

Fluïdummechanica

Behoudsvergelijkingen langs stroomlijnen

Brecht Baeten¹

¹KU Leuven, Technologie campus Diepenbeek,
e-mail: brecht.baeten@kuleuven.be

29 november 2016

Inhoud

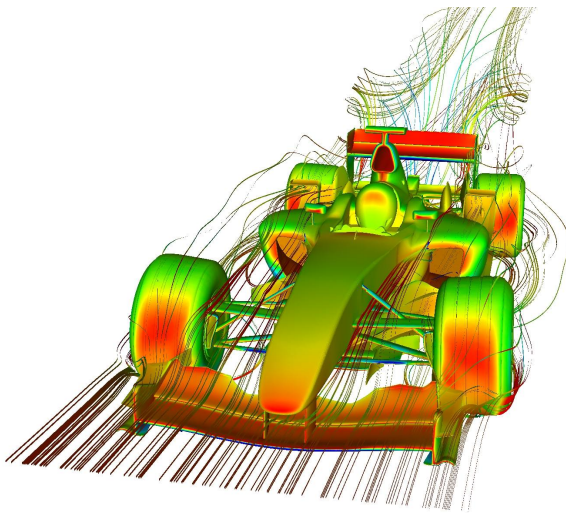
1 Inleiding

2 Bewegingsvergelijking

3 Bernoulli

4 Navier-Stokes

Voorbeeld



Bron: <http://www.dalco.ch/>

Inhoud

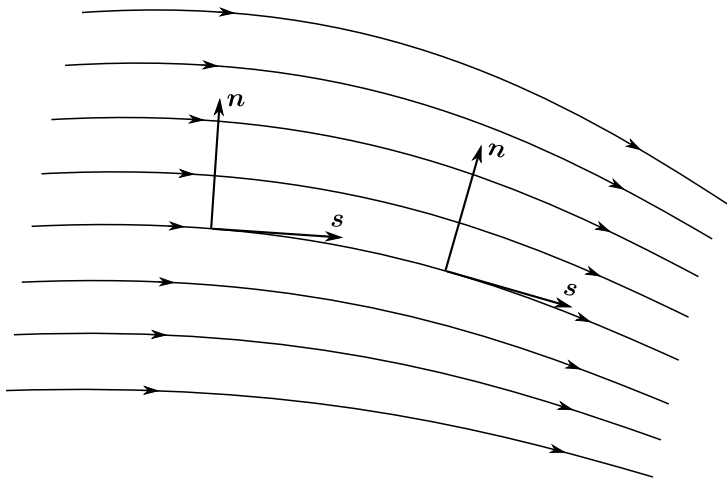
1 Inleiding

2 Bewegingsvergelijking

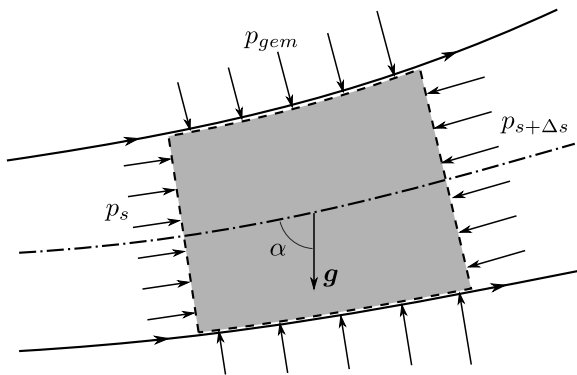
3 Bernoulli

4 Navier-Stokes

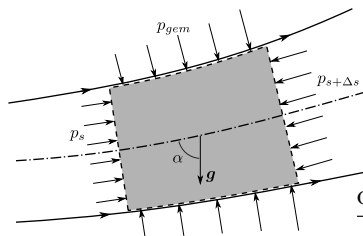
Stroomlijncoördinaten



Bewegingsvergelijking

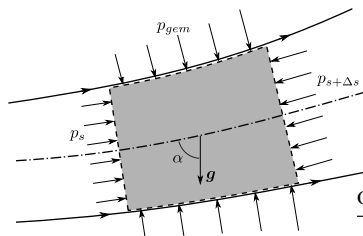


Bewegingsvergelijking



$$\frac{d\mathbf{P}_{CV}}{dt} + \dot{\mathbf{P}}_{\partial CV} = \mathbf{F}$$

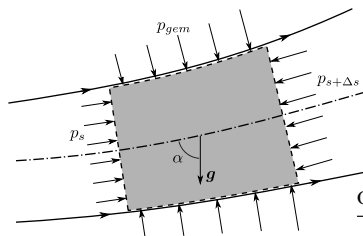
Bewegingsvergelijking



$$\frac{d\mathbf{P}_{CV}}{dt} + \dot{\mathbf{P}}_{\partial CV} = \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \rho v v_{\perp} A|_{s+\Delta s} - \rho v v_{\perp} A|_s &= p A|_s - p A|_{s+\Delta s} \\ &+ p_{gem} (A|_{s+\Delta s} - A|_s) - \rho g A_{gem} \Delta s \cos \alpha \end{aligned}$$

Bewegingsvergelijking

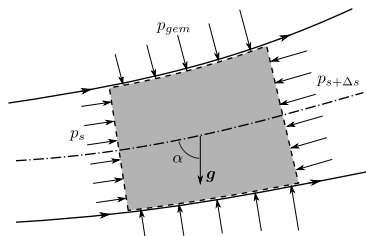


