МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НГТУ НЭТИ | Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа № 4

по дисциплине «Программирование вычислений»

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Бригада 5	ГРИНЕВИЧ ЮЛИЯ
Группа ПМ-21	ЕГУПОВ ИВАН
Вариант 2, 5.4, 5.6	ПОРСИН ДАНИЛ

Преподаватели	РОЯК СВЕТЛАНА ХАИМОВНА

Новосибирск, 2024

1. **Цель работы**

Изучение методов численного интегрирования, оценки порядка точности, оценки погрешности по правилу Рунге, уточнения значений по Ричардсону.

2. **Математическая модель**
   Входные данные: интегрируемая на отрезке интегрирования функция f(x), пределы интегрирования [a,b] этой функции.
   Выходные данные: результат вычисления интеграла заданной функции f(x).

- Метод трапеций

Усложненная квадратурная формула для равномерной сетки из N отрезков:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2})$$

где h – шаг сетки.

Порядок точности – 1

Порядок метода (порядок аппроксимации) - 2

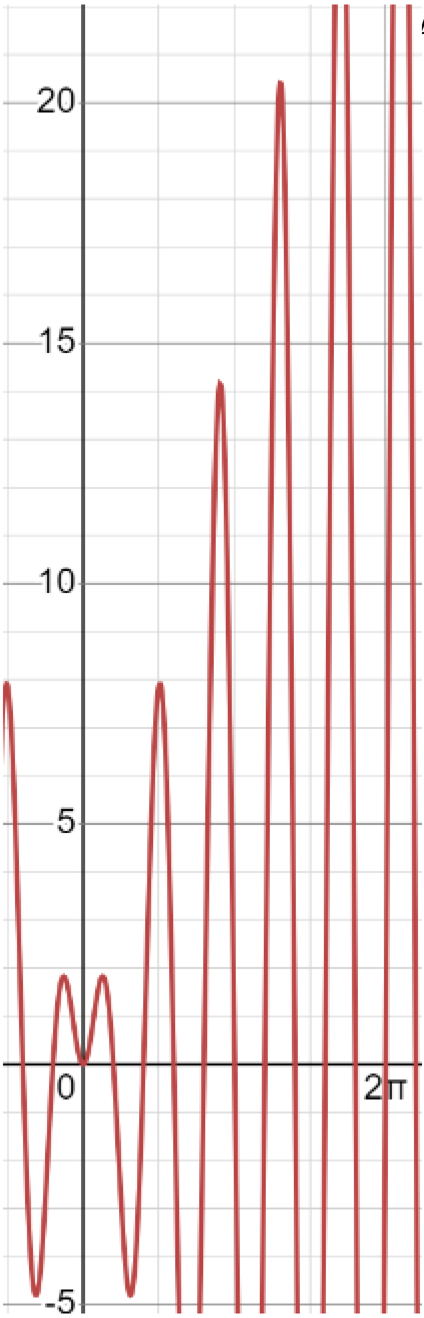
- Метод Ньютона – Котеса

Усложненная квадратурная формула для равномерной сетки из N отрезков и с n точками на каждом из отрезков (считая начало и конец отрезка):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{n * h}{C_n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{n} (c_{in} f(x_i + j * h))$$

Порядок точности – (n-1)

Порядок метода (порядок аппроксимации): для 4 узлов – 4, для 6 узлов – 5



ункция 5x*sin(5x):

