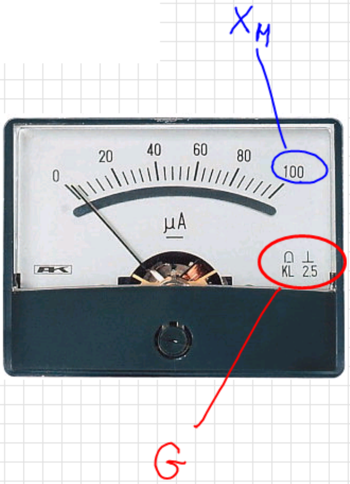
ÜBUNG: Messunsicherheit von Analogmessgeräten

1. Wie lautet der Zusammenhang für die relative Unsicherheit als f(x) ?



Mit den Größen ΔX : Messunsicherheit

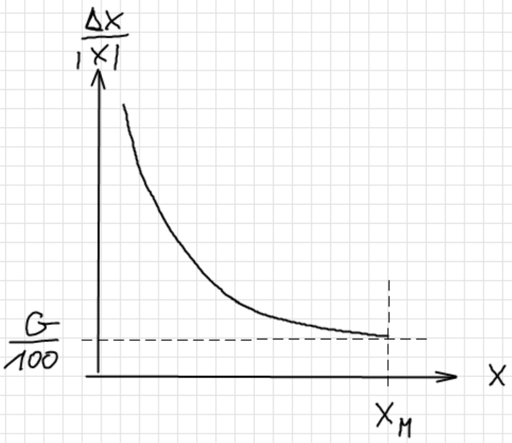
X_M : Messbereichsendwert

X : Messwert

und $\Delta X = \frac{G}{100} \cdot X_M$

gilt für die relative Messunsicherheit :

$$\frac{\Delta X}{|X|} = \underbrace{\frac{G}{100} \cdot X_M}_{\text{Konstante}} \cdot \frac{1}{|X|} \longrightarrow \text{Hyperbel}$$



Bei Analoginstrumenten gilt:

Je kleiner der Messwert im Vergleich zum Messbereichsendwert ist, desto größer wird die relative Messunsicherheit der Messung !

2. Was folgert daraus für die praktische Messung?

Das Messgerät sollte möglichst gut ausgesteuert sein !

3. Ein analoges Messinstrument der Klasse $\overset{G}{1}$ misst im $\underset{X_M}{100\text{mV}}$-Bereich die folgenden Spannungswerte:

U_1=90mV U_2=50mV U_3=10mV

Wie groß sind die absoluten und relativen Unsicherheiten?

Für die absolute Messunsicherheit gilt in allen 3 Fällen:

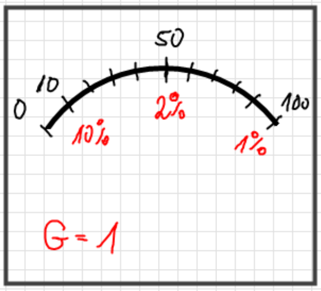
$$\underline{\underline{\Delta X}} = \frac{G}{100} \cdot X_M = \frac{1}{100} \cdot 100\,\text{mV} = \underline{\underline{1\,\text{mV}}}$$

Für die relativen Messunsicherheiten gilt:

$$\frac{\Delta X}{|X_1|} = \frac{1\,\text{mV}}{90\,\text{mV}} = 0.011 = \underline{\underline{1.1\,\%}}$$

$$\frac{\Delta X}{|X_2|} = \frac{1\,\text{mV}}{50\,\text{mV}} = 0.02 = \underline{\underline{2\,\%}}$$

$$\frac{\Delta X}{|X_3|} = \frac{1\,\text{mV}}{10\,\text{mV}} = 0.1 = \underline{\underline{10\,\%}}$$



ÜBUNG: Messunsicherheit von Digitalmessgeräten

1. Mit einem 4½-stelligen Digitalmessgerät werden im Messbereich 200mV (0.5% vM + 5D) die folgenden Spannungswerte gemessen:

   U_1=180mV U_2=100mV U_3=10mV

   Wie groß sind die absoluten und relativen Unsicherheiten?

