ÜBUNG: Effektivwert

1. An einen ohmschen Widerstand $R = 10\Omega$ wird eine Wechselspannung $u(t)$ angelegt.

$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$$

Wie groß ist die im Widerstand umgesetzte mittlere Leistung P?

$\sqrt{2} \approx 1.414$

$\hat{u} = 15V$ (Amplitude)

$$\underline{\underline{U_{eff}}} = U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \frac{15V}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{10.61V}}$$

$$\underline{\underline{P}} = \frac{U^2}{R} = \frac{10.61^2 V^2}{10\Omega} = \underline{\underline{11.25W}}$$

2. Wie groß ist der Scheitelwert der Netzspannung U=220V.

Bei Wechselspannungen wird meist der Effektivwert angegeben.

Wechselspannungsmessgeräte messen i. Allg. den Effektivwert (bzw. den genäherten Effektivwert).

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \hat{u} = \sqrt{2} \cdot U = 1.414 \cdot 220V$$

$$\underline{\underline{\hat{u} = 311.1V}}$$

ÜBUNG: Komplexer Widerstand

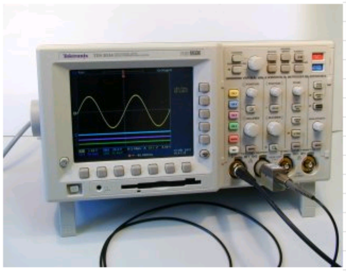
1) An einen komplexen Widerstand $\underline{Z}$ wird eine Wechselspannung $u(t)$ angelegt.

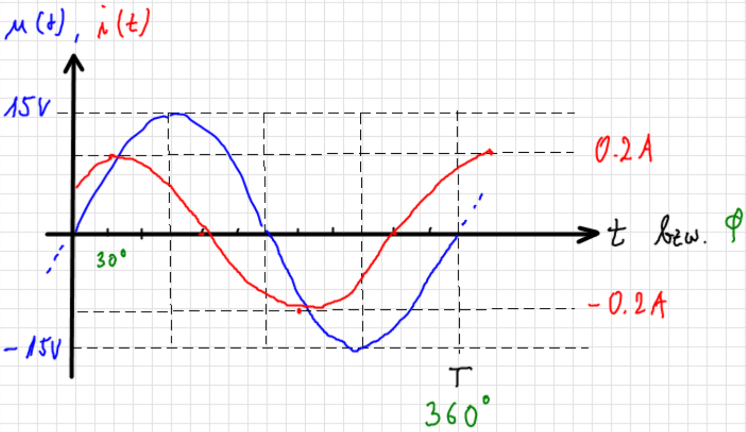
$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$$

Mit Hilfe eines Oszilloskops wird der Strom $i(t)$ durch den komplexen Widerstand gemessen.

$$i(t) = 0.2A \cdot \cos(\omega t - 30°)$$

Wie groß ist der komplexe Widerstand $\underline{Z}$?





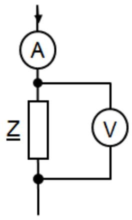
Strom eilt vor!

$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t) \quad \longmapsto \quad \underline{\hat{u}} = 15V \cdot e^{j0°}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.2A \cdot \cos(\omega t - 30°) \\ &= 0.2A \cdot \sin(\omega t - 30° + 90°) \\ &= 0.2A \cdot \sin(\omega t + 60°) \quad \longmapsto \quad \underline{\hat{i}} = 0.2A \cdot e^{j60°} \end{aligned}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \frac{15V \cdot e^{j0°}}{0.2A \cdot e^{j60°}} = 75\Omega \cdot e^{-j60°}$$

2) Mit einem Multimeter messen Sie an einem komplexen Widerstand U=4V und I=20mA. Wie groß ist der Scheinwiderstand (Impedanz)?



Zur Erinnerung:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_I}} = \frac{U}{I} \cdot \frac{e^{j\varphi_u}}{e^{j\varphi_I}} = Z \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_I)}$$

Impedanz

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{4V}{0.02A} = 200\,\Omega$$

Über die Phasenverschiebung $\varphi_u - \varphi_I$ kann bei dieser Messung nichts gesagt werden.

