Домашняя работа №7

Бредихин Александр

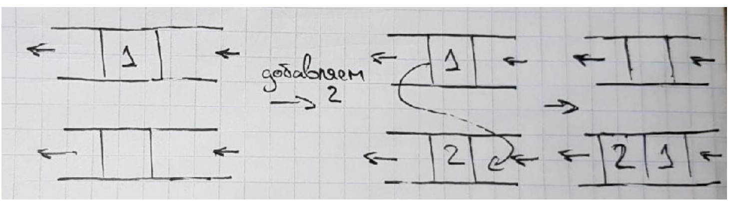
5 апреля 2020 г.

Задача 1

Задача: реализуйте стек с помощью двух очередей.

По определению стек – достаём первым элемент тот, который последний положили. Очередь – FIFO: достаём первым тот, который первым положили. Рассмотрим два способа реализовать стек с помощью двух очередей:

1) дорогостоящая push опреация
Одну из очередей всегда держим пустой. В другой элементы будут лежать в обратном порядке их поступления для этого при добавлении нового элемента делаем следующие операции: кладём новый элемент в пустую очередь, затем из другой «вытаскиваем» элементы и кладём в первую очередь. Всю полученную очередь перекладываем, чтобы она стала пустой (или просто переименовывваем названия). Заметим, что при такой операции, последний поступивший элемент будет первым в очереди. Удаление элемента это извлечение первого элемента из непустой очереди (или ошибка, если обе очереди пусты).
Пример работы при добавлении 2, в наш стек, в котором уже есть элемент 1. В результате в одной из очереди элементы располагаются в обратном порядке, а другая очередь остаётся пустой.



2) дорогостоящая pop операция
Также оставляем одну очередь пустой, в другую кладём элементы в порядке поступления. При операции извлечения достаём из очереди все элементы до предпоследнего включительно и кладём их в пустую очередь. Последний элемент остаётся один, извлекаем его. В итоге достаём тот элемент, который последним положили, следовательно, стек.

Заметим, что в первом случае при операции push мы перекладываем все элементы из одной очереди в другую: $\mathcal{O}(n)$ где n – количество элементов в стеке, но операци pop занимет $\mathcal{O}(1)$. Во втором же, наоборот, операция pop делается за $\mathcal{O}(n)$, а push за $\mathcal{O}(1)$
(можно подсчитать амортизационную сложность и скорее всего она будет равняться $\mathcal{O}(1)$ для обоих операций).

Задача 2

Задача: опишите способ хранения почти-полного троичного дерева в массиве. Как по номеру клетки родителя вычислить номера детей? Как по номеру ребёнка вычислить номер родителя?

Дерево будем хранить аналогично почти-полному бинарному дереву. То есть нумерация элементов начинается с 1 и располагаем элементы, которые находятся на одном уровне подряд в массив слева направо спускаясь по уровням вниз.
Пусть k номер ячейки родителя, тогда его дети будут с номерами: $3k-1, \quad 3k, \quad 3k+1$. Покажем это: пусть родитель располагается на уровне h и на nом месте слева на своём уровне. Тогда до него количество элементов в массиве равно (то есть его номер ячейки в массиве):

$$k = 1 + 3 + \dots + 3^{h-1} + n$$

Аналогично считаем позицию для его детей и выражаем её через k. Для самого левого ребёнка:

$$1 + 3 + \dots + 3^h + 3(n-1) + 1 = (3 + 9 + \dots + 3^h) + 2 - 3 = 3k - 1$$

для центрального и правого ребёнка формулы будут иметь вид:

$$1 + 3 + \dots + 3^h + 3(n-1) + 2 = 3k - \text{центральный ребёнок}$$

$$1 + 3 + \dots + 3^h + 3(n-1) + 3 = 3k + 1 - \text{правый ребёнок}$$

Следовательно, дети имеют номера: $3k-1, \quad 3k, \quad 3k+1$.

Пусть m – номер ребёнка, тогда его родитель имеет номер: $\left[\frac{m}{3}\right]$, где $\left[\frac{m}{3}\right]$ – округление до ближайшего целого при делении на 3. Это напрямую следует из формул, которые мы получили выше.