3. **Текст программы**

```
    program main

    implicit none

    common/data/a,b,seg

    real a,b
    real nc6
    real grid
    dimension grid(2**28)
    integer seg

    call input
    call make_grid(grid(1))

    call trapez(grid,seg+1)
    print*,'---------------'

    call nc4(grid,seg+1)
    print*,'---------------'

    print*,nc6(grid,seg+1)
    pause

    end
!------------------------------------------------
    subroutine input

    implicit none

    common/data/a,b,seg

    real a,b
    integer seg
    print*,'enter begin and end of the integration interval'
    read*,a,b
    print*,'enter the number of segments'
    read*,seg
```

```
    end
!------------------------------------------------
    subroutine make_grid(grid)

    implicit none

    common/data/a,b,seg

    real a,b
    real h
    real grid
    dimension grid(2**28)
    integer seg
    integer i

    h=(b-a)/seg
    do i=0,seg
     grid(i+1)=a+i*h
    end do

    end
!-----------------------------------------------
    subroutine trapez(grid,len)
    implicit none

    common/data/a,b,seg
    real a,b,h,res,f
    integer len,seg
    real grid
    dimension grid(len)
    integer i

    h = grid(2)-grid(1)

    res = h*(f(grid(1))+f(grid(len)))/2.0
    do i = 2,len-1
     res = res + h*f(grid(i))
    end do

    print*,res
    end
!------------------------------------------------
    real function nc6(grid,len)
```

```
      implicit none

      common/data/a,b,seg

      real a,b,f,h
      integer seg,len
      real grid
      dimension grid(len)
      real sum_i,sum_j
      integer coefs
      dimension coefs(6)
      integer i,j

      h=(grid(2)-grid(1))/5

      coefs(1)=19
      coefs(2)=75
      coefs(3)=50
      coefs(4)=50
      coefs(5)=75
      coefs(6)=19

      sum_i=0
      sum_j=0

      do i=1,seg
        do j=0,5
           sum_j=sum_j+coefs(j+1)*f(grid(i)+j*h)
        end do
        sum_i=sum_i+sum_j
        sum_j=0
      end do

      nc6=5*h*sum_i/288

      end
!-----------------------------------------------
      subroutine nc4(grid,len)

      implicit none

      common/data/a,b,seg
```

```
      real a,b,f,h,res
      integer seg,len
      real grid
      dimension grid(len)
      real sum_i,sum_j
      integer coefs
      dimension coefs(4)
      integer i,j

      h=(grid(2)-grid(1))/3


      coefs(1)=1
      coefs(2)=3
      coefs(3)=3
      coefs(4)=1


      sum_i=0
      sum_j=0

      do i=1,seg
        do j=0,3
           sum_j=sum_j+coefs(j+1)*f(grid(i)+j*h)
        end do
        sum_i=sum_i+sum_j
        sum_j=0
      end do

      res=3*h*sum_i/8


      print*,res


      end
!-------------------------------------------------
      real function f(x)

      implicit none

      real x
```

```
f = 0.25*x**7

end

!--------------------------------------------------
```

4. Таблицы

Верификация программы:

Название метода: Метод Ньютона-Котеса для 6 узлов

Порядок метода (порядок аппроксимации): 6

Теоретическое значение порядка точности: 5

Степень полинома	Полином и область инегрирования	Аналитическое значение интеграла	Число отрезков	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
	$f(x)$, $[a,b]$	I^*	N	I_h	$\frac{I^*-I_{2h}}{I^*-I_h}$	I^*-I_h	$\frac{I_h-I_{2h}}{2^k-1}$	I^R	I^*-I^R
4	$1+2x^{\square}+3x^2+4x^3+5x^4$, $[-5{,}5]$	6510,0000	1	6510,0000		0,0000			
5	$1+2x^{\square}+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5$, $[-5{,}5]$	6510,0000	1	6510,0000		0,0000			
			2	6510,0000	#DIV/0!	0,0000	0,0000	6510,0000	0,0000
6	$1+2x^{\square}+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6$, $[-5{,}5]$	162760,00	1	177426,67		-14666,67			
			2	162989,17	63,999	-229,17	-229,167	162760,01	-0,01
7	$1+2x^{\square}+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7$, $[-5{,}5]$	162760,00	1	177426,67		-14666,67			
			2	162989,17	63,999	-229,17	-229,167	162760,01	-0,01

