Домашняя работа №1

Бредихин Александр

17 февраля 2020 г.

Задача 1

- **a)** $n = \mathcal{O}(n \log n)$ - верно
  $\square$ По определению:
  $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \to f(n) < C \cdot g(n)$
  В нашем случае для функций $f(n) = n$ и $g(n) = n \log n$ выражение имеет вид: $n \leq Cn \log n \Longleftrightarrow 1 \leq C \log n$
  Возьмём $C = 1$ и N равное основанию логарифма. Тогда определение написанное выше верно, то есть логарифм больше либо равен константе. Следоватедьно $n = \mathcal{O}(n \log n)$ - верно по определению.

  $\blacksquare$

- **b)** $\exists \varepsilon > 0 : n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ - не верно.
  $\square$ Запишем отрицание определения $\Omega(g(n)) = f(n)$
  $\forall c > 0, \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N \to f(n) < C \cdot g(n)$
  Для наших функций $\forall \varepsilon : n \log n < C \cdot n^{1+\varepsilon} \longleftrightarrow \log n < Cn^{\varepsilon}$
  Докажем это, пользуясь правилом Лопиталя

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\varepsilon}}{\log n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon n^{\varepsilon-1} n}{1} = \lim_{n\to\infty} \varepsilon n^{\varepsilon} = \infty$$

  Значит, $\forall c, \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N \to \log n < Cn^{\varepsilon}$ - верно.
  Из отрицания определения следует, что ответ «нет, не верно»

  $\blacksquare$

Задача 2

a) Ответ: Да, возможно, например
$f(n) = n \log^2 n$, $g(n) = \log n \to h(x) = n \log n$ для такого примера оценки

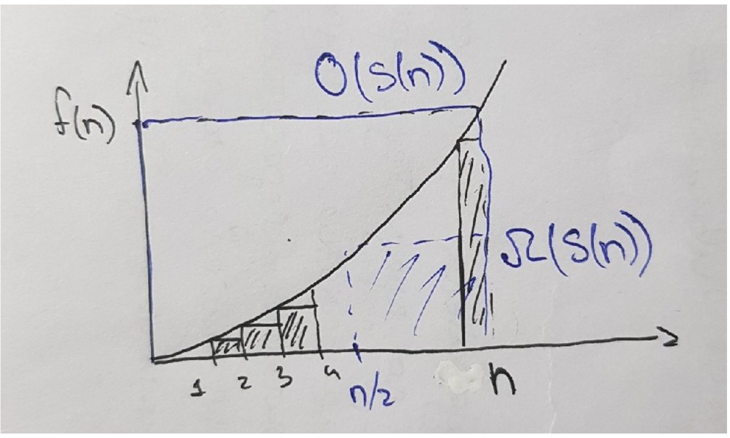
из условия на функции $f(n)$ и $g(n)$ верны
Значит, $h(n) = \Theta(n \log n)$ - верно.
P.s. Всем известно, что $\log n = \mathcal{O}(n)$, но почему $f(n) = n \log^2 n = \mathcal{O}(n^2)$? Это легко получить подсчитав предел используя правило Лопиталя и сделав несколько преобразований:
$n \log^2 n \le n^2 \Leftrightarrow \log^2 n \le n \longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\log^2 n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2\log n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$

b) Из условия задачи $f(n) \le C_1 n^2, g(n) \ge C_2, g(n) \le C_3 n$
Значит верхняя оценка для функции $h(n)$ такая:
$h(n) \le \frac{f(n)}{g(n)} \le \frac{C_1 n^2}{C_2} \Longrightarrow h(n) = \mathcal{O}(n^2)$
А хотим получить: $C' n^3 \le h(n) \le C'' n^3$. Из определения $\mathcal{O}(n^2)$ получаем, что такой $h(n)$ не существует.
Ответ: не возможно

Верхнюю оценку на $h(n)$ мы получили в пункте b): $h(n) = \mathcal{O}(n^2)$. Она достигается, например, когда $f(n) = 2n^2, g(n) = 2$
Нижний оценки на $h(n)$ не существует, так как функция $f(n)$ не ограничена снизу.