ÜBUNG: Darstellungsweisen komplexer Widerstände

1. Gegeben ist der komplexen Widerstand $\underline{Z}_1$.

$$\underline{Z}_1 = 520\Omega \cdot e^{j30°}$$

Wie groß sind der Wirkwiderstand R_1 und der Blindwiderstand X_1?

$$\underline{Z}_1 = 520\,\Omega \cdot e^{j30°}$$

$$= 520\,\Omega \cdot \left[\cos 30° + j \sin 30°\right]$$

mit Eulerformel
$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

$$= \underline{\underline{450.3\,\Omega + j\,260\,\Omega}}$$

Wirkwiderstand R

Blindwiderstand X

2. An einem komplexen Widerstand $\underline{Z}_2$ liegt eine Spannung $u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$

$$\underline{Z}_2 = 120\Omega + j160\Omega$$

Geben Sie den Strom *i(t)* an.

$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t) \longmapsto \underline{\hat{u}} = 15V \cdot e^{j0°}$$

Komplexe Amplitude

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}}$$

Komplexe Größen lassen sich in der Exponentialform besser dividieren (es sei denn, der Taschenrechner kann komplex rechnen).

Daher: Umwandeln von $\underline{Z}$

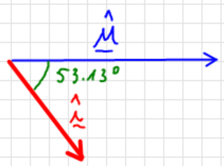
$$\underline{Z}_2 = 120\Omega + j160\Omega = 200\Omega \cdot e^{j53.13°}$$

mit

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{120^2 + 160^2}\,\Omega = 200\,\Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = 53.13°$$

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}_2} = \frac{15V \cdot e^{j0°}}{200\Omega \cdot e^{j53.13°}} = 75mA \cdot e^{-j53.13°}$$

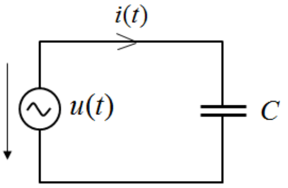


$$\longmapsto \quad i(t) = 75m \cdot \sin(\omega t - 53{,}13°)$$

ÜBUNG: Kapazität

Gegeben ist ein Kondensator C = 100µF

An den Kondensator wird eine Spannung $u(t)$ angelegt: $u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$



Geben Sie den Strom $i(t)$ durch den Kondensator an für

A f_1=50Hz und
B f_2=2kHz .

Eilt der Strom $i(t)$ der Spannung vor oder nach?

$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t) \longmapsto \underline{\hat{u}} = 15V \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

A
$$\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 \cdot C} = \frac{1}{2\pi\, 50 \frac{1}{\cancel{s}} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{A\cancel{s}}{V}}$$

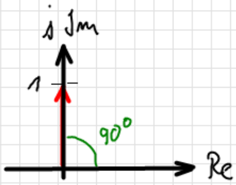
$$= 31.83 \frac{V}{A} = \underline{\underline{31.83\ \Omega}}$$

B
$$\frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 \cdot C} = \frac{1}{2\pi\, 2000 \frac{1}{\cancel{s}} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{A\cancel{s}}{V}}$$

$$= \underline{\underline{0.796\ \Omega}}$$

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{u}}{\frac{1}{j\omega C}} = j \frac{15V \cdot e^{j0^\circ}}{\frac{1}{\omega C}} = \underline{\underline{\frac{15V}{\frac{1}{\omega C}} \cdot e^{j90^\circ}}}$$

$$\boxed{\text{Anm.: } j = e^{j90^\circ}}$$



(A) $$\hat{\underline{i}}_1 = \frac{15\,V}{31.83\,\Omega} \cdot e^{j90^\circ} = 0.471\,A \cdot e^{j90^\circ}$$

$$\mapsto \underline{\underline{i_1(t) = 0.471\,A \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)}}$$

(B) $$\hat{\underline{i}}_2 = \frac{15\,V}{0.796\,\Omega} \cdot e^{j90^\circ} = 18.85\,A \cdot e^{j90}$$

$$\mapsto \underline{\underline{i_2(t) = 18.85\,A \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)}}$$

Fazit:

Eine Kapazität (idealer Kondensator) hat einen rein imaginären Wechselstromwiderstand, d.h. ist ein reiner Blindwiderstand.

Der Wechselstromwiderstand sinkt mit der Frequenz.

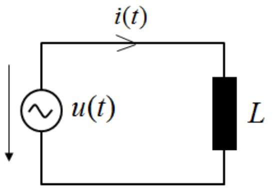
Bei einer Kapazität eilt der Strom der Spannung um 90° voraus.

"Beim Kondensa-tor, eilt der Strom vor."

