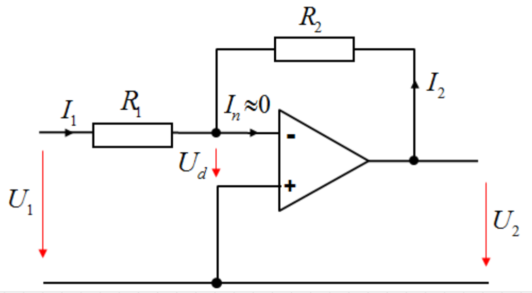
Herleitung: Gegenkopplung

Ein OpAmp habe die Verstärkung $V_0 = 10^5$.
Der Eingangswiderstand des OpAmp kann als „unendlich hoch“ angenommen werden.

a) Geben Sie die Verstärkung $v = U_2 / U_1$ der u.a. Schaltung an.

b) Wie ist die Verstärkung der Schaltung für einen idealen Operationsverstärker $V_0 \to \infty$?



$R_1 = 1k\Omega$

$R_2 = 10k\Omega$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 + U_d \qquad (1) \qquad \text{Maschenregel}$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 + U_d \qquad (2) \qquad \text{"}$$

$$U_2 = -V_0 \cdot U_d \qquad (3)$$

$$I_1 = -I_2 \qquad (4) \qquad \text{da } I_n \approx 0 \qquad \text{Knotenregel}$$

jetzt: I_1, I_2 und U_d eliminieren

(3) in (1) einsetzen: $U_1 = I_1 \cdot R_1 - \frac{U_2}{V_0}$

$$I_1 = \frac{U_1 + \frac{U_2}{V_0}}{R_1} \qquad (5)$$

(3) und (4) in (2) einsetzen: $U_2 = -I_1 \cdot R_2 - \frac{U_2}{V_0}$

$$I_1 = -\frac{U_2 + \frac{U_2}{V_0}}{R_2} \qquad (6)$$

(5) und (6) gleichsetzen: $\dfrac{U_1 + \frac{U_2}{V_0}}{R_1} = -\dfrac{U_2 + \frac{U_2}{V_0}}{R_2}$

$$\frac{U_1 + \frac{U_2}{V_0}}{U_2 + \frac{U_2}{V_0}} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{U_2} \\ = \\ \cdot \frac{1}{U_2} \end{matrix} -\frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{V_0}}{1 + \frac{1}{V_0}} = -\frac{R_1}{R_2} \qquad \text{mit } 1 + \frac{1}{V_0} = \frac{V_0 + 1}{V_0}$$

$$\frac{\left(\frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{V_0}\right)}{V_0 + 1} \cdot V_0 = -\frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\frac{U_1}{U_2} \cdot V_0 + 1}{V_0 + 1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{U_1}{U_2} V_0 = -\frac{R_1}{R_2} \cdot (V_0 + 1) - 1$$

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{\frac{R_1}{R_2} \cdot (V_0 + 1) + 1}{V_0}$$

(7) $$\underline{\underline{\frac{U_2}{U_1} = -\frac{V_0}{\frac{R_1}{R_2} \cdot (V_0 + 1) + 1}}}$$

Verstärkung der Schaltung

Mit den Zahlenwerten ergibt sich für die Schaltungsverstärkung :

$$\frac{U_2}{U_1} = - \frac{V_0}{\frac{R_1}{R_2} \cdot (V_0 + 1) + 1}$$

$R_1 = 1 k\Omega$
$R_2 = 10 k\Omega$
$V_0 = 10^5$

$$= - \frac{10^5}{0.1 \cdot (10^5 + 1) + 1} \approx \underline{\underline{-9.9989}}$$

mit $V_0 = 10^5$
(8)

mit $V_0 \to \infty$:

$$\frac{U_2}{U_1} = - \lim_{V_0 \to \infty} \frac{V_0}{\frac{R_1}{R_2} (V_0 + 1) + 1}$$

$$= - \lim_{V_0 \to \infty} \frac{V_0}{\frac{R_1}{R_2} \cdot V_0} = \underline{\underline{- \frac{R_2}{R_1}}}$$

$$\underline{\underline{\frac{U_2}{U_1}}} = - \frac{R_2}{R_1} = \underline{\underline{-10}}$$

Man macht keinen großen Fehler, wenn man $V \to \infty$ annimmt !

Wie groß ist U_2 und U_d für $U_1 = 1V$?