Задача 3

Задача: Докажите, что если в бинарном дереве поиска у элемента x нет правого ребёнка и у x есть следующий за ним в порядке возрастания элемент y, то y является самым нижним предком x, чей левый дочерний узел так же является предком x или самим x.

Сначала покажем, что y является предком x а затем, что самым нижнем.
От противного: пусть y не является предком x, тогда существует узел a, который является предком и для x и для y при этом эти два элемента лежат в разных поддеревьях узла a: так как $x < y$, то x лежит в левом поддереве, а y в правом. Так как это бинарное дерево поиска, то по его определению верно такое неравенство: $x < a < y$ (б.о.о считаем, что элементы в узлах различны). Получили противоречие, с тем, что y следующий в порядке возрастания элемент за x (есть ещё a), следовательно, y – предок x.

Докажем, что y – самый нижний предок (так как $x < y$, то x будет располагаться в левом поддереве y). Снова от противного, пусть это не так: то есть у y существует левый дочерний узел a, который является предком x и $a! = x, y$, тогда по определению бинарного дерева поиска получаем, что $x < a < y$ – противоречие. Следовательно, y – самый нижний предок x, чей левый дочерний узел так же является предком x или самим x.

Задача 4

Задача: покажите, что если вершина b в бинарном дереве поиска имеет две дочерние вершины, то последующая за ней вершина c не имеет левой дочерней вершины, а предшествующая ей вершина a — правой. Под предшествующей и последующей вершиной понимается, что $a.key \leq b.key \leq c.key$ и в дереве поиска нет ключей в промежутках $(a.key, b.key)$ и $(b.key, c.key)$.

Докажем для вершины c, что она не будет иметь левой дочерней вершины, для вершины a аналогично. Доказываем от противного: пусть у вершины c есть левый ребёнок, обозначим его k. Возможны 2 случая:

1) Пусть $k.key > b.key$. Из условия в дереве поиска нет ключей в промежутке $(b.key, c.key)$, следовательно, будет выполняться неравенство, что $b.key < c.key < k.key$, а это невозможно так как k – левый ребёнок для c, значит, $k.key < c.key$ (по определению бинарного дерева). Получили противоречие.

2) Пусть $k.key < b.key$. Заметим, что в этом случае c не может быть в левом поддереве b, так как нарушится условие, что $c.key > b.key$ (если бы $c.key = b.key$, то тогда по определению бинарного дерева выполнялось бы соотношение, что $.key \leq k.key \leq b.key$, но в промежутке $(b.key, c.key)$ нет ключей).
   Также c не может находиться в правом поддереве b, так как тогда $b.key < k.key$, что разбиралось уже в 1ом случае.
   Получается, что c может быть либо предком вершины b, либо будет существовать вершина m – предок и b и c, такая что b и c, k лежат в разных поддеревьях. Притом b в левом, иначе не выполнится условие, что $b.key \leq c.key$.
   Для первого варианта, если c – потомок, то рассмотрим правого ребёнка b обозначим его за p. Из определения бинарного дерева будет следовать, что $b.key \leq p.key \leq c.key$, получили противоречие, что в нашем дереве поиска нет ключей в промежутке $(b.key, c.key)$.
   Для второго получим это же противоречие: $b.key \leq m.key \leq c.key$.

Рассмотрели тут все случаи и везде пришли к противоречию, следовательно изначальное утверждение, что у вершины c есть левый ребёнок - неверно.

Задача 5

Задача: известно, что в структуре данных потребуется хранить k-элементное подмножество A n-элементного множества. После того как в структуру данных будет загружено множество A, с помощью неё будет нужно проверить принадлежит ли A элемент x. Для этого можно совершить не более t запросов к структуре: каждый запрос q представляет собой конечную строку битов, ответ на каждый запрос — один бит.

Структура данных представляет собой таблицу с двумя столбцами: первый столбец состоит из всевозможных запросов q (известных заранее), а правый из битов-ответов на запрос – правый столбец формируется

после загрузки в структуру множества A. Пусть $s(n, k, t)$ – минимальное количество строк в такой таблице которое достаточно отвести под такую структуру данных.
Чему равно $s(n, k, 1)$?

