ÜBUNG: Winkel im Bogenmaß / Gradmaß

$$\frac{\widehat{\varphi}}{\varphi^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \quad \Updownarrow \quad \widehat{\varphi} = \varphi^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

1. Geben Sie folgende Winkel in Bogenmaß an:

$10^0 \triangleq$

$120^0 \triangleq$

$72^0 \triangleq$

$$\widehat{\varphi} = 10^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} = 0.175$$

$$\widehat{\varphi} = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi = 2.094$$

$$\widehat{\varphi} = 72^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0.4\,\pi = 1.257$$

2. Geben Sie folgende Winkel im Gradmaß an:

$\frac{\pi}{9} \triangleq$

$1.25 \triangleq$

$\frac{0.\overline{3}}{\pi} \triangleq$

$$\frac{\widehat{\varphi}}{\varphi^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \quad \Updownarrow \quad \varphi^0 = \widehat{\varphi} \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

$$\varphi^0 = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 20^\circ$$

$$\varphi^0 = 1.25 \cdot \frac{180^0}{\pi} = 71.62^\circ$$

$$\varphi^0 = \frac{0.\overline{3}}{\pi} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1}{3\pi^2} \cdot 180^\circ = 6.079^\circ$$

ÜBUNG: Periodendauer und Frequenz

1. Wie groß ist die Periodendauer T einer Sinusfunktion der Frequenz f=50Hz?

$[f] = \frac{1}{s} = s^{-1}$

$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{f} = \frac{1}{50\frac{1}{s}} = 0.02\,s = \underline{\underline{20\,ms}}$

2. Wie groß ist die Kreisfrequenz ω einer Sinusfunktion der Frequenz f=50Hz?

$\underline{\underline{\omega}} = 2\pi f = \underline{\underline{314.16\ s^{-1}}}$

3. Geben Sie *u(t=10ms)* an:

$$u_1(t) = 1V \cdot \sin(2s^{-1} \cdot t)$$

$$u_2(t) = 1V \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit f=50Hz}$$

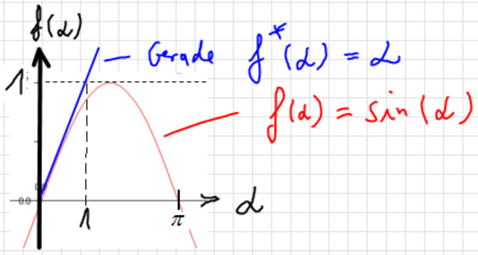
Bogenmaß !

$\underline{\underline{u_1(t=10\,ms)}} = 1V \cdot \sin\left(2s^{-1} \cdot 0.01\right) = 1V \cdot \sin(0.02)$

$= 0.01999 \approx \underline{\underline{0.02}}$

Anm.: Für sehr kleine Winkel (Bogenmaß!) gilt:

$\sin(\alpha) \approx \alpha$



$\underline{\underline{u_2(t=10\,ms)}} = 1V \cdot \sin\left(2\pi \cdot 50\,\cancel{s^{-1}} \cdot 0.01\,\cancel{s}\right) = 1V \cdot \sin(\pi)$

$= \underline{\underline{0\,V}}$

4. Gegeben ist $u(t) = \sin(\omega t)$ mit f=1kHz

Bei welchen Zeitpunkten t ist der Funktionswert 0?

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000\,s^{-1}} = \underline{\underline{0.001\,s}}$$

Nulldurchgänge, wo $\frac{2\pi}{T} \cdot t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots = n \cdot \pi$

mit $n \in \mathbb{Z}$

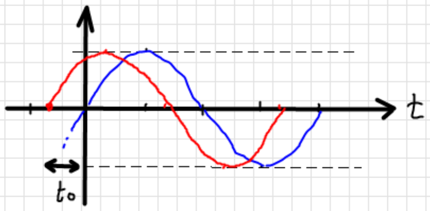
$$\Longrightarrow \quad \frac{2\cancel{\pi}}{T} \cdot t = n \cdot \cancel{\pi}$$

$$\underline{\underline{t = n \cdot \frac{T}{2}}}$$

ÜBUNG: Nullphasenwinkel

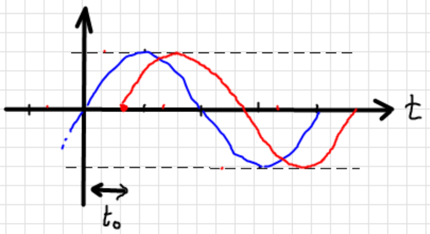
1. Eine Sinusfunktion der Frequenz 50Hz ist um 4ms nach links verschoben.
   Wie groß ist die der Nullphasenwinkel?

