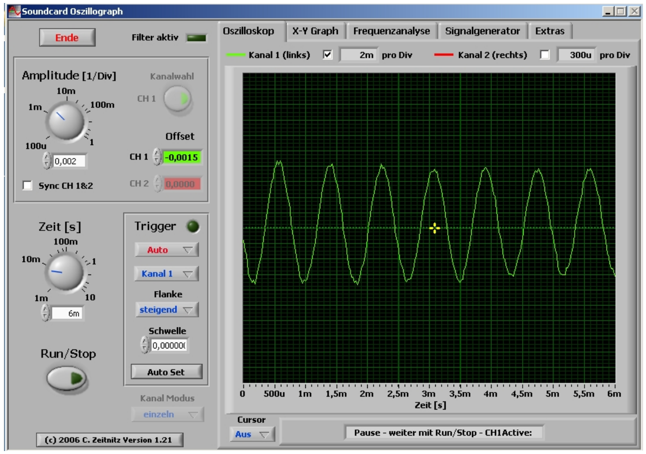
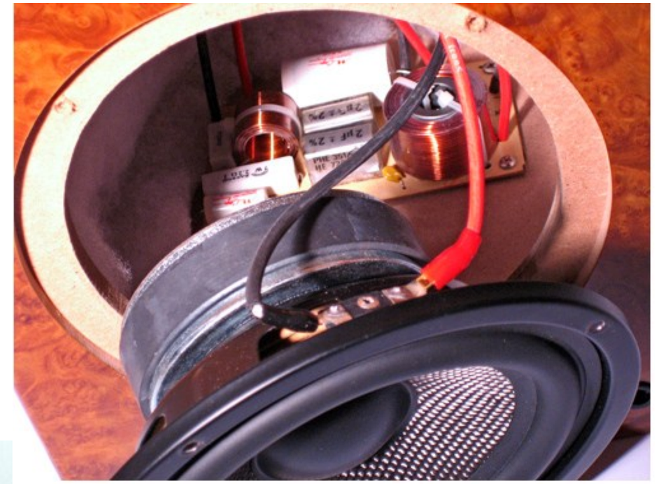
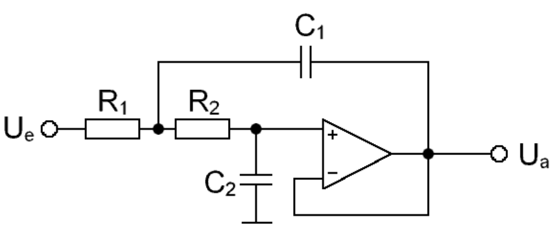
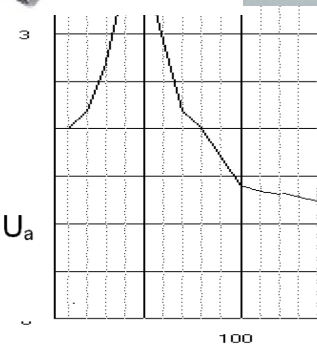
5. Wechselstrom

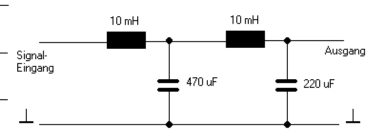




by "gafu" (gafu.de)



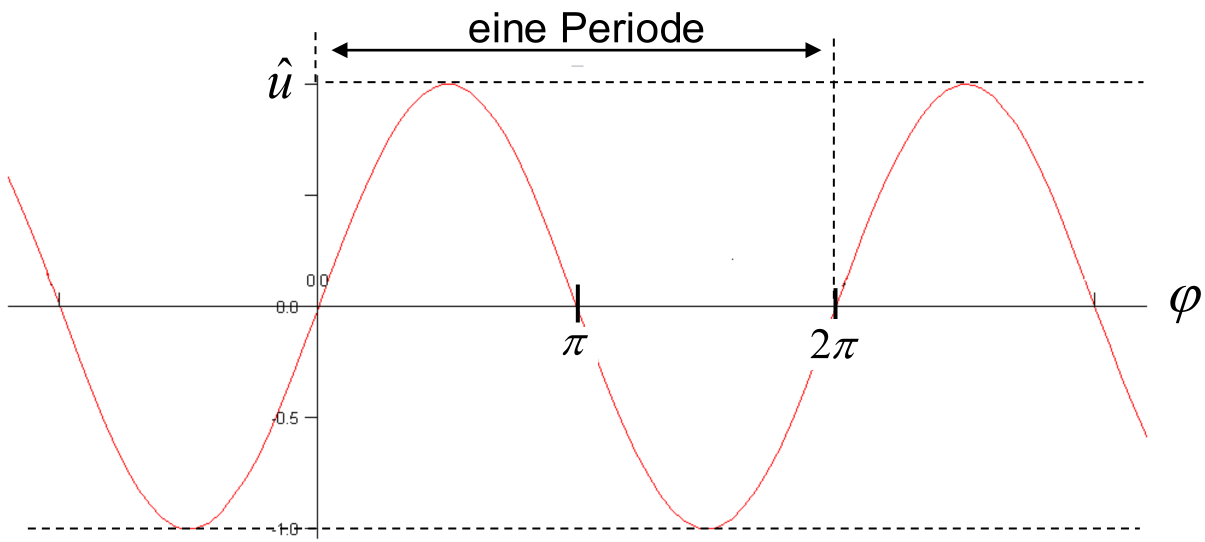




5.1 Math. Grundlagen

5.1.1 Sinus- und Kosinusfunktionen

$$\boxed{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\varphi)}$$



$\hat{u}$: Scheitelwert oder Amplitude

φ : Phase

Winkelangabe für φ kann im Bogenmaß $\widehat{\varphi}$ oder Gradmaß φ^0 erfolgen.

Merkregel

$$\frac{\widehat{\varphi}}{\varphi^0} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

Beispiele: $180^0 \mathrel{\hat{=}} \pi$ $\quad 90^0 \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2}$ $\quad 30^0 \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{6}$

$360^0 \mathrel{\hat{=}} 2\pi$ $\quad 45^0 \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4}$

