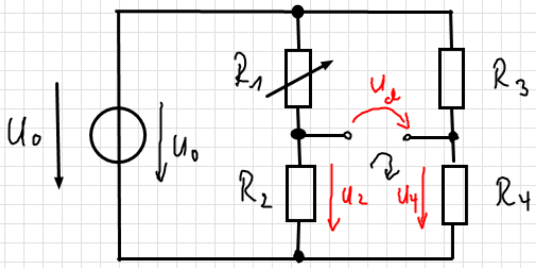
Herleitung: Abgleichbedingung



Frage:

Wie muss R_1 eingestellt werden, damit $U_d = 0$ ist?

Es gilt: $U_d + U_4 - U_2 = 0$ Maschengleichung

Mit der Abgleichbedingung $U_d = 0$ gilt somit:

$$U_2 = U_4 \qquad (1)$$

$$(2) \quad U_2 = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{Spannungsteiler}$$

$$(3) \quad U_4 = U_0 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \qquad \text{"}$$

(2) und (3) in (1) einsetzen:

$$\cancel{U_0} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \cancel{U_0} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \qquad \text{Kehrwert bilden}$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_3 + R_4}{R_4}$$

$$\frac{R_1}{R_2} + \cancel{1} = \frac{R_3}{R_4} + \cancel{1}$$

Brückenverhältnis

$$\Rightarrow \text{Abgleichbedingung}: \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = a$$

Herleitung: Verstimmung der Brückenschaltung

Die Empfindlichkeit ist ein Maß dafür, wie stark die Diagonalspannung auf eine Änderung von R_1 reagiert!

$$E = \frac{dU_d}{dR_1} = \lim_{\Delta R_1 \to 0} \frac{\Delta U_d}{\Delta R_1} \approx \frac{\Delta U_d}{\Delta R_1} \qquad (1)$$

für kleine ΔR_1

Weiter gilt: $U_d = U_2 - U_4 \qquad (2)$

$$U_d = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} - U_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Einsetzen von (2) in (1):

Konstant, nicht abhängig von R_1

$$\frac{dU_d}{dR_1} = \frac{\left[U_0 \frac{R_2}{R_1+R_2} - \cancel{U_0 \frac{R_4}{R_3+R_4}}\right]}{dR_1}$$

Ableitung mit Quotientenregel

$$= -\frac{U_0 R_2}{(R_1+R_2)^2} \cdot \frac{1/R_2^2}{1/R_2^2}$$

$$= \frac{-U_0 \frac{1}{R_2}}{\frac{(R_1+R_2)^2}{R_2^2}} = -U_0 \frac{\frac{1}{R_2}}{\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)^2} \cdot \frac{R_1}{R_1}$$

$$= -U_0 \frac{\frac{R_1}{R_2}}{R_1\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)^2}$$

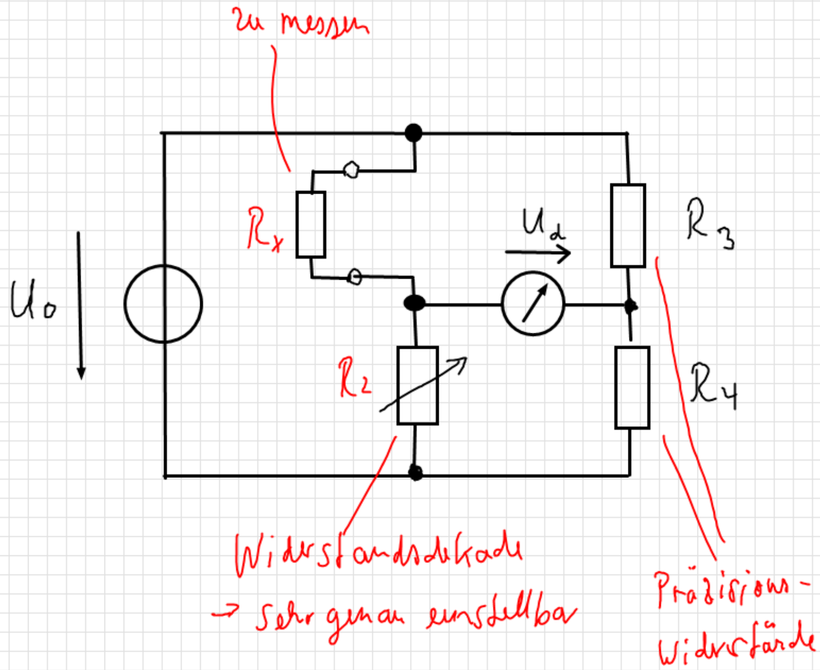
nahe dem Abgleichfall gilt: $\frac{R_1}{R_2} \approx a$