Так как $t = 1$, то мы должны за одно обращение к структуре понять принадлежит ли x А или нет. Пусть таблица будет с вопросами вида принадлежит ли элемент множеству A или нет и так для каждого элемента nго множества, то есть n строк запросов.
Почему меньше, чем n нельзя? Тогда для двух различных чисел будет один и тот же вопрос, на который можно ответить, только 2мя способами (по условию задачи ответ - 1 бит). А вариантов 4: оба принадлежат, одно принадлежит другое нет, оба не принадлежат. То есть не сможем однозначно установить вхождение в A.

Задача 6

Задача: К серверу приходят одновременно n клиентов. Для клиента i известно время его обслуживания t_i. Время ожидания клиента определяется как сумма времени обслуживания всех предыдущих клиентов и времени обслуживания его самого. К примеру, если обслуживает клиентов в порядке номеров, то время ожидания клиента i будет равно $\sum\limits_{j=1}^{i} t_j$. Постройте эффективный алгоритм, находящий последовательность обслуживания клиентов с минимальным суммарным временем ожидания клиентов.

Заметим, что минимальное время ожидание для каждого клиента – это время обслуживание его самого. Докажем, что выгоднее (тогда суммарное время ожидание будет минимальным) обслуживать клиентов, на которых уходит меньше времени.
От противного: рассмотрим двух клиентов время обслуживания которых: t_1 и t_2 при этом $t_2 > t_1$, и обслуживается сначала 2ой клиент, а затем 1ый.
Заметим, что если мы поменяем их местами, то время ожидания клиентов до 2го и после 1го не изменятся (так как для тех которые перед ними не важно, что происходит после них, а те которые за ними все равно будут ждать обоих). Время ожидания 1го уменьшится на t_2 а 2го увеличится на t_1.
Получается суммарное ожидание всех клиентов уменьшится на $t_1 - t_2$, следовательно, выгоднее обслуживать клиентов с меньшим временем.

Из этих рассуждений следует, что мы отсортируем клиентов по возрастанию времени ожидания это и задаст оптимальный порядок их обслуживания. Суммарное время ожидания всех клиентов может быть найдено по следующей формуле:

$$t_1 + (t_1 + t_2) + \ldots + (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = t_1 n + t_2(n-1) + \ldots + t_n$$

где t_1 – время обслуживания клиента, который пошёл первым (с наименьшим временем) и так далее.
Сложность выполнения алгоритма – $\mathcal{O}(n \log(n))$ (сортируем клиентов по возрастанию времени их обслуживания).

Из восьмой домашней работы

Задача 4

Задача: опишите реализацию структуры данных «очередь с приоритетами» (из классного листка) со следующими стоимостями операций

- `insert` — $O(1)$,
- `extract_max` — $O(n)$,
- `set_priority` — $O(1)$.

При этом известно, что все ключи — уникальные числа в диапазоне от 1 до n.

Используем обычный массив. Ключами нашей очереди с приоритететом являются индексы массива, а их приоритетом значение в массиве с этими индексами. Это можно сделать, так как все индексы уникальны и лежат подояд в диапозоне от 1 до n (как индесы массива).
Тогда стоимость нужных нам операций будет равна:

1) Вставка за $O(1)$ – добавляем элемент в конец массива, зная его размер (так как все ключи разные и идут подряд, то новый элемент всегда будет вставать на последнее место) – константа по времени.

2) `extract_max` — $O(n)$: проходим циклом по массиву и находим ключ с максимальным приоритетом, а затем выводим этот ключ и его приоритет.

3) Установление приоритета по ключу k – $O(1)$. Так как меняем значение в массиве по индексу k

Задача 5

Задача: постройте оптимальный алгоритм, который находит минимальный элемент в куче на максимум.

Докажите, что ваш алгоритм оптимальный: если ваш алгоритм работает за время $O(f(n))$, то любой алгоритм работает за время $\Omega(f(n))$. Считайте, что алгоритм не знает элементы заранее, куча хранится в памяти как массив a и алгоритм может за один запрос i узнать элемент $a[i]$.