Задача 3

$S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i^3 + 2i + 5} = \sum\limits_{i=1}^{n} f(i)$
Аналогично семинарскому занятию, если мы построим график $f(n)$ от n, то площадь под этим графиком оценивается $S(n)$ (см. рисунок).



Её можно оценить сверху большим прямоугольником размером n и $f(n)$. То есть
$S(n) = \mathcal{O}(n \cdot f(n)) = \mathcal{O}(n^{\frac{5}{2}})$
так как $S(n) \leq n \cdot \sqrt{n^3 + 2 \cdot n + 5} \leq n \cdot n^{3/2} = n^{5/2}$
Снизу можно оценить прямоугольником под графиком размером $n/2$ и $f(n/2)$. Получается:
$S(n) \geqslant \frac{n}{2} \cdot \sqrt[2]{\frac{n^3}{8} + n + 5} \geqslant \frac{n}{2} \cdot \frac{n^{3/2}}{2^{3/2}} = \frac{n^{5/2}}{2^{5/2}} \Rightarrow S(n) = \Omega(n^{\frac{5}{2}})$
По определению точной оценки: $S(n) = \Theta(n^{\frac{5}{2}})$
Ответ: $S(n) = \Theta(n^{\frac{5}{2}})$

Задача 4

$f(n) = (3 + o(1))^n + \Theta\left(n^{100}\right) \to f(n) - (3 + o(1))^n = \Theta\left(n^{100}\right)$
Используем определение $\Theta(n)$:
$C_1 \cdot n^{100} \leq f(n) - (3 + o(1))^n \leq C_2 \cdot n^{100}$
Из бинома Ньютона и определения $o(1) = \alpha(n)$, где $\alpha(n)$ - бесконечно малая при $n \to \infty$, получаем, что
$(3 + o(1))^n = 3^n + C_n^1 3^{n-1} o(1) + \ldots + o(1)^n = 3^n + o(1) \simeq 3^n$
Следовательно: $C_1 \cdot n^{100} + 3^n \leq f(n) \leq C_2 \cdot n^{100} + 3^n$
Степенная функция растёт быстрее, чем полином, поэтому при больших n (начиная с некоторого N) неравенство принимает вид:
$C_3 \cdot 3^n \leq f(n) \leq C_4 \cdot 3^n$
Логарифмируя это неравенство получим:
$C_5 n \log(3) \leq \log(f(n)) \leq C_6 n \log(3) \Leftrightarrow C_7 n \leq \log(f(n)) \leq C_8 n$
Значит, $\log(f(n)) = \Theta(n)$ по определению.
Ответ: верно

Задача 5

Заметим, что 4ый цикл $for(j = 1; j < n; j* = 2)$ не зависит от предыдущих трёх, а его асимптотика(кол-во слов «алгоритм», которое распечатает этот цикл) – $\Theta(\log n)$
3ий цикл: $for(j = 0; j < i; j+ = 2)$ будет печатать $\frac{i}{2}$ слов «алгоритм»
Получается, чтобы определить кол-во слов «алгоритм», которые напечатает вся программа нужно найти такую сумму:
$\sum\limits_{b=1}^{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=0}^{b} \left(\frac{i}{2} + \log(n)\right) = \sum\limits_{b=1}^{\sqrt{n}} \frac{b(b+1)}{4} + (b+1) \cdot \log(n) = \sum\limits_{b=1}^{\sqrt{n}} \left(\frac{b^2}{4} + \frac{b}{4} + b \cdot \log(n) + \log(n)\right) =$
$\frac{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n}+1) \cdot (2\sqrt{n}+1)}{24} + \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}{8} + \log(n) \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n}+1)}{2} + \log(n) \cdot \sqrt{n}$

В последнем переходе использована формула суммы квадратов натуральных чисел от 1 до n. Учитывая, что при больших n можно учитывать самый быстроростущие слагаемое, получаем, что Θ-асиптотика равна $\Theta(n^{\frac{3}{2}})$
Ответ: $\Theta(n^{\frac{3}{2}})$