Домашняя работа №5

Бредихин Александр

15 марта 2020 г.

Задача 1

Задача: дан массив длины n, состоящий только из нулей и единиц. Предложите линейный алгоритм сортировки данного массива.

Сортировка подсчётом: так как элементами в массиве могут быть только 0 или 1, то заведём два счётчика: $count\_0$, $count\_1$. Идём по входному массиву, если встречаем 0, то $count\_0++$ иначе $count\_1++$. Затем выводим сначала $count\_0$ нулей, затем $count\_1$ единиц, получаем отсортированный массив.
Корректность: выведенный массив отсортирован, так как все единицы идут после нулей и количество нулей в исходном и в выведеном совпадает (на каждом шаге по исходному массиву инкрементируется одна из переменных).
Сложность алгоритма: $O(n)$ (проходим один раз по массиву длинной n и затем печатаем n чисел).

Задача 2

Задача: на прямой задано n отрезков, причем известно, что они образуют систему строго вложенных отрезков (их можно упорядочить так, чтобы каждый строго содержался в следующем). Отрезки заданы координатами концов $[l_i, r_i]$ (и могут быть даны в неупорядоченном виде). Предложите асимптотически эффективный алгоритм (с точки зрения количества арифметических операций), который находит все точки прямой, которые покрыты ровно $2n/3$ отрезками.

Заметим, что если бы массив был отсортирован по левым границам (все отрезки вложены, поэтому правые границы тоже останутся отсортированными и не будет пересечения отрезков), то искомые точки расположены между двумя левыми концами с номерами $\frac{2n}{3}$ и $\frac{2n}{3}+1$ и их же правыми концами (нумерация отрезков происходит от самого короткого к самому длинному по длине отрезка) (как раз берём все точки, которые покрыты ровно $2n/3$ отрезками).

Алгоритм: с помощью алгоритма по нахождению kой порядковой статистики ищем $\frac{2n}{3}$ и $\frac{2n}{3}+1$ порядковые статистики в исходном массиве левых границ. Пусть элемент $l_1 = \frac{2n}{3}$ порядковой статичстики, $l_2 = \frac{2n}{3}$ – правой. r_1 и r_2 соответсвующие правые границы, тогда ответом на задачу будут точки удволетворяющие: $x \in [l_1, l_2] \cup [r_1, r_2]$ (корректность ответа обоснована выше).

Сложность: алгоритм нахождения kой порядковой статистики работает за $\mathcal{O}(n)$, где n – количество отрезков (правых и левых границ). Мы вызываем этот алгоритм 2 раза, следовательно сложность нашей задачи $\mathcal{O}(n)$.

Задача 3

Задача: рассмотрим детерминированный алгоритм поиска порядковой статистики за линейное время из параграфа 9.3 Кормена. Какая асимптотика будет у алгоритма, если делить элементы массива на группы по семь, а не по пять?