ÜBUNG: Induktivität

Gegeben ist eine Induktivität L=0.1H

An die Induktivität wird eine Spannung u(t) angelegt: $u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$



Geben Sie den Strom durch die Induktivität an für

A f_1=50Hz und

B f_2=2kHz.

Eilt der Strom $i(t)$ der Spannung $u(t)$ vor oder nach?

$$u(t) = 15\,V \cdot \sin(\omega t) \quad \longmapsto \quad \underline{\hat{u}} = 15V \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L \cdot e^{j90^\circ}$$

A
$$\omega_1 L = 2\pi f_1 \cdot L = 2\pi \cdot 50\tfrac{1}{s} \cdot 0.1\tfrac{Vs}{A}$$
$$\underline{\underline{\omega_1 L = 31.42\,\Omega}}$$

B
$$\omega_2 L = 2\pi f_2 \cdot L = 2\pi \cdot 2000\tfrac{1}{s} \cdot 0.1\tfrac{Vs}{A}$$
$$\underline{\underline{\omega_2 L = 1257\,\Omega}}$$

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}} = \frac{15V \cdot \cancel{e^{j0^\circ}}^{\,1}}{j\omega L} = \frac{15V}{\omega L \cdot e^{j90^\circ}} \qquad \frac{15V}{\omega L}\, e^{-j90^\circ}$$

A
$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{15V}{\omega_1 L} = \frac{15V}{31.42\,\Omega} \cdot e^{-j90} = 477\,mA \cdot e^{-j90^\circ}$$
$$\longmapsto \quad \underline{\underline{i_1(t) = 477\,mA \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)}}$$

B
$$\underline{\hat{i}}_2 = \frac{15V}{\omega_2 L} \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{15V}{1257\,\Omega} \cdot e^{-j90^\circ} = 11.93\,mA \cdot e^{-j90^\circ}$$
$$\longmapsto \quad \underline{\underline{i_2(t) = 11.93\,mA \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)}}$$

Fazit:

Eine Induktivität (ideale Spule) hat einen rein imaginären Wechselstromwiderstand, d.h. ist ein reiner Blindwiderstand.

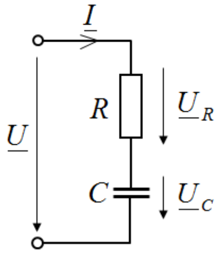
Der Wechselstromwiderstand steigt mit der Frequenz.

Bei einer Induktivität eilt der Strom der Spannung um 90° hinterher.

"Bei Induktivitäten, tut sich der Strom verspäten."

ÜBUNG: Reihenschaltung von R und C 1

Gegeben ist folgende Schaltung:



$C = 10\mu F$

$R = 100\Omega$

$i(t) = 100mA \cdot \sin(\omega t)$

Berechnen Sie für f = 100Hz die folgenden Größen:

$\underline{I}$

$\underline{U}_R$ $u_R(t)$

$\underline{U}_C$ $u_C(t)$

$$i(t) = 100mA \cdot \sin(\omega t) \quad \mapsto \quad \hat{\underline{i}} = 0.1A \cdot \cancel{e^{j0^\circ}}\ 1$$

Effektivstrom

$$\underline{I} = \frac{\hat{\underline{i}}}{\sqrt{2}} = 70.7mA$$

$$\underline{U_R} = \underline{I} \cdot R = 70.7mA \cdot 100\Omega = \underline{\underline{7.07V}} \quad (\cdot e^{j0^\circ})$$

$$\mapsto u_R(t) = \underbrace{U_R \cdot \sqrt{2}}_{\text{Umrechnung: Effektivwert} \rightarrow \text{Amplitude}} \cdot \sin(\omega t) = \underline{\underline{10V \cdot \sin(\omega t)}}$$

$$\underline{U_c} = \underline{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = 70.7mA \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100 \frac{1}{s} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V}} \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{\underline{\underline{U_c} = 11.25V \cdot e^{-j90^\circ}}}$$

Anm.: $\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j = e^{-j90^\circ}$

$$\mapsto \underline{\underline{u_c(t)}} = U_c \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$= \underline{\underline{15{,}92\,V \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)}}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$$
$$= 7.07V + 11.25V \cdot e^{-j90°}$$
$$= 7.07V - j\,11.25V$$