ÜBUNG: Winkel im Bogenmaß / Gradmaß

1. Geben Sie folgende Winkel in Bogenmaß an:

$$10^0 \mathrel{\widehat{=}}$$

$$120^0 \mathrel{\widehat{=}}$$

$$72^0 \mathrel{\widehat{=}}$$

2. Geben Sie folgende Winkel im Gradmaß an:

$$\frac{\pi}{9} \mathrel{\widehat{=}}$$

$$1.25 \mathrel{\widehat{=}}$$

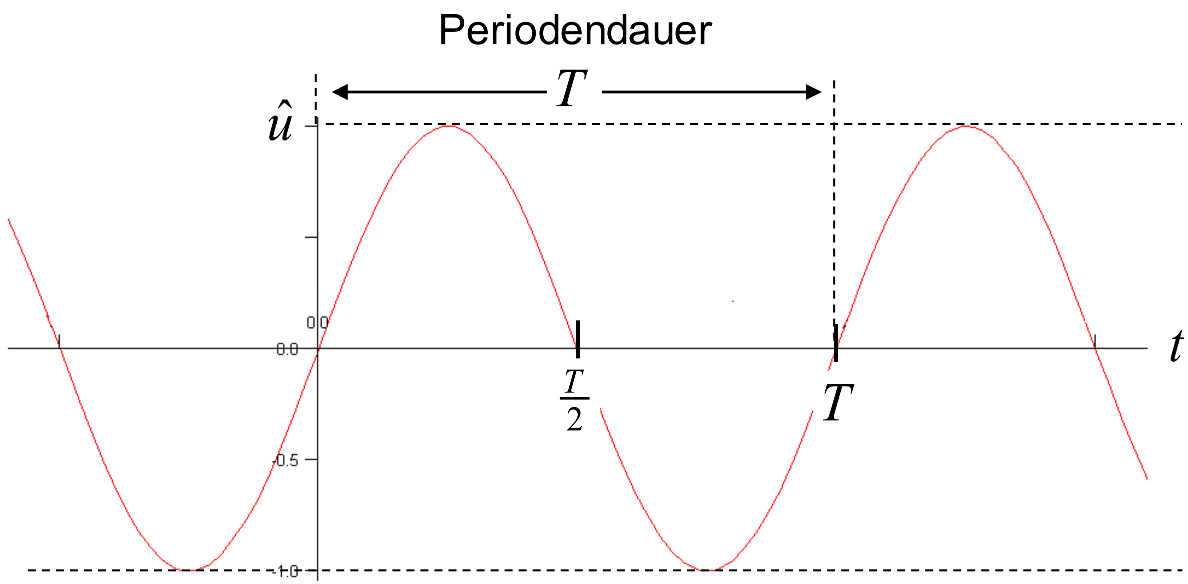
$$\frac{0.\overline{3}}{\pi} \mathrel{\widehat{=}}$$

Bei Wechselstrom ist die Phase von der Zeit t abhängig: $\varphi = \varphi(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\underbrace{\frac{2\pi}{T}} \cdot t)$$

Kreisfrequenz : ω

$$\boxed{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)}$$



Beispiel: $T = 10ms$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) = \hat{u} \cdot \sin(\frac{2\pi}{0.01s} \cdot t) = \hat{u} \cdot \sin(628.3\tfrac{1}{s} \cdot t)$$

Alternativ kann statt der Periodendauer T auch die Frequenz f verwendet werden.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Einheit der Frequenz : $[f] = \frac{1}{s} = Hz$ (Hertz)

Die Frequenz gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an.

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{u} \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) = \hat{u} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

$$\boxed{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)}$$

Beispiel: $T = 10ms$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.01s} = 100\,\tfrac{1}{s}$$

= 100 Schwingungen pro Sekunde

ÜBUNG: Periodendauer und Frequenz

1. Wie groß ist die Periodendauer T einer Sinusfunktion der Frequenz f=50Hz?

2. Wie groß ist die Kreisfrequenz ω einer Sinusfunktion der Frequenz f=50Hz?

3. Geben Sie $u(t=10ms)$ an:

$$u_1(t) = 1V \cdot \sin(2s^{-1} \cdot t)$$

$$u_2(t) = 1V \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{mit } f=50\text{Hz}$$

4. Gegeben ist $u(t) = \sin(\omega t)$ mit f=1kHz

   Bei welchen Zeitpunkten t ist der Funktionswert 0?

5.1.2 Nullphasenwinkel

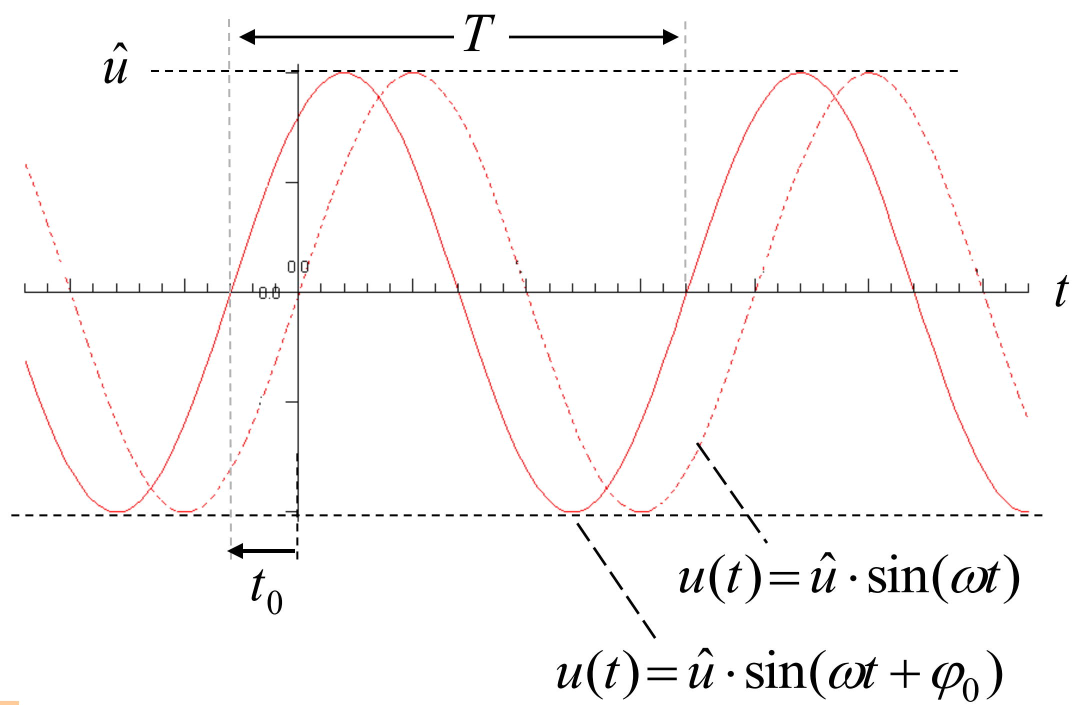
Die Funktion $u(t)$ kann auf der Zeitachse um eine Zeit t_0 verschoben sein.

→ Tafel

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin[\omega(t + t_0)]$$
$$= \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \omega t_0)$$
$$= \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \underbrace{2\pi \frac{t_0}{T}}_{\varphi_0})$$