Anzeigebereich im 200mV – Messbereich : 000.00 mV
⋮
199.99 mV

$\Rightarrow$ 1D $\hat{=}$ 10µV $\Rightarrow$ $\underline{\underline{5D \hat{=} 50\mu V}}$ messwertunabhäng. Teil der Unsicherheit

Für die absolute Messunsicherheit gilt :

$$\Delta X = \underbrace{\frac{G_{VM}}{100} \cdot X}_{\text{messwertabh.}} + \underbrace{nD}_{\text{messwertunabh.}}$$

$$\underline{\underline{\Delta X_1}} = 0.005 \cdot 180\,mV + 0.05\,mV = 0.9\,mV + 0.05\,mV = \underline{\underline{0.95\,mV}}$$

$$\underline{\underline{\Delta X_2}} = 0.005 \cdot 100\,mV + 0.05\,mV = 0.5\,mV + 0.05\,mV = \underline{\underline{0.55\,mV}}$$

$$\underline{\underline{\Delta X_3}} = 0.005 \cdot 10\,mV + 0.05\,mV = 0.05\,mV + 0.05\,mV = \underline{\underline{0.1\,mV}}$$

$\Longrightarrow$ Die absolute Unsicherheit wächst mit der Messgröße.

Für die relative Unsicherheit gilt:

$$\frac{\Delta X_1}{|X_1|} = \frac{0.95\,mV}{180\,mV} = 0.0053 = \underline{\underline{0.53\,\%}}$$

$$\frac{\Delta X_2}{|X_2|} = \frac{0.55\,mV}{100\,mV} = 0.0055 = \underline{\underline{0.55\,\%}}$$

$$\frac{\Delta X_3}{|X_3|} = \frac{0.1\,mV}{10\,mV} = 0.01 = \underline{\underline{1\,\%}}$$

Die relative Unsicherheit ist umso kleiner, je größer der Messwert ist.

ÜBUNG: Fehlerfortpflanzung 1

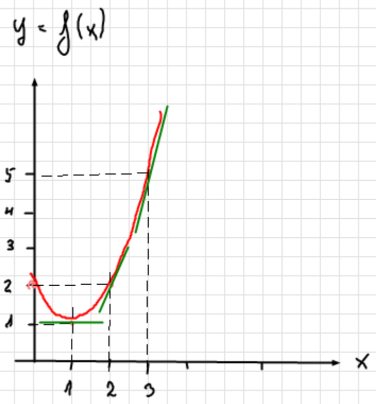
Gegeben ist die Funktion: $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$

Wie groß ist die Unsicherheit von y für folgende Fälle?

a) x=1, Δx= 0.1
b) x=2, Δx= 0.1
c) x=3, Δx= 0.1

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$y' = 2x - 2$$



Wie groß ist die Unsicherheit von f(x) für folgende Fälle:

$x = 1 \quad \Delta x = 0.1$

$x = 2 \quad$ "

$x = 3 \quad$ "

a) $\Delta y \approx \left| \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x=1} \cdot \Delta x = |2x - 2|_{x=1} = |2-2| \cdot \Delta x = \underline{\underline{0}}$

b) $\Delta y \approx \left| \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x=2} \cdot \Delta x = |2x - 2|_{x=2} = |4-2| \cdot \Delta x = \underline{\underline{0.2}}$

c) $\Delta y \approx \left| \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x=3} \cdot \Delta x = |2x - 2|_{x=3} = |6-2| \cdot \Delta x = \underline{\underline{0.4}}$

ÜBUNG: Fehlerfortpflanzung 2

Gegeben ist die Funktion: $z = f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 3x + 1$

Wie groß ist die Unsicherheit von z für folgende Fälle?

Berechnung der partiellen Ableitungen von $f(x,y)$:

$$z = f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 3x + 1$$

$\uparrow\uparrow$ unsicherheitsbehaftete Größen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3$$ y wird bei dieser Ableitung als konst. betrachtet

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y$$ x wird bei dieser Ableitung als konst. betrachtet

Fall a) Unsicherheit von z für: $x = 2 \pm 0.2$ und $y = 0 \pm 0.2$

$$\Delta z \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y$$

$$= |2x+3| \cdot 0.2 + |6y| \cdot 0.2$$

$$= 7 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.2 = \underline{\underline{1.4}}$$

Fall b) $x = -1.5 \pm 0.2$ $\quad y = 2 \pm 0.2$

$$\Delta z = |2x+3| \cdot 0.2 + |6y| \cdot 0.2$$

$$= 0 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.2 = \underline{\underline{2.4}}$$

Fall c) $x = 2 \pm 0.2$ $\quad y = -2 \pm 0.2$

$$\Delta z = 7 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.2 = \underline{\underline{3.8}}$$

ÜBUNG: Fehlerfortpflanzung 3

a) Berechnet werden soll die Leistung P sowie die Unsicherheit ΔP des Ergebnisses.