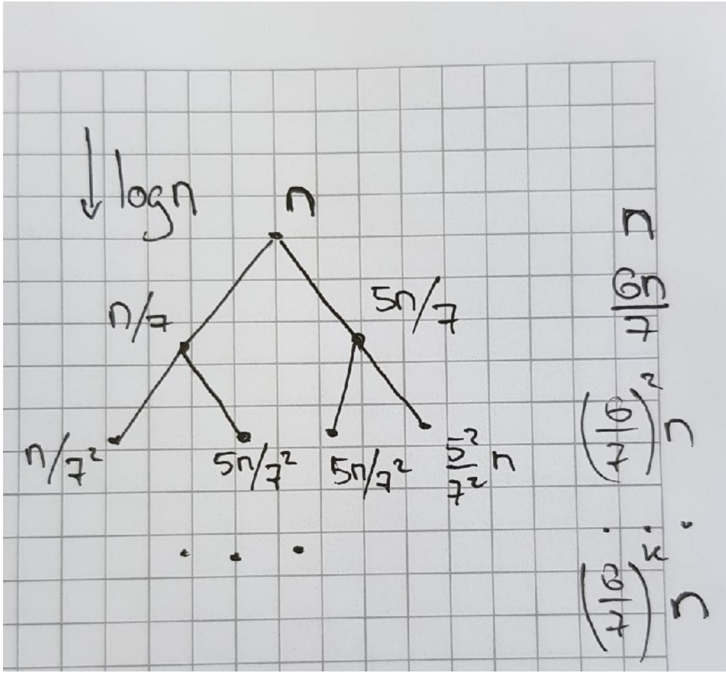
Из семинара, оценка работы алгоритма в общем случае:
будем рассматривать входной массив размером n и разбивать его на $2k+1$ элементные группы. Внутри каждой группы сортируем элементы и берём медиану каждой группы и из них ищем медиану медиан m^* рекурсивно. Количество групп в которых медианы меньше m^* оценивается как $\frac{n}{2(2k+1)}$, следовательно, количество элементов в исходном ммассиве меньших m^* оценивается $\frac{n}{2(2k+1)} \cdot (k+1)$. Получается, левее медианы медиан стоит как минимум $\frac{n(k+1)}{2(2k+1)}$, а правее не более $n - \frac{n(k+1)}{2(2k+1)} = \frac{n(3k+1)}{4k+2}$. Затем запускаемся от каждой из этих частей. Рекурентная формула:

$$T(n) = cn + T\left(\frac{n}{2k+1}\right) + T\left(\frac{n(3k+1)}{4k+2}\right)$$

для $k = 3$ она имеет вид:

$$T(n) = cn + T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{5n}{7}\right)$$

Разрешим эту рекуренту с помощью дерева вызовов:



Заметим, что в каждой строчке сумма операций равна: $\left(\frac{6}{7}\right)^k \cdot n$ (бином Ньютона). Тогда всего количество операций: $\sum\limits_{k=0}^{\log n} \left(\frac{6}{7}\right)^k \cdot n = 7 \cdot n \cdot \left(1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{\log n}\right)$ При больших n получаем: $T(n) = \Theta(n)$
Ответ: $\Theta(n)$

Задача 4

Задача: на вход задачи подаётся число n и массив чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$. Постройте линейный алгоритм, находящий число s, при котором достигается минимум суммы

$$\sum_{i=1}^{2n+1} |x_i - s|.$$

Ответом на эту задачу, то есть числом s будет являться медиана массива (так как количество элементов – нечётное, то слева и справа от неё лежит одинаковое количество элементов, n), докажем это:
функция, данная в задаче определена на $\mathcal{R}$ и принадлечит классу дифференцируемых функций. Нам нужно найти её экстремум (минимум), что соответсвует 0 производной.

Производная функции: $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} sign(x_i - s)$. Это функция равна 0, тогда и

только тогда, когда $s = x_{n+1}$ (количество $+1$ равно числу -1). Докажем, что это значение соответсвует минимуму, а не максимуму. Немного сместимся от этой точки б.о.о вправо. Обозначим это число a (так как мы смещаемся немного, то берём a такое что $x_{n+1} < a < x_{n+2}$). Обозначим за $d = a - x_{n+1}$ - смещение.
Расстояние между x_{n+1} и x_{n+2} до a не изменилось. Правее лежит $n-1$ число и расстояние до них уменьшилось на $d \cdot (n-1)$, а левее, n чисел, следовательно расстояние увеличилось на $d \cdot n$. В итоге функция увеличивается на d, аналогично, если будем смещаться влево от медианы. Получается, медиана массива – нужное число s.

Алгоритм: применяем алгоритм нахождения медианы масива (выводили на лекции нахождение $n+1$ (в этом случае) порядковой статистики). Время работы $\mathcal{O}(n)$.

Задача 5

Задача: предложите полиномиальный от длины входа алгоритм решения сравнения $a \cdot x + b \equiv 0 \pmod M$ (На вход дают целые числа a, b, M в двоичной системе исчисления).