Voreilend oder nacheilend?



$\sin[\omega(t+t_0)] = \sin(\omega t + \varphi_0)$

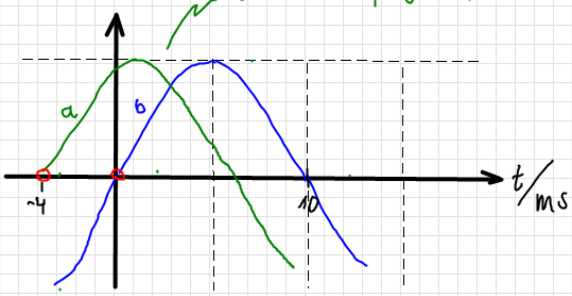
ist voreilend, da der Nulldurchgang um t_0 früher stattfindet als bei $\sin(\omega t)$, nämlich bei $t = -t_0$!



$\sin[\omega(t-t_0)] = \sin(\omega t - \varphi_0)$

ist nacheilend, da der Nulldurchgang um t_0 später stattfindet als bei $\sin(\omega t)$, nämlich bei $t = +t_0$!

voreilend, da Funktion a den Nulldurchgang 4 ms früher hat



$f = 50\,\text{Hz}$

$\Updownarrow$

$T = \frac{1}{f} = 20\,\text{ms}$

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t_0}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\varphi}} = 2\pi \cdot \frac{t_0}{T} = 2\pi \frac{4\,\text{ms}}{20\,\text{ms}} = \underline{\underline{\frac{2}{5}\pi}}$$

oder

$$\frac{\varphi^\circ}{360} = \frac{t_0}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\varphi^\circ}} = 360^\circ \cdot \frac{t_0}{T} = 360^\circ \cdot \frac{4\,\text{ms}}{20\,\text{ms}} = \underline{\underline{72^\circ}}$$

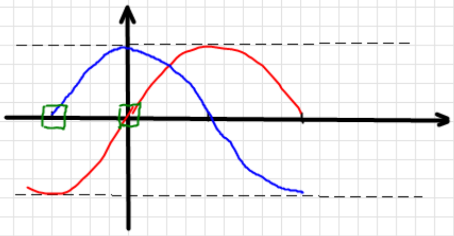
2. Durch eine elektrische Schaltung wird eine Sinusschwingung der Frequenz 5 kHz um 30° verzögert. Wie groß ist die entsprechende Zeitverzögerung.

$$\frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = \frac{t_0}{T} = t_0 \cdot f$$

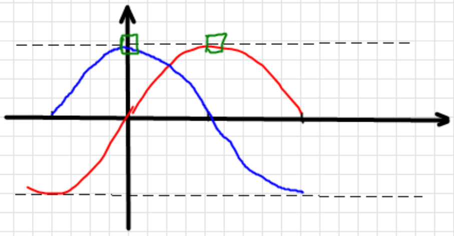
$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{t_0}} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5000\ \frac{1}{s}} \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = \underline{\underline{16\tfrac{2}{3}\ \mu s}}$$