Gemessen werden: $U = 220V \pm 4V$

$I = 4A \pm 0.2A$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Worst-case-Unsicherheit (s.o.).

a) $\underline{\underline{P}} = U \cdot I = 220V \cdot 4A = \underline{\underline{880\,W}}$

$$\underline{\underline{\Delta P}} = \left|\frac{\partial(U \cdot I)}{\partial U}\right| \cdot \Delta U + \left|\frac{\partial(U \cdot I)}{\partial I}\right| \cdot \Delta I$$

$$= I \cdot \Delta U + U \cdot \Delta I$$

$$= 4A \cdot 4V + 220V \cdot 0.2A$$

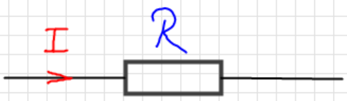
$$= 16W + 44W = \underline{\underline{60W}}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{P = 880W \pm 60W}}$

b) Berechnet werden soll die Leistung P sowie die Unsicherheit ΔP des Ergebnisses.

Gemessen werden: $I = 4A \pm 0.2A$ $\quad \Delta I / I = 5\%$

$R = 50\Omega \pm 5\Omega$ $\quad \Delta R / R = 10\%$



$$\underline{\underline{P}} = I^2 \cdot R = 4^2 A^2 \cdot 50 \underbrace{\frac{V}{A}}_{\Omega} = 800\,VA = \underline{\underline{800\,W}}$$

$$\underline{\underline{\Delta P(I,R)}} = \left| \frac{\partial I^2 \cdot R}{\partial I} \right| \cdot \Delta I + \left| \frac{\partial I^2 \cdot R}{\partial R} \right| \cdot \Delta R$$

R wird als Konstante betrachtet

I wird als Konstante betrachtet

$$= |2IR| \cdot \Delta I + |I^2| \cdot \Delta R$$

$$= 2 \cdot 4A \cdot 50\Omega \cdot 0.2A + 4^2 A^2 \cdot 5\Omega$$

$$= 80\,W + 80\,W = \underline{\underline{160\,W}}$$

$$\underline{\underline{P = 800\,W \pm 160\,W}} \qquad \frac{\Delta P}{P} = 20\%$$

Herleitung der Sonderfälle: Addition und Subtraktion

Gegeben sind zwei unsicherheitsbehaftete Variablen A und B.

1. Für die absolute Unsicherheit der Summe $E = A + B$ gilt:

$$\boxed{\Delta E = \Delta A + \Delta B}$$

2. Für die absolute Unsicherheit der Differenz $E = A - B$ gilt:

$$\boxed{\Delta E = \Delta A + \Delta B}$$

1. $E = A + B$

$$\Delta E = \left| \frac{\partial (A+B)}{\partial A} \right| \cdot \Delta A + \left| \frac{\partial (A+B)}{\partial B} \right| \cdot \Delta B$$

$$= \underline{\underline{\Delta A + \Delta B}}$$

2. $E = A - B$

$$\Delta E = \left| \frac{\partial (A-B)}{\partial A} \right| \Delta A + \left| \frac{\partial (A-B)}{\partial B} \right| \Delta B$$

$$= 1 \cdot \Delta A + |-1| \Delta B$$

$$= \underline{\underline{\Delta A + \Delta B}}$$

ÜBUNG: Unsicherheit bei Addition/Subtraktion

a) Drei Widerstände werden in Reihe geschaltet.

$R_1 = 50\Omega\ (\pm 1\%)$ $\quad \Delta R_1 = 50\Omega \cdot 0.01 = 0.5\Omega$

$R_2 = 100\Omega\ (\pm 2.5\%)$ $\quad \Delta R_2 = 100\Omega \cdot 0.025 = 2.5\Omega$

$R_3 = 5\Omega\ (\pm 10\%)$ $\quad \Delta R_3 = 5\Omega \cdot 0.1 = 0.5\Omega$

abs. Unsicherheiten

Wie groß ist der Gesamtwiderstand und seine Toleranz ?

$$\underline{\underline{R}} = R_1 + R_2 + R_3 = \underline{\underline{155\,\Omega}}$$

Bei Summen und Differenzen unsicherheitsbehafteter Größen <u>addieren</u> sich die <u>absoluten Unsicherheiten</u>.

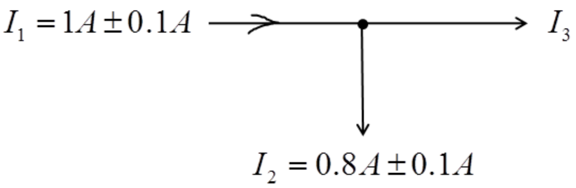
$$\underline{\underline{\Delta R}} = \Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 = 0.5\Omega + 2.5\Omega + 0.5\Omega$$

$$= \underline{\underline{3.5\,\Omega}}$$ (abs. Unsicherheit)

$$\underline{\underline{\frac{\Delta R}{R}}} = \frac{3.5\,\Omega}{155\,\Omega} = 0.023 = \underline{\underline{2.3\,\%}}$$ (rel. Unsicherheit)

$$\underline{R = 155\,\Omega \pm 3.5\,\Omega = 155\,\Omega\ (\pm 2.3\,\%)}$$

b) Berechnen Sie die absolute und relative Unsicherheit von I_3.