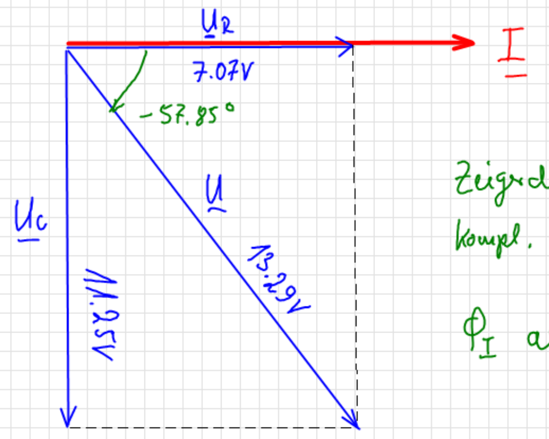
(oder direkt mit geeignetem Taschenrechner)

$$= \underline{\underline{13.29V \cdot e^{-j57.85°}}}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$
$$= \sqrt{7.07^2 + 11.25^2}\ V$$
$$= \underline{\underline{13.29V}}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{11.25V}{7.07V}\right)$$
$$= \underline{\underline{-57.85°}}$$

$$\mapsto u(t) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 57.85°)$$
$$= \underline{\underline{18.8V \cdot \sin(\omega t - 57.85°)}}$$



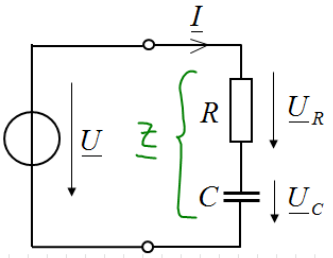
Zeigerdiagramm der kompl. Effektivwerte

φ_I als Nullwinkel gewählt

ÜBUNG: Reihenschaltung von R und C 2

Gegeben ist folgende Schaltung:

$u(t) = 10V \cdot \sin(\omega t)$



$C = 10\mu F$

$R = 100\Omega$

Berechnen Sie für f=100Hz die folgenden Größen:

$\underline{U}$ $\underline{Z}$ $\underline{I}$ $\underline{U}_R$ $\underline{U}_C$

$$\mapsto \underline{U} = \frac{10\,V}{\sqrt{2}} \cdot \cancel{e^{j0^\circ}}\ 1$$

$$\underline{U} = 7.07\,V$$

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{2\pi \cdot 100\,\frac{1}{s} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,\frac{As}{V}}$$

$$= 100\,\Omega - j\,159.2\,\Omega = 188\,\Omega \cdot e^{-j57.85}$$

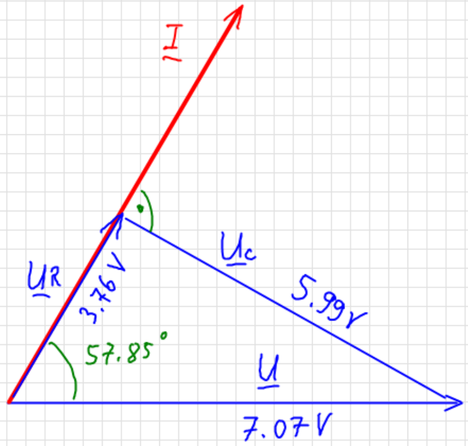
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{7.07\,V}{188\,\Omega \cdot e^{-j57.85^\circ}} = 37.6\,mA \cdot e^{j57.85^\circ}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 37.6\,mA \cdot e^{j57.85^\circ} \cdot 100\,\Omega = 3{,}76\,V \cdot e^{j57.85^\circ}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = 37.6\,mA \cdot e^{j57.85^\circ} \cdot 159.2\,\Omega \cdot e^{-j90^\circ} \quad (s.o.)$$

$$= 5.99\,V \cdot e^{j(57.85^\circ - 90^\circ)} = 5.99\,V \cdot e^{-j32.15^\circ}$$

Zeigerdiagramm ↷ b.w.



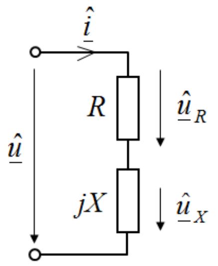
$\underline{U}_R$ und $\underline{I}$ liegen in Phase,
wegen $\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$

$\underline{U}_C$ eilt $\underline{I}$ um 90° hinterher,
wegen $\underline{U}_C = \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I} \cdot e^{-j90°}$,

$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$ (Vektorielle Addition!)