По определению кучи на максимум: каждый ребёнок вершины меньше, чем она сама, поэтому минимальный элемент должен содержаться в одном из листов (иначе уже будет какая-то вершина, которая меньше его). Листом считаем и те вершины, уровень которых на 1 меньше (если бинарное дерево неполное), то есть все вершины у которых нет листьев. Из теории графов следует, что в почти-полном бинарном дереве не может быть больше $\left[\frac{n}{2}\right]$ листьев. При этом в массиве, в котором хранится куча, они идут подряд (начиная с $\left[\frac{n}{2}\right]$ до конца). Наш алгоритм находит из них минимальное, оно и будет минимальным в куче.
Так как в худшем случае (полное бинарное дерево) нужно проверить $\left[\frac{n}{2}\right]$ листьев, то сложность алгоритма $O(n)$.

Почему быстрее нельзя? Докажем, что необходимо проверить все листья, чтобы найти минимальный элемент в куче. От противного, пусть это не так и существует алгоритм в котором какой-то из листьев мы не смотрим. Запустим этот алгоритм и найдём минимальное число. Поставим в лист, который мы не просматриваем число меньше минимального, куча при этом никак не изменится (по определению кучи), соответственно алгоритм сделает все те же шаги и вернёт то же число. Но оно уже не минимальное. Получили, что алгоритм некорректный, следовательно необходимо просмотреть все листья, которых в худшем случае $\left[\frac{n}{2}\right]$, поэтому быстрее, чем за $O(n)$ решить нельзя.

Задача 6

Задача: дан массив из $n + 1$ элемента, который содержит элементы от 1 до n и известно, что каждое число от 1 до n встречается хотя бы один раз.

1) Докажите, что какое-то число от 1 до n встречается два раза.

2) Предложите алгоритм, который находит дубликат за $O(n)$.

3) Предложите алгоритм, который находит дубликат за $O(n)$ и $O(1)$ дополнительной памяти.

1) Это следует из признака Дирихле: так как всего n ящиков (возможные числа) и $n+1$ элементов (в каждом элементе массива должно быть число), следовательно хотя бы одно из чисел встретится дважды. Заметим, что будет только одно повторение, так как все элементы от 1 до n встречается хотя бы один раз.

2) Создадим массив длинной n сначала заполненный нулями, индекс массива будет означать само число, соответствующие значение этому индексу – количество раз, которое этот элемент встречался в исходном массиве.
Алгоритм: пробегаемся по исхожному массиву и прибавляем 1 элементу нового массива с индексом встретившегося числа. Затем пробегаем по новому массиву и выводим индекс, где значение равно 2 (индексация нового массива начинается с 1).
Корректность алгоритма следует из рассуждения в пункте 1). Сложность: по времени и по памяти $O(n)$, так как пробегаемся 2 раза по массивам сначала длины $n+1$, затем n и создаём новый массив длины n.

3) Теперь будем использовать $O(1)$ дополнительной памяти: заведём переменную sum. Пройдёмся циклом по исходному массиву и будем прибавлять значение каждого элемента к этой переменной, то есть в ней будет находиться сумма всего массива. В пукте 1) заметили, что все элементы встречаются хотя бы один раз. Сумма элементов от 1 до n равняется $S = \frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому вычитая из $sum - S$, получим элемент, который встретился дважды.
Нахождение суммы всего массива – $O(n)$. Из дополнительной памяти используем только переменную sum – $O(1)$.

Задача 7

Задача: постройте алгоритм, который получив на вход числовой массив выводит количество его подмассивов (непрерывных подпоследовтаельностей), в которых все элементы различны.

Сначала приведём пример того, что хотим реализовать. Пусть на вход подали массив 1 2 3 2 5, тогда алгоритм должен подсчитать следующие подмассивы:
1
1 2