$$\underline{\underline{I_3}} = I_1 - I_2 = 1\,A - 0.8\,A = \underline{\underline{0.2\,A}}$$

$$\underline{\underline{\Delta I_3}} = \Delta I_1 + \Delta I_2 = 0.1\,A + 0.1\,A = \underline{\underline{0.2\,A}}$$

$$\underline{\underline{I_3 = 0.2\,A \pm 0.2\,A}}$$ (abs. Unsicherheit)

$$\underline{\underline{\frac{\Delta I_3}{I_3}}} = \frac{0.2\,A}{0.2\,A} = 1 \;\hat{=}\; \underline{\underline{100\,\%}}$$ (rel. Unsicherheit) !

$$\underline{\underline{I_3 = 0.2\,A\ (\pm 100\,\%)}}$$

Bei Differenzen führt die Fehlerfortpflanzung oft zu sehr großen relativen Unsicherheiten!

Herleitung der Sonderfälle: Multiplikation und Division

Gegeben sind zwei unsicherheitsbehaftete Variablen A und B.

1. Für die relativen Unsicherheit des Produktes $E = A \cdot B$ gilt:

$$\boxed{\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{\Delta A}{|A|} + \frac{\Delta B}{|B|}}$$

2. Für die relativen Unsicherheit des Quotienten $E = \frac{A}{B}$ gilt:

$$\boxed{\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{\Delta A}{|A|} + \frac{\Delta B}{|B|}}$$

1. $E = A \cdot B$

$$\Delta E = \left|\frac{\partial A \cdot B}{\partial A}\right| \cdot \Delta A + \left|\frac{\partial A \cdot B}{\partial B}\right| \cdot \Delta B$$

$$= |B| \cdot \Delta A + |A| \cdot \Delta B$$

dann gilt auch $|E| = |A| \cdot |B|$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\cancel{|B|}}{|A| \cdot \cancel{|B|}} \cdot \Delta A + \frac{\cancel{|A|}}{\cancel{|A|} \cdot |B|} \cdot \Delta B$$

$$\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{\Delta A}{|A|} + \frac{\Delta B}{|B|}$$

2. $E = \frac{A}{B}$

$$\Delta E = \left|\frac{\partial \frac{A}{B}}{\partial A}\right| \cdot \Delta A + \left|\frac{\partial \frac{A}{B}}{\partial B}\right| \cdot \Delta B$$

$$= \left|\frac{1}{B}\right| \cdot \Delta A + \left|-\frac{A}{B^2}\right| \cdot \Delta B$$

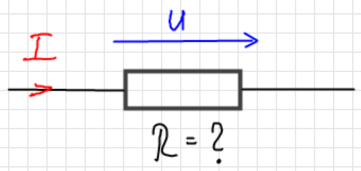
dann gilt auch $|E| = \frac{|A|}{|B|}$

$$\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{\left|\frac{1}{\cancel{B}}\right|}{\frac{|A|}{\cancel{|B|}}} \cdot \Delta A + \frac{\left|\frac{\cancel{A}}{B^{\cancel{2}}}\right|}{\frac{\cancel{|A|}}{\cancel{|B|}}} \cdot \Delta B = \frac{\Delta A}{|A|} + \frac{\Delta B}{|B|}$$

ÜBUNG: Unsicherheit bei Multiplikation/Division

An einem unbekannten Widerstand werden der Strom und der Spannungsabfall gemessen: $U = 12.3V \pm 0.2V$ $\quad I = 43.4mA \pm 0.25mA$

Wie groß ist der Widerstand und seine Unsicherheit?



$$R = \frac{U}{I} = \frac{12.3V}{0.0434A} = 283.41014\ \Omega$$

Bei Produkten und Quotienten unsicherheitsbehafteter Größen addieren sich die relativen Unsicherheiten.

