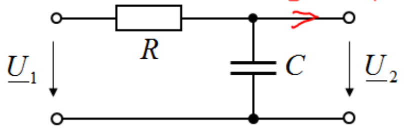
ÜBUNG: Elementare Vierpole

a) Geben Sie den Frequenzgang der folgenden (unbelasteten) Vierpole an.
Gegen welche Werte strebt der Frequenzgang bei $f \to 0$ und $f \to \infty$?

1. RC-Tiefpass

$\underline{I}_2 = 0$, da unbelastet



zur Erinnerung: $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ (Wechselstromwiderstand des Kondensators)

$\Rightarrow$ für $\omega = 0$ (Gleichstrom) : $X_C \to \infty$ (Unterbrechung)

für $\omega \to \infty$: $X_C \to 0$ (Kurzschluss)

daher: $H(f \to 0) = 1$, da $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$

$H(f \to \infty) = 0$, da $\underline{U}_2 = 0$

$\to$ deswegen "Tiefpass"

i. Allg.: $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \underbrace{\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}}_{\text{unbel. Spannungsteiler}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + j\omega RC}}} \qquad (1)$$

b) Bestimmen Sie Betrag und Phase der Vierpole.

zur Erinnerung:

$$\underline{z} = a + jb$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2} \cdot e^{j\arctan(\omega RC)}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}}_{|\underline{H}(j\omega)|\ (2)} \cdot \underbrace{e^{-j\arctan(\omega RC)}}_{\varphi = -\arctan(\omega RC)\ (3)}$$

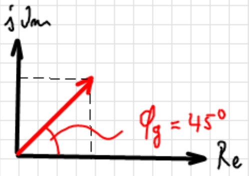
↳ Die Ausgangsspannung eilt der Eingangsspannung hinterher!

c) Bestimmen Sie die Frequenz f_g, bei der gilt $\mathrm{Re}\{\underline{H}\} = \mathrm{Im}\{\underline{H}\}$.

Bei der "Grenzfrequenz" f_g des RC-Tiefpasses gilt:

$$\mathrm{Re}\{\underline{H}(j\omega)\} = \mathrm{Im}\{\underline{H}(j\omega)\}$$

oder $\varphi_g = 45^\circ$!



$$\Rightarrow \quad \overbrace{\arctan \omega_g RC}^{\varphi_g} = 45^\circ \qquad [\tan(45^\circ) = 1]$$

$$\underline{\underline{\omega_g RC = 1}} \qquad (4)$$

$$2\pi f_g RC = 1$$

$$\underline{\underline{f_g = \frac{1}{2\pi RC}}}$$

$\Rightarrow$ Formel zur Berechnung der Grenzfrequenz eines RC-Tiefpasses

d) Wie groß ist der Betrag des Frequenzgangs bei der Frequenz f_g?

$$\underline{\underline{|\underline{H}(j\omega_g)|}} \underset{\text{mit (2) u. (4)}}{=} \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707}}$$

oder in dB: $A_{TP} = 20 \cdot \log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\underline{\underline{A_{TP} \approx -3\,dB}}$$

e) Wie ändert sich bei sehr hohen Frequenzen der Betrag des Frequenzganges bei einer Verzehnfachung der Frequenz? = 1 Dekade

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{|\underline{H}(10\omega)|}{|\underline{H}(\omega)|} = \lim_{\omega \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1^2 + (10\omega RC)^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}}}$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{1 + (10\omega RC)^2}}$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \frac{\sqrt{(\omega RC)^2}}{\sqrt{(10\omega RC)^2}}$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \frac{\cancel{\omega RC}}{10\, \cancel{\omega RC}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

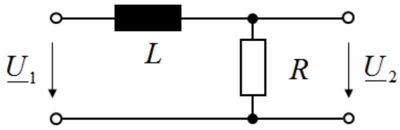
Der Betrag des Frequenzganges fällt bei $f \gg f_g$ pro Dekade (= pro Frequenzverzehnfachung) um den Faktor 10, d.h. -20 dB/Dekade.

Anm.: $20 \cdot \log(0{,}1) = -20$

zur Erinnerung:

a	$\log_{10} a$
1000	3
100	2
10	1
1	0
0.1	-1
0.01	-2

2. LR-Tiefpass



analog zu RC-Tiefpass

a) $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R \cdot \frac{1}{R}}{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{R}} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}}}$$

b) $$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega \frac{L}{R})^2} \cdot e^{j \arctan(\omega \frac{L}{R})}}$$

$$= \underline{\underline{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \frac{L}{R})^2}}}_{|\underline{H}(j\omega)|} \cdot \underbrace{e^{-j\arctan(\omega \frac{L}{R})}}_{\varphi = -\arctan(\omega \frac{L}{R})}}}$$

c) Bei "Grenzfrequenz" f_g gilt: (so ist die Definition)

$\mathrm{Re}\{\underline{H}\} = \mathrm{Im}\{\underline{H}\}$ oder anders ausgedrückt $|\varphi| = 45°$

$$\Rightarrow \arctan\left(\omega_g \frac{L}{R}\right) = 45° \quad | \tan(\cdot)$$

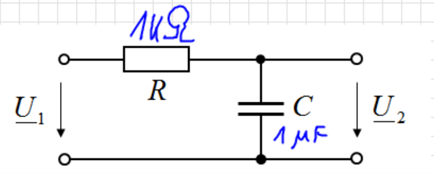
$$2\pi f_g \frac{L}{R} = 1$$

$$\underline{\underline{f_g = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{L}{R}}}}$$

d) und e) wie oben

Beispiel:

Zu skizzieren ist der Frequenzgang des folgenden (unbelasteten) RC-Tiefpasses.