$$\frac{\Delta U_d}{\Delta R_1} \approx -U_0 \frac{a}{R_1 (a+1)^2}$$

$$\Delta U_d \approx -U_0 \frac{a}{(a+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{\Delta R_1}{R_1}}_{v}$$

$$\boxed{\Delta U_d \approx -U_0 \frac{a}{(a+1)^2} \cdot v} \Rightarrow$$ näherungsweise Ursprungsgerade

Präzisionsmessung von Widerständen mit der Abgleichbrücke



ÜBUNG: Widerstandsmessung mit einer Abgleichbrücke

Die folgende Brückenschaltung (im abgeglichenen Zustand) ist gegeben:

$$R_3 = 1.0k\Omega\ (0.02\%)$$
$$R_4 = 100.0k\Omega\ (0.02\%)$$
$$R_2 = 1\times 100\Omega\ (0.02\%) + 5\times 10\Omega\ (0.05\%) + 6\times 1.0\Omega\ (0.1\%) + 1\times 0.1\Omega\ (0.5\%)$$
$$U_0 = 6V$$

Eine Widerstandsänderung an R_4 von 40Ω führt gerade zu einem Ausschlag

a) Wie groß ist R_2 (mit Unsicherheit)?

$$\underline{\underline{R_2}} = 100\Omega + 50\Omega + 6\Omega + 0.1\Omega = \underline{\underline{156.1\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\Delta R_2}} = 100\Omega\cdot 0.0002 + 50\Omega\cdot 0.0005 + 6\Omega + 0.001 + 0.1\Omega + 0.005$$

$$= \underline{\underline{51.5\,m\Omega}} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\Delta R_2}{R_2} = 0.033\%}}$$

b) Wie groß ist R_x (mit Unsicherheit)?

$$\underline{\underline{R_x}} = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4} = 156.1\Omega \cdot \frac{1k\Omega}{100\,k\Omega} = \underline{\underline{1.561\Omega}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\Delta R_x}{R_x}}} = \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_4}{R_4} + \left(\frac{\Delta R_4}{R_4}\right)_{erk}$$

$$= 0.033\% + 0.02\% + 0.02\% + \frac{40\Omega}{100\,k\Omega}\cdot 100\%$$

$$= 0.113\% \approx \underline{\underline{0.11\%}} \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{1.7\,m\Omega}} = \Delta R_x$$

c) Wie groß ist Empfindlichkeit E der Schaltung bezüglich Änderungen von R_x ?

$$E \approx \frac{\Delta U_d}{\Delta R_x} = \underbrace{-U_0 \cdot \frac{a}{(a+1)^2} \cdot v}_{\Delta U_d} \cdot \frac{1}{\Delta R_x}$$

mit $v = \frac{\Delta R_x}{R_x}$

$$\underline{\underline{E}} \approx -U_0 \frac{a}{(a+1)^2} \cdot \frac{1}{R_x} \qquad a = \frac{R_3}{R_4} = 0.01$$

$$= -6V \cdot 0.0098 \cdot \frac{1}{1.561\Omega} = \underline{\underline{-37.7 \frac{mV}{\Omega}}}$$

d) Warum darf das Brückenverhältnis nicht a=1 gewählt werden?

Durch ein Brückenverhältnis a=1 würde die Empfindlichkeit E der Brücke deutlich zunehmen

$\Rightarrow$ höhere Genauigkeit wg. $\frac{a}{(a+1)^2} = 0.25$ für $a=1$

$\frac{a}{(a+1)^2} = 0.01$ für $a=0.01$

Aber: Der Strom durch die Widerstandsdekade wäre viel zu hoch!

$$\frac{R_x}{R_2} = 1 \Rightarrow R_2 = 1.561\Omega \Rightarrow \underline{\underline{I}} = \frac{U_0}{R_x + R_2} \approx \underline{\underline{2A}}$$