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{0.2\ V}{12.3V} = \underline{0.01626} \qquad \frac{\Delta I}{I} = \frac{0.25\,mA}{43.3\,mA} = \underline{0.00576}$$

$$\underline{\underline{\frac{\Delta R}{R}}} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = \underline{\underline{0.022 = 2.2\ \%}}$$ (rel. Unsicherheit)

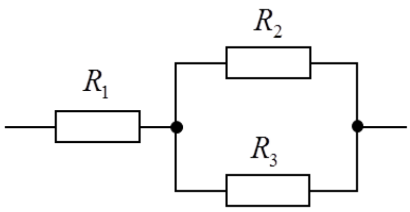
$$\underline{\underline{\Delta R}} = R \cdot 0.022 = \underline{\underline{6.2\ \Omega}}$$ (abs. Unsicherheit)

$$\underline{\underline{R = 283.4 \pm 6.2\ \Omega}}$$

ÜBUNG: Maximale Messunsicherheit und mittl. zu erwartender Fehler

Gegeben ist die folgende Schaltung:

$$R_1 = 10\Omega \pm 1\Omega$$
$$R_2 = 40\Omega \pm 2\Omega$$
$$R_3 = 60\Omega \pm 8\Omega$$



Die Werte der Widerstände sind mit den angegebenen Unsicherheiten behaftet.
Wie groß ist der Gesamtwiderstand sowie
- die maximale Unsicherheit und
- der mittlere zu erwartende Fehler?

$$\underline{\underline{R}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 10\Omega + \frac{40 \cdot 60}{40 + 60}\,\Omega = \underline{\underline{34\,\Omega}}$$

$$R(R_1, R_2, R_3) = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial R}{\partial R_1} = 1}}$$

R_2, R_3 als Konstante betrachten

$$\underline{\underline{\frac{\partial R}{\partial R_2}}} = \frac{R_3(R_2 + R_3) - 1(R_2 \cdot R_3)}{(R_2 + R_3)^2} =$$

R_1, R_3 als konst. betrachten

Anm.: Quotientenregel $\quad \dfrac{d\,\frac{z(x)}{n(x)}}{dx} = \dfrac{z' \cdot n - n' \cdot z}{n^2}$

$$= \frac{60 \cdot (40 + 60) - 40 \cdot 60}{(40 + 60)^2} = \underline{\underline{0.36}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial R}{\partial R_3}}} = \frac{R_2(R_2+R_3) - 1(R_2 \cdot R_3)}{(R_2+R_3)^2} = \frac{40(40+60) - 40 \cdot 60}{(40+60)^2} = \underline{\underline{0.16}}$$

Berechnung der Gesamtunsicherheit von R:

$$\underline{\underline{\Delta R}} = \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}\right| \cdot \Delta R_1 + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}\right| \cdot \Delta R_2 + \left|\frac{\partial R}{\partial R_3}\right| \cdot \Delta R_3$$

$$= 1 \cdot \Delta R_1 + 0.36 \cdot \Delta R_2 + 0.16 \cdot \Delta R_3$$

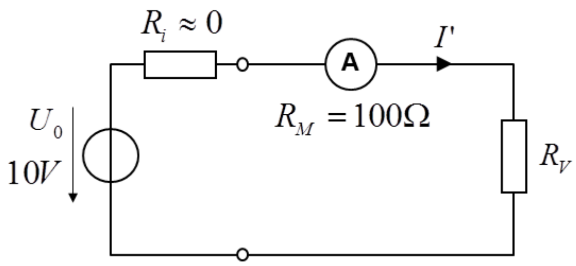
$$= 1\,\Omega + 0.72\,\Omega + 1.28\,\Omega$$

$$= \underline{\underline{3\,\Omega}}$$ max. Unsicherheit

$$\underline{\underline{\overline{\Delta R}}} = \sqrt{1^2 + 0.72^2 + 1.28^2}\;\Omega = \underline{\underline{1.8\,\Omega}}$$

mittl. zu erwartender Fehler

ÜBUNG: Systematischer Messfehler bei der Strommessung



Wie groß ist der relative, systematische Messfehler der Strommessung für folgende Fälle:

a) $R_V = 400\Omega$
b) $R_V = 400k\Omega$

a) Strom ohne Messgerät: $I = \frac{U_0}{R_V} = \frac{10V}{400\Omega} = 25mA$

Strom mit Messgerät: $I' = \frac{U_0}{R_M + R_V} = \frac{10V}{500\Omega} = 20mA$

relativer systematischer Messfehler:

$$\underline{\underline{\frac{\Delta I}{I}}} = \frac{I' - I}{I} = \frac{-5mA}{25mA} = -0.2 = \underline{\underline{-20\%}} \;!$$

b) Strom ohne Messgerät: $I = \frac{U_0}{R_V} = \frac{10V}{400k\Omega} = 25\mu A$

Strom mit Messgerät: $I' = \frac{U_0}{R_M + R_V} = \frac{10V}{400\,100\,\Omega} = 24.994\mu A$

$$\underline{\underline{\frac{\Delta I}{I}}} = \frac{I' - I}{I} = -249.9 \cdot 10^{-6} \approx \underline{\underline{-0.025\%}}$$

Für einen kleinen syst. Messfehler bei der Strommessung muß gelten: $\underline{\underline{R_M \ll R_i + R_V}}$!