Mit (8) gilt: $U_2 = -U_1 \cdot 9.9989 = \underline{\underline{-9.9989\,V}}$

mit (3) gilt: $U_2 = -V_0 \cdot U_d$

$$\Updownarrow$$

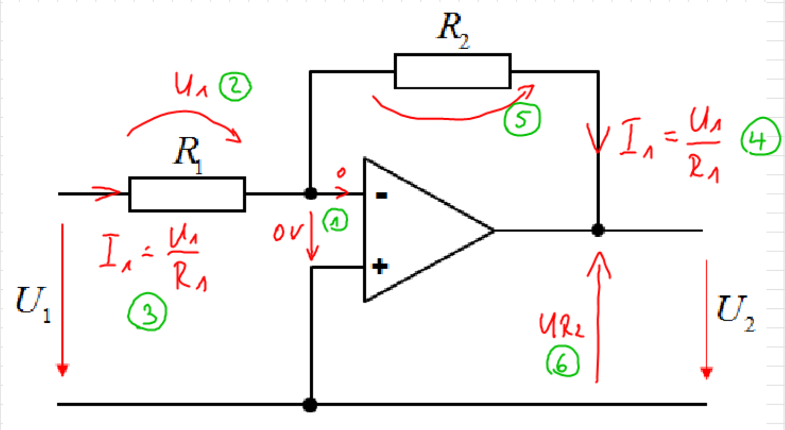
$$\underline{\underline{U_d}} = -\frac{U_2}{V_0} = \underline{\underline{0.1\,mV}}$$

In einer gegengekoppelten OpAmp-Schaltung kann $U_d \approx 0V$ angenommen werden!

Solange der OpAmp nicht in der Spannungsbegrenzung betrieben wird (Ausgangsspannung $\approx \pm U_B$), erzwingt die Gegenkopplung $U_d \approx 0$!

$\Longrightarrow$ starke Vereinfachung der Schaltungsanalyse

Übung : Invertierender Verstärker



(5) $U_{R_2} = I_1 \cdot R_2 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}$

$\Rightarrow \quad U_2 = -U_{R_2} = -U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}$

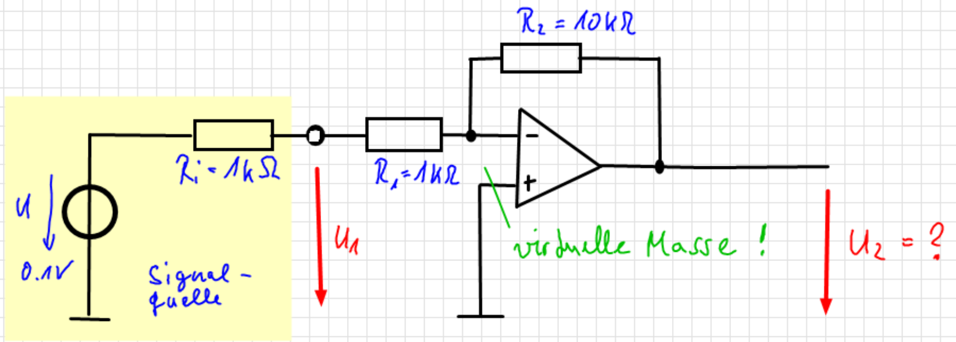
bzw. $\quad \underline{\underline{\frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1}}}$

Fazit: Das Widerstandsverhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ legt die Verstärkung des invertierenden Verstärkers fest!

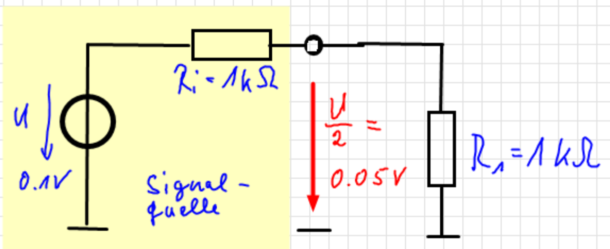
Anwendung: Messverstärker

Eingangswiderstand des invertierenden Verstärkers:

Beispiel:



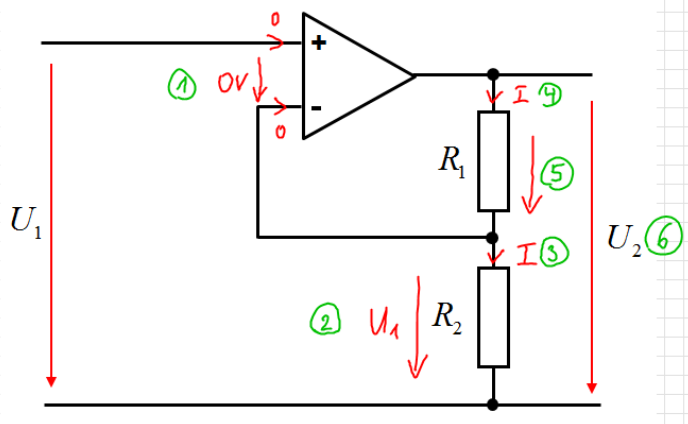
aus Sicht der Quelle äquivalent zu



$$\Longrightarrow \quad U_2 = -10 \cdot U_1 = -10 \cdot \frac{U}{2} = \underline{\underline{-5V}} \quad !$$

Fazit: Es ist zu bedenken, dass der invertierende Verstärker durch seinen Eingangswiderstand ($R_e = R_1$) die Quelle belastet.

Übung: Nichtinvertierender Verstärker



3 $I = \frac{U_1}{R_2} \longrightarrow$ 4 $I = \frac{U_1}{R_2}$

5 $U_{R_1} = I \cdot R_1 = \frac{U_1}{R_2} \cdot R_1$

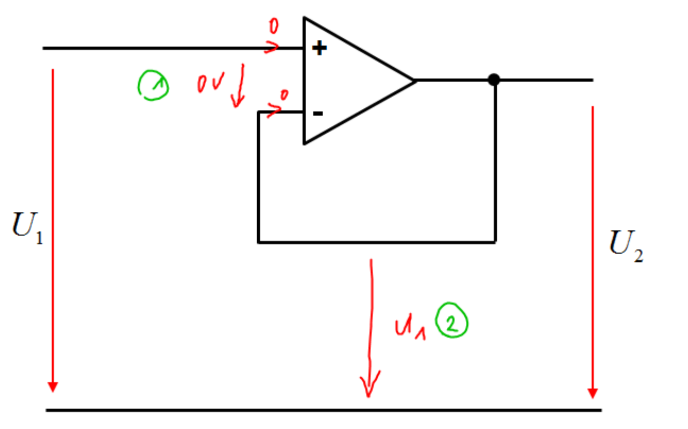
6 $U_2 = U_{R_1} + U_1 = \frac{U_1}{R_2} \cdot R_1 + U_1$

$$= U_1 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right)$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right)$$ Verstärkung

$$R_e \rightarrow \infty$$

Übung: Impedanzwandler

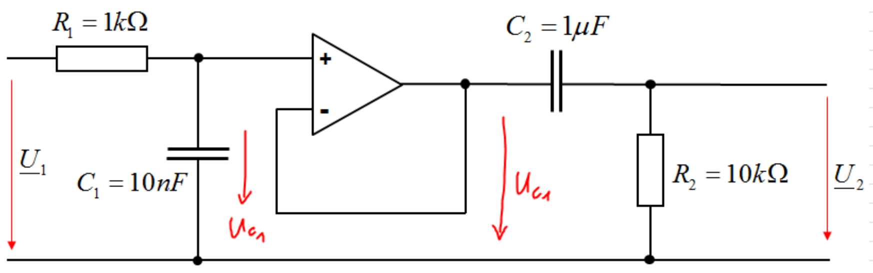


$\Rightarrow \underline{\underline{U_2 = U_1}}$

$\underline{\underline{R_e \rightarrow \infty}}$

ÜBUNG: Serienschaltung entkoppelter Filterschaltungen (Bandpass)

Geben Sie den Frequenzgang der folgenden Schaltung an:



$\underline{H}_1(j\omega)$ $\qquad\qquad$ $\underline{H}_2(j\omega)$

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}}}$$

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_{R2}}{\underline{U}_{C1}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \underline{\underline{\frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}}$$

$$\underline{H}_{ges}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega)$$

$$= \underline{\underline{\frac{j\omega R_2 C_2}{(1 + j\omega R_1 C_1)(1 + j\omega R_2 C_2)}}}$$

Diskussion:

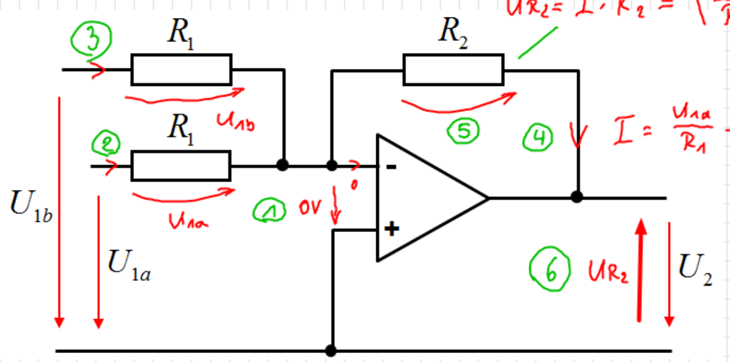
$\omega \to 0$ $\qquad$ $\underline{H}_{ges}(\omega \to 0) = 0$