Berechnung der Grenzfrequenz:

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \frac{\cancel{V}}{\cancel{A}} \cdot 10^{-6} \frac{\cancel{A}s}{\cancel{V}}} = 159.15 \frac{1}{s}$$

Bei der Grenzfrequenz gilt (s.o.):

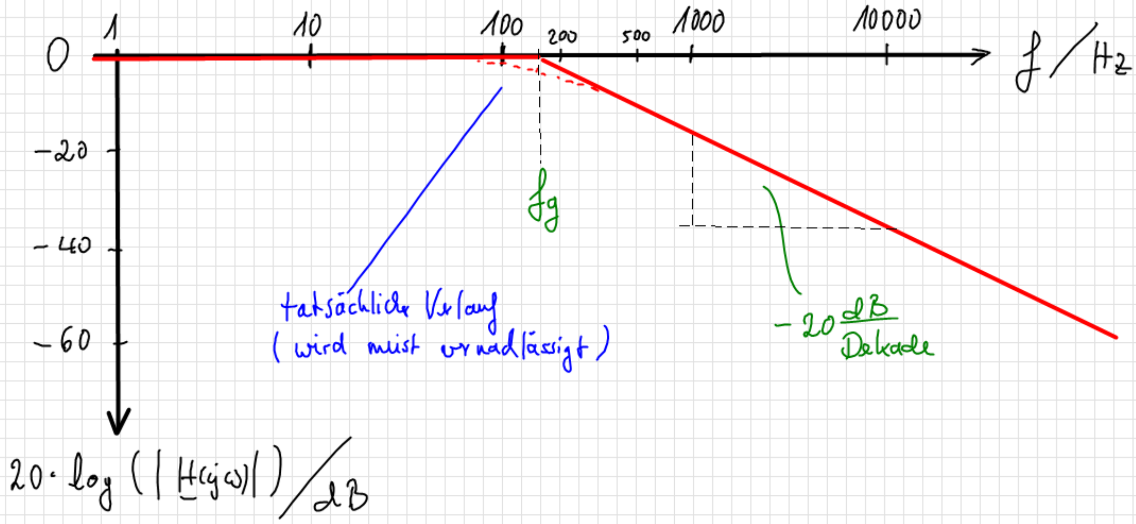
a) $\mathrm{Re}\{\underline{H}\} = \mathrm{Im}\{\underline{H}\}$ bzw. $|\varphi_g| = 45^\circ$

b) $|\underline{H}| = \left|\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ b.z.w.

$$A_g = 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\ \mathrm{dB}$$

Für Frequenzen $f \ll f_g$ gilt: $|\underline{H}(\omega \to 0)| = 1 \;\hat{=}\; 0\ \mathrm{dB}$

Für Frequenzen $f \gg f_g$ gilt: A fällt mit 20 dB/Dekade

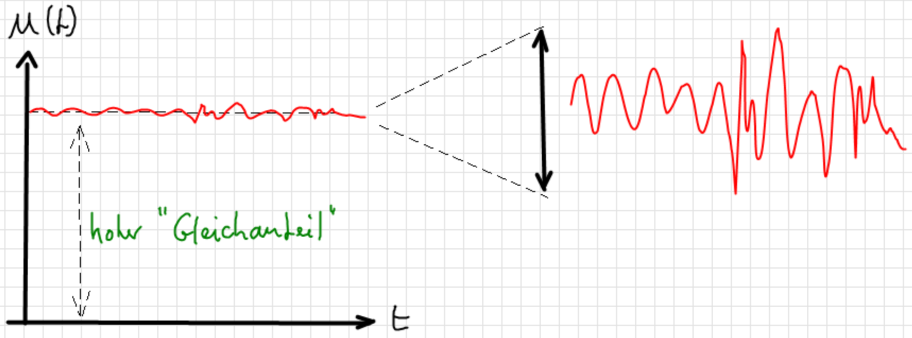

0
1
10
100
200
500
1000
10000
f / Hz
-20
-40
-60
fg
tatsächlicher Verlauf
(wird meist vernachlässigt)
-20 dB/Dekade
20 · log(|H(jω)|) / dB

Oszilloskop in der Betriebsart AC

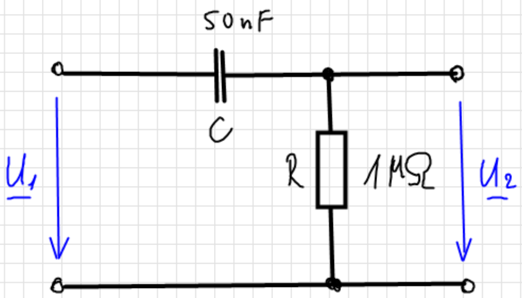
Häufig ist der interessierende Spannungsverlauf überlagert von einem hohen "Gleichanteil". Dieser verhindert eine Verstärkung des Signals (zwecks besserer Darstellung).

