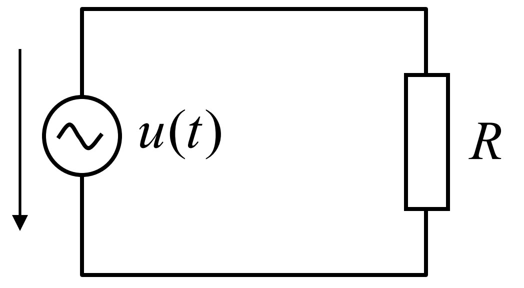
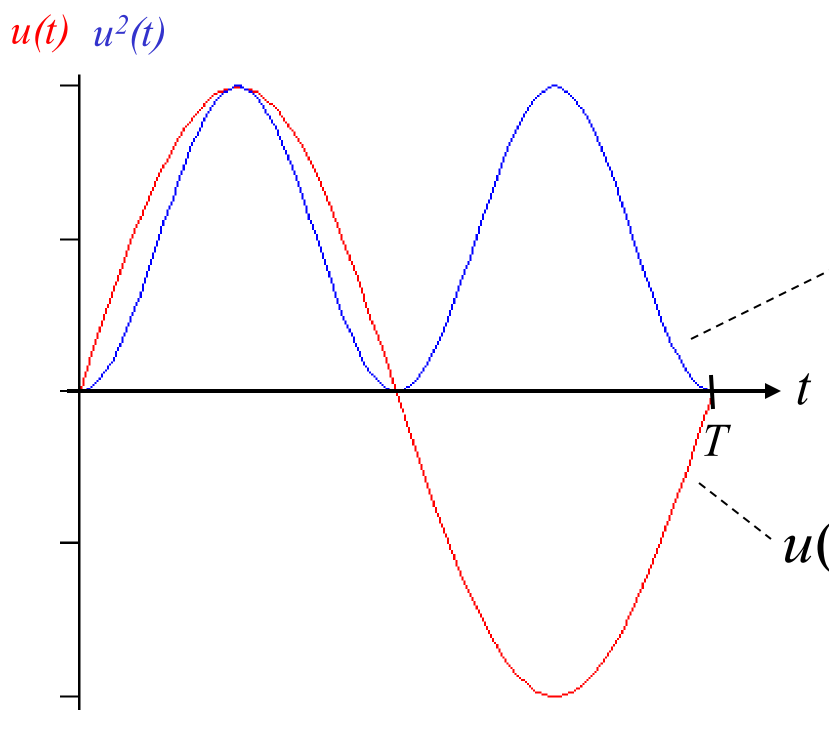
5.4 Der Effektivwert sinusförmiger Wechselgrößen

5.4.1 Augenblicksleistung

Wird eine Wechselspannung $u(t)$ an einen ohmschen Widerstand R angelegt, so wird in diesem eine <u>Augenblicksleistung</u> $p(t)$ umgesetzt:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$





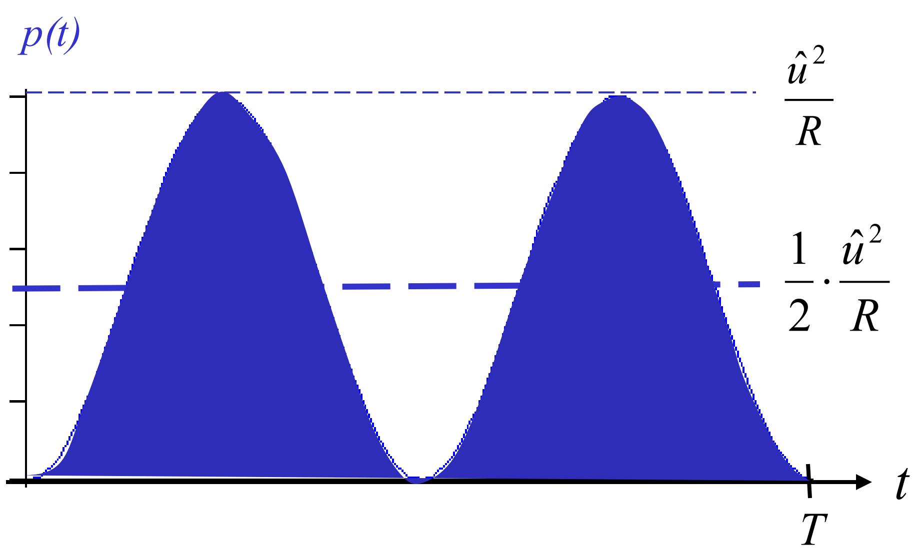
$$u^2(t) = \hat{u}^2 \cdot \sin^2(\omega t)$$
$$= \hat{u}^2 \cdot \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\omega t)\right]$$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