$\omega \to \infty$ $\qquad$ $\underline{H}_{ges}(\omega \to \infty) = 0$

$f = 1kHz$ $\qquad$ $\underline{H}_{ges}(f = 1kHz) = \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{ausrechnen}} = \underline{\underline{0.998 \cdot e^{-j2.7^\circ}}}$

Übung: Addierer

$U_{R2} = I \cdot R_2 = \left(\frac{U_{1a}}{R_1} + \frac{U_{1b}}{R_1} \right) \cdot R_2$



$I = \frac{U_{1a}}{R_1} + \frac{U_{1b}}{R_1}$

2 $I_{1a} = \frac{U_{1a}}{R_1}$

3 $I_{1b} = \frac{U_{1b}}{R_1}$

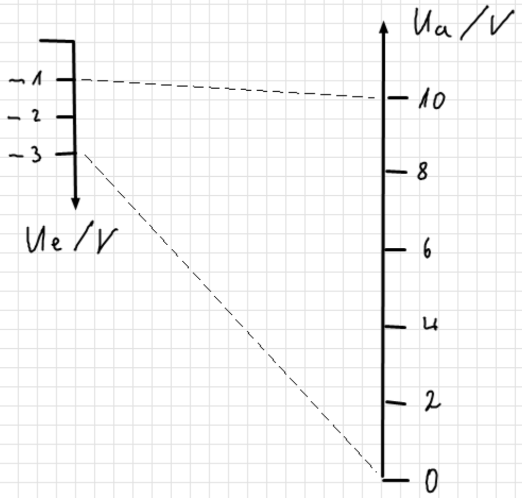
6 $\underline{\underline{U_2}} = -U_{R2} = \underline{\underline{-\frac{R_2}{R_1} \cdot (U_{1a} + U_{1b})}}$

ÜBUNG: Pegelwandler

Ein Messsignal liegt im Spannungsbereich zwischen -3V … -1V.

Das Signal soll durch eine Schaltung auf den Spannungsbereich eines AD-Wandlers (0V …. 10V) angepasst werden (nichtinvertierend).

Eine geeignete Schaltung ist zu entwerfen.