Название метода: Метод Ньютона-Котеса для 4 узлов

Порядок метода (порядок аппроксимации): 4

Теоретическое значение порядка точности: 3

Степень полинома	Полином и область инегрирования	Аналитическое значение интеграла	Число отрезков	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
	$f(x)$, $[a,b]$	I^*	N	I_h	$\frac{I^*-I_{2h}}{I^*-I_h}$	I^*-I_h	$\frac{I_h-I_{2h}}{2^k-1}$	I^R	I^*-I^R
2	$1+x+2x^2$ $[-5{,}5]$	176,66667	1	176,66666		0,00001			
3	$1+x+2x^2+3x^3$, $[-5{,}5]$	176,66667	1	176,66664		0,00003			
			2	176,66664	1,00000	0,00003	0,00000	176,66664	0,00003
4	$1+x+2x^2+3x^3+4x^4$, $[-5{,}5]$	5176,6667	1	6658,1479		-1481,4812			
			2	5269,2588	16,0001	-92,5921	-92,59261	5176,6662	0,0005
5	$1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5$, $[-5{,}5]$	5176,6667	1	6658,1479		-1481,4812			
			2	5269,2588	16,0001	-92,5921	-92,59261	5176,6662	0,0005

Название метода: Метод Трапеции

Порядок метода (порядок аппроксимации): 2

Теоретическое значение порядка точности: 1

Степень полинома	Полином и область инегрирования	Аналитическое значение интеграла	Число отрезков	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
	$f(x)$, $[a,b]$	I^*	N	I_h	$\frac{I^*-I_{2h}}{I^*-I_h}$	I^*-I_h	$\frac{I_h-I_{2h}}{2^k-1}$	I^R	I^*-I^R
0	1 $[-5{,}5]$	10,000000	1	10,000000		0,000000			
1	$1+x$, $[-5{,}5]$	10,000000	1	10,000000		0,000000			
			2	10,000000	#DIV/0!	0,000000	0,00000	10,000000	0,000000
2	$1+x+2x^2$ $[-5{,}5]$	176,66667	1	510,00000		-333,33333			
			2	260,00000	4,000000	-83,33333	-83,33333	176,66667	0,00000
3	$1+x+2x^2+3x^3$, $[-5{,}5]$	176,66667	1	510,00000		-333,33333			
			2	260,00000	4,000000	-83,33333	-83,33333	176,66667	0,00000

Вывод: точность вычисления каждого из методов соответствовала теоретическому порядку точности. То есть каждый метод правильно исчислял интеграл от полинома с максимальной степенью, равной порядку точности метода.

Изучение порядка аппроксимации:

Название метода: Ньютона-Котеса для 6 узлов

Порядок метода k: 6

Подынтегральная функция и область интегрирования: $0,25 * x^9$, [0; 5]]

Интеграл и его аналитическое значение I^*: 244140,6250000

Число отрезков	Шаг	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Оценка отношения погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
N	h	I_h	$\frac{I^*-I_{2h}}{I^*-I_h}$	$\frac{I_{\frac{h}{2}}-I_{2h}}{I_{\frac{h}{2}}-I_h}$	I^*-I_h	$\frac{I_h-I_{2h}}{2^k-1}$	I^R	I^*-I^R
1	1,0000000	250781,2500000	×	×	-6640,6250000	×	×	×
2	0,5000000	244292,4531250	43,7377791	44,4714749	-151,8281250	-102,9967758	244189,4563492	-48,8313492
4	0,2500000	244143,1875000	59,2500000	59,9691358	-2,5625000	-2,3692956	244140,8182044	-0,1932044
8	0,1250000	244140,6562500	82,0000000	82,0000000	-0,0312500	-0,0401786	244140,6160714	0,0089286
16	0,0625000	244140,6250000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,0000000	-0,0004960	244140,6245040	0,0004960
32	0,0312500	244140,6250000	#DIV/0!	1,0000000	0,0000000	0,0000000	244140,6250000	0,0000000
64	0,0156250	244140,6093750	0,0000000	0,6666667	0,0156250	-0,0002480	244140,6091270	0,0158730
128	0,0078125	244140,6562500	-0,5000000	0,0000000	-0,0312500	0,0007440	244140,6569940	-0,0319940
256	0,0039063	244140,6093750	-2,0000000	×	0,0156250	-0,0007440	244140,6086310	0,0163690

Вывод: минимальная погрешность вычисленного интеграла была получена при N=16. При этом при N =32 была получена минимальная погрешность уточненного решения

Название метода: Ньютона-Котеса для 6 узлов

Порядок метода k: 6

Подынтегральная функция и область интегрирования: 5xsin(5x), [0; 5]]