$$\frac{d\mathbf{P}_{CV}}{dt} + \dot{\mathbf{P}}_{\partial CV} = \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \rho v v_{\perp} A|_{s+\Delta s} - \rho v v_{\perp} A|_s &= pA|_s - pA|_{s+\Delta s} \\ &+ p_{gem}(A|_{s+\Delta s} - A|_s) - \rho g A_{gem} \Delta s \cos \alpha \end{aligned}$$

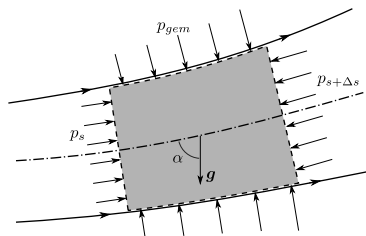
$$\begin{aligned} \frac{\rho v v A|_{s+\Delta s} - \rho v v A|_s}{\Delta s} &= - \frac{pA|_{s+\Delta s} - pA|_s}{\Delta s} \\ &+ p_{gem} \frac{A|_{s+\Delta s} - A|_s}{\Delta s} - \rho g A_{gem} \frac{z|_{s+\Delta s} - z|_s}{\Delta s} \end{aligned}$$

Bewegingsvergelijking



$$\frac{dpvA}{ds} = -\frac{dpA}{ds} + p\frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

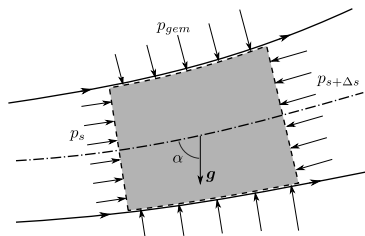
Bewegingsvergelijking



$$\frac{d\rho v v A}{ds} = -\frac{dp A}{ds} + p \frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

$$\rho v A \frac{dv}{ds} + v \frac{d\rho v A}{ds} = -A \frac{dp}{ds} - p \frac{dA}{ds} + p \frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

Bewegingsvergelijking



$$\frac{dpvA}{ds} = -\frac{dpA}{ds} + p\frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

$$\rho v A \frac{dv}{ds} + v \frac{dpvA}{ds} = -A \frac{dp}{ds} - p \frac{dA}{ds} + p \frac{dA}{ds} - \rho g A \frac{dz}{ds}$$