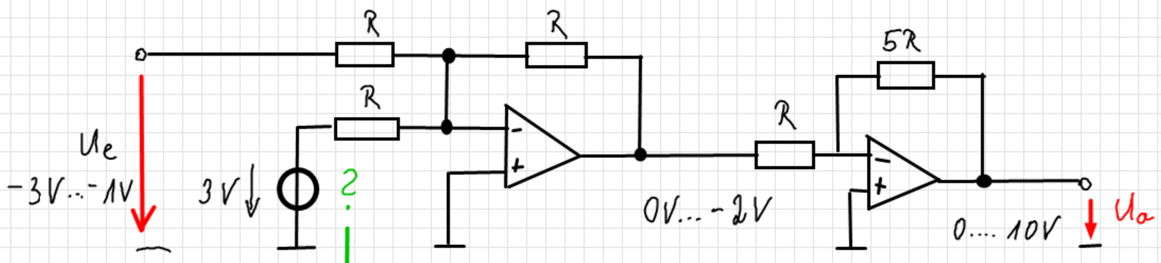
⟹ Anhebung um 3V

-3V….-1V → 0…2V

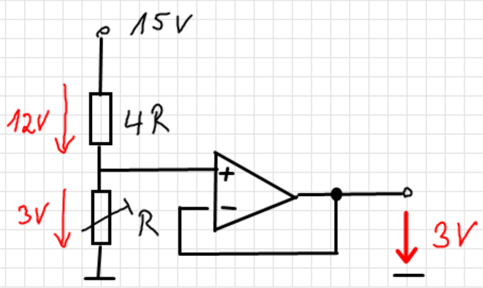
⇓

Verstärkung um 5x

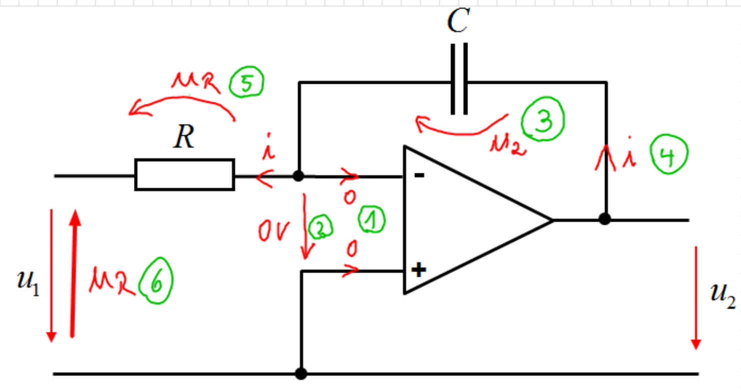
0…2V → 0….10V



3V – Spannungsquelle (z.B.)



Übung: Integrator



④ $i = C \dfrac{du_2}{dt}$

⑤ $u_R = R \cdot i = R \cdot C \dfrac{du_2}{dt}$

⑥ $u_1 = -u_R = -RC \dfrac{du_2}{dt}$

$\Updownarrow$

$$\frac{du_2}{dt} = -\overbrace{\frac{1}{RC}}^{\text{const.}} u_1$$

Beide Seiten integrieren (Hauptsatz der Integralrechnung)

$$\int_0^t \frac{du_2}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t u_1 \, dt$$

$$u_2(t) - U_2(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_1 \, dt$$

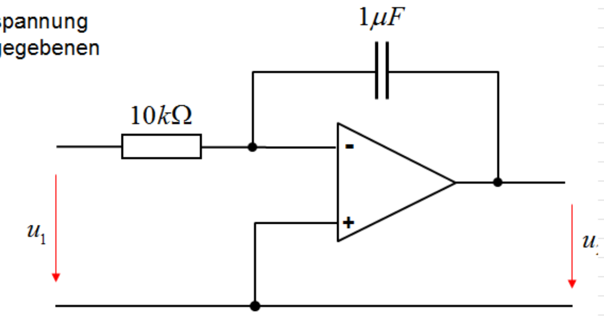
$$u_2(t) = U_2(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t u_1 \, dt$$

ÜBUNG: Integrator

Wie verläuft die Ausgangsspannung des Integrators bei der angegebenen Eingangsspannung?

Anm.: idealer OpAmp

$U_2(0) = 0V$



$$u_2(t) = U_2(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t u_1(t)\,dt$$

hier: $U_2(0) = 0$ d.h. Kondensator nicht geladen

$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{10^4\,\frac{\cancel{V}}{\cancel{A}} \cdot 10^{-6}\,\frac{\cancel{A}s}{\cancel{V}}} = \underline{\underline{100\,\frac{1}{s}}}$$

$$\underline{\underline{u_2(t) = -100\,\frac{1}{s}\int_0^t u_1(t)\,dt}}$$

<u>Annahme</u>: Es werde eine konstante Spannung $u_1 = -1V$ angelegt.

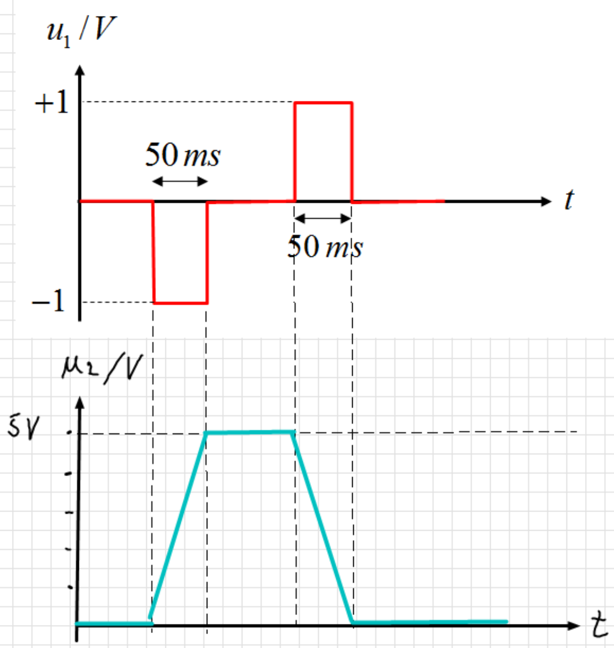
$$u_2(t) = -100\,\frac{1}{s}\int_0^t (-1V)\,dt = +100\,\frac{1}{s}\cdot 1V \cdot t$$

$$\underline{\underline{u_2(t) = 100\,\frac{V}{s}\cdot t}} \Longrightarrow$$ Gerade, die mit $100\,\frac{V}{s}$ ansteigt.