Merkregel



$\sin(0°) = \cos(-90°)$



$\cos(0°) = \sin(90°)$

ÜBUNG: Sinusfunktion / Kosinusfunktion

Vervollständigen Sie:

$$\cos(25°) = \sin(......)$$

$$\sin(33°) = \cos(......)$$

$$\cos(\omega t - 5°) = \sin(......)$$

$$\cos(25°) = \sin(25° + 90°) = \sin(115°)$$

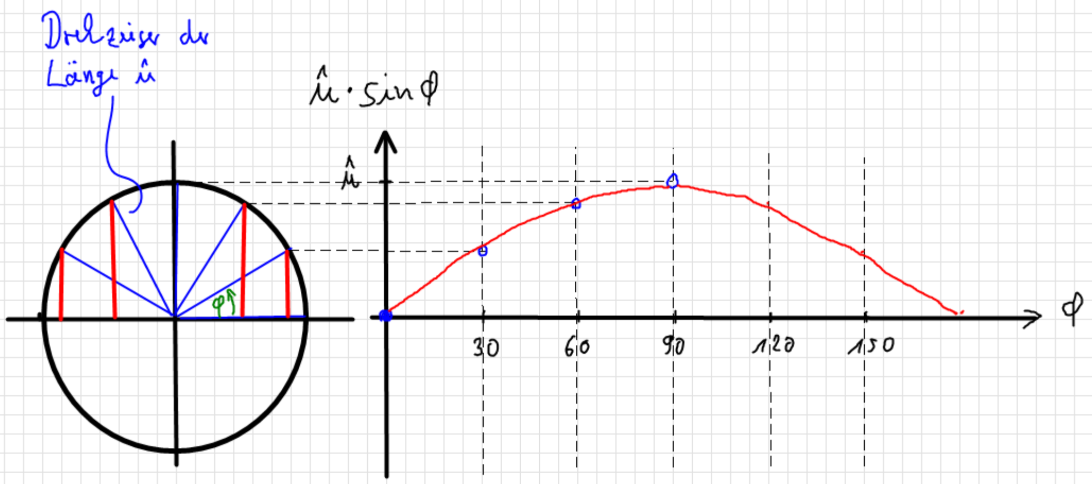
$$\sin(33°) = \cos(33° - 90°) = \cos(-57°)$$

$$\cos(\omega t - 5°) = \sin(\omega t - 5° + 90°) = \sin(\omega t + 85°)$$

Anmerkungen zu 9.1.4

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{u(\varphi)}{\hat{u}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{u(\varphi) = \hat{u} \cdot \sin(\varphi)}}$$



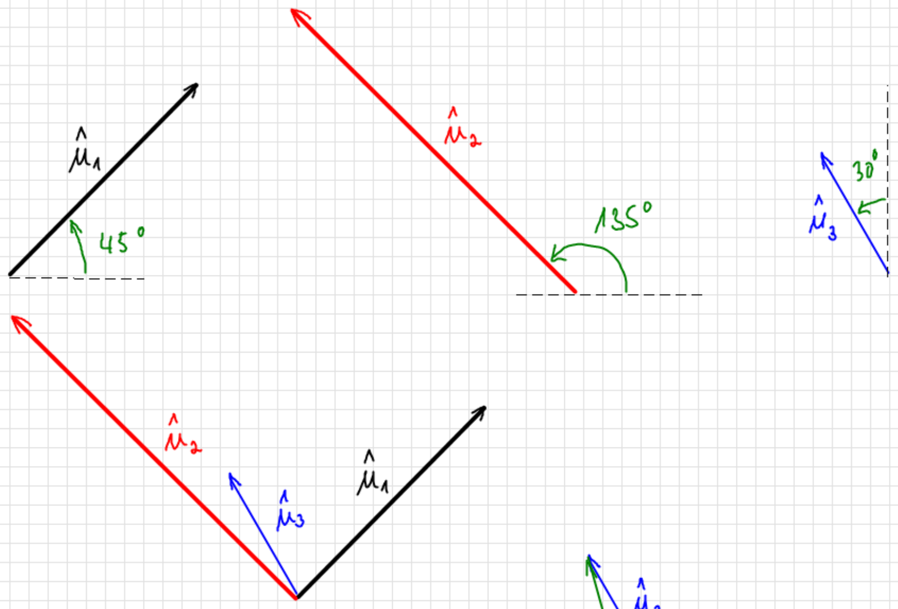
ÜBUNG: Summe und Differenz von Sinusfunktionen gleicher Frequenz

