

姓名

学号

专业

任课教师

南开大学 2014 级“一元函数微分（信）”结课统考试卷（A 卷） 2014 年 11 月 29 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分										

一题得分	
------	--

一、选择题(每小题 4 分)

(1) 以下条件中，()不是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分条件:

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$; (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; (C) $f'(x_0)$ 存在; (D) $f(x)$ 在 x_0 处可微。

(2) 设 $f(x) = x^2 \sin x$ ，下列等式正确的是 ():

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$; (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$; (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$; (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$;

(3) 以下条件中，() 是函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充要条件:

(A) $f(x)$ 在 x_0 点连续; (B) $f(x)$ 在 x_0 点可微;

(C) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$ 存在; (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在。

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f'(x) > 0$ ，那么，必有 ():

(A) 在 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$; (B) 在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 单调减少;

(C) 在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 单调增加; (D) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是上凸的.

(5) 设 $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \sin x$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内实根的个数为(),

(A) 0 个; (B) 至多 1 个; (C) 2 个; (D) 至少 3 个.

草稿区

姓名

学号

专业

任课教师

二、填空题（每小题 4 分）:

- (1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\sin x)^{1/x},x\neq 0\\a,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ _____
- (2) 曲线 $y=x+\sin^2x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是_____
- (3) 设 $f'(x_0)=1$, 则 $\lim_{\delta\rightarrow 0}\frac{f(x_0-3\delta)-f(x_0)}{2\delta}=$ _____.
- (4) 设 $a>0$, 若 $\lim_{x\rightarrow +\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-dx)=3$, 则 a 与 d 的关系是_____
- (5) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)...\textcolor{teal}{(x+15)}$, 则 $f'(0)=$ _____

三、求下列极限:（每小题 5 分）

- (1) $\lim_{x\rightarrow +\infty}\frac{3x+5\sin x}{4x-3\cos x};$

(2) $\lim_{x\rightarrow \infty}(e^{5/x}-1)x;$
- (3) $\lim_{x\rightarrow 0}(\frac{\sin x}{x})^{1/x^2}$

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）:

- (1) 设 $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$, 求 $\frac{dy}{dx};$
- (2) 设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\y=\arctan t\end{cases}$ 所确定的函数, 求 $\frac{d^2y}{dx^2};$

二题

得分

三题

得分

四题

得分

草稿

姓名

学号

专业

任课教师



(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+e),x>0\\a^x,x\leq 0\end{cases},(a>0)$, 问 a 取何值时, $f'(0)$ 存在?

(4) 设方程 $e^{x+y}=xy+1$ 确定了隐函数 $y=y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$, 并求该曲线在 $x=0$ 处的切线方程。

五、证明下列不等式：（每小题 6 分）

(1) 当 $x>0,x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$;

(2) 对任意的 $x>0,x^x\geq(\frac{1}{e})^{1/e}$

五题 得分	
----------	--

草稿区

姓名
学号
专业
任课教师



六、求函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在区间 $[-3,3]$ 上的极值、最大值、最小值。(本题 7 分)

六题 得分	
----------	--

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0$,

证明： (1) 存在 $\xi \in (0,1)$ ，使 $f'(\xi) + \xi f(\xi) = 0$ ；

(2) 存在 $\eta_1 \in (0, \frac{1}{2}), \eta_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，使 $f(\eta_1) + \eta_1 f'(\eta_1) + \frac{1}{2} f'(\eta_2) = 0$

七题 得分	
----------	--

草稿区