Nullphasenwinkel: φ_0

$$\boxed{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$$



Merkregel $\frac{\varphi_0}{2\pi} = \frac{t_0}{T}$

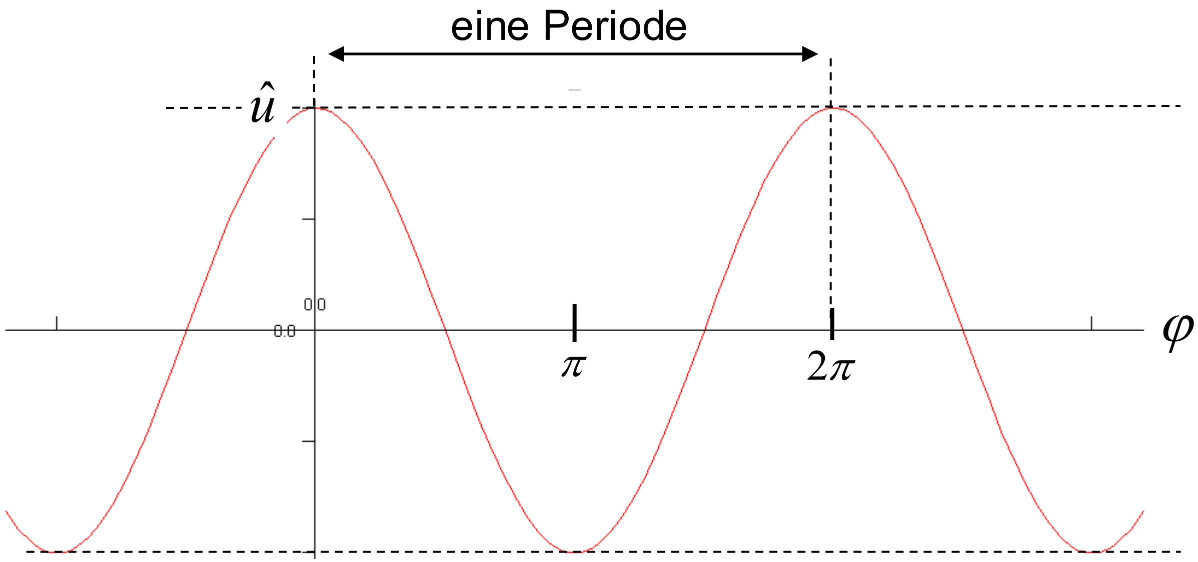
ÜBUNG: Nullphasenwinkel

1. Eine Sinusfunktion der Frequenz 50Hz ist um 4ms nach links verschoben. Wie groß ist die der Nullphasenwinkel?

2. Durch eine elektrische Schaltung wird eine Sinusschwingung der Frequenz 5 kHz um 30° verzögert. Wie groß ist die entsprechende Zeitverzögerung.

5.1.3 Kosinusfunktionen

$$\boxed{u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\varphi)}$$



Eine Kosinusschwingung ist eine um 90° nach links verschobene Sinusschwingung !

Zwischen der Sinus- und Kosinusfunktion gelten daher die Zusammenhänge:

$$\boxed{\cos(\varphi) = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})} \qquad \boxed{\sin(\varphi) = \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

→ Tafel

ÜBUNG: Sinusfunktion / Kosinusfunktion

Vervollständigen Sie:

$$\cos(25°) = \sin(.....)$$

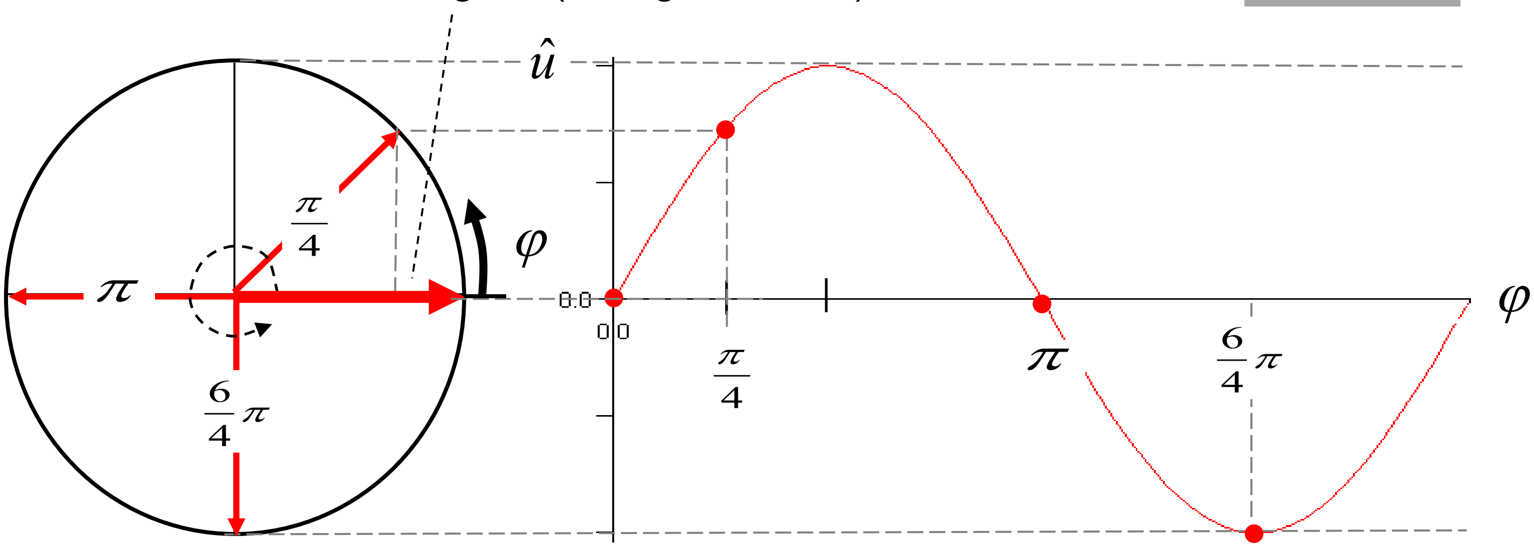
$$\sin(33°) = \cos(.....)$$

$$\cos(\omega t - 5°) = \sin(.....)$$

5.1.4 Sinus-/Kosinusfunktion als Projektion eines umlaufenden Zeigers

Man erhält eine Sinusfunktion,
wenn man Vertikalauslenkung eines (beim Winkel $\varphi=0°$ startenden) Drehzeigers über den Winkel φ aufträgt.