5.4.2 Mittlere Leistung

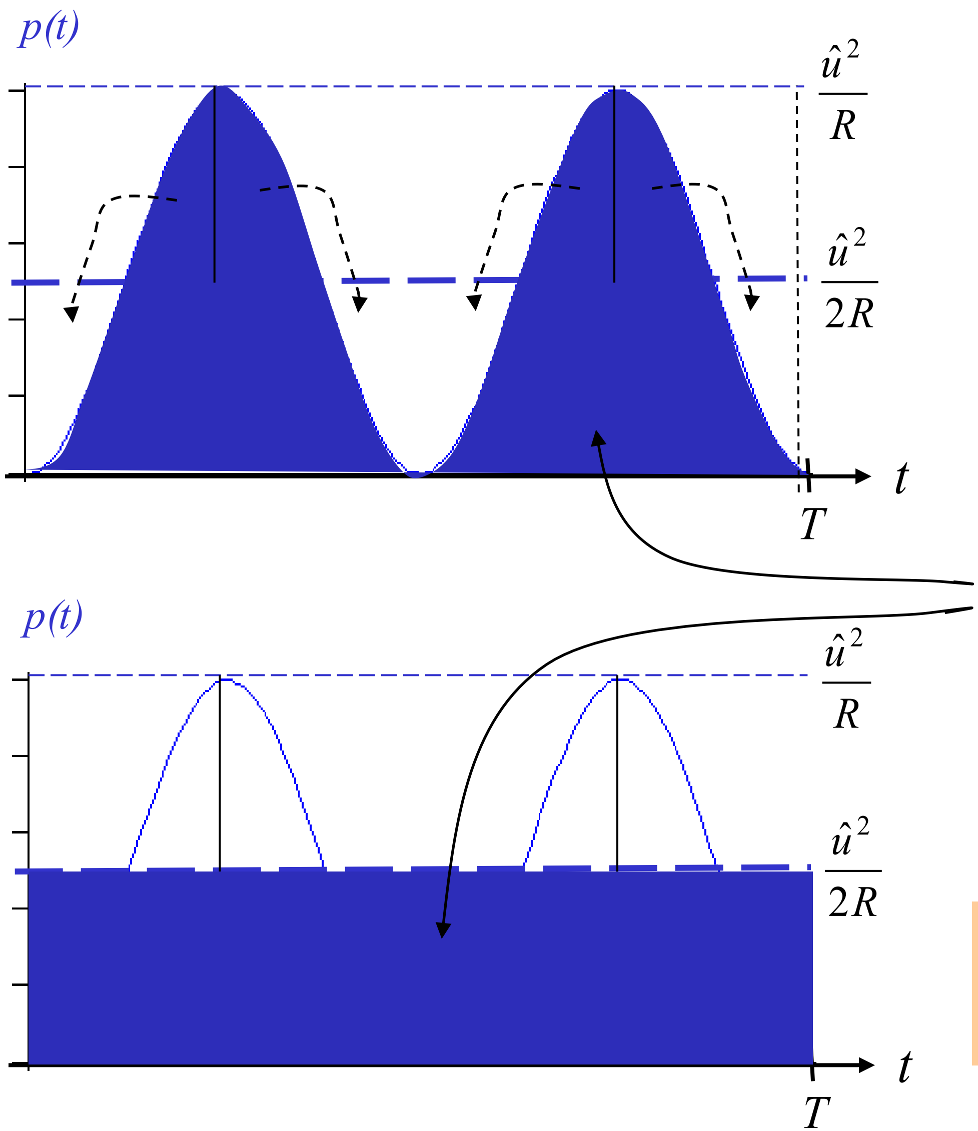
Wie groß ist die im Widerstand umgesetzte **mittlere** Leistung **P**?

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{\hat{u}^2}{R} \cdot \sin^2(\omega t) = \frac{\hat{u}^2}{R} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t)\right)}_{\text{Wertebereich } 0\ldots.1}$$



$$W = \int_0^T p(t)dt$$ in einer Periode umgesetzte Arbeit

$$P = \frac{W}{T}$$ mittlere Leistung



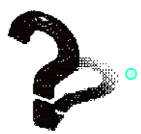
gleiche Fläche

$$W = \int_0^T p(t)dt = \frac{\hat{u}}{2R} \cdot T$$

$$\boxed{P = \frac{W}{T} = \frac{\hat{u}}{2R}}$$

5.4.3 Äquivalente Gleichspannung = Effektivwert

Welche Gleichspannung U würde die gleiche Leistung P erzeugen wie die <u>mittlere Leistung</u> ?



Mittelwert der Leistung

$$P = \underbrace{\frac{\hat{u}^2}{2R}}_{\text{mittl. Leistung durch Wechselspannung}} = \underbrace{\frac{U^2}{R}}_{\text{Leistung durch äquiv. Gleichspannung}} \Rightarrow \frac{\hat{u}^2}{2} = U^2 \Rightarrow \boxed{U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}$$

Die Spannung U (äquivalente Gleichspannung heißt *Effektivwert* der Wechselspannung.

Durch Einführung des <u>*Effektivwertes*</u> U vereinfacht sich die Leistungsberechnung:

$$\boxed{P = \frac{U^2}{R}}$$

Die Skalen von Wechselstrom-Messinstrumenten (bzw. der Wechselstrom-messbereich von Vielfachinstrumenten) sind i. Allg. so kalibriert, dass sie (<u>für sinusförmige Größen</u>) den <u>Effektivwert</u> anzeigen (wird später vertieft).

ÜBUNG: Effektivwert

1. An einen ohmschen Widerstand $R = 10\Omega$ wird eine Wechselspannung $u(t)$ angelegt.

$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$$

Wie groß ist die im Widerstand umgesetzte mittlere Leistung P ?

2. Wie groß ist der Scheitelwert der Netzspannung U=220V.

5.5 Komplexer Widerstand

5.5.1 Definition

Analog zur Widerstandsdefinition im Gleichstromkreis wird jetzt ein *komplexer Widerstand* $\underline{Z}$ definiert.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_i)}} = \frac{\hat{u} \cdot \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{i} \cdot \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}}$$

$\underline{Z}$ ist das Verhältnis der komplexen Amplituden von Spannung und Strom.

$\underline{Z}$ ist <u>**nicht** zeitabhängig.</u>

Man kann somit <u>vereinfachend</u> schreiben:

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}} = \underbrace{\frac{\hat{u}}{\hat{i}}}_{Z} \cdot \underbrace{e^{j(\varphi_u-\varphi_i)}}_{\varphi_Z}}$$

Impedanz

<u>Kurze Anmerkung:</u> Rechnen mit Effektivwerten anstatt mit Scheitelwerten

Wie man sieht

$$\underline{Z} = \frac{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{i}}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

können alle Berechnungen auch mit den <u>*komplexen Effektivwerten*</u> $\underline{U}$ und $\underline{I}$

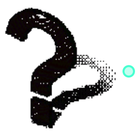
<u>anstelle</u> der <u>komplexen Amplituden</u> $\hat{\underline{u}}$ und $\hat{\underline{i}}$ durchgeführt werden.