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0 \quad (1)$$

Deeltjesversnelling

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

Deeltjesversnelling

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

Inhoud

1 Inleiding

2 Bewegingsvergelijking

3 Bernoulli

4 Navier-Stokes

Integratie van de bewegingsvergelijking

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

Integratie van de bewegingsvergelijking

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\int \rho v \frac{dv}{ds} ds + \int \frac{dp}{ds} ds + \int \rho g \frac{dz}{ds} ds = \text{Cst}$$

Integratie van de bewegingsvergelijking

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\int \rho v \frac{dv}{ds} ds + \int \frac{dp}{ds} ds + \int \rho g \frac{dz}{ds} ds = \text{Cst}$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = \text{Cst} \tag{4}$$

Bernoulli

Bernoulli

- Stationaire stroming

Bernoulli

- Stationaire stroming
- Langs een stroomlijn

Bernoulli

- Stationaire stroming
- Langs een stroomlijn
- Niet-viskeuze stroming

Bernoulli

- Stationaire stroming
- Langs een stroomlijn
- Niet-viskeuze stroming
- Niet-samendrukbare stroming

Bernoulli

- Stationaire stroming
- Langs een stroomlijn
- Niet-viskeuze stroming
- Niet-samendrukbare stroming

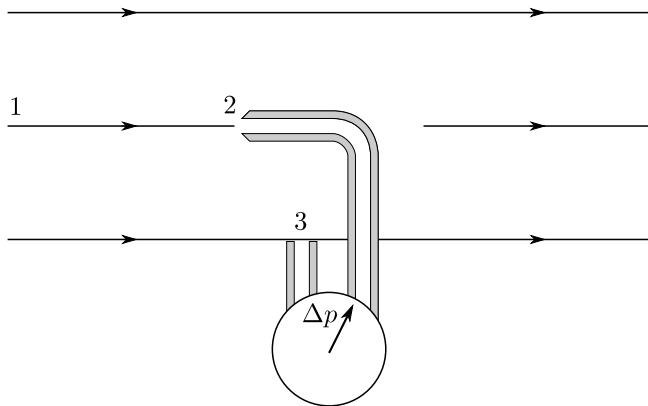
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{Cst}$$

Toepassing

Pitot-Statisch buis

Toepassing

Pitot-Statisch buis



Toepassing



Bron: <http://www.edwardsflighttest.com/>

Mechanische arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

Mechanische arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

$$\int_1^2 \rho v \frac{dv}{ds} ds = - \int_1^2 \frac{dp}{ds} ds - \int_1^2 \rho g \frac{dz}{ds} ds$$

Mechanische arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

$$\int_1^2 \rho v \frac{dv}{ds} ds = - \int_1^2 \frac{dp}{ds} ds - \int_1^2 \rho g \frac{dz}{ds} ds$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}$$

$$\rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -(p_2 - p_1) - \rho g (z_2 - z_1)$$

Mechanische arbeid van een deeltje

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

$$W = \int_1^2 F ds$$

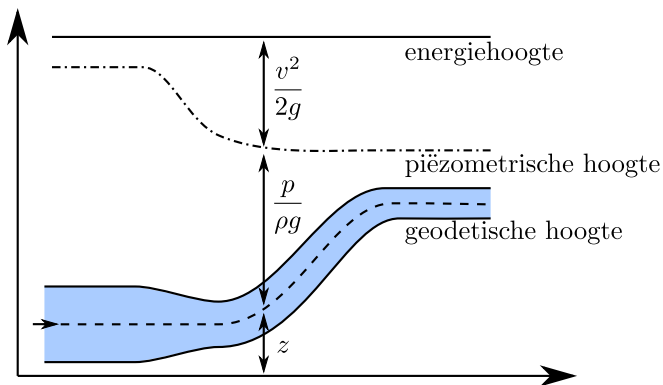
$$\int_1^2 \rho v \frac{dv}{ds} ds = - \int_1^2 \frac{dp}{ds} ds - \int_1^2 \rho g \frac{dz}{ds} ds$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}$$

$$\rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -(p_2 - p_1) - \rho g (z_2 - z_1)$$

$$\rho \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + (p_2 - p_1) + \rho g (z_2 - z_1) = 0 \quad (5)$$