Интеграл и его аналитическое значение I^*: -4,9824840

Число отрезков	Шаг	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Оценка отношения погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
N	h	I_h	$\frac{I^*-I_{2h}}{I^*-I_h}$	$\frac{I_{\frac{h}{2}}-I_{2h}}{I_{\frac{h}{2}}-I_h}$	I^*-I_h	$\frac{I_h-I_{2h}}{2^k-1}$	I^R	I^*-I^R
1	1,0000000	20,1850624	×	×	-25,1675464	×	×	×
2	0,5000000	-2,6858869	0,0912523	9,5950881	-2,2965971	-0,3630309	-3,0489178	-1,9335662
4	0,2500000	-5,3468194	-0,1586414	-6,2667256	0,3643354	-0,0422370	-5,3890564	0,4065724
8	0,1250000	-4,9806390	-0,0050640	-199,8228584	-0,0018450	0,0058124	-4,9748266	-0,0076574
16	0,0625000	-4,9824624	0,0117073	84,2602740	-0,0000216	-0,0000289	-4,9824913	0,0000073
32	0,0312500	-4,9824843	-0,0138889	-14,6428571	0,0000003	-0,0000003	-4,9824846	0,0000006
64	0,0156250	-4,9824829	-3,6666667	0,2631579	-0,0000011	0,0000000	-4,9824829	-0,0000011
128	0,0078125	-4,9824848	-0,7272727	2,9000000	0,0000008	0,0000000	-4,9824848	0,0000008
256	0,0039063	-4,9824858	2,2500000	0,4736842	0,0000018	0,0000000	-4,9824858	0,0000018
512	0,0019531	-4,9824839	-0,0555556	×	-0,0000001	0,0000000	-4,9824839	-0,0000001

Вывод: минимальная погрешность вычисленного интеграла была получена при N=32. А при N =512 была получена минимальная погрешность уточненного решения

	Название метода: Трапеция							
	Порядок метода k: 2							
	Подынтегральная функция и область интегрирования:			$0{,}25 * x^5, [0;5]]$				
и его аналитическое значение : I^*		651,0410000						
Число отрезков	Шаг	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Оценка отношения погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
N	h	I_h	$\frac{I^* - I_{2h}}{I^* - I_h}$	$\frac{I_h - I_{2h}}{I_{\frac{h}{2}} - I_h}$	$I^* - I_h$	$\frac{I_h - I_{2h}}{2^k - 1}$	I^R	$I^* - I^R$
1	5,0000000	1953,1250000	×	×	-1302,0840000	×	×	×
2	2,5000000	1037,5976563	0,2968754	4,2000000	-386,5566563	-305,1757812	732,4218751	-81,3808751
4	1,2500000	751,4953613	0,2598697	4,8095261	-100,4543613	-95,3674317	656,1279296	-5,0869296
8	0,6250000	676,3935547	0,2523788	4,9529298	-25,3525547	-25,0339355	651,3596192	-0,3186192
16	0,3125000	657,3945313	0,2506071	4,9882637	-6,3535313	-6,3330078	651,0615235	-0,0205235
32	0,1562500	652,6307983	0,2502228	4,9971835	-1,5897983	-1,5879110	651,0428873	-0,0018873
64	0,0781250	651,4390259	0,2503625	4,9987706	-0,3980259	-0,3972575	651,0417684	-0,0007684
128	0,0390625	651,1409912	0,2512178	5,0024589	-0,0999912	-0,0993449	651,0416463	-0,0006463
256	0,0195313	651,0665283	0,2553055	5,0131557	-0,0255283	-0,0248210	651,0417073	-0,0007073
512	0,0097656	651,0479736	0,2731713	4,8974731	-0,0069736	-0,0061849	651,0417887	-0,0007887
1024	0,0048828	651,0432129	0,3173253	4,8999754	-0,0022129	-0,0015869	651,0416260	-0,0006260
2048	0,0024414	651,0419922	0,4483709	-4,0008193	-0,0009922	-0,0004069	651,0415853	-0,0005853
4096	0,0012207	651,0422363	1,2460189	0,6667122	-0,0012363	0,0000814	651,0423177	-0,0013177
8192	0,0006104	651,0415039	0,4075872	3,0000000	-0,0005039	-0,0002441	651,0412598	-0,0002598
16384	0,0003052	651,0411377	0,2732685	0,7272863	-0,0001377	-0,0001221	651,0410156	-0,0000156
32768	0,0001526	651,0424805	10,7516340	0,9999979	-0,0014805	0,0004476	651,0429281	-0,0019281