Der Zusammenhang lautet:

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\hat{\underline{u}}}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{\underline{I} = \frac{\hat{\underline{i}}}{\sqrt{2}}}$$

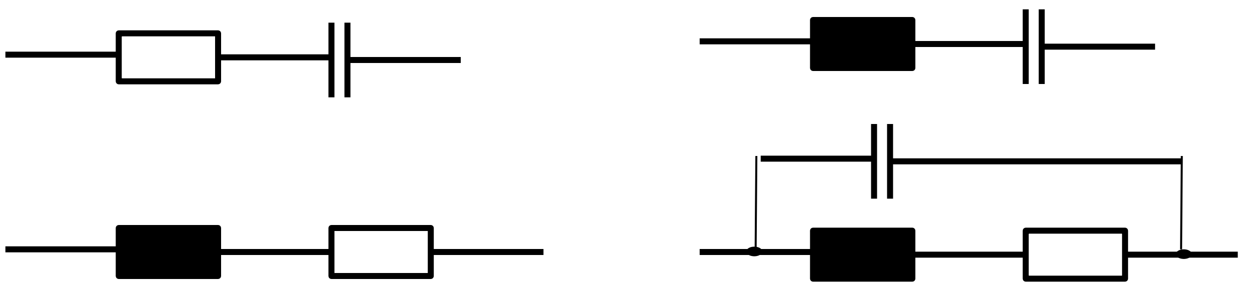
Die komplexe Effektivwert hat den <u>gleichen Winkel</u> wie die komplexe Amplitude
ist <u>lediglich um den Faktor $\sqrt{2}$ kürzer.</u>

Was ist denn ein komplexer Widerstand ?



Ein kurzer Vorgriff :

Komplexe Widerstände sind z.B. Zweipole aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten, z.B.



Anders als ohmsche Widerstände sind komplexe Widerstände **frequenzabhängig** (Betrag und Phase).

5.5.2 Bedeutung

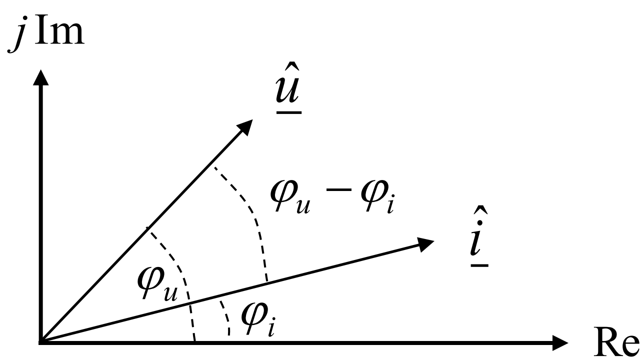
Zusammengefasst: In Exponentialschreibweise gilt für den komplexen Widerstand:

$$\boxed{\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_Z}}$$

mit $Z = \dfrac{\hat{u}}{\hat{i}} = \dfrac{U}{I}$

und $\varphi_Z = \underbrace{\varphi_u - \varphi_i}$

Verddrehung des Spannungszeigers relativ zum Stromzeiger



Z wird als *Scheinwiderstand* oder *Impedanz* bezeichnet.

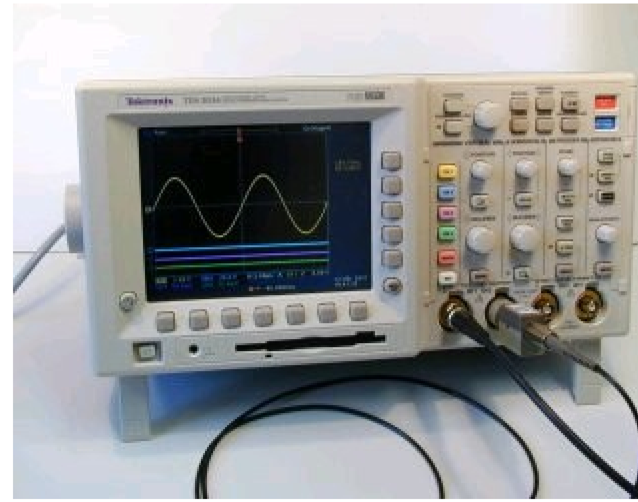
Die Impedanz Z gibt das Verhältnis der Spannungs- zur Stromamplitude an.

An komplexen Widerständen ist die Phase zwischen Strom und Spannung um den Phasenwinkel φ_Z verschoben.

ÜBUNG: Komplexer Widerstand

1) An einen komplexen Widerstand $\underline{Z}$ wird eine Wechselspannung $u(t)$ angelegt.

$$u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$$

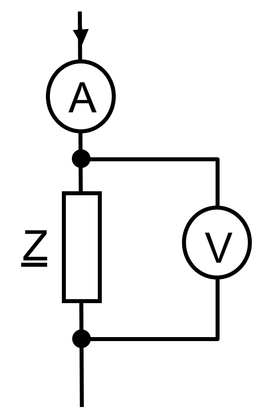


Mit Hilfe eines Oszilloskops wird der Strom $i(t)$ durch den komplexen Widerstand gemessen.

$$i(t) = 0.2A \cdot \cos(\omega t - 30°)$$

Wie groß ist der komplexe Widerstand $\underline{Z}$?

2) Mit einem Multimeter messen Sie an einem komplexen Widerstand U=4V und I=20mA. Wie groß ist der Scheinwiderstand (Impedanz)?



