Домашняя работа №10

Бредихин Александр

26 апреля 2020 г.

Задача 1

Задача: в графе может быть несколько кратчайших путей между какими-то вершинами. Постройте линейный по времени алгоритм, находящий количество вершин, которые лежат хотя бы на одном кратчайшем пути из s в t в неориентированном графе с единичными весами на рёбрах.

Алгоритм: проведём два раза поиск в ширину:
1) Из вершины s (так как граф неореентированный и все веса на рёбрах равны 1, то глубина вершины v в дереве алгоритма обхода в ширину будет кратчайшим расстоянием до этой вершины). Для каждой вершины графа по полученному дереву запишем в словарь/массив - A кратчайший путь из вершины s до неё.
В этом массиве будет записано кратчайшее расстояние и для вершины t. Обозначим его за l
2) Из вершины t аналогично храним словарь - B, где для каждой вершины записано кратчайшее расстояние до неё из вершины t.
Теперь пробегаемся циклом по всем вершинам графа v и считаем количество тех для которых выполняется равенство: $A[v] + B[v] = l$. Это число и будет ответом на задачу: количество вершин, которое лежат хотя бы на одном кратчайшем пути из s в t

Докажем это: покажем верность утверждения в две стороны:

- если для $v \in V$ верно $A[v] + B[v] = l$, то она обязательно будет лежать на каком-нибудь из кратчайших путей (так как есть путь из s в t длины l, который проходит через эту вершину)

- если $v \in V$ лежиит на каком-нибудь кратчайшем пути, то будет верно $A[v] + B[v] = l$ (иначе это не кратчайший путь).

Получается мы считаем все нужные нам вершины и только их, проходясь последним циклом.

Сложность: 2 раза используем обход в ширину, который работает за $O(|V| + |E|)$ и затем проходим один раз по всем вершинам $O(|V|)$, суммарно $O(|V| + |E|)$

Задача 2

Задача: рассмотрим следующую модификацию алгоритма Дейкстры. При инициализации, в очереди с приоритетами находится лишь вершина s. Вершина v добавляется в очередь с приоритетами, если в результате релаксации $\mathrm{Relax}(u, v)$ расстояние до вершины v изменилось, и при этом v не была в этот момент в очереди. Остальные шаги алгоритма остались без изменений.

1) Докажите корректность модифицированного алгоритма.
2) Докажите, что модифицированный алгоритм работает корректно даже в случае наличия рёбер отрицательного веса, но при отсутсвии цикла отрицательного веса. Оцените время работы алгоритма на графах такого вида и сравните его со временем работы алгоритма Беллмана-Форда.
3) Модифицируйте алгоритм так, чтобы он выдавал ошибку на графах с циклами отрицательного веса.

1) - 2) Для графов с положительными весами модифицированный алгоритм будет работать также, как и обычный алгоритм Дейкстры, так как вершину добовляем, когда до неё уменьшается расстояние и дальше делаем тоже самое, что и в обычном алгоритме (учитывается расстояние до неё и она убирается когда оно будет наименьшим, так как та же очередь с приоритетом). Все вершины побывают в очереди, так как первоначально расстояния до них бесконечности и они точно будут уменьшены. Поэтому модифицированный алгоритм на графах с положительными весами работает корректно.

Докажем, что для графа с отрицательными весами это выполнится. Проблема обычного алгоритма Дейкстры была в том, что некоторая вершина закрывается, но затем расстояние до неё может быть уменьшино за счёт отрицательных рёбер, в этом же алгоритме этой проблемы нет, так как если вершина вышла из очереди но потом из оставшихся (или поступивших в очередь) вершин есть те, которые уменьшают расстояние до вышедшей вершины, то она снова добавляется в очередь и меняется расстояние до неё и до следующих вершин за ней. То есть теперь мы учитываем, что расстояние до вершины может поменяться за счёт отрицательного веса у ребра (решили проблему, которая возникает для обычного алгоритма Дейкстры). Следовательно, модифицированный алгоритм работает корректно для графов с отрицательными весами.
Сложность: $O(|V^2|)$ так как в худшем случае мы будем пробегать по всем рёбрам и проверять все пути. Из семинара: сложность алгоритма Беллмана-Форда - $O(|V||E|)$ (производим $V-1$ раз сравнение $|E|$ весов рёбер). Получается, если $|E| = |V|$, то сложности совпадают, если $|E| < |V|$, то асимптотика у алгоритма Беллмана-Форда меньше, если же $|E| > |V|$ то лучше работает этот модифицированный алгоритм Дейкстры.

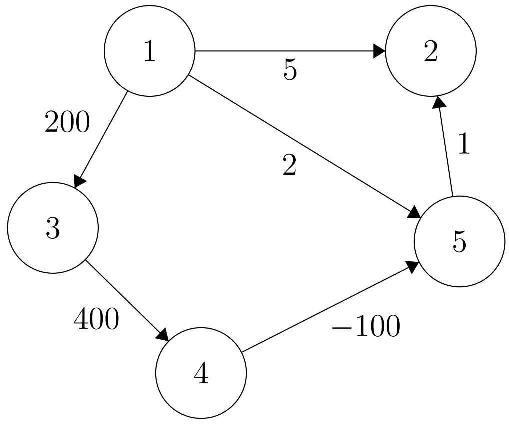
3) «Отличительной чертой» цикла отрицательного веса является тот факт, что ходя по этому циклу мы можем уменьшать расстояние до бесконечности (у этих вершин и не только их). Замети, что при этом в нашем алгоритме мы будем в очередь добавлять бесконечно много раз какие-то вершины. Но если такого цикла нет и работа алгоритма конечна, то в худшем случае какая-то вершина может попасть в очередь $\frac{|V||V-1|}{2}$ раз, нужно будет проверить все варианты путей ведущие в эту вершину. Получается, если какая-то из вершин попадает в очередь больше этого количества раз, то у нас есть цикл отрицательного веса и можно выдавать ошибку, которая сигнализирует это.