Это сравнение эквивалентно такому уравнению в целых числах:

$$ax + My = -b$$

К нему можем применить бинарный алгоритм Евклида основанный на фактах:

- НОД(0, n) = n; НОД(m, 0) = m; НОД(m, m) = m;
- НОД(1, n) = 1; НОД(m, 1) = 1;
- Если m, n чётные, то НОД(m, n) = 2*НОД(m/2, n/2);
- Если m чётное, n нечётное, то НОД(m, n) = НОД(m/2, n);
- Если n чётное, m нечётное, то НОД(m, n) = НОД(m, n/2);
- Если m, n нечётные и n > m, то НОД(m, n) = НОД((n-m)/2, m);
- Если m, n нечётные и n < m, то НОД(m, n) = НОД((m-n)/2, n);

Сам алгоритм полностью аналогичен обычному и его сложность $\mathcal{O}(n^2)$, где n – длина максимального из чисел в двоичной записи.

Задача 6

Задача: 1) оцените глубину стека (рекурсивных вызовов) при работе быстрой сортировки в худшем случае.
2) измените алгоритм быстрой сортировки так, чтобы глубина стека в худшем случае была $\Theta(\log n)$

1) Подадим функции $QuickSort$ уже отсортированный массив. Б.о.о. она будет выбирать самый минимальный элемент элемент за опорный (массив будет отсортирован в обратном порядке и за опорный элемент будем брать последний) и перетаскивать его на 1ое место. Тогда следующий вызов будет происходить от части из одного элемента (левая часть) и всех остальных $n-1$ элементов. На следующим шаге аналогичная ситуация и справа остаётся $n-2$ элемента. Получается, мы сделаем n вложенных рекурсивных вызовов при каждом из которых мы кладём в стек информацию о регистрах и текущем положении (константа по памяти), следовательно, в стек мы будем класть $\mathcal{O}(n)$ данных в худшем случае, то есть глубина стека линейная.
Ответ: $\mathcal{O}(n)$

2) Чтобы не возникало линейного роста глубины стека, нужно, чтобы дерево вызовов было симметрично (то есть каждый раз массив делился на 2 равные части и следующие вызовы были от массива в 2 раза меньшей длины), тогда глубина дерева $\log n$ – глубина рекурсии.
Как разбивать массив на каждом шаге пополам? Для этого можно на каждом шаге считать $n/2$ порядковую статистику (медиану текущего массива) и за опорный элемент брать её, тогда по определению слева и справа от неё будет одинаковое количество элементов (или с различием на 1).

Задача 7

Задача: дан массив из n чисел. Нужно разбить этот массив на максимальное количество непрерывных подмассивов так, чтобы после сортировки элементов внутри каждого подмассива весь массив стал отсортированным. Предложите $O(n \log n)$ алгоритм для решения этой задачи.

Алгоритм: сначала сортируем исходный массив и делаем замену: первый элемент в отсортированном массиве равняется 1, второй – 2 и так далее. Возвращаемся к первоначальному расположению элементов в массиве, но уже заменённых своим порядковым номером в отсортированном

массиве (по сути своей порядковой статистикой).
Нужно разбить получившийся массив на максимальное количество непрерывных подмассивов так, чтобы после сортировки элементов внутри каждого подмассива весь массив стал отсортированным, для этого с первого элемента идём по массиву и на каждом шаге сравниваем номер считанного числа с текущим максимумом, если они на каком-то шаге равны, то отделяем этот массив и продолжаем пока не дойдём до конца.

Корректность: если на каком-то моменте максимум равен k - номеру считанного числа, то мы можем отсортировать полученный подмассив так, чтобы они были упорядоченными по возрастанию и не превышали k и шли подряд, значит этот подмассив можно отрезать (так как его можно отсортировать по возрастанию, чтобы элементы в нём шли подряд).
Число полученных таким образом подмассивов максимально, так как если мы возьмём подмассив меньшего размера, то после сортировки где-то в другом подмассиве найдётся элемент, который меньше, чем максимальный в подмассиве ранее (не получится отсортировать весь массив).

Сложность: сортировка массива происходит за $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$. Дальнейшее разбиение на подмассивы происходит за $\mathcal{O}(n)$, следовательно, общая сложность занимает $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$.