2014 级信息类一元函数微分学

一、选择题(每小题 4 分)

（1）以下条件中，(A)不是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分条件:

(A) $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$；(B) $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；(C) $f'(x_0)$ 存在;

(D) $f(x)$ 在 x_0 处可微。

（2）设 $f(x)=x^2\sin x$，下列等式正确的是（ B ）：

（A）$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=0;$ （B）$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=1;$ （C）$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0;$ （D）$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1;$

(3) 以下条件中,（ B ）是函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充要条件：

（A） $f(x)$ 在 x_0 点连续；（B） $f(x)$ 在 x_0 点可微；

（C）$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在；（D）$\lim_{x\to x_0} f'(x)$ 存在。

（4）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$，那么，必有（ C ）：

（A）在 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$；（B）在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 单调减少；

（C）在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 单调增加；（D） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上凸的.

(5) 设 $f(x)=(x^2-3x+2)\sin x$,则方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内实根的个数为(D),

(A) 0 个; (B) 至多 1 个; (C) 2 个; (D) 至少 3 个.

二、填空题（每小题 4 分）:

（1）设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\sin x)^{1/x}.x\neq 0\\ a,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=\frac{1}{e}$

（2）曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是 $x-y+1=0$

（3）设 $f'(x_0)=1$，则 $\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0-3\delta)-f(x_0)}{2\delta}=-\frac{3}{2}$

（4）设 $a>0$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-dx)=3$，则 a 与 d 的关系是 $\sqrt{a}=d$

（5）设 $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+15)$，则 $f'(0)=15!$

三、求下列极限：（每小题 5 分）

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5\sin x}{4x-3\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{5\sin x}{x}}{4-\dfrac{3\cos x}{x}}=\dfrac{3}{4}$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{5/x}-1)x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}\cdot x=5$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{1/x^2}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\frac{\sin x}{x}-1)}$ (等价无穷小代换)

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}$

$=e^{-\frac{1}{6}}$（洛必达或泰勒公式）

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）：

（1） 设 $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$；

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{x+1}{x-1})'}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}=-\frac{1}{1+x^2}$$

（2）设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{1+t^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

（3）设 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+e), x>0\\ a^x, x\le 0\end{cases}, (a>0)$, 问 a 取何值时， $f'(0)$ 存在？

四(3) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a^x-a^0}{x}=\ln a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+e)-a^0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+e}}{1}=\dfrac{1}{e}$

∴当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，$f'(0)$ 存在.

（4）设方程 $e^{x+y}=xy+1$ 确定了隐函数 $y=y(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$，并求该曲线在 $x=0$ 处的切线

方程。

四(4) $e^{x+y}(1+y')=y+xy'$

代入 $x=0$, $y=0$, 得

$1+y'|_{x=0}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=-1$

切线方程为 $x+y=0$.

五、证明下列不等式:（每小题 6 分）

（1）当 $x>0, x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x);$

五(1) 令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, $x\geqslant 0$.

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$, $x>0$.

$\therefore f$ 在 $[0,+\infty)\uparrow$, $f(x)>f(0)=0$, $x>0$.

$\therefore x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$, $x>0$.

（2）对任意的 $x>0, x^x \geq (\frac{1}{e})^{1/e}$

五(2) 令 $f(x)=x\ln x$, $x>0$

$f'(x)=1+\ln x$ 驻点为 $x=\frac{1}{e}$

$f''(x)=\frac{1}{x}>0$ 易知 $x=\frac{1}{e}$ 为最小值点.

$\forall x>0$, $x\ln x \geqslant \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}$, 即 $x^x\geqslant(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$.

六、求函数 $f(x)=x^4-8x^2+2$ 在区间 $[-3,3]$ 上的极值、最大值、最小值。（本题 7 分）

六. $f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$

f 在 $[-3,-2]\downarrow$, 在 $[-2,0]\uparrow$, 在 $[0,2]\downarrow$, 在 $[2,3]\uparrow$

$\therefore f(0)=2$ 为极大值, $f(-2)=f(2)=-14$ 为极小值,也是最小值.

$f(-3)=f(3)=11$ 为最大值.

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$,

证明： （1）存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta_1\in(0,\frac{1}{2}),\eta_2\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\eta_1)+\eta_1 f'(\eta_1)+\frac{1}{2}f'(\eta_2)=0$

七. (1) 对 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ 在 $[0,1]$ 用Rolle定理即可.

证 (2) 对 $F(x)=xf(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 用拉~，得

$\exists\eta_1\in(0,\frac{1}{2})$，$f(\eta_1)+\eta_1 f'(\eta_1)=f(\frac{1}{2})$

对 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 用拉~，得

$\exists\eta_2\in(\frac{1}{2},1)$，$f'(\eta_2)=-2f(\frac{1}{2})$

于是命题成立.