Вывод: минимальная погрешность вычисленного интеграла была получена при N=2048. При этом при N =16384 была получена минимальная погрешность уточненного решения

Название метода: Трапеция

Порядок метода k: 2

Подынтегральная функция и область интегрирования: 5x*sin(5x), [0; 5]]

и его аналитическое значение : I^* -4,9824840

Число отрезков	Шаг	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Оценка отношения погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
N	h	I_h	$\frac{I^*-I_{2h}}{I^*-I_h}$	$\frac{I_{\frac{h}{2}}-I_{2h}}{I_{\frac{h}{2}}-I_h}$	I^*-I_h	$\frac{I_h-I_{2h}}{2^k-1}$	I^R	I^*-I^R
1	5,0000000	-8,2719841	×	×	3,2895001	×	×	×
2	2,5000000	-6,2085514	2,6829684	5,0022086	1,2260674	0,6878109	-5,5207405	0,5382565
4	1,2500000	-5,6929779	1,7256551	1,3296290	0,7104939	0,1718578	-5,5211201	0,5386361
8	0,6250000	-4,1288757	-0,8323418	9,1399808	-0,8536083	0,5213674	-3,6075083	-1,3749757
16	0,3125000	-3,9367251	0,8162573	0,7575293	-1,0457589	0,0640502	-3,8726749	-1,1098091
32	0,1562500	-4,7291946	4,1287117	5,1610632	-0,2532894	-0,2641565	-4,9933511	0,0108671
64	0,0781250	-4,9196434	4,0306649	5,0383374	-0,0628406	-0,0634829	-4,9831263	0,0006423
128	0,0390625	-4,9668036	4,0075891	5,0093347	-0,0156804	-0,0157201	-4,9825237	0,0000397
256	0,0195313	-4,9785662	4,0023483	5,0038805	-0,0039178	-0,0039209	-4,9824871	0,0000031
512	0,0097656	-4,9815040	3,9977551	5,0035432	-0,0009800	-0,0009793	-4,9824833	-0,0000007
1024	0,0048828	-4,9822378	3,9805037	4,9557951	-0,0002462	-0,0002446	-4,9824824	-0,0000016
2048	0,0024414	-4,9824233	4,0560132	5,6843434	-0,0000607	-0,0000618	-4,9824851	0,0000011
4096	0,0012207	-4,9824629	2,8767773	3,4444444	-0,0000211	-0,0000132	-4,9824761	-0,0000079
8192	0,0006104	-4,9824791	4,3061224	-3,2631579	-0,0000049	-0,0000054	-4,9824845	0,0000005
16384	0,0003052	-4,9824753	0,5632184	0,8467742	-0,0000087	0,0000013	-4,9824740	-0,0000100
32768	0,0001526	-4,9825001	-0,5403727	-9,3333333	0,0000161	-0,0000083	-4,9825084	0,0000244
65536	0,0000763	-4,9824977	1,1751825	1,1008403	0,0000137	0,0000008	-4,9824969	0,0000129
131072	0,0000381	-4,9824739	-1,3564356	×	-0,0000101	0,0000079	-4,9824660	-0,0000180

Вывод: минимальная погрешность вычисленного интеграла была получена при N=8192. Этому же N соответствовала минимальная погрешность уточненного решения.