→ Tafel

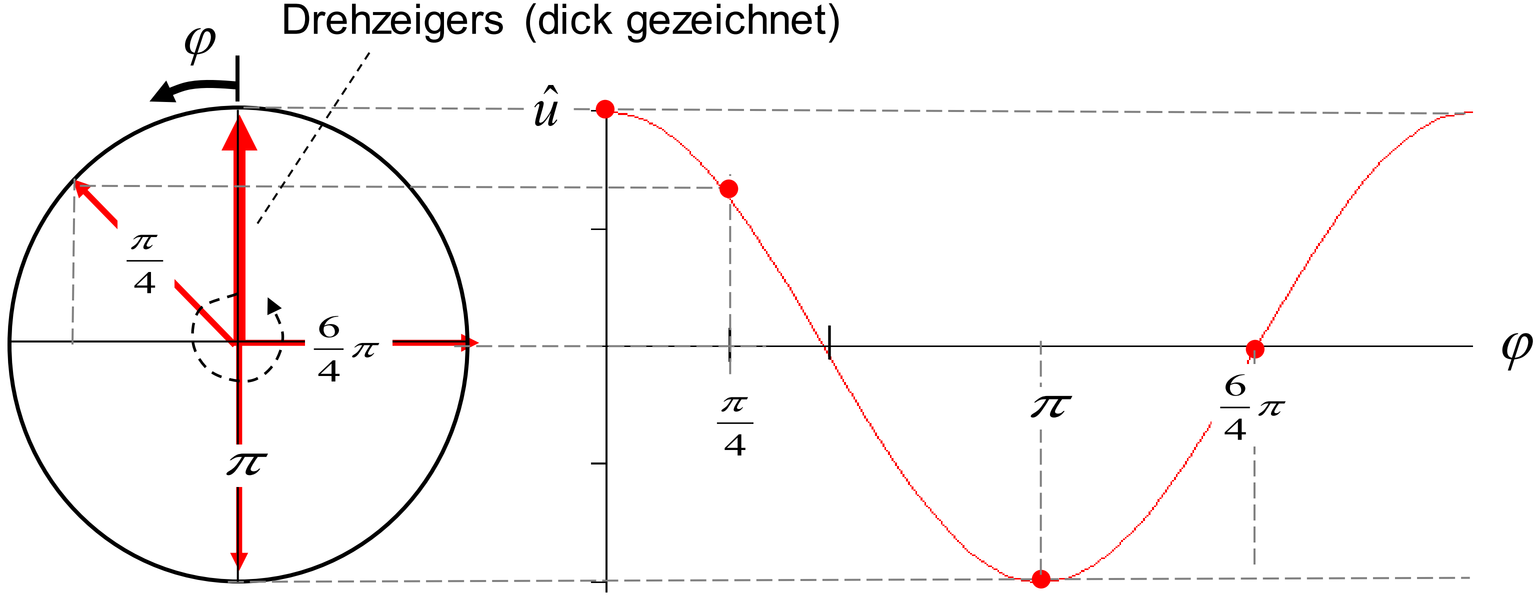


- Die Länge des Drehzeigers entspricht der Amplitude der Sinusfunktion.
- Die Winkelgeschwindigkeit des Drehzeigers entspricht der Kreisfrequenz ω.
- Die Startposition des Drehzeigers repräsentiert den Nullphasenwinkel φ_0.

Kosinusfunktion als Projektion eines umlaufenden Zeigers

Man erhält eine Kosinusfunktion,
wenn man Vertikalauslenkung eines (beim Winkel φ=90° startenden) Drehzeigers über den Winkel φ aufträgt.

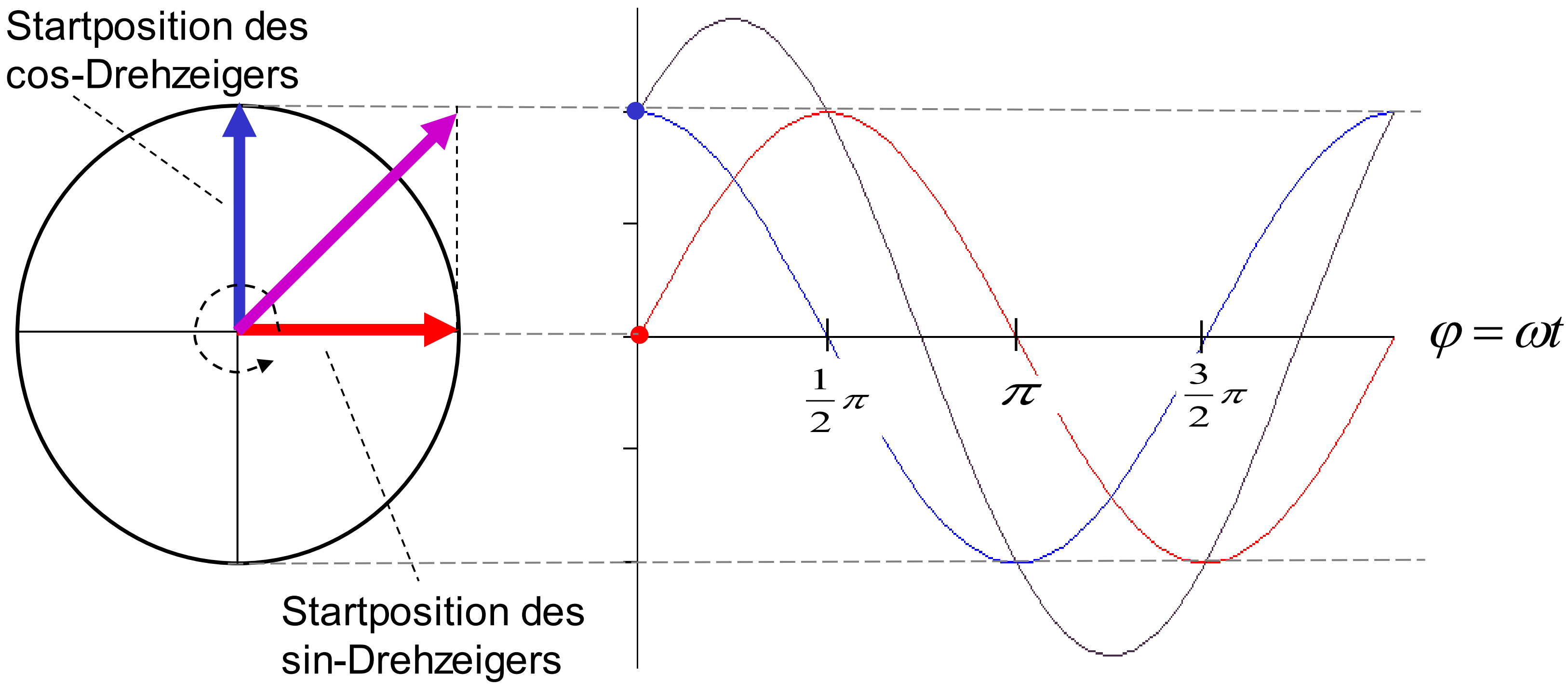
Startposition (Startwinkel) des Drehzeigers (dick gezeichnet)