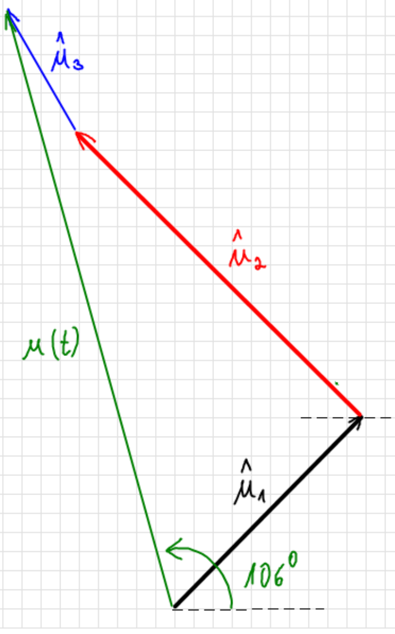
Skizzieren Sie die Zeigerdiagramme folgender Funktionen und schätzen Sie die Amplitude und den Nullphasenwinkel der Summenfunktion u(t) ab:

$$u_1(t) = 10V \cdot \sin(\omega t + 45°) \qquad \hat{u}_1 = 10V$$

$$u_2(t) = 15V \cdot \sin(\omega t + 135°) \qquad \hat{u}_2 = 15V$$

$$u_3(t) = 5V \cdot \cos(\omega t + 30°) \qquad \hat{u}_3 = 5V$$





Gemessen:

$$u(t) \approx 23V \cdot \sin(\omega t + 106°)$$

Wo wollen wir hin?

Eingeführt wird ein neuer Zahlentyp (Komplexe Zahlen), so daß die Rechenregeln des Gleichstromkreises (Maschenregel, Knotenregel, Ohmsches Gesetz, Spannungsteiler, Stromteiler, Reihenschaltung, Parallelschaltung, Ersatzquelle, ..) auch im Wechselstromkreis und mit Kapazitäten und Induktivitäten gelten!

Komplexe Zahlen: Imaginäre Einheit

Beispiel: $x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = -1$

Problem: Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist!

Aber: Definiert man $\underbrace{j}_{\text{imaginäre Einheit}} = \sqrt{-1}$, $\Rightarrow$ neuer Zahlentyp $\notin \mathbb{R}$

dann gilt: $j^2 = -1$.

Achtung: j ist nicht reell, aber man kann mit j rechnen!

Übung:

$$j^3 = j^2 \cdot j = -j$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$$

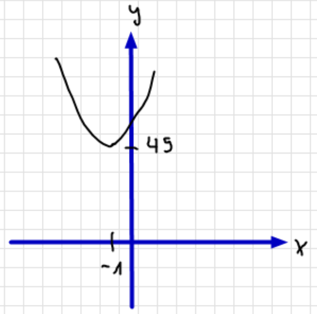
$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$\frac{1}{j^2} = \frac{1}{(-1)} = -1$$

Komplexe Zahlen = Realteil + Imaginärteil

Beispiel: $x^2 + \overbrace{2}^{p}x + \overbrace{50}^{q} = 0$

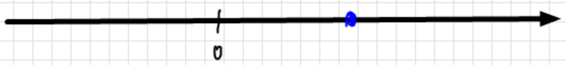
Ansatz: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$



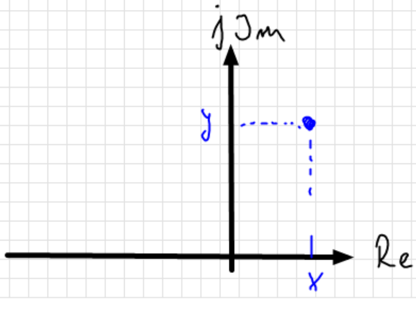
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 50}$$
$$= -1 \pm \sqrt{-49}$$
$$= -1 \pm \sqrt{(-1)\cdot 49}$$
$$= -1 \pm 7 \cdot \sqrt{-1} = \underline{\underline{-1 \pm 7j}}$$

Probe: $x^2 + 2x + 50 = 0$

$$(-1 + 7j)^2 + 2(-1+7j) + 50 = 0$$
$$(-1 + 7j)(-1+7j) - 2 + 14j + 50 = 0$$
$$\cancel{1} - \cancel{14j} - \cancel{49} \; - \cancel{2} + \cancel{14j} + \cancel{50} = 0$$ w.z.b.w.