Таблицы для осциллирующей функции с использованием в коде программы вычислений с двойной точностью:

Название метода: Трапеция

Порядок метода k: 2

Подынтегральная функция и область интегрирования: 5x*sin(5x), [0; 5]]

Интеграл и его аналитическое значение I^* : -4,9824840000000000

Число отрезков	Шаг	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Оценка отношения погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
N	h	I_h	$\frac{I^*-I_{2h}}{I^*-I_h}$	$\frac{I_{\frac{h}{2}}-I_{2h}}{I_{\frac{h}{2}}-I_h}$	I^*-I_h	$\frac{I_h-I_{2h}}{2^k-1}$	I^R	I^*-I^R
1		-8,2719843811108100	×	×	3,2895003811108100	×	×	×
2		-6,2085514827804200	2,6829684559050800	5,0022071947770200	1,2260674827804200	0,6878109661101300	-5,5207405166702900	0,5382565166702890
4		-5,6929777511097500	1,7256555470971700	1,3296292074749600	0,7104937511097500	0,1718579105568900	-5,5211198405528600	0,5386358405528600
8		-4,1288756631300900	-0,8323416260378310	9,1399842741906100	-0,8536083368699100	0,5213673626598870	-3,6075083004702000	-1,3749756995298000
16		-3,9367251582527100	0,8162573461427030	0,8158212592023240	-1,0457588417472900	0,0640501682924601	-3,8726749899602500	-1,1098090100397500
32		-4,9800079174092700	422,3440872538950000	-16,2831475915995000	-0,0024760825907304	-0,3477609197188530	-5,3277688371281200	0,3452848371281230
64		-4,9196437532067000	0,0394028145509193	×	-0,0628402467933000	0,0201213880675232	-4,8995223651391800	-0,0829616348608235

Название метода: Ньютона-Котеса для 6 узлов

Порядок метода k: 6

Подынтегральная функция и область интегрирования: 5xsin(5x), [0; 5]]

Интеграл и его аналитическое значение I^* : -4,9824840

Число отрезков	Шаг	Численное значение интеграла	Отношение погрешностей	Оценка отношения погрешностей	Погрешность	Оценка погрешности по правилу Рунге	Уточнение по Ричардсону	Погрешность уточненного решения
N	h	I_h	$\frac{I^* - I_{2h}}{I^* - I_h}$	$\frac{I_{\frac{h}{2}} - I_{2h}}{I_{\frac{h}{2}} - I_h}$	$I^* - I_h$	$\frac{I_h - I_{2h}}{2^k - 1}$	I^R	$I^* - I^R$
1		20,1850610498172000	×	×	-25,1675450498172000	×	×	×
2		-2,6858857614446100	-7,5152343929030800	9,5950851597892400	-2,2965982385553900	-7,6236489370872700	-10,3095346985319000	5,3270506985318800
4		-5,3468188861401000	0,5023334095731020	-6,2667258898245100	0,3643348861400990	-0,8869777082318300	-6,2337965943719300	1,2513125943719300
8		-4,9806384129752100	1,0735207904695400	-199,7686192635140000	-0,0018455870247900	0,1220601577216300	-4,8585782552535800	-0,1239057447464200
16		-4,9824623059446800	0,9996339374274250	83,5164289371577000	-0,0000216940553202	-0,0006079643231566	-4,9830702702678400	0,0005862702678368
32		-4,9824844093366100	0,9999955637810150	-4410,2200885569100000	0,0000004093366099	-0,0000073677973100	-4,9824917771339200	0,0000077771339200
64		-4,9824844043258900	1,0000000010056700	-0,0157531153696853	0,0000004043258892	0,0000000016702402	-4,9824844026556500	0,0000004026556493
128		-4,9824844092589000	0,9999999990099300	65,2319906556107000	0,0000004092588997	-0,0000000016443368	-4,9824844109032400	0,0000004109032368
256		-4,9824844093357000	0,9999999999845860	65,0037009622502000	0,0000004093356996	-0,0000000000256000	-4,9824844093613000	0,0000004093612995
512		-4,9824844093369000	0,9999999999997590	#DIV/0!	0,0000004093368995	-0,0000000000004000	-4,9824844093373000	0,0000004093372992
1024		-4,9824844093369000	1,0000000000000000	×	0,0000004093368995	0,0000000000000000	-4,9824844093369000	0,0000004093368995

Вывод: Длина слова, т.е. количество битов в ячейке памяти, может влиять на точность вычислений в численном интегрировании. Чем длиннее слово, тем больше битов доступно для представления чисел с плавающей точкой. Это может позволить использовать больше разрядов для хранения значений, что может привести к более точным результатам вычислений.