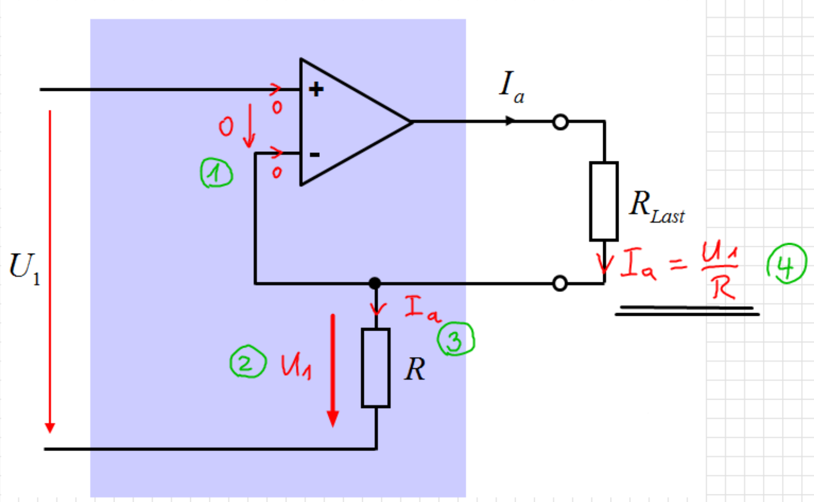
$$\underline{\underline{u_2(t) = 100\,\tfrac{V}{s} \cdot t}} \Rightarrow$$

Gerade, die mit $100\,\frac{V}{s}$ ansteigt.

Im 50 ms steigt die Spannung um $100\frac{V}{s} \cdot 0.05\,s = 5\,V$.



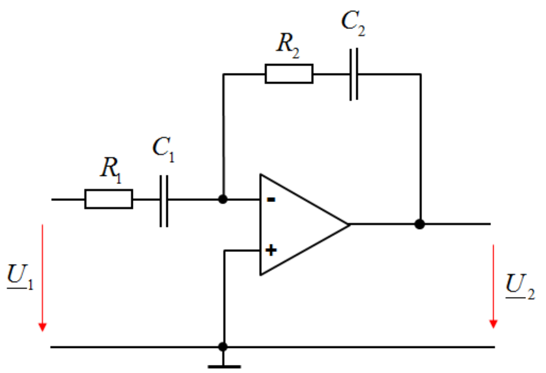
Übung: Spannungsgesteuerte Stromquelle



3 $I_a = \frac{U_1}{R}$

ÜBUNG: Frequenzgang von OpAmp-Filterschaltungen 1

Der Frequenzgang ist zu berechnen:



$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

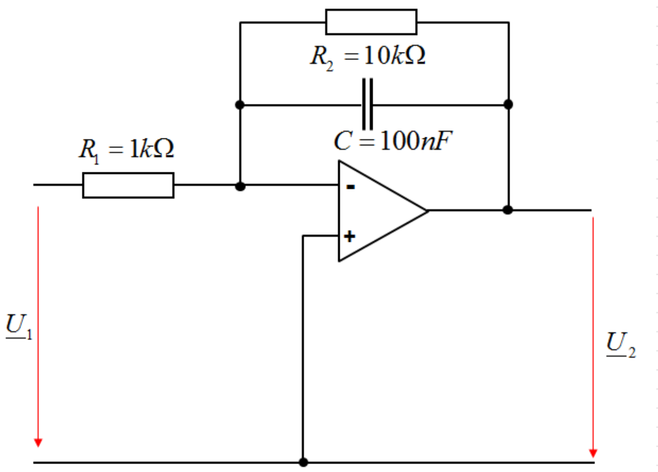
$$= -\frac{\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) \cdot j\omega C_1}{\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \cdot j\omega C_1}$$

$$= -\frac{\left(\frac{C_1}{C_2} + j\omega R_2 C_1\right) \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_1}{C_2}}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$= -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

ÜBUNG: Frequenzgang von OpAmp-Filterschaltungen 2

Der Frequenzgang ist zu berechnen:



$$\underline{H}(j\omega) = - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

$$= - \frac{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \begin{matrix} \cdot j\omega C \\ \cdot j\omega C \end{matrix}}{R_1}$$

$$= - \frac{\dfrac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}}{R_1}$$

$$= - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 \cdot C}$$

vgl. mit Tiefpass