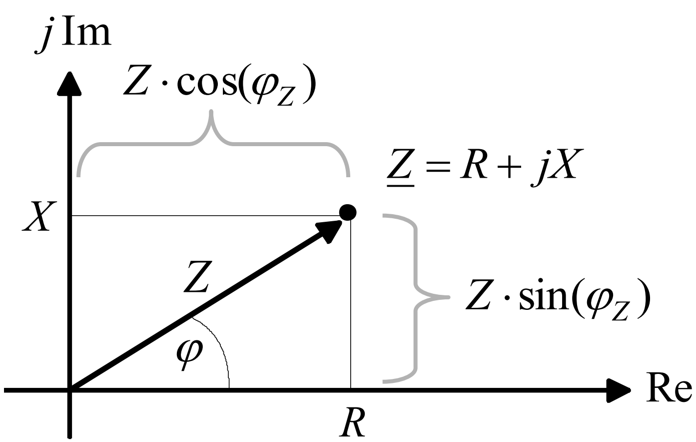
5.5.3 Komplexer Widerstand in kartesischer Schreibweise

Der komplexe Widerstand kann auch in kartesischer Schreibweise angegeben werden:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{Z} &= Z \cdot e^{j\varphi_Z} = Z \cdot \left(\cos\varphi_Z + j\sin\varphi_Z\right) \\ &= R + jX \end{aligned}}$$

R : Wirkwiderstand

X : Blindwiderstand



Exponentialform → kart. Form

$$\boxed{R = Z \cdot \cos(\varphi_Z)}$$

$$\boxed{X = Z \cdot \sin(\varphi_Z)}$$

kart. Form → Exponentialform

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)}$$

ÜBUNG: Darstellungsweisen komplexer Widerstände

1. Gegeben ist der komplexen Widerstand $\underline{Z}_1$.

$$\underline{Z}_1 = 520\Omega \cdot e^{j30^\circ}$$

Wie groß sind der Wirkwiderstand R_1 und der Blindwiderstand X_1?

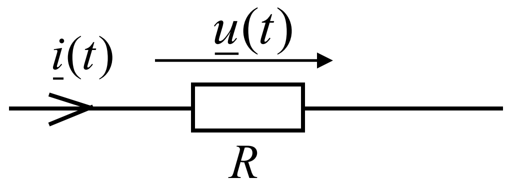
2. An einem komplexen Widerstand $\underline{Z}_2$ liegt eine Spannung $u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$

$$\underline{Z}_2 = 120\Omega + j160\Omega$$

Geben Sie den Strom $i(t)$ an.

5.6 Grundzweipole

5.6.1 Ohmscher Widerstand



An einen ohmschen Widerstand werde (in Gedanken) eine komplexe, zeitabhängige Spannung angelegt:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j\omega t}$$

Für den Strom durch den Widerstand gilt:

$$\boxed{\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{R}}$$

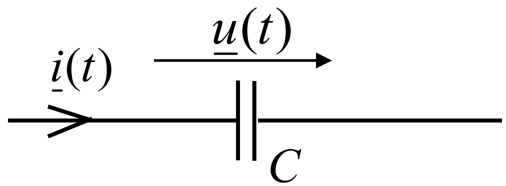
Damit folgt für $\underline{Z}$:

$$\underline{\underline{\underline{Z}}} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{u}(t)/R} = \underline{\underline{R}}$$

$$\boxed{\underline{Z} = R}$$

- rein <u>reell</u> und
- <u>unabhängig von der Frequenz</u>

5.6.2 Kapazität



An eine Kapazität werde (in Gedanken) eine komplexe, zeitabhängige Spannung angelegt: $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j\omega t}$

Für den Strom durch die Kapazität gilt: $\boxed{\underline{i}(t) = C \cdot \frac{d\underline{u}(t)}{dt}}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\underline{i}(t)}} = C \cdot \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = C \cdot \frac{d\hat{u} \cdot e^{j\omega t}}{dt} = C \cdot \hat{u} \cdot \frac{de^{j\omega t}}{dt} = \underline{\underline{C \cdot \hat{u} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}}}$$

Damit folgt für $\underline{Z}$:

$$\underline{\underline{\underline{Z}}} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\cancel{\hat{u}} \cdot \cancel{e^{j\omega t}}}{C \cdot \cancel{\hat{u}} \cdot j\omega \cdot \cancel{e^{j\omega t}}} = \underline{\underline{\frac{1}{j\omega C}}} = \underline{\underline{-j\frac{1}{\omega C}}}$$

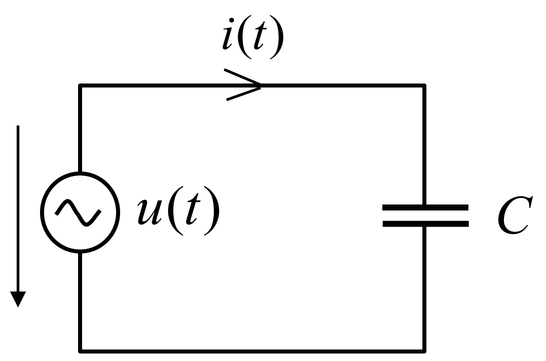
$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}}$$

- rein (negativ) <u>imaginär</u> und
- <u>sinkt mit der Frequenz</u>

ÜBUNG: Kapazität

Gegeben ist ein Kondensator C = 100µF

An den Kondensator wird eine Spannung $u(t)$ angelegt: $u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$

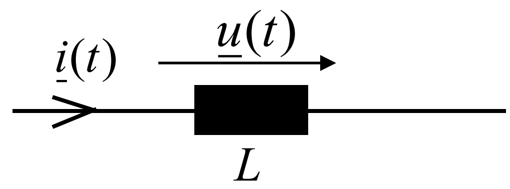


Geben Sie den Strom $i(t)$ durch den Kondensator an für

f_1=50Hz und
f_2=2kHz .

Eilt der Strom $i(t)$ der Spannung vor oder nach?

5.6.3 Induktivität



Durch eine Induktivität werde (in Gedanken) ein komplexer, zeitabhängiger Strom geleitet:

$$\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$$

Für die Spannung an einer Induktivität gilt:

$$\boxed{\underline{u}(t) = L \cdot \frac{d\underline{i}(t)}{dt}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\underline{u}(t)}} = L \cdot \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = L \cdot \frac{d\hat{i} \cdot e^{j\omega t}}{dt} = L \cdot \hat{i} \cdot \frac{de^{j\omega t}}{dt} = \underline{\underline{L \cdot \hat{i} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}}}$$

Damit folgt für $\underline{Z}$:

$$\underline{\underline{\underline{Z}}} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{L \cdot \cancel{\hat{i}} \cdot j\omega \cdot \cancel{e^{j\omega t}}}{\cancel{\hat{i}} \cdot \cancel{e^{j\omega t}}} = \underline{\underline{j\omega L}}$$