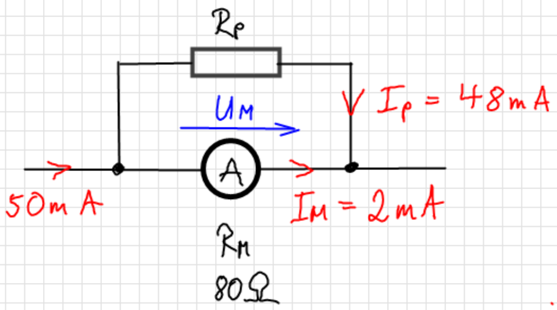
ÜBUNG: Messbereichserweiterung eines Strommessers

Es steht ein Messgerät zu Verfügung mit einem Messbereichs<u>endwert</u> von 2mA.
Der Widerstand des Messgerätes beträgt R_M=80Ω.

Das Messgerät soll so erweitert werden, dass es einen Messbereichsendwert von 50mA hat.

Wie groß ist dann der Widerstand des erweiterten Messgerätes?
Welche Leistung muss der Widerstand vertragen können?

bei Vollausschlag gilt:



$$\underline{\underline{U_M}} = I_M \cdot R_M = 2mA \cdot 80\Omega = \underline{\underline{0.16V}}$$

$$\underline{\underline{R_P}} = \frac{U_M}{I_P} = \frac{0.16V}{48mA} = \underline{\underline{3\tfrac{1}{3}\,\Omega}}$$ (Messwiderstand, z.B. 0.01%)

$$\underline{\underline{P_P}} = I_P^2 \cdot R_P = \underline{\underline{7.7\,mW}}$$

Widerstand des erweiterten Messgerätes:

$$\underline{\underline{R_{M_{erw}}}} = \frac{R_M \cdot R_P}{R_M + R_P} = \underline{\underline{3.2\,\Omega}}$$

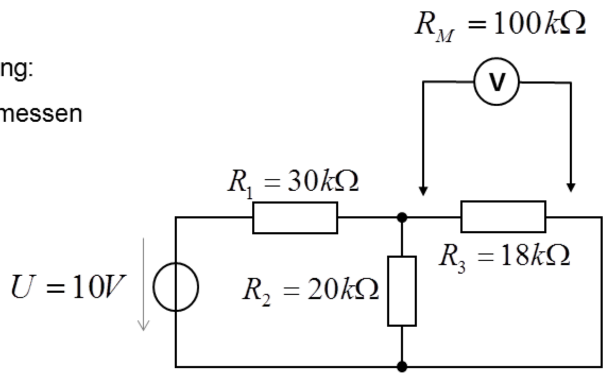
Widerstand des erweiterten Messgeräts ist deutlich kleiner!

ÜBUNG: Systematischer Messfehler eines Spannungsmessers

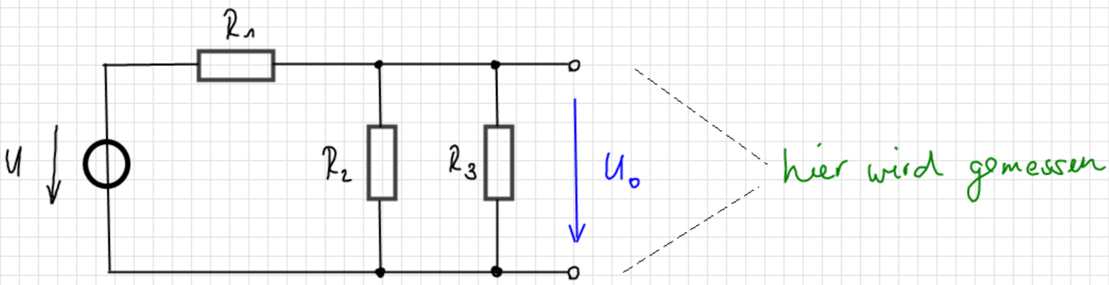
Gegeben ist folgende Schaltung:

Die Spannung über R_3 soll gemessen werden.

Wie groß ist der <u>sytematische Messfehler</u>?