Задача 3

Задача: Профессор О. П. Рометчивый предлагает следующий способ нахождения кратчайшего пути из s в t в данном ориентированном графе, содержащем рёбра отрицательного веса. Прибавим достаточно большую константу к весам всех рёбер и сделаем все веса положительными, после чего воспользуемся алгоритмом Дейкстры.

Корректен ли такой подход? Если да, то докажите это, если нет — укажите контрпример.

Ответ: не корректен, контр пример:



Рассматриваем такой граф и ищем минимальное расстояние от вершины (1) до вершины (2). В данном графе (по алгоритму Беллмана-Форда) оно равно 3 и достигается следующим образом: (1) -> (5) -> (2). По описаному в задаче алгоритму нам нужно добавлять константу, которая $A > 100$ (чтобы все веса рёбер стали положительными), но тогда кратчайшее расстояние изменится, так как $5 + A < 3 + 2A$, то есть алгоритм выдасткратчайший путь (1) -> (2), что будет неверным ответом. Следовательно, данный алгоритм работает некорректно.

Задача 4

Задача: предложите $O(|V| + |E|)$ алгоритм поиска кратчайших расстояний от данной вершины s до всех остальных в графе, в котором все веса ребер равны 0 или 1. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

В данном случае очередь с приоритетами может реализовываться через структуру данных - дек (очередь, которая работает с двух сторон). Запустив обычный обход в ширину из нужной нам вершины и изменяем дек следующим образом:

1) Убираем рассматриваемую вершину из дека

2) Добавляем вершины, которые связаны с рассматриваемой вершиной ребром в дек так: если вес ребра равен 0, то добавляем в начало дека эту вершину (расстояние до неё не меняется, так как вес ребра 0), если нет, то в добавляем в конец дека.

Заметим, что при такой работе вершины в деке всегда будут упорядочены по возрастанию расстояния до них, так как на каждом шаге мы достаём из него вершину с минимальным на текущий момент расстоянием и если вес ребра до следующий связанный с ней 0, то в деке он будет снова меньше всех остальных, если нет, то последним, так как кладём как в обычном bfs по уровням и в этом случае он будет равен последнему или больше его (веса и закрыта вершина или нет, храним в отдельном словаре или массиве).

Получается мы сделали корректную очередь с приоритетом и алгоритм будет работать, также как и алгоритм Дейкстры (корректность следует от туда).

Сложность, как у обычного обхода в ширину (из описания алгоритма) $O(|V| + |E|)$

Задача 5

Задача: в орграфе есть ребра отрицательного веса, но нет циклов с отрицательным весом. Предложите алгоритм, который находит для данной вершины вершину, **от которой** она удалена на максимальное расстояние. Докажите его корректность и оцените асимптотику.

Алгоритм: идея - сведём эту задачу к той для которой у нас уже есть готовый алгоритм)
изменим все веса на рёбрах на веса с противоположными знаками.
К полученному графу применим алгорим Беллмана-Форда, который вернёт кратчайшие расстояния до всех вершин от нужной вершины s. Возьмём из них самую близкую. Она и будет максимально удалённой от s для первоначального графа.

Корректность: при домножении всех весов на -1 максимальное расстояние в исходном графе станет минимальным в полученном, следовательно наиближайшая вершина будет ответом на нашу задачу. Эту вершину корректным образом находим алгоритмом Беллмана-Форда.

Сложность: сначала пробегаемся по всем рёбрам и меняем знак на противоположный - $O(|E|)$, затем применяем алгоритм Беллмана-Форда, сложность которого $O(|E||V|)$. В итоге: $O(|E||V|)$

Задача 6

Задача: независимое множество в неориентированном графе — это множество вершин попарно не соединенных ребрами. Предложите $O(|V|+|E|)$ алгоритм поиска максимального по размеру независимого множества в дереве.

Алгоритм: построим рекурсивный алгоритм основывающийся на следующей идеи: пусть на вход функции подаётся вершина дерева v и за независимое множество поддерева с корнем из этой вершины мы обозначим $F(v)$, получается нам нужно найти F(корень).

Заметим, что если мы берём в независимое множество корень поддерева v, то следующий уровень за ним мы взять не можем (иначе множество перестанет быть независимым). Можем взять уровень через 1. Если же мы не берём корень поддерева v, то в независимое множество можно взять его детей. Получаем рекурсию:

```
def F(v):
  if v is leaf:
    return 1

  sum_1level = 0
  sum_2level = 0

  for i in v.children: # если не берём корень поддерева
    sum_1level += F(i)

  for i in v.grandchildren: # если берём корень поддерева
    sum_2level += F(i)

  return max(1+sum_2level, sum_1level)
```

Корректнсть: докажем корректность индукцией по глубине дерева n.
Б.И. для $n = 1, 2$ очевидно алгоритм работает корректно.
Ш.И. пусть алгоритм работает корректно для глубины не больше, чем n, докажем что для $n+1$ он тоже будет работать верно
По описаным в начале рассуждениям независимое множество в новом дереве глубины $n+1$ будет получено из максимального независимого множества глубины $n-1$ (которое мы находим верно по П.И.) и добавкой либо детей либо внуков каждой из вершины на $n-1$ уровне. Из этих вариантов алгоритм находит максимальный. Следовательно, шаг индукции доказан (рекурсивный алгоритм, мы его строим как индукцию).

Сложность: рассматриваем все вершины и рёбра дерева, поэтому сложность алгоритма $O(|V| + |E|)$