5.1.5 Addition/Subtraktion von Sinusfunktionen gleicher Frequenz

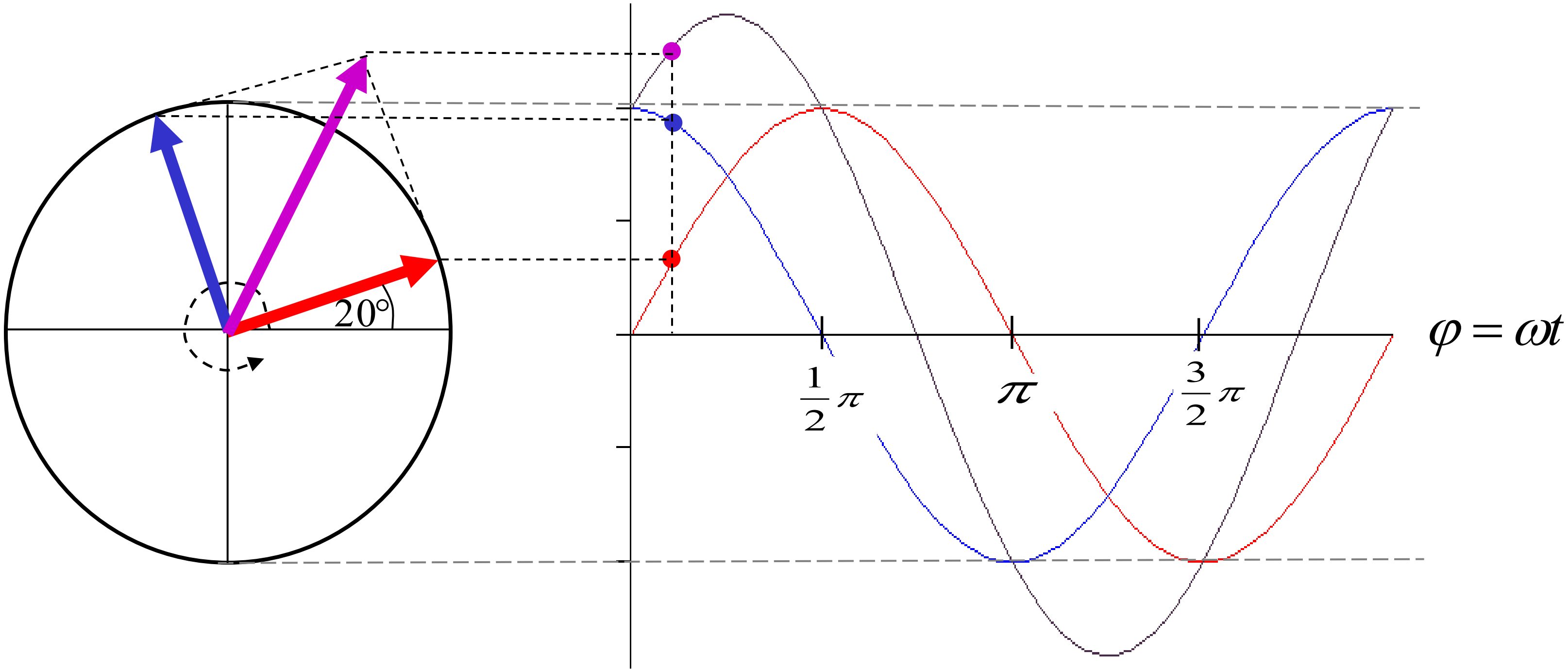
Frage: Wie werden Sinus-/Cosinusfunktionen gleicher Frequenz aber mit unterschiedlichen Nullphasenwinkeln addiert/subtrahiert?

Beispiel: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) + \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$



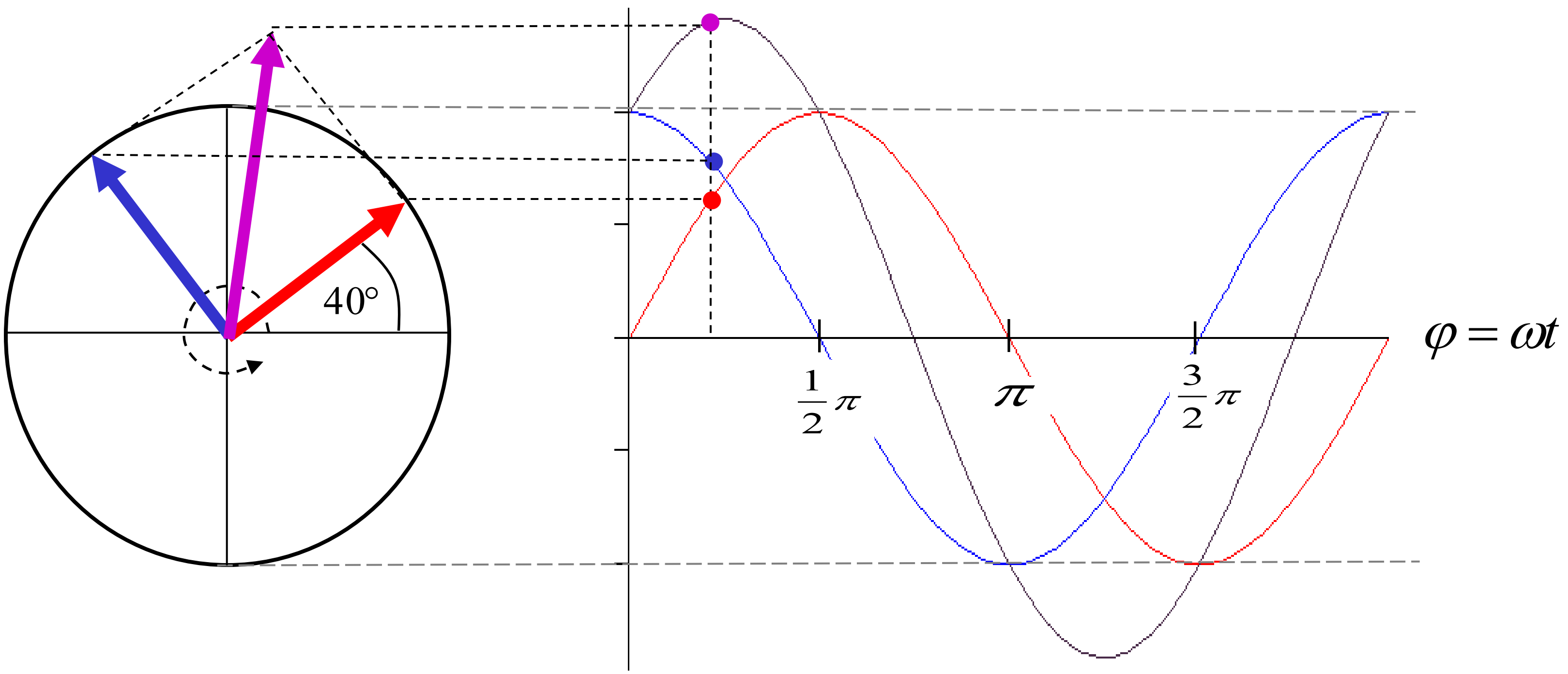
Zustand: $\varphi = 0°$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) + \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$$



Zustand: $\varphi = 20°$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) + \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$$