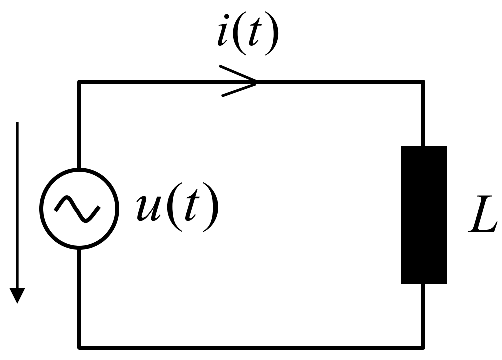
$$\boxed{\underline{Z} = j\omega L}$$

- rein (positiv) <u>imaginär</u> und
- <u>steigt mit der Frequenz</u>

ÜBUNG: Induktivität

Gegeben ist eine Induktivität L=0.1H

An die Induktivität wird eine Spannung u(t) angelegt: $u(t) = 15V \cdot \sin(\omega t)$



Geben Sie den Strom durch die Induktivität an für

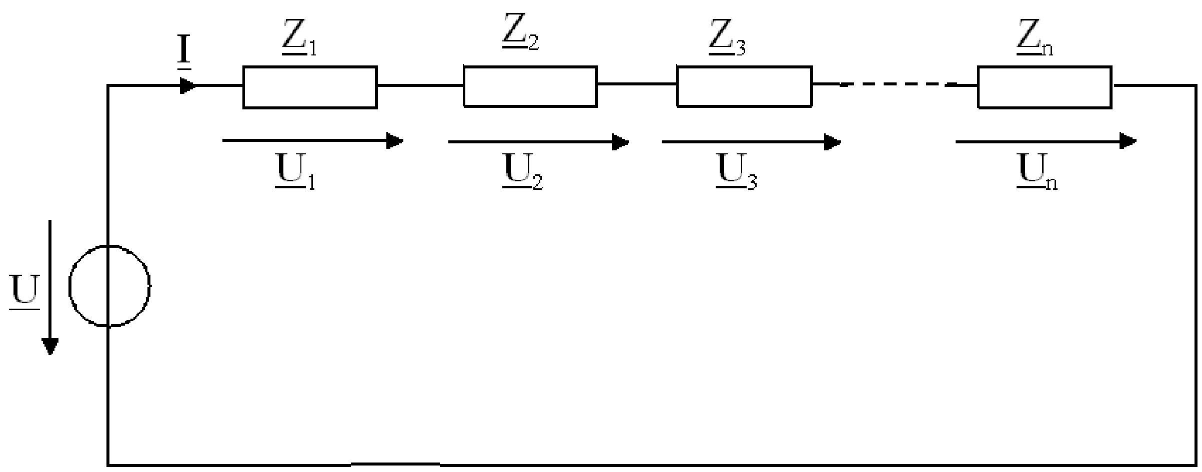
f_1=50Hz und
f_2=2kHz.

Eilt der Strom $i(t)$ der Spannung $u(t)$ vor oder nach?

5.7 Zusammengesetzte Zweipole

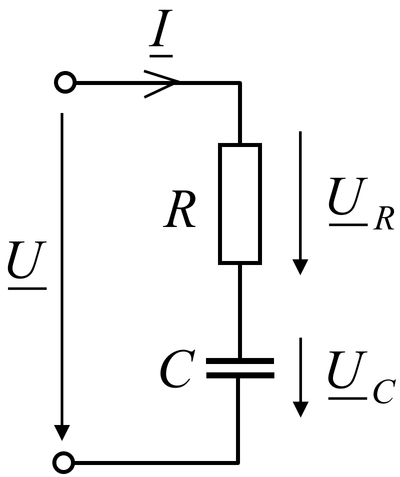
5.7.1 Reihenschaltung komplexer Widerstände

Analog zum Gleichstromfall gilt für die Reihenschaltung komplexer Widerstände:



$$\boxed{\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \ldots + \underline{Z}_n}$$

5.7.2 Reihenschaltung von R und C



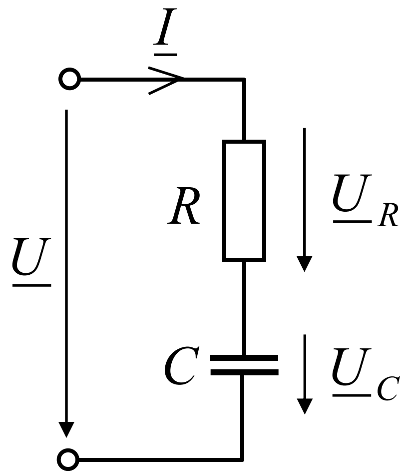
$$\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}}$$

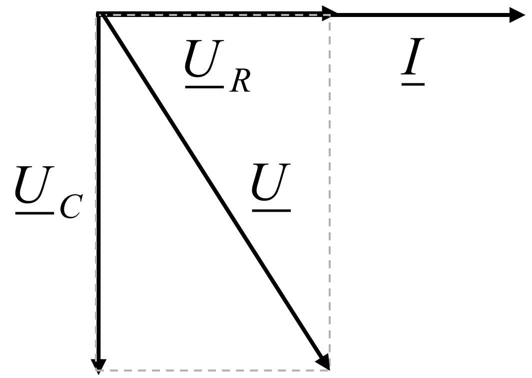
$\underline{I}$ sei gegeben (Bezugsgröße).

