

电光 计控学院本科生 2017——2018 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷 (A 卷)

专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

说明: A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, O 是零矩阵,

A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $\langle \alpha, \beta \rangle$ 表示向量 α, β 的内积。

草稿区

得分

一. 客观题: 1-3 小题为判断题, 在对的后面括号中填 “√”, 错的后面括号中填 “×”,

4-8 为单选题, 将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分, 共 16 分)。

1. 所有 n 阶实对角阵按照矩阵的线性运算规则构成 $R^{n \times n}$ (所有 n 阶方阵构成的线性空间) 的一个子空间。 ()
2. 设 $\lambda = 0$ 是 n 阶方阵 A 的特征值, 则方程组 $Ax = O$ 有非零解。 ()
3. 设 A 为 $s \times n$ 阶矩阵, $r(A) = s$, 则 $s > n$ 。 ()
4. 排列 14532 的逆序数为 ()
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
5. 在 R^3 中, 与向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$ 都正交的单位向量是 ()
- (A) $(-1, 0, 1)^T$ (B) $(1/\sqrt{2})(-1, 0, 1)^T$ (C) $(1, 0, -1)^T$ (D) $(1/\sqrt{2})(1, 0, 1)^T$
6. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} + a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} + a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} + a_{13} & a_{13} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $D =$ ()
- (A) $P_1 A P_2^{-1}$ (B) $P_1 A P_2$ (C) $P_2 A P_1$ (D) $P_1 A P_2^T$
7. 矩阵 A , B 是 n 阶正定矩阵, 矩阵 P 是可逆矩阵, 则以下矩阵不一定是正定矩阵的是: ()
- (A) $A+B$ (B) B^{-1} (C) AB (D) $P^T A P$
8. 设 A , B 是 $n (n > 2)$ 阶方阵, $AB = O$ 且 $B \neq O$, 则必有 ()
- (A) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ (B) $|B| \neq 0$ (C) $|B^*| \neq 0$ (D) $|A^*| = 0$

得 分

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

草 稿 区

1. 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}.$$

2. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x & 1 \\ x & 0 & x & \cdots & x & x & 1 \\ x & x & 0 & \cdots & x & x & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 0 & x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } n > 2, x \neq 0.$$

得 分

三、若 $\mathbf{AX=B}$ ，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ，（1）求 A^{-1} ；（2）求矩阵 X 。

（本题 10 分）

草 稿 区

得 分

四、当 λ 为何值时，线性方程组：

(本题 14 分)

草 稿 区

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{有唯一解，无解和有无穷多解?}$$

当方程组有无穷多组解时，求其通解。

得 分

五、设 V 是二阶实对称矩阵全体的集合对于通常矩阵的加法与数乘运算所构成的实数

域 R 上的线性空间，且 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 V 的一个基，在 V 中

定义合同变换 $T(A) = P^T A P$ ，其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(1) 证明 T 为线性变换。

(2) 求 T 在基 $[A_1, A_2, A_3]$ 下的矩阵。

(本题 9 分)

草 稿 区

得 分

六、已知二次型： $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ (本题 14 分)

草 稿 区

- (1) 写出它的矩阵； (2) 用正交变换化 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形，并求出所用的正交变换；
(3) 判定该二次型是哪种二次型(正定，负定，半正定，半负定，不定)。

得 分

七、已知 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$ ，求一组非零向量 α_2, α_3 ，使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交

(本题 9 分)

草 稿 区

得 分

八、设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k ，使线性方程组 $A^k x = O$ 有解向量 α ，且 $A^{k-1}\alpha \neq O$ ，证明：向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关。

(本题 9 分)

草 稿 区

得 分

九、矩阵 A 是 n 阶实对称矩阵， R^n 是 n 维欧氏空间， α 属于 R^n ， P 是 n 阶正交矩阵，
 $\beta = P\alpha$ ，证明：

草 稿 区

- (1) $\alpha^T \alpha = \beta^T \beta$ 。
- (2) 一定存在一个正实数 G_0 ，对于任意的 n 维实向量 X ，都有 $|X^T A X| \leq G_0 X^T X$ (本题 5 分)