafhankelijke dimensies

kan herschreven worden als:

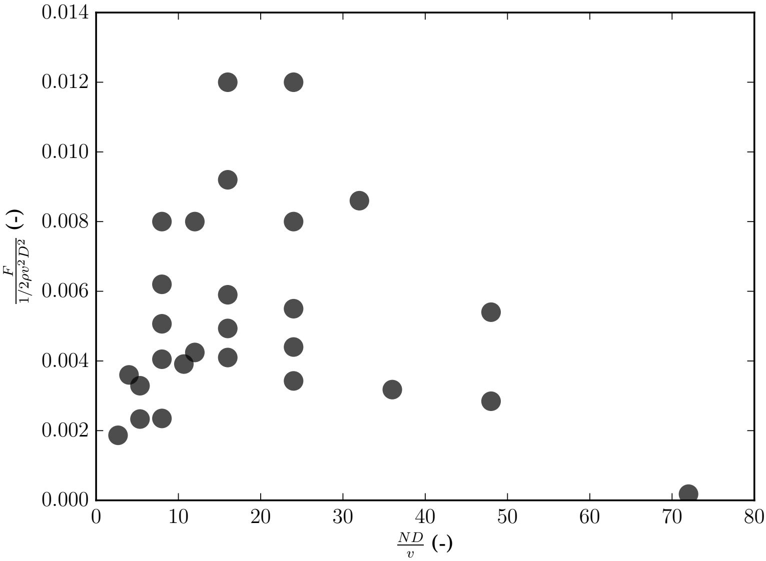
$$\pi = f\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-k}\right)$$

met $\pi, \pi_1, \ldots, \pi_{n-k}$ dimensieloze grootheden

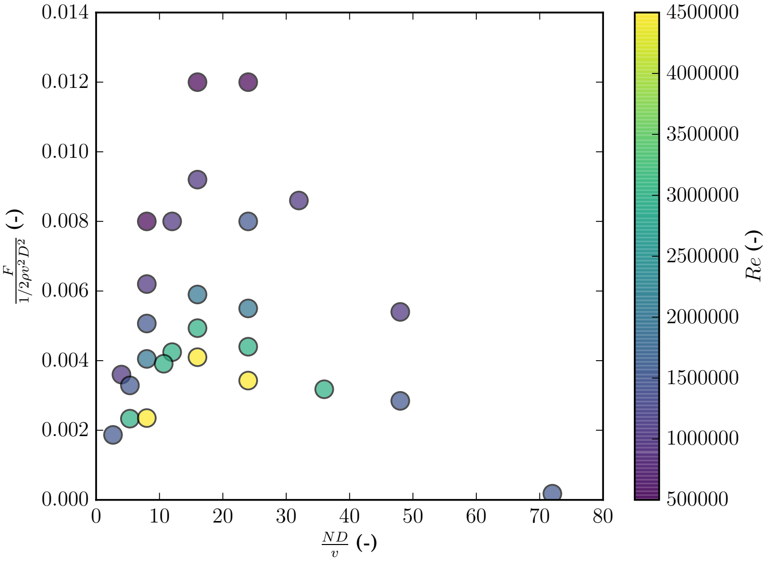
# Voorbeeld


D = 0.2 m
D = 0.4 m
D = 0.6 m
$F$ (kN)
$N$ (rpm)
$v$ (m/s)
50
40
30
20
10
0
−10
50
100
150
200
250
300
350
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5

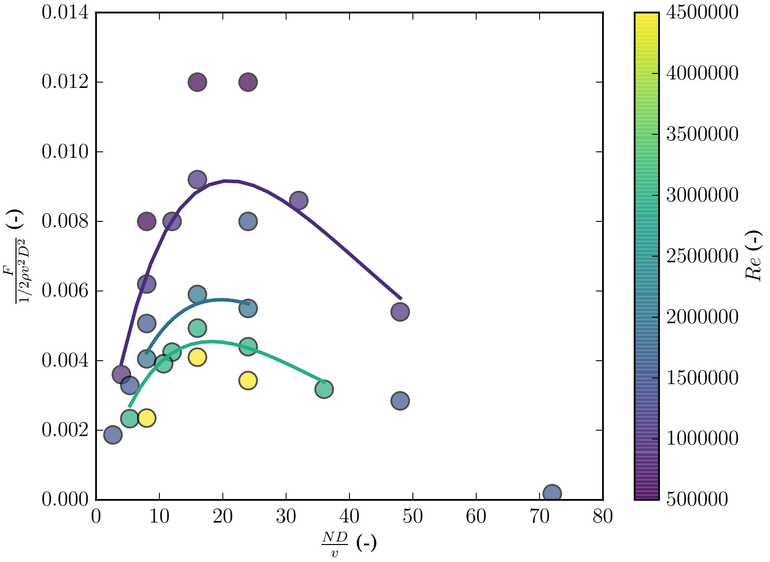
# Voorbeeld


0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0 10 20 30 40 50 60 70 80
$\frac{F}{1/2\rho v^2 D^2}$ (-)
$\frac{ND}{v}$ (-)

# Voorbeeld


0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0
10
20
30
40
50
60
70
80
$\frac{F}{1/2\rho v^2 D^2}$ (-)
$\frac{ND}{v}$ (-)
4500000
4000000
3500000
3000000
2500000
2000000
1500000
1000000
500000
$Re$ (-)

# Voorbeeld


0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
$\frac{F}{1/2\rho v^2 D^2}$ (-)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
$\frac{ND}{v}$ (-)
4500000
4000000
3500000
3000000
2500000
2000000
1500000
1000000
500000
$Re$ (-)