Dann gilt mit dem ohmschen Gesetz für $\underline{U}$:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \underbrace{\underline{I} \cdot R}_{\underline{U}_R} - \underbrace{j\frac{\underline{I}}{\omega C}}_{\underline{U}_C}$$

Effektivwertzeiger in der komplexen Ebene





1) ***I* sei vorgegeben**: $\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R$

d.h. $\underline{U}_R$ ist mit dem Strom $\underline{I}$ in Phase

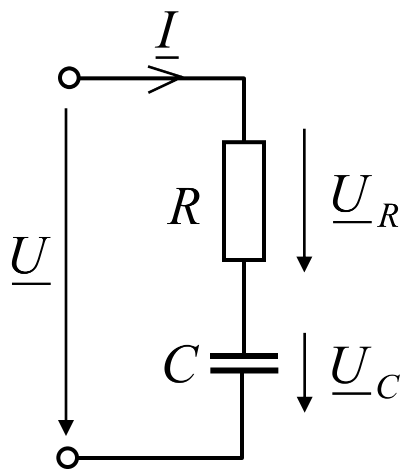
2) $$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{\underline{I}}{\omega C} = \frac{I}{\omega C} \cdot e^{j\varphi_I} \cdot e^{-j90^\circ} = \underbrace{\frac{I}{\omega C}}_{\text{Betrag von } \underline{U}_c} \cdot \underbrace{e^{j(\varphi_I - 90^\circ)}}_{\text{Phase von } \underline{U}_c}$$

d.h. $\underline{U}_C$ eilt dem Strom $\underline{I}$ um 90° nach

3) $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$

ÜBUNG: Reihenschaltung von R und C 1

Gegeben ist folgende Schaltung:



$$C = 10\mu F$$

$$R = 100\Omega$$

$$i(t) = 100mA \cdot \sin(\omega t)$$

Berechnen Sie für f =100Hz die folgenden Größen:

$\underline{I}$

$\underline{U}_R$ $\quad u_R(t)$

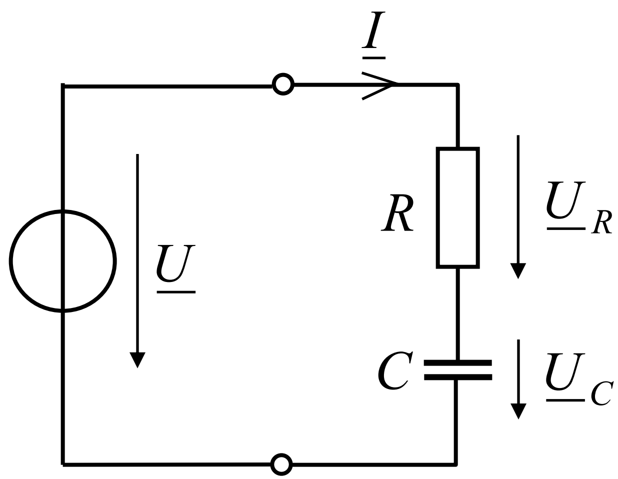
$\underline{U}_C$ $\quad u_C(t)$

$\underline{U}$ $\quad u(t)$

ÜBUNG: Reihenschaltung von R und C 2

Gegeben ist folgende Schaltung:

$$u(t) = 10V \cdot \sin(\omega t)$$



$$C = 10\mu F$$

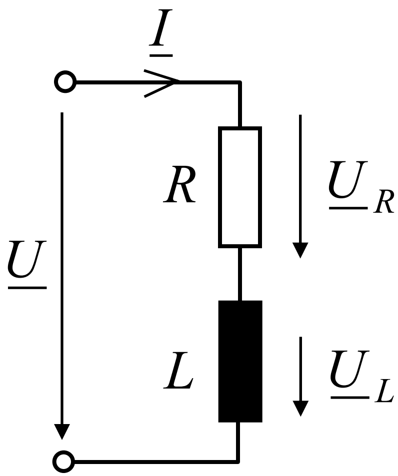
$$R = 100\Omega$$

Berechnen Sie für f =100Hz die folgenden Größen:

$\underline{U}$ $\underline{Z}$ $\underline{I}$ $\underline{U}_R$ $\underline{U}_C$

$i(t)$ $u_R(t)$ $u_C(t)$

5.7.3 Reihenschaltung von R und L



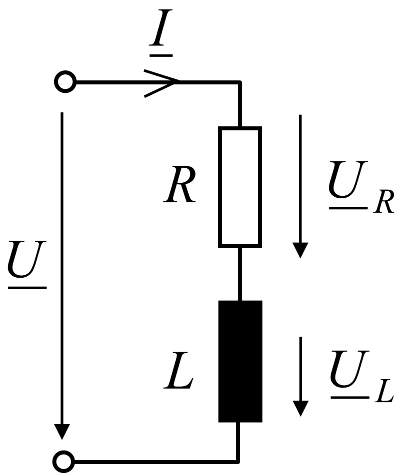
$$\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + j\omega L}$$

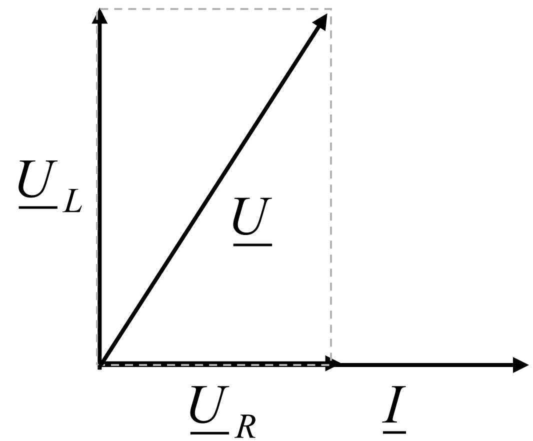
$\underline{I}$ sei gegeben.