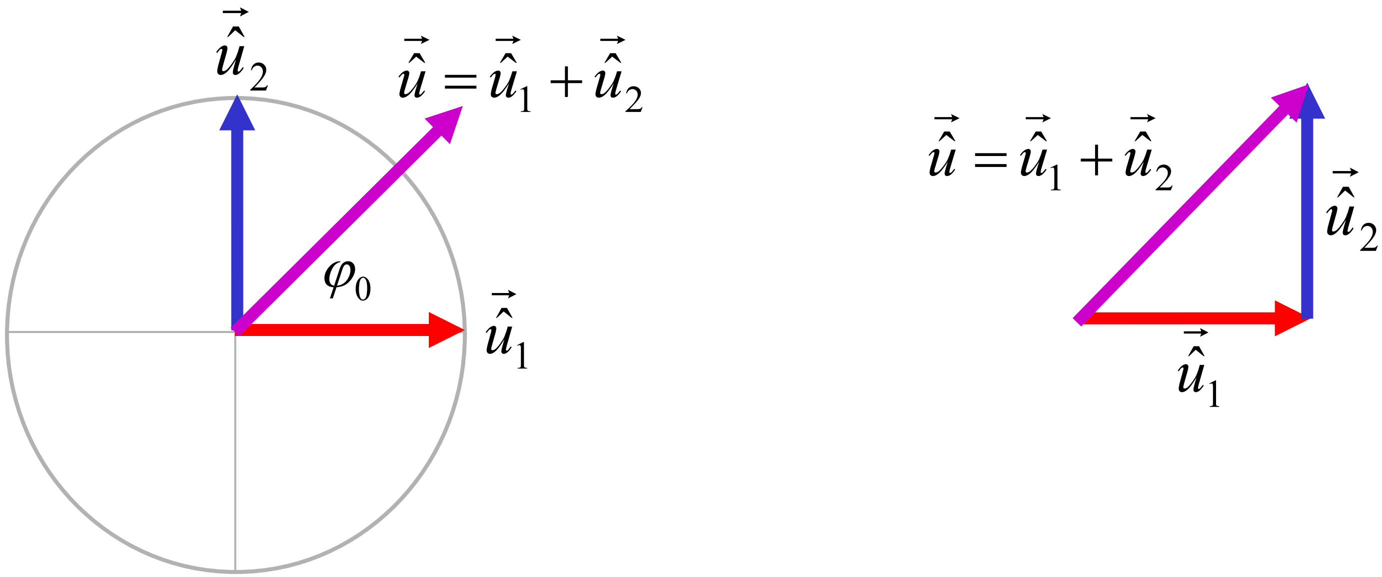


Zustand: φ = 40°

Fazit:

Für die Summe/Differenz mehrerer phasenverschobener Sinusfunktionen gleicher Frequenz gilt:

Die Amplitude und den Nullphasenwinkel des Gesamtsignals erhält man durch Vektoraddition der zugehörigen Drehzeiger (→ Zeigerdiagramm).



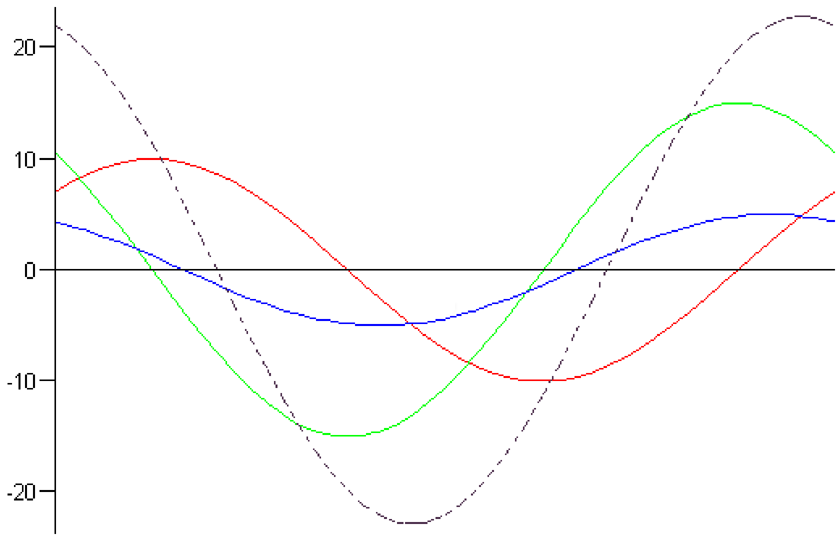
ÜBUNG: Summe und Differenz von Sinusfunktionen gleicher Frequenz

Skizzieren Sie die Zeigerdiagramme folgender Funktionen und schätzen Sie die Amplitude und den Nullphasenwinkel der Summenfunktion u(t) ab:

$$u_1(t) = 10V \cdot \sin(\omega t + 45°)$$

$$u_2(t) = 15V \cdot \sin(\omega t + 135°)$$

$$u_3(t) = 5V \cdot \cos(\omega t + 30°)$$



5.2 Komplexe Zahlen

→ Tafel

5.2.1 Imaginäre Einheit

Es gibt keine **reelle** Zahl x, die der Gleichung $x^2 = -1$ genügt.

Um diese Einschränkung aufzulösen, wird die *imaginäre Einheit* j eingeführt.

$\boxed{j = \sqrt{-1}}$ ⇒ $j^2 = -1$ Aber Achtung: j ist keine reelle Zahl

ÜBUNG: Vereinfachen Sie

$$j^3 = \qquad \frac{1}{j} =$$

$$j^4 = \qquad \frac{1}{j^2} =$$

5.2.2 Komplexe Zahlen

→ Tafel

Komplexe Zahl = die Summe einer reellen Zahl x (*Realteil*)
und einer imaginären Zahl y (*Imaginärteil*)

$$\underline{z} = x + jy \qquad \text{mit der imaginären Einheit} \quad j^2 = -1$$

Eine reelle Zahl ist somit der Spezialfall einer komplexen Zahl, nämlich eine komplexe Zahl ohne Imaginärteil.

Komplexe Variablen werden mit einem Unterstrich gekennzeichnet, z.B.: $\underline{z}$

Beispiele:

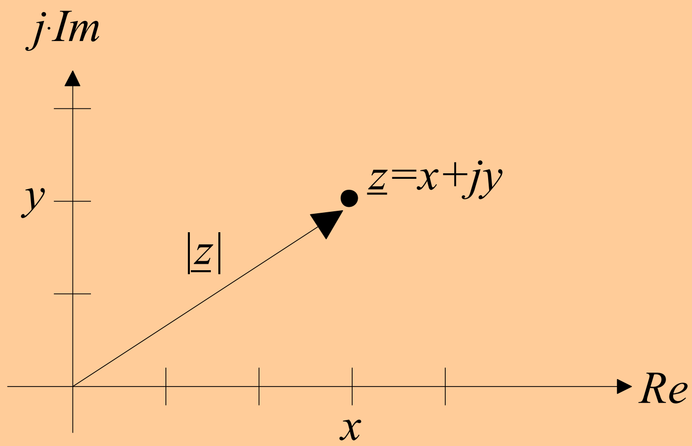
$$\underline{z} = 3 + j4$$

$$\underline{z} = 3.21 + j1.011$$

$$\underline{z} = \sqrt{3} + j\pi\sqrt{7}$$

5.2.3 Kartesische Darstellung

Eine komplexe Zahl $x+jy$ ist ein Punkt in der Ebene mit den kartesischen Koordinaten (x,y). Das Rechnen mit komplexen Zahlen kann geometrisch interpretiert werden.



Der Betrag einer komplexen Zahl $|z|$ ist gegeben durch:

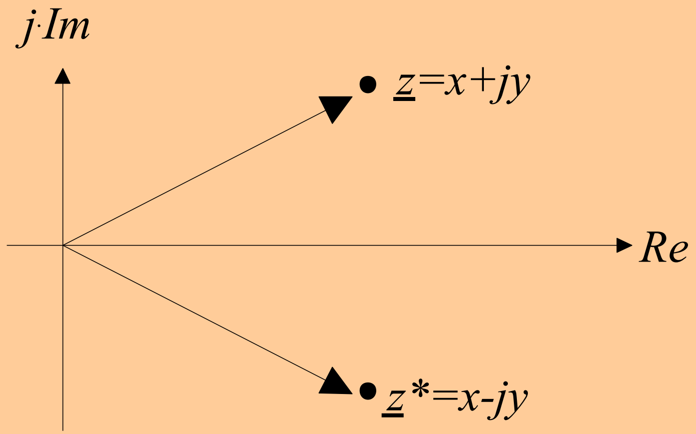
$$\boxed{|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Beispiel: $\underline{z} = 3 + j4$

$$|\underline{z}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

5.2.4 Konjugiert komplexe Zahl

$\underline{z}^* = x - jy$ wird als *konjugiert komplexe Zahl* zu $\underline{z} = x+jy$ bezeichnet.