→ Übersteuerung des Messverstärkers!

Lösung: Abtrennung des Gleichanteils durch Hochpass!



RC-Hochpass:



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$= \frac{\omega RC}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} \cdot \frac{e^{j90^\circ}}{e^{j \arctan(\omega RC)}}$$

$$= \underbrace{\frac{\omega RC}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}}}_{|\underline{H}(j\omega)|} \cdot \underbrace{e^{j[90^\circ - \arctan(\omega RC)]}}_{|\varphi|}$$

Grenzfrequenz des Hochpasses, wenn: $\varphi_g = 45^\circ$

$$\varphi_g = 45^\circ = 90^\circ - \underbrace{\arctan(\omega_g RC)}_{45^\circ}$$

$$\arctan(\omega_g RC) = 45^\circ \Leftrightarrow \omega_g RC = 1$$

$$2\pi f_g RC = 1$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{(wie RC-Tiefpass!)}$$

Mit den Zahlenwerten:

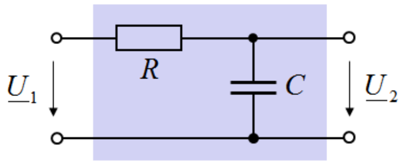
$$f_g = \frac{1}{2\pi\, 10^6 \frac{\cancel{V}}{\cancel{A}} \cdot 50 \cdot 10^{-9} \frac{\cancel{A}s}{\cancel{V}}} = 3.18 \text{ Hz}$$

ÜBUNG: Belastete Vierpole

Geben Sie das Verhältnis $\underline{U}_2(j\omega)/\underline{U}_1(j\omega)$ der beiden Schaltungen an.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.
Welche Schlussfolgerung ist daraus zu ziehen?

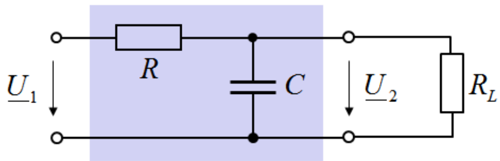
1. unbelasteter RC-Tiefpass



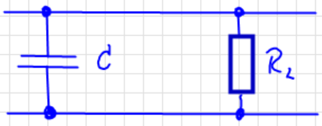
s. oben

$$\underline{\underline{\underline{H}(j\omega)}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega C} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + j\omega RC}}} \qquad (1)$$

2. belasteter RC-Tiefpass



$\underline{Z}_{RC} \Longrightarrow$



$$\underline{\underline{\underline{Z}_{RC}}} = \frac{R_L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_L + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{\underline{\frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{RC}}{R + \underline{Z}_{RC}} = \frac{\frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}}{R + \frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}} \quad \begin{matrix} \cdot\,(1 + j\omega R_L C) \\ \cdot\,(1 + j\omega R_L C) \end{matrix}$$

$$= \frac{R_L}{R\,[1 + j\omega R_L C] + R_L} \quad \begin{matrix} \cdot\,\frac{1}{R_L} \\ \cdot\,\frac{1}{R_L} \end{matrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\frac{R + R_L}{R_L} + j\omega RC}}} \qquad (2)$$

Vergleich von (1) und (2) :

unbelastet — belastet

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\underline{\underline{1}} + j\omega RC} \qquad (1)$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\underline{\underline{\frac{R+R_L}{R_L}}} + j\omega RC} \qquad (2)$$

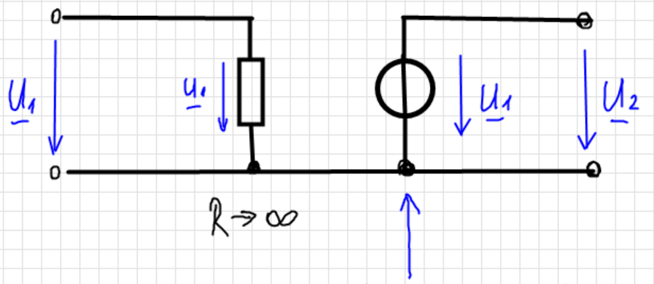
$\Rightarrow$ Die Belastung ändert den Frequenzgang!

Bei der Berechnung des Frequenzgangs muss die Belastungsimpedanz mit berücksichtigt werden.

oder

<u>Impedanzwandler</u> einsetzen (s.u.)

Impedanzwandler : (Ersatzschaltbild)



steuerbare Quelle, welche die Eingangsspannung "spiegelt".