Dann gilt mit dem Ohmschen Gesetz für $\underline{U}$:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \underbrace{\underline{I} \cdot R}_{\underline{U}_R} + \underbrace{j\omega L \cdot \underline{I}}_{\underline{U}_L}$$

Effektivwertzeiger in der komplexen Ebene





1) **$\underline{I}$ sei vorgegeben**: $\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R$

d.h. $\underline{U}_R$ ist mit dem Strom $\underline{I}$ in Phase

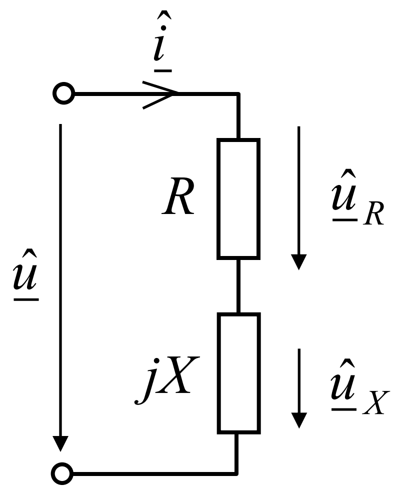
2) $$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot j\omega L = I \cdot \omega L \cdot e^{j\varphi_I} \cdot e^{j90^\circ} = \underbrace{I \cdot \omega L}_{\text{Betrag von } \underline{U}_L} \cdot \underbrace{e^{j(\varphi_I + 90^\circ)}}_{\text{Phase von } \underline{U}_L}$$

d.h. $\underline{U}_L$ eilt dem Strom $\underline{I}$ um 90° voraus

3) $$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$$

ÜBUNG: Bestimmung unbekannter Zweipole

Gegeben ist folgende Schaltung:



An der Schaltung liegt eine sinusförmige Spannung $u(t)$ mit der Frequenz f und dem Scheitelwert $\hat{u}$.

$$\hat{u} = 10V \qquad f = 500Hz$$

Gemessen wird ein Strom $i(t)$ mit dem Scheitelwert $\hat{i}$, welcher der Spannung um eine Zeit t_0 nacheilt

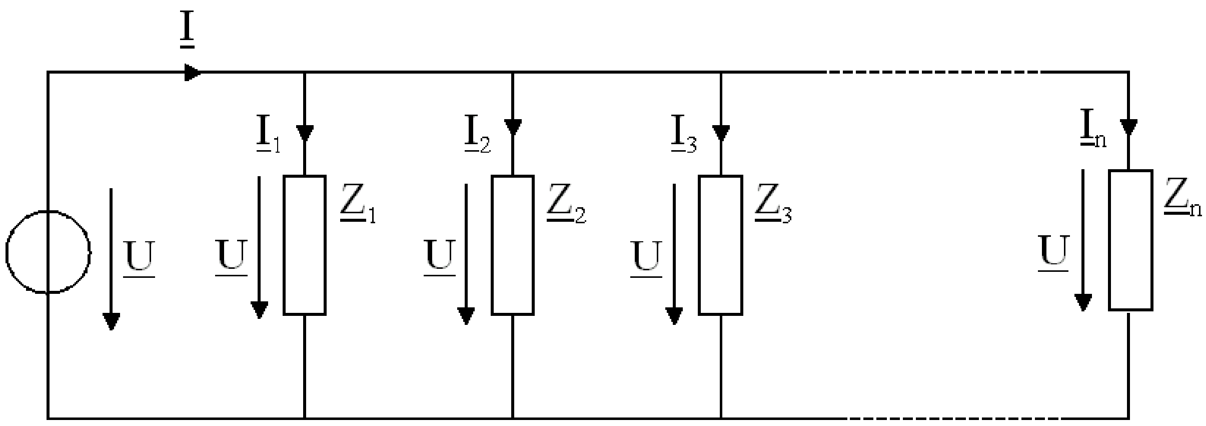
$$\hat{i} = 376mA \qquad t_0 = 111\mu s$$

a) Wie groß ist die Phasenverschiebung?

b) Welche Werte haben R und X ?
Welches Bauteil verbirgt sich hinter X ? Wie groß ist C oder L ?

5.7.4 Parallelschaltung komplexer Widerstände

Analog zum Gleichstromfall gilt für die Parallelschaltung komplexer Widerstände:



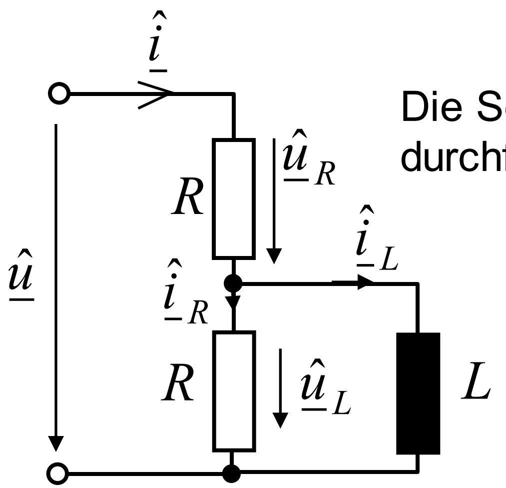
$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \ldots + \frac{1}{\underline{Z}_n}}$$

Für die Parallelschaltung von zwei komplexen Widerständen gilt analog:

$$\boxed{\underline{Z}_{ges} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}$$

ÜBUNG: Gemischte komplexe Schaltung

Gegeben ist folgende Schaltung:



Die Schaltung wird von einem sinusförmige Strom $i(t)$ durchflossen mit der Frequenz f und dem Scheitelwert $\hat{i}$.