1 2 3
2
2 3
3
3 2
3 2 5
2 5
5
Для реализации этого создадим словарь s, переменную res в которой будем хранить количество подмасивов и $start$ – указатель откуда начинаем считать.
1) Идём по нашему массиву и если считанного элемента нет в словаре, то добавляем его туда (индекс – значение, значение – индекс элемента). Также делаем операцию $res++$
2) Если элемент есть в массиве и $i \geq start$, то $start++$ и все значения словаря, которые больше, чем $start+1$, делаем NULL.
3) Если считанный элемент уже есть в массиве и $i < stat$, то $s[a[i]] = i$ и $res++$.
4) Если мы дошли до последнего элемента и для него не выполняется пукт 2), то $res += \frac{(n-start-1)\cdot(n-start)}{2}$ (индексация начинается с 1).
То есть если простыми словами, то мы идём «рамкой» по нашему массиву и запоминает, где последний раз видел элемент. Если элемент ещё не встречался, то подмассив уникален и мы его считаем. Если элемент уже встречался до $start$, и его позиция в словаре равна NULL, то подмассив остаётся со $start$ до i уникальным и мы запоминаем его новое положение в словаре и снова увеличиваем счётчик. Если мы встречаем элемент после позиции старт, то со $start$ до i подмассив не уникален и мы двигаем положение $start$ на 1. 4ый пункт нужен для выведения подмассивов, которые не учтутся этим алгоритмом, так как мы дойдём до последнего элемента (корректность следует из описания алгоритма).
Сложность: в худшем случае будем кадый раз бегать по словарю и ставить NULL. Длина массива n и длина словаря может достигать n, поэтому сложность оценивается, как $O(n^2)$.

Задача 8

Задача: структура данных «таблица» представляет собой числовую матрицу размера $m \times n$ (двумерный массив), элементы которой в каждой строке и каждом столбце отсортированы по возрастанию. В случае, если в таблице меньше mn элементов, в незаполненных клетках написано ∞.

1) Постройте алгоритм, который проверяет находит элемент x в частично заполненную таблицу за $O(m+n)$ или проверяет, что такого элемента в таблице нет.

2) Постройте алгоритм, вставляющий новый элемент в частично заполненную таблицу за $O(m+n)$.

1) Начнём с верхней правой ячейки и будем делать следующие: пока элемент слева больше x (элемент, котрый мы хотим проверить на вхождение), двигаемся влево. Если это условие не выполнено, то смещаемся на 1 строку вниз и снова проверяем первое условие. Заканчиваем эти действия, если какой-то из элементов таблицы равен x или если больше не можем делать шагов (то есть дошли до самой нижней строчки и слева по строке элемент меньше), тогда x в таблице нет.

Корректность: заметим, что переходя влево на одну ячейку мы проверяем весь столбец, так как $A > x$ и все элементы выше A больше его (так как столбец отсортирован по возрастанию). Также переходя на строку вниз мы проверяем всю строку, так как $x > B$ и все элементы левее B в этой строке меньше его (так как строка отсортирована). Получается, дойдя до последней строки (когда мы уже не сможем делать шаги) мы проверим всю таблицу. Если элемента x не было найдено, то его точно нет в таблице.

Сложность: в худшем случае x будет находится в нижнем левом углу, до него нужно сместиться на m строк вниз и на n столбцов влево. Каждое смещение делается с операцией сравнения, которая стоит $O(1)$, поэтому сложность $O(m+n)$.

2) Для добавления элемента a делуем следующие шаги: начинаем с правого нижнего угла таблицы и пока $max(x, y) > a$, где x – элемент который ниже текущей позиции, y – правее текущей позиции, меняем $max(x, y)$ и a. Затем, когда это невозможно, то есть когда цикл «while» завершится ставим элемент a в текущее место. (Возникают некоторые тонкости, как начать алгоритм. Не учитывать ∞ при начальном сравнении и т.д.)

Корректность: нужно проверить, что при таких действиях не нарушается отсортированность по строкам и по столбцам (начинаем с самого большого элемента, так как все строки и столбцы отсортированы по возрастанию). Заметим, что вправо и вверх ставим элемент, который больше, чем a, когда не сможем это сделать, то все элементы выше текущего положения и левее будут меньше a (так как тогда $a > max(x, y)$ и все элементы ниже x и левее y меньше их). То есть в них отсортированность не нарушилась, также так как мы меняем с $max(x, y)$ не нарушается и в верхней части таблицы (и по строке и по столбцу).

Сложность: в худшем случае элемент a нужно будет поставить на левый верхний угол, то есть сложность, как и в предыдущем пункте $O(n + m)$.