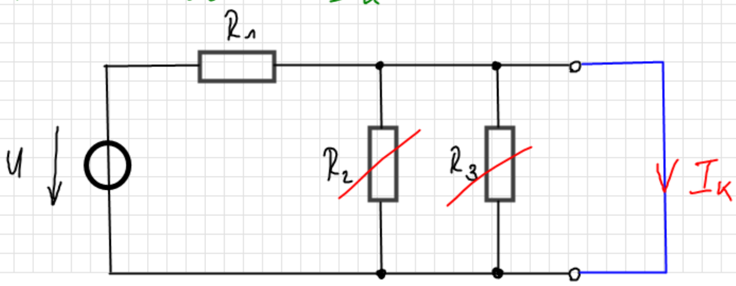
Ersatzquelle bezügl. der Messstelle berechnen :



$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30k\Omega} + \frac{1}{20k\Omega} + \frac{1}{18k\Omega}$$

$$\underline{\underline{R_i = 7.2\ k\Omega}}$$

Kurzschlussstrom I_K an der Messstelle :

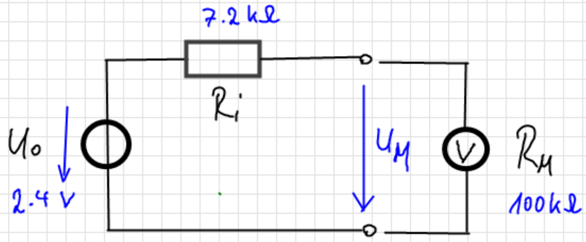


$$I_K = \frac{U}{R_1} = \frac{10V}{30k\Omega}$$

$$\underline{\underline{I_K = 333{,}3\,\mu A}}$$

$$\underline{\underline{U_0}} = I_k \cdot R_i = 333.3 \cdot 10^{-6}\,A \cdot 7200\,\Omega = \underline{\underline{2{,}4\,V}}$$

$\Rightarrow$ Ersatzschaltung bezüglich der Messstelle



U_M : gemessene Spannung

$$\underline{\underline{U_M}} = U_0 \cdot \frac{R_M}{R_M + R_i} = 2.4\,V \cdot \frac{100\,k\Omega}{100\,k\Omega + 7.2\,k\Omega} = \underline{\underline{2.239\,V}}$$

Spannungsteilerregel

Durch das Anklemmen des Voltmeters sinkt die Spannung von 2,4 V auf 2.239 V.

$$\underline{\underline{\Delta U_{sys}}} = U_M - U_0 = \underline{\underline{-0.161\,V}}$$ Messfehler

$$\underline{\underline{\frac{\Delta U_{sys}}{U_0}}} = -\frac{0.161\,V}{2.4\,V} = -0.067 = \underline{\underline{-6.7\,\%}}$$ Messfehler

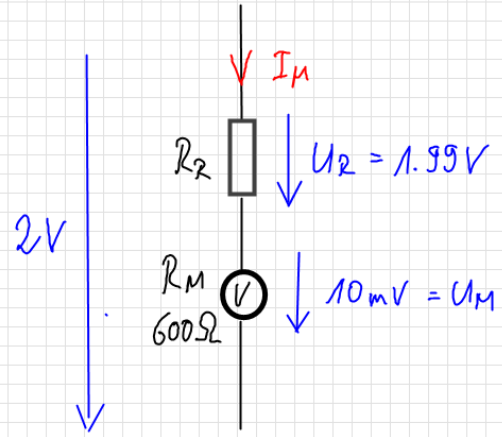
ÜBUNG: Messbereichserweiterung eines Spannungsmessers

Es steht ein Messgerät zu Verfügung mit einem Messbereichs<u>endwert</u> von 10mV.
Der Widerstand des Messgerätes beträgt $R_M = 600\Omega$.

Das Messgerät soll so erweitert werden, dass es einen Messbereichs<u>endwert</u> von 2V hat.

Wie groß ist dann der Widerstand des erweiterten Messgerätes?
Welche Leistung muss der Widerstand vertragen können?

bei Vollausschlag gilt:



$$\underline{\underline{I_M}} = \frac{U_M}{R_M} = \frac{0.01V}{600\Omega} = \underline{\underline{16\tfrac{2}{3}\,\mu A}}$$

$$\underline{\underline{R_R}} = \frac{U_R}{I_M} = \frac{1.99V}{16\frac{2}{3}\mu A} = \underline{\underline{119.4\,k\Omega}}$$ (Messwiderstand)

Widerstand des erweiterten Spannungsmessers:

$$R_{M_{erw}} = R_R + R_M = \underline{\underline{120\,k\Omega}}$$

Widerstand des erweiterten Spannungsmessers ist deutlich höher!

$$\underline{\underline{P_R}} = \frac{U_R^2}{R_R} = \underline{\underline{33\,\mu W}}$$

ÜBUNG: Strom- und spannungsrichtige Widerstandsmessung

Ein unbekannter Widerstand R_V soll mit einer simultanen Strom-/Spannungs-messung gemessen werden.

