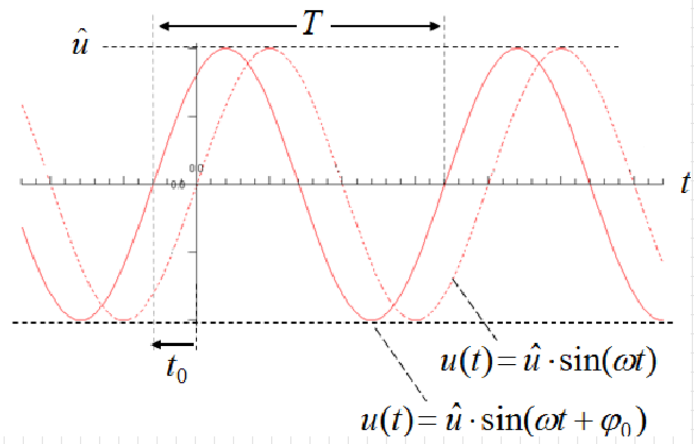
Wiederholung: s. ET1 Kap. 9

Zusammenhang zwischen sinusförmigen Größen ($u(t)$, $i(t)$) und der komplexen Darstellung



$\boxed{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$

Merkregel $\quad \dfrac{\varphi_0}{2\pi} = \dfrac{t_0}{T}$

reale Welt

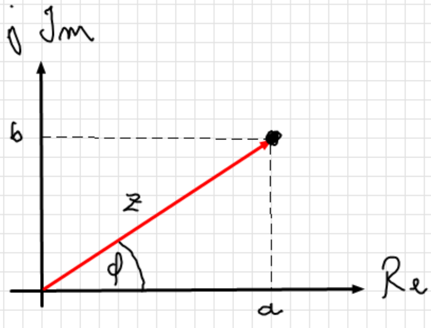
$$\Downarrow$$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \longmapsto \underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_0}$$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$\Downarrow$$
$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ + \varphi_0) \longmapsto \underbrace{\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j(\varphi_0 + 90^\circ)}}_{\text{Komplexe Darstellung}}$$

$\Rightarrow$ günstiger für Berechnungen!

Wichtige Rechenregeln für komplexe Zahlen



2 Darstellungsarten

$\underline{z} = a + jb$ (1) Kartesische Darstellung

$\Updownarrow$

$\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$ (2) Eulerdarstellung

Umrechnung (1) → (2)

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4)$$

Eulerform ist günstiger für:

Multiplikation und Division

Umrechnung (2) → (1)

$$a = z \cdot \cos\varphi \quad (5)$$

$$b = z \cdot \sin\varphi \quad (6)$$

Kartesische Form ist günstiger für:

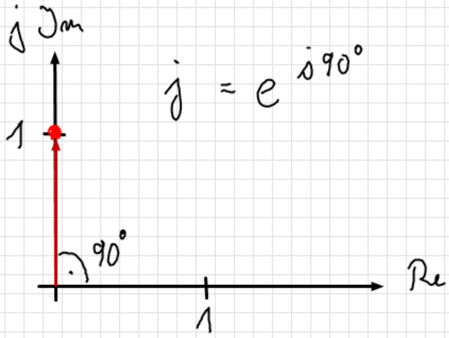
Addition und Subtraktion

Wenn der Taschenrechner die komplexe Rechnung kann, benötigt man (3) ... (6) nicht!

Rechenregeln für die imaginäre Einheit j:

$$j = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad j^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$$



$$j = e^{j90°}$$

Vorteil der komplexen Darstellung

$\Rightarrow$ Die Gesetze des Gleichstromkreises, wie Ohmsches Gesetz, Maschenregel, Knotenregel, Reihen- und Parallelschaltung von (komplexen) Widerständen, ...
gelten auch im Wechselstromkreis!

Komponenten des Wechselstromkreises:

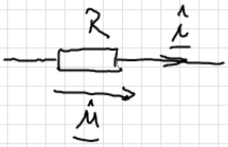
- Wechselspannungsquelle  $\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_0}$

  $\Rightarrow$ liefert sinusförmige Spannung mit der Amplitude $\hat{u}$ und der Phasenverschiebung φ_0

- Wechselstromquelle  $\underline{\hat{i}} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_0}$

  $\Rightarrow$ liefert sinusförmigen Strom mit der Amplitude $\hat{i}$ und der Phasenverschiebung φ_0

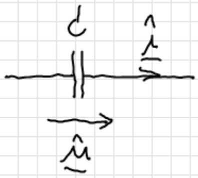
– ohmscher Widerstand



$$\underline{Z}_R = R = \frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{i}}}$$

⇒ Strom und Spannung liegen immer in Phase (Phasenverschiebung 0°)!

– Kapazität



$$\underline{\underline{Z_C}} = \frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{i}}} = \underline{\underline{\frac{1}{j\omega C}}} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j90°}$$

⇒ Die Spannung eilt dem Strom um 90° nach!

⇒ $\underline{Z}_C$ ist frequenzabhängig (nimmt mit der Frequenz ab)

– Induktivität

$$\underline{\underline{Z_L}} = \frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{i}}} = \underline{\underline{j\omega L}} = \omega L \cdot e^{j90°}$$

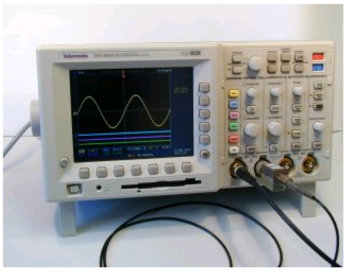
⇒ Die Spannung eilt dem Strom 90° voraus!