ÜBUNG: Bestimmung unbekannter Zweipole

Gegeben ist folgende Schaltung:



An der Schaltung liegt eine sinusförmige Spannung $u(t)$ mit der Frequenz f und dem Scheitelwert $\hat{u}$.

$$\hat{u} = 10V \qquad f = 500\,Hz$$

Gemessen wird ein Strom $i(t)$ mit dem Scheitelwert $\hat{i}$, welcher der Spannung um eine Zeit t_0 nacheilt

$$\hat{i} = 376\,mA \qquad t_0 = 111\,\mu s$$

a) Wie groß ist die Phasenverschiebung?

$$\frac{\varphi_0}{360°} = \frac{t_0}{T} \iff \underline{\underline{\varphi_0}} = 360° \cdot \frac{t_0}{T} = 360° \cdot t_0 \cdot f \approx \underline{\underline{20°}}$$

$$u(t) = 10V \cdot \sin(\omega t) \quad \longmapsto \quad \underline{\hat{u}} = 10V$$

$$i(t) = 0.376A \cdot \sin(\omega t - 20°) \quad \longmapsto \quad \underline{\hat{i}} = 0.376A \cdot e^{-j20°}$$

b) Welche Werte haben R und X ?
Welches Bauteil verbirgt sich hinter X ? Wie groß ist C oder L ?

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \frac{10V}{0.376 \cdot e^{-j20}} = 26.6\,\Omega \cdot e^{j20°}$$

$$= \underline{\underline{25\,\Omega + j\,9.1\,\Omega}}$$

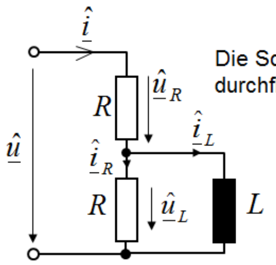
$$\underline{\underline{R = 25\,\Omega}}$$

Da der Strom nacheilt, ist X eine Induktivität!

$$\omega L = 9.1\,\Omega \iff \underline{\underline{L}} = \frac{9.1\,\frac{V}{A}}{2\pi \cdot 500\,\frac{1}{s}} = \underline{\underline{2.9\,mH}}$$

ÜBUNG: Gemischte komplexe Schaltung

Gegeben ist folgende Schaltung:



Die Schaltung wird von einem sinusförmige Strom $i(t)$ durchflossen mit der Frequenz f und dem Scheitelwert $\hat{i}$.

$\hat{i} = 10mA \qquad f = 1kHz$

$R = 3k\Omega$

$L = 0.5H$

Berechnen Sie alle Ströme und Spannungen und zeichnen Sie die Zeigerdiagramme.

Bezugsgröße: $i(t) = \hat{i}\cdot\sin(\omega t) \mapsto \underline{\hat{i}} = \hat{i}\cdot\overset{1}{\cancel{e^{j0^\circ}}} = 10\,mA$

$$\underline{\hat{u}}_R = \hat{i}_R \cdot R = 10\,mA \cdot 3\,k\Omega = 30\,V \; (\cdot e^{j0^\circ})$$

Parallelschaltung $R - L$ berechnen:

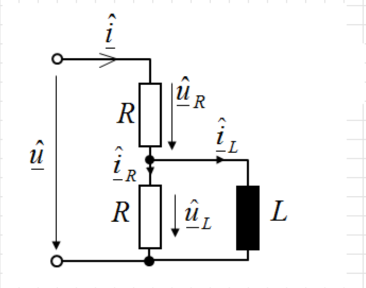
$\underline{Z} = R \,//\, j\omega L$ mit $\omega L = 2\pi f L = 2\cdot\pi\cdot 1000\frac{1}{\cancel{s}}\cdot 0{,}5\frac{V\cancel{s}}{A}$

$$\omega L = 3142\,\Omega$$

$$\underline{Z} = \frac{R\cdot j\omega L}{(R + j\omega L)} = \frac{3\,000\cdot 3142\cdot e^{j90^\circ}}{3\,000 + j\,3142}\,\Omega$$

$$= \frac{9{,}426\cdot 10^6\cdot e^{j90^\circ}}{4344\cdot e^{j46.32^\circ}}\,\Omega = 2170\,\Omega\cdot e^{j43.68^\circ}$$

$$\underline{\hat{u}}_L = \underline{\hat{i}}\cdot\underline{Z} = 0.01A\cdot 2170\Omega\cdot e^{j43.68^\circ} = 21.7V\cdot e^{j43.68^\circ}$$



$$\underline{\hat{i}}_R = \frac{\underline{\hat{u}}_L}{R} = \frac{21.7\,V}{3000\,\Omega} \cdot e^{j43.68^\circ} = \underline{\underline{7.233\,mA \cdot e^{j43.68^\circ}}}$$

$$\underline{\hat{i}}_L = \frac{\underline{\hat{u}}_L}{j\omega L} = \frac{21.7\,V \cdot e^{j43.68^\circ}}{3142\,\Omega \cdot e^{j90^\circ}} = \underline{\underline{6.906\,mA \cdot e^{-j46.32^\circ}}}$$