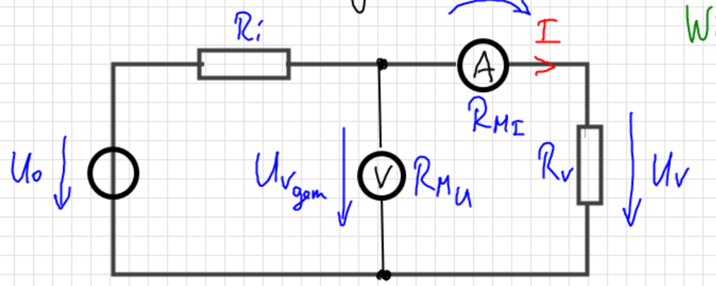
Wie groß ist der systematische absolute und relative Messfehler

a) bei stromrichtiger Schaltung

b) bei spannungsrichtiger Schaltung?

Welche generelle Empfehlung zur Schaltungsauswahl (stromrichtig/spannungsrichtig) kann angeben werden?

a) Stromrichtig



anhand der Messung bestimmter Widerstand R_V:

$$R_{V_{gem}} = \frac{U_{V_{gem}}}{I} \qquad (1)$$

abs. system. Messfehler:

$$\underline{\underline{\Delta R_{V_{sys}}}} = R_{V_{gem}} - R_V = \frac{U_{V_{gem}}}{I} - \frac{U_V}{I}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{U_{M_I} + U_V}{I} - \frac{U_V}{I} = \frac{U_{M_I}}{I} = \underline{\underline{R_{M_I}}}$$

Der Widerstand R_V wird um den Strommessgerätewiderstand zu groß gemessen!

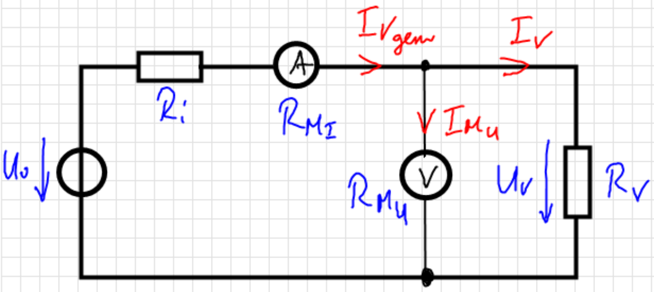
rel. system. Messfehler:

$$\underline{\underline{\frac{\Delta R_{V_{sys}}}{R_V} = \frac{R_{M_I}}{R_V}}} \Rightarrow$$

gut einsetzbar, wenn

$$R_V \gg R_{M_I}$$

b) Spannungsrichtig



anhand der Messung bestimmter Widerstand R_V:

$$R_{V_{gem}} = \frac{U_V}{I_{V_{gem}}} \qquad (1)$$

abs. system. Messfehler:

$$\underline{\underline{\Delta R_{V_{sys}}}} = R_{V_{gem}} - R_V = \frac{U_V}{I_{V_{gem}}} - R_V = \frac{U_V}{I_{M_U} + I_V} - R_V$$

$$= \frac{\cancel{U_V}\ 1}{\frac{\cancel{U_V}\ 1}{R_{M_U}} + \frac{\cancel{U_V}\ 1}{R_V}} - R_V = \frac{R_V \cdot R_{M_U}}{R_V + R_{M_U}} - R_V \cdot \underbrace{\frac{(R_V + R_{M_U})}{R_V + R_{M_U}}}_{\text{erweitern}}$$

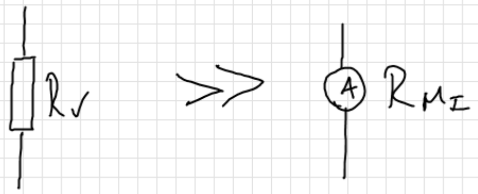
$$= \frac{\cancel{R_V \cdot R_{M_U}} - R_V^2 - \cancel{R_V R_{M_U}}}{R_V + R_{M_U}} = \underline{\underline{-\frac{R_V^2}{R_V + R_{M_U}}}}$$

rel. system. Messfehler: $\underline{\underline{\frac{\Delta R_{V_{sys}}}{R_V}}} = \underline{\underline{-\frac{R_V}{R_V + R_{M_U}}}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{gut einsetzbar wenn } R_V \ll R_{M_U}}$

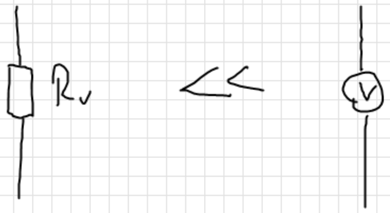
Merken:

stromrichtig messen, wenn



d.h. R_V groß

spannungsrichtig messen, wenn



d.h. R_V klein