⇒ $\underline{Z}_L$ ist frequenzabhängig (nimmt mit der Frequenz zu)

ÜBUNG: Komplexer Widerstand

1) An einen komplexen Widerstand $\underline{Z}$ wird eine Wechselspannung $u(t)$ angelegt.

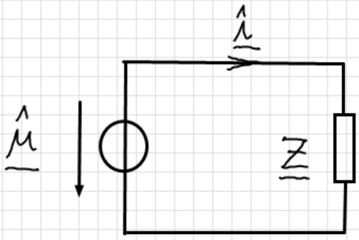
$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$$



Mit Hilfe eines Oszilloskops wird der Strom $i(t)$ durch den komplexen Widerstand gemessen.

$$i(t) = 0.2A \cdot \cos(\omega t - 30°)$$

Wie groß ist der komplexe Widerstand $\underline{Z}$?



$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\hat{u}} = 15V \cdot e^{j0°}$$

$$i(t) = 0.2A \cdot \cos(\omega t - 30°)$$

$$= 0.2A \cdot \sin(\omega t + 90° - 30°) = 0.2A \cdot \sin(\omega t + 60°)$$

$$\downarrow$$

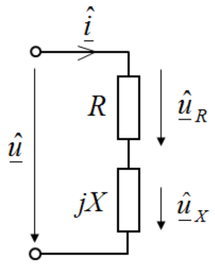
$$\underline{\hat{i}} = 0.2A \cdot e^{j60°}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \frac{15V}{0.2A \cdot e^{j60°}} = \frac{15V}{0.2A} \cdot e^{-j60°}$$

$$= \underbrace{75\Omega}_{\text{Impedanz}} \cdot e^{-j60°}$$

ÜBUNG: Bestimmung unbekannter Zweipole

Gegeben ist folgende Schaltung:

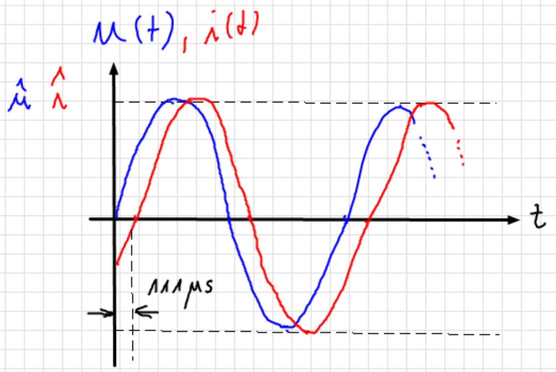


An der Schaltung liegt eine sinusförmige Spannung $u(t)$ mit der Frequenz f und dem Scheitelwert $\hat{u}$.

$$\hat{u} = 10V \qquad f = 500\,Hz$$

Gemessen wird ein Strom $i(t)$ mit dem Scheitelwert $\hat{i}$, welcher der Spannung um eine Zeit t_0 nacheilt

$$\hat{i} = 376\,mA \qquad t_0 = 111\,\mu s$$



Berechnung der Phasenverschiebung:

$$\frac{t_0}{T} = \frac{\varphi_0}{360^\circ} \qquad \varphi_0 = 360^\circ \cdot \frac{t_0}{T} = 360^\circ \cdot t_0 \cdot f$$

$$T = \frac{1}{f} \qquad \underline{\underline{\varphi_0 \approx 20^\circ}}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{u}} = 10V \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{\hat{i}} = 376\,mA \cdot e^{-j20^\circ}$$

$$\underline{Z} = \frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{i}}} = \frac{10\,V}{0.376\,A \cdot e^{-j20^\circ}} = \frac{10\,V}{0.376\,A} \cdot e^{j20^\circ}$$

$$\underline{Z} = 26.6\,\Omega \cdot e^{j20^\circ}$$ Eulerform

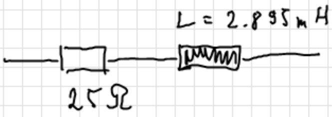
$$= \underbrace{25\,\Omega}_{R} + j\,\underbrace{9.1\,\Omega}_{X} = R + jX$$

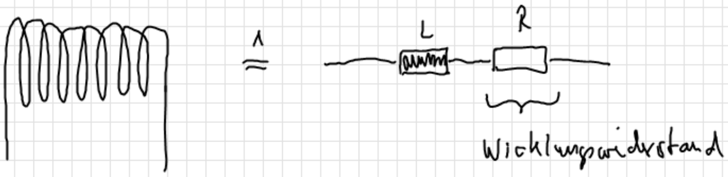
$\Longrightarrow$ Strom "verspätet" sich $\Longrightarrow$ X ist Induktivität!

Da X eine Induktivität ist, gilt:

$$X = \omega L \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f$$

$$\Rightarrow L = \frac{X}{\omega} = \frac{X}{2\pi f} = \frac{9.1\,\cancel{\Omega}\,\frac{V}{A}}{2\pi\, 500\,\frac{1}{s}} = 2.895\,mH \qquad \frac{Vs}{A}$$





Spule