$$\hat{i} = 10mA \qquad f = 1kHz$$

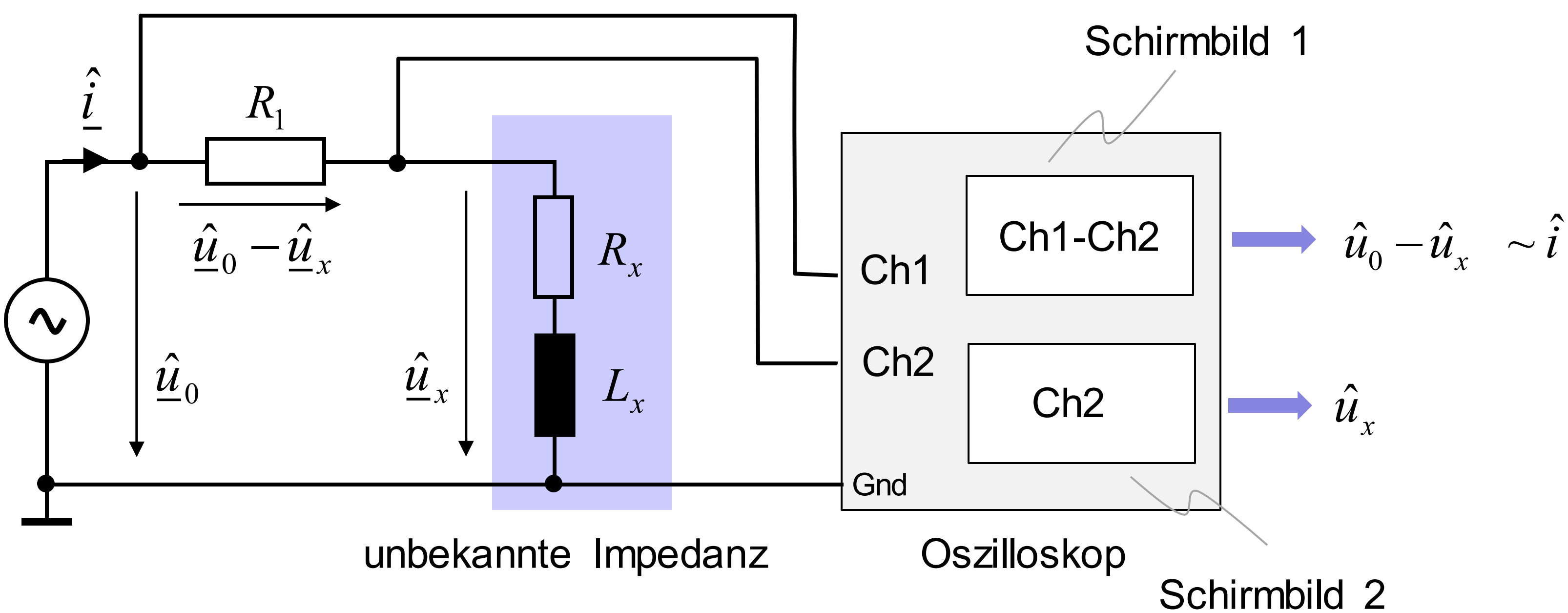
$$R = 3k\Omega$$
$$L = 0.5H$$

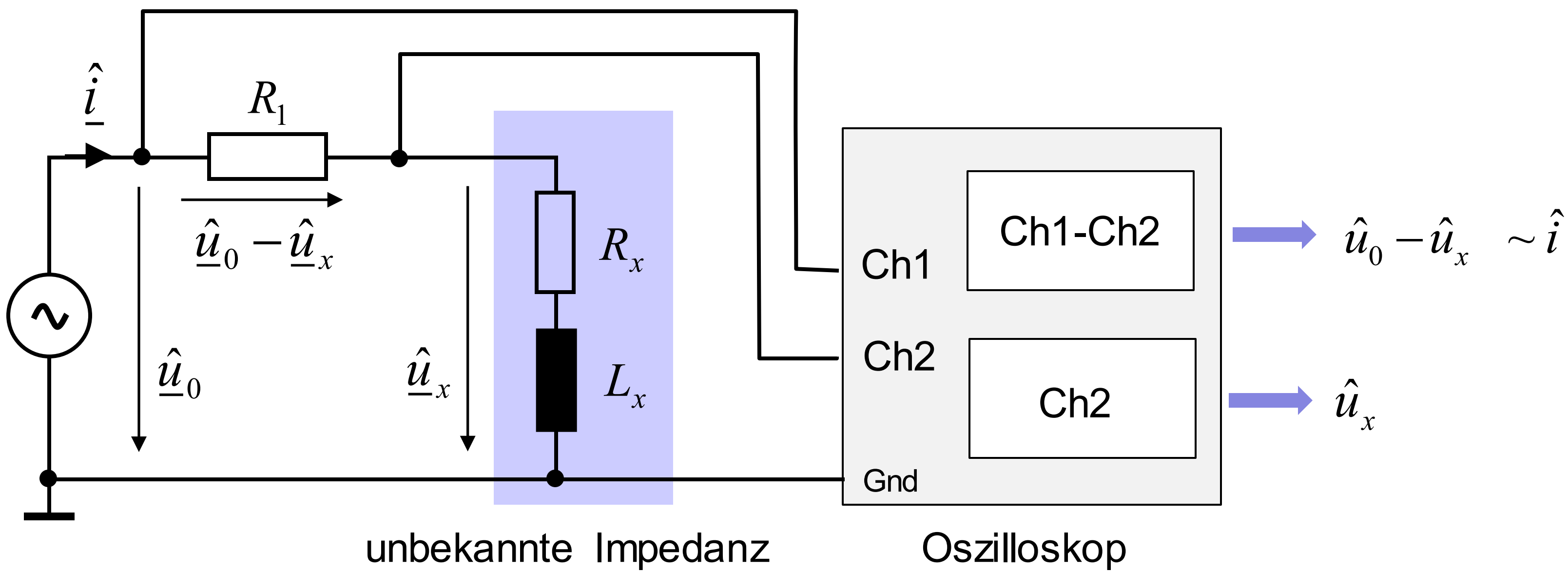
Berechnen Sie alle Ströme und Spannungen und zeichnen Sie die Zeigerdiagramme.

5.8 Messung von Impedanzen

5.8.1 Impedanzmessung mit einem 2-Kanal-Oszilloskop (s. Versuch 5)

Prinzip: Gemessen wird der Strom (indirekt gemessen mit Hilfe des Spannungsabfalls über R_1) und die Spannung an der Impedanz. So lassen sich die Spitzenwerte $\hat{i}, \hat{u}_x$ und die Phasenverschiebung $\varphi_U - \varphi_I$ ablesen.





Den Strom I erhält man indirekt über den Spannungsabfall an R_1: $\hat{i} = \dfrac{\hat{u}_0 - \hat{u}_x}{R_1}$

Den Betrag der Impedanz $\underline{Z}$ erhält man mit : $Z = \dfrac{\hat{u}_x}{\hat{i}}$

Mit der abgelesenen Phasen-verschiebung gilt somit:

$$\underline{Z} = \frac{\hat{\underline{u}}_x}{\hat{\underline{i}}} = \frac{\hat{u}_x \cdot e^{j\varphi_U}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_I}} = Z \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}$$