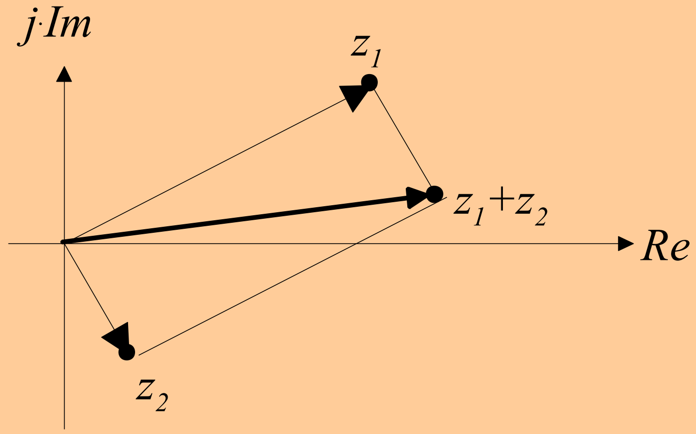


Es gilt: $\boxed{\underline{z} \cdot \underline{z}^* = (x+jy)\cdot(x-jy) = x^2 - j^2 y^2 = x^2 + y^2 = |\underline{z}|^2}$

5.2.5 Addition/Subtraktion komplexer Zahlen

Für die Addition zweier komplexer Zahlen $\underline{z}_1 = x_1 + jy_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + jy_2$ gilt:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$



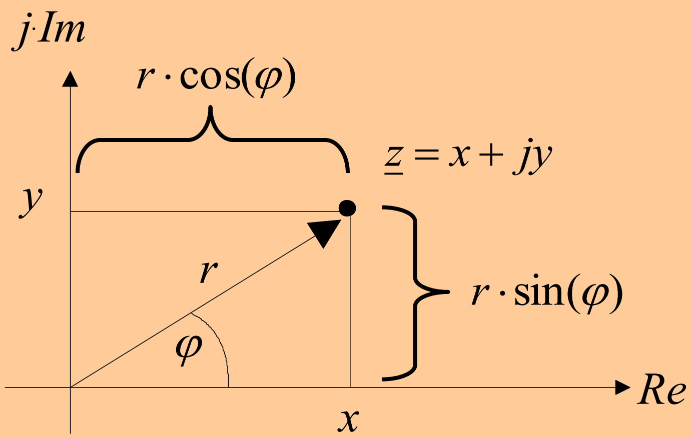
Beispiel: Gegeben sind $\underline{z}_1 = 3 + j4$ und $\underline{z}_2 = 5 + j6$

Summe $\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (3+j4) + (5+j6) = 8 + j10$

5.2.6 Darstellung in Polarkoordinaten

Eine andere Darstellungsweise für komplexe Zahlen ist die Darstellung in Polarkoordinaten (d.h. durch r und φ):

$$\boxed{\underline{z} = x + jy \quad = \quad r\cdot\cos\varphi + j\cdot r\cdot\sin\varphi \quad = \quad r\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$$



mit $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Beispiel: $\underline{z}$ = 3+j4 ➔ $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \varphi = \arctan(\frac{4}{3}) = 53.13^0$

$\underline{z}$ = 3+j4 = 5 · [cos(53.13°) + j sin(53.13°)]

5.2.7 Darstellung in Exponentialform (Eulersche Formel)

Leonard Euler entdeckte einen (überraschenden) Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.

$$\boxed{r\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi) \;=\; r\cdot e^{j\varphi}}\,^{*}$$

→ kompakte Schreibweise für kompl. Zahlen in Polarform.

Beispiel: $\underline{z}$ = 3+j4 ➔ $r=\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad \varphi=\arctan(\frac{4}{3})=71.57^0$

$$\underline{z} = \underbrace{3+j4}_{\text{Kartesische Form}} = \underbrace{5\cdot[\cos(71.57°)+j\sin(71.57°)]}_{\text{Polarkoordinateform}} = \underbrace{5\cdot e^{j\cdot 71.57°}}_{\text{Exponentialform}}$$

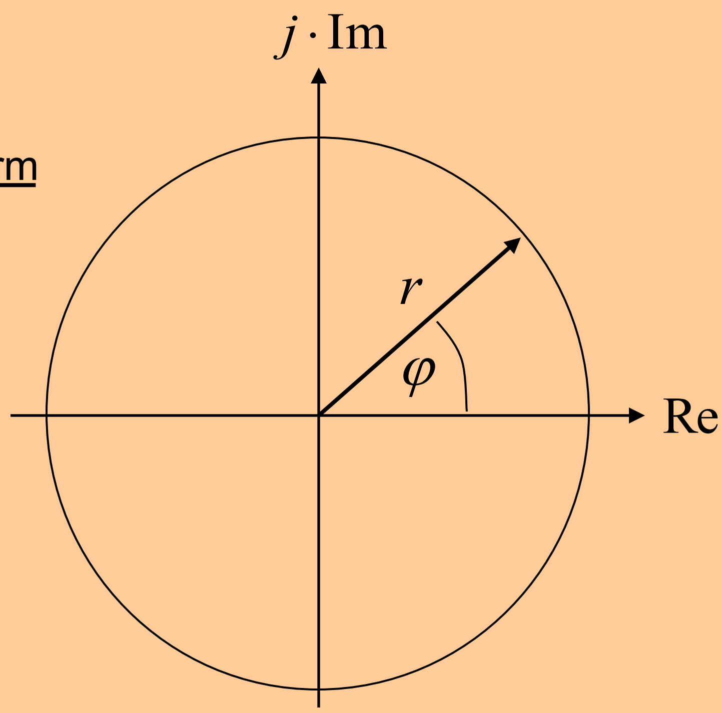
* Anm.: Dieser Zusammenhang folgt aus der Reihenentwicklung beider Funktionen (o.Bew.).

5.2.8 Grafische Interpretation der Eulersche Formel

Was bedeutet $r \cdot e^{j\varphi}$?

Da $r \cdot e^{j\varphi}$ nur eine andere Beschreibungsform der Polarkoordinatenschreibweise ist, gilt

1. Der Zeiger hat die Länge r
2. Der Zeiger zeigt in die Richtung φ



Fazit: Unabhängig von φ zeigt der Zeiger auf einen Punkt des Kreises mit dem Radius r.