Grafische voorstelling



Energiebeschouwingen en irreversibiliteit

$$\dot{m}\left(u_u + \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u\right) - \dot{m}\left(u_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i\right) = \dot{Q} - \dot{W}_a$$

Energiebeschouwingen en irreversibiliteit

$$\dot{m}\left(u_u + \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u\right) - \dot{m}\left(u_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i\right) = \dot{Q} - \dot{W}_a$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}, \dot{Q} = 0, \dot{W}_a = 0$$

$$u_u + \frac{p_u}{\rho} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u = u_i + \frac{p_i}{\rho} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i$$

Energiebeschouwingen en irreversibiliteit

$$\dot{m}\left(u_u + \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u\right) - \dot{m}\left(u_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i\right) = \dot{Q} - \dot{W}_a$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}, \dot{Q} = 0, \dot{W}_a = 0$$

$$u_u + \frac{p_u}{\rho} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u = u_i + \frac{p_i}{\rho} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i$$

$$\rho(u_u - u_i) + (p_u - p_i) + \frac{1}{2}\rho(v_u^2 - v_i^2) + \rho g(z_u - z_i) = 0$$

Energiebeschouwingen en irreversibiliteit

$$\dot{m}\left(u_u + \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u\right) - \dot{m}\left(u_i + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i\right) = \dot{Q} - \dot{W}_a$$

$$\Downarrow \quad \rho = \text{Cst}, \dot{Q} = 0, \dot{W}_a = 0$$

$$u_u + \frac{p_u}{\rho} + \frac{1}{2}v_u^2 + gz_u = u_i + \frac{p_i}{\rho} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i$$

$$\rho(u_u - u_i) + (p_u - p_i) + \frac{1}{2}\rho(v_u^2 - v_i^2) + \rho g(z_u - z_i) = 0$$

vs

$$(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) = 0$$

Inhoud

1 Inleiding

2 Bewegingsvergelijking

3 Bernoulli

4 Navier-Stokes

Navier-Stokes vergelijking

- Newtoniaanse vloeistof
- Niet-samendrukbare stroming

Navier-Stokes vergelijking

- Newtoniaanse vloeistof
- Niet-samendrukbare stroming

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6)$$

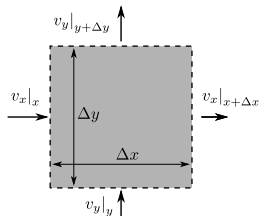
Navier-Stokes vergelijking

- Newtoniaanse vloeistof
- Niet-samendrukbare stroming

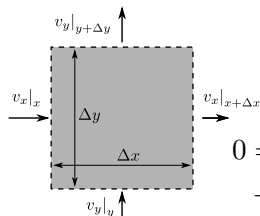
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Continuïteitsvergelijking

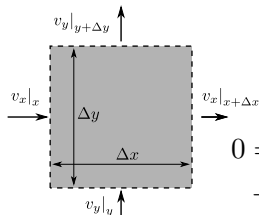


Continuïteitsvergelijking



$$\begin{aligned}
 0 = & (\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \\
 & + (\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z \\
 & + (\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

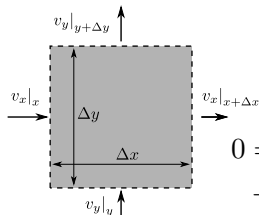
Continuïteitsvergelijking



$$\begin{aligned}
 0 &= (\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \\
 &\quad + (\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z \\
 &\quad + (\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z}$$

Continuïteitsvergelijking

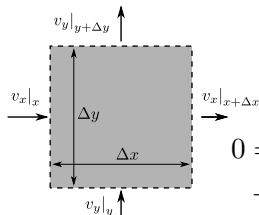


$$0 = (\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z \\ + (\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z \\ + (\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y$$

$$0 = \frac{\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

Continuïteitsvergelijking



$$0 = (\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z \\ + (\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z \\ + (\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y$$

$$0 = \frac{\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$