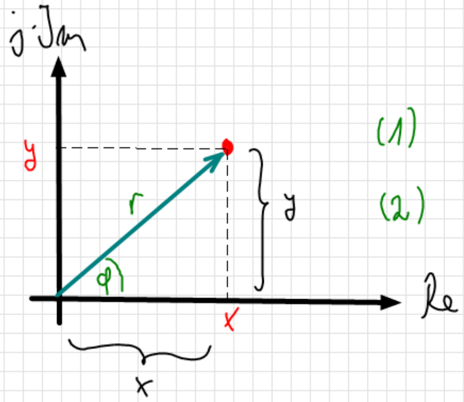
$\mathbb{R}$: Zahlenstrahl



$\underline{z} = x + jy$

$\mathbb{C}$: Kompl. Ebene

Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten



$$\underline{z} = x + jy$$

$$(1) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(2) \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot \sin\varphi \qquad (3)$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot \cos\varphi \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{z} = x + jy \underset{(3),(4)}{=} r \cdot \cos\varphi + j \cdot r \cdot \sin\varphi$$

$$\underline{z} = r\left[\cos\varphi + j\sin\varphi\right] \quad \text{Polarform}$$

ÜBUNG: Komplexe Zahlen

1. Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in die Exponentialform um.

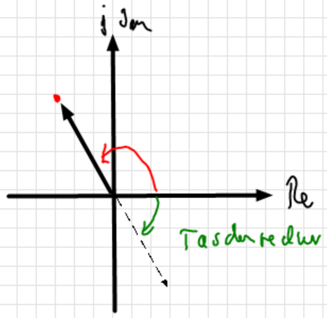
$$\underline{z}_1 = -3 + j4$$
$$\underline{z}_2 = 5 - j2$$

a) $\underline{z}_1 = -3 + j4 = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r e^{j\varphi}$

$\underline{\underline{r}} = \sqrt{3^2+4^2} = \underline{\underline{5}}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = (-53.13^\circ) = \underline{\underline{126.87^\circ}}$

laut Tasch.-rechn



$\underline{z}_1 = 5 \cdot e^{j126.87^\circ}$

b) $\underline{z}_2 = 5 - j2 = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$

$\underline{\underline{r}} = \sqrt{5^2+2^2} = \underline{\underline{5.4}}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{5}\right) = -21.8^\circ = 338.2^\circ$

$\underline{z}_2 = 5.4 \cdot e^{j338.2^\circ}$

2. Vereinfachen Sie

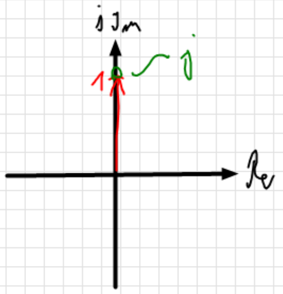
$$\underline{z}_3 = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{z}_4 = je^{j\pi}$$

$$\underline{z}_5 = -\frac{1}{j}$$

c) $\underline{z}_3 = 5\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

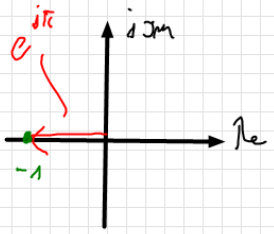
$= \underline{\underline{5\cdot j}}$



d) $\underline{z}_4 = j\cdot e^{j\pi}$

$= j\cdot(-1)$

$= \underline{\underline{-j}}$



e) $\underline{\underline{\underline{z}_5}} = -\frac{1}{j} = -\frac{j}{j^2} = -\frac{j}{(-1)} = \underline{\underline{j}}$

3. Wandeln Sie in die kartesische Form um:

$$\underline{z}_6 = \frac{1}{2+j}$$

$$\underline{z}_7 = \frac{1-j}{2+j5}$$

konjugiert komplex erweitern

$$\underline{z}_6 = \frac{1}{2+j} = \frac{(2-j)}{(2+j)(2-j)} = \frac{2-j}{4-\cancel{2j}+\cancel{2j}+1}$$