ÜBUNG: Komplexe Zahlen

1. Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in die Exponentialform um.

$$\underline{z}_1 = -3 + j4$$

$$\underline{z}_2 = 5 - j2$$

2. Vereinfachen Sie

$$\underline{z}_3 = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{z}_4 = je^{j\pi}$$

$$\underline{z}_5 = -\frac{1}{j}$$

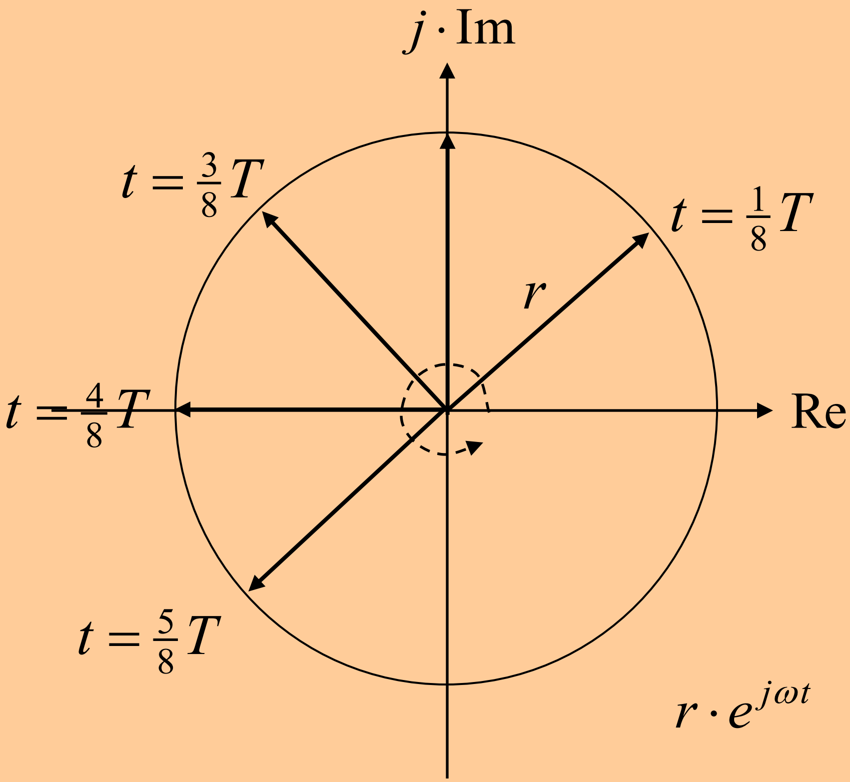
3. Wandeln Sie in die kartesische Form um:

$$\underline{z}_6 = \frac{1}{2 + j}$$

$$\underline{z}_7 = \frac{1 - j}{2 + j5}$$

Jetzt sei φ eine <u>zeitveränderliche Funktion</u>, d.h. es gilt:

$$\varphi = \varphi(t) = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad \Longrightarrow \quad r \cdot [\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)] = r \cdot e^{j\omega t}$$

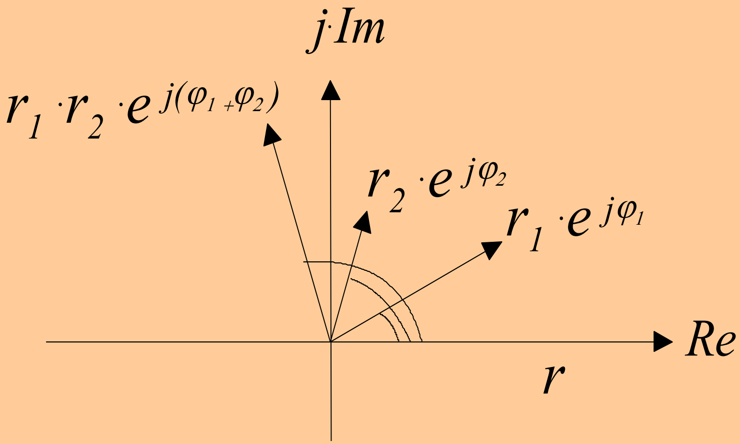


$r \cdot e^{j\omega t}$ ist ein Drehzeiger der Länge r, der in der Periodendauer T genau eine Drehung in der komplexen Ebene durchführt.

5.2.9 Multiplikation komplexer Zahlen

Mit Hilfe der Euler-Formel wird auch die Multiplikation komplexer Zahlen sehr einfach geometrisch interpretierbar.

$$\boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$



Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist eine *Drehsteckung*.

- Die Beträge der Vektoren werden multipliziert.
- Die Winkel werden addiert

5.2.10 Division komplexer Zahlen

$$\boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

Die Division zweier komplexer Zahlen ist eine *Drehstauchung*.

- Die Beträge der Vektoren werden dividiert.
- Die Winkel werden subtrahiert.

Alternativ kann auch in kartesischen Koordinaten dividiert werden.
Hierzu muss der Bruch konjugiert komplex (zum Nenner) erweitert werden.

$$\boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} = \frac{(x_1 + jy_1)\cdot(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)\cdot(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} + j\,\frac{(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}}$$

5.3 Von der Sinusfunktion zum komplexen Drehzeiger

5.3.1 Beschreibung sinusförmiger Zeitfunktionen durch komplexe Drehzeiger

Gegeben sei ein komplexer Drehzeiger der Form:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{Realteil}} + j \cdot \underbrace{\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Daraus folgt: Der Imaginärteil der komplexen Funktion $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ beschreibt eine zeitabhäng. Sinusfunktion.

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\left\{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}$$

5.3.2 komplexe Amplitude

Durch Aufsplitten der komplexen Zeitfunktion

- in einen zeitunabhängigen Teil (komplexe Amplitude)
- und einen zeitabhängigen Teil (Zeitdrehzeiger)

erhält man die *komplexe Amplitude*.

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\hat{u} \cdot e^{j\varphi}}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot e^{j\omega t}$$

Die komplexe Amplitude ist die Größe, auf die es ankommt.
Sie beschreibt den Nullphasenwinkel φ und die Amplitude $\hat{u}$ des Signals.

komplexe Amplitude $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$

5.3.3 Addition sinusförmiger Wechselgrößen gleicher Frequenz

Mehrere sinusförmige Wechselgrößen mit gleicher Frequenz, z.B. $u_1(t)$ und $u_2(t)$, sollen addiert werden. Hierzu geht man wie folgt vor:

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

1. Umwandeln der Sinusgrößen in die komplexe Amplituden.

$$u_1(t) \longmapsto \underline{u}_1 = \hat{u}_1 \cdot e^{j\varphi_1}$$
$$u_2(t) \longmapsto \underline{u}_2 = \hat{u}_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

Anm.: cos-Funktionen müssen zuvor in sin-Funktionen umgewandelt werden.

2. Addition der komplexen Amplituden.

$$\underline{u} = \hat{u}_1 \cdot e^{j\varphi_1} + \hat{u}_2 \cdot e^{j\varphi_2} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$$

3. Rückwandeln der komplexen Amplitude in eine Sinusgröße.

$$\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi} \longmapsto u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ÜBUNG: Addition sinusförmiger Wechselgrößen gleicher Frequenz

Berechnen Sie die Funktionssumme der 3 Spannungen:

$$u_1(t) = 10V \cdot \sin(\omega t + 45°)$$

$$u_2(t) = 15V \cdot \sin(\omega t + 135°)$$

$$u_3(t) = 5V \cdot \cos(\omega t + 30°)$$