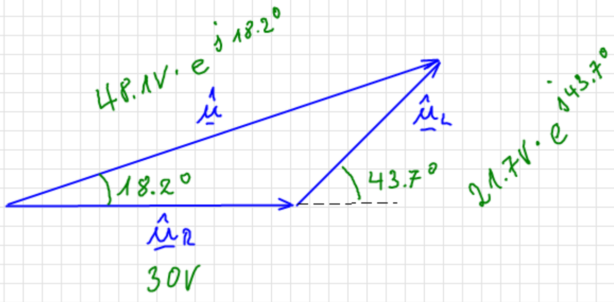
$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_R + \underline{\hat{u}}_L = 30\,V \cdot e^{j0^\circ} + 21.7\,V \cdot e^{j43.68^\circ}$$

direkt mit Taschenrechner, oder

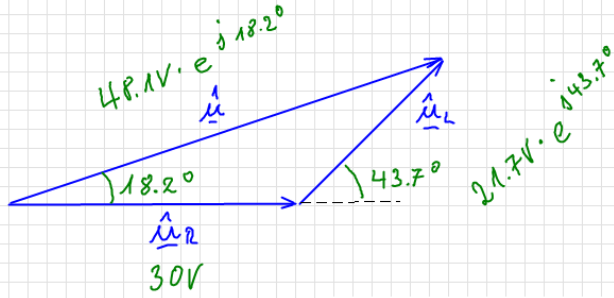
$$= 30\,V + 21.7\,V \cdot \left[\cos(43.68^\circ) + j\sin(43.68^\circ)\right]$$

$$= 30\,V + 15.7\,V + j\,15\,V$$

$$\underline{\underline{\underline{\hat{u}} = 45.7\,V + j\,15\,V = 48.1\,V \cdot e^{j18.2^\circ}}}$$

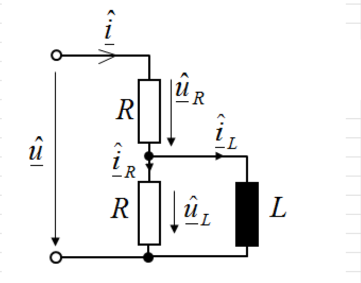


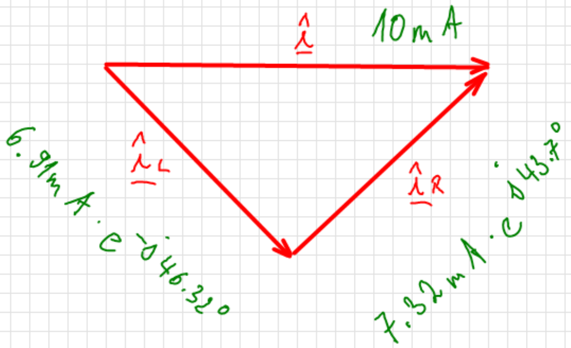
$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_R + \underline{\hat{u}}_L$$



$\hat{\underline{u}} = \hat{\underline{u}}_R + \hat{\underline{u}}_L$

wg. Maschenregel

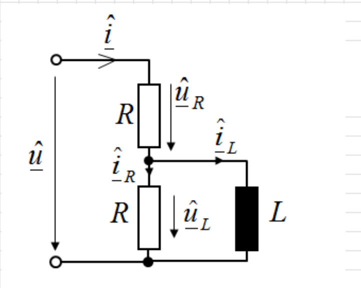




$\hat{\underline{i}} = \hat{\underline{i}}_L + \hat{\underline{i}}_R$

wg. Knotenregel

Plausibilitätskontrolle



$\hat{\underline{i}} \parallel \hat{\underline{u}}_R$ liegen in Phase

$\hat{\underline{i}}_R \parallel \hat{\underline{u}}_L$

$\hat{\underline{i}}_L \perp \hat{\underline{u}}_L$ sind senkrecht zueinander ($\hat{\underline{i}}_L$ nacheilend)