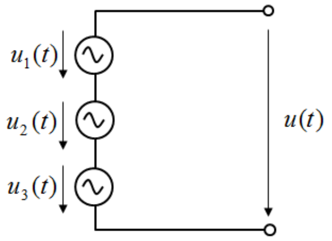
$$\underline{z}_6 = \frac{2-j}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j$$

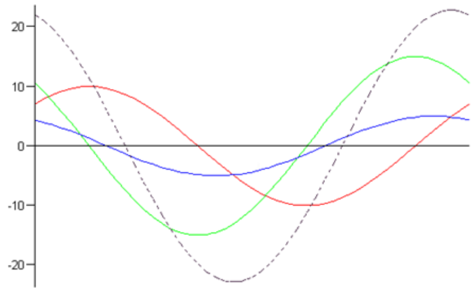
$$\underline{z}_7 = \frac{1-j}{2+j5} = \frac{(1-j)(2-j5)}{(2+j5)(2-j5)} = \frac{2-5j-2j+5\cancel{j^2}^{-1}}{4-\cancel{10j}+\cancel{10j}-25\cancel{j^2}_{-1}}$$

$$\underline{z}_7 = \frac{2-5-7j}{29} = -\frac{3}{29} - \frac{7}{29}j$$

Berechnen Sie die Funktionssumme der 3 Spannungen:

$$u_1(t) = 10V \cdot \sin(\omega t + 45°)$$
$$u_2(t) = 15V \cdot \sin(\omega t + 135°)$$
$$u_3(t) = 5V \cdot \cos(\omega t + 30°)$$





vorher alle Fkt. in Sin-Fkt. umwandeln!

1. Aufstellen der komplexen Amplituden

$$\underline{u}_1 = 10V \cdot e^{j45°}$$

$$\underline{u}_2 = 15V \cdot e^{j135°}$$

$$\underline{u}_3 = 5V \cdot e^{j120°}$$

$$\cos(\omega t + 30°) = \sin(\omega t + 30° + 90°)$$
$$= \sin(\omega t + 120°)$$

Da sich die komplexen Amplituden in der Exponentialform nur schlecht addieren lassen, werden sie jetzt in die kartesische Form umgewandelt.

Anm. Mit einem geeigneten Taschenrechner kann man jetzt einfach $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3$ rechnen.

2. Addition der Komplexen Amplituden (manueller Rechengang)

$$\underline{u}_1 = 10V \cdot \cos 45^\circ + j\,10V \cdot \sin 45^\circ = 7.07V + j\,7.07V$$

$$\underline{u}_2 = 15V \cdot \cos 135^\circ + j\,15V \cdot \sin 135^\circ = -10.61V + j\,10.01V$$

$$\underline{u}_3 = 5V \cdot \cos 135^\circ + j\,5V \cdot \sin 135^\circ = -2.5V + j\,4.39V$$

$$\underline{\underline{\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3}} = -6.04V + j\,22.01V$$

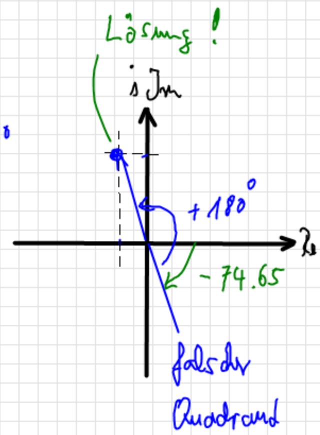
$$= \underline{\underline{22.82V \cdot e^{j\,105.4^\circ}}}$$

$$|u| = \sqrt{6.04^2 + 22.01^2}\ V$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{22.01V}{-6.04V}\right) = -74.65^\circ + 180^\circ$$

laut Taschenrechner

$$\varphi = 105.4^\circ$$



3. Rückwandeln in eine Zeitfunktion

$$\underline{\underline{u(t) = 22.82V \cdot \sin(\omega t + 105.4^\circ)}}$$