

电光、计控学院本科生 2014—2015 学年线性代数课程期末考试试卷 (A 卷) 参考答案:

一、(每小题 2 分, 共 8 小题)

1 对; 2 错; 3 对; 4 C; 5 C; 6 D; 7 C; 8 A

二、行列式计算 (本题共 14 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 8 分)

1、

解法 (一):

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

据拉普拉斯定理:

$$= (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4) \quad (3 \text{ 分})$$

解法 (二): 按照第一行展开得:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= a_1 a_4 (a_2 a_3 - b_2 b_3) - b_1 b_4 (a_2 a_3 - b_2 b_3) \\ &= a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4 b_2 b_3 - a_2 a_3 b_1 b_4 + b_1 b_2 b_3 b_4 \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

$$2、d_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+1+\sum_{i=2}^n \frac{a_i}{i} & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\right) n! \quad \begin{matrix} 3 \text{ 分} & 3 \text{ 分} & 2 \text{ 分} \end{matrix}$$

三、解:

(1) 证明: 由 $AB = A + B$ 得 $AB - A - B = O$ (1 分)

得到 $(A - E)(B - E) = E$ (2 分)

故 $A - E$ 是可逆矩阵。 (1 分)

说明: 若直接利用下面的 A 的值, 得到

$$|A - E| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3 \neq 0 \text{ 或者用初等变换法得到 } (A - E)^{-1} \text{ 说明 } A - E \text{ 可逆}$$

得 1 分。

(2) 由 $AB = A + B$ 得 $AB - B = A$, 从而 $(A - E)B = A$, (1 分)

据上面 $A - E$ 可逆得到 $B = (A - E)^{-1}A$ (2 分)

用各种方法求得 (分块矩阵法、初等变换法等)

$$(A - E)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 5/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{故 } B = (A - E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 2/3 & 5/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

四、解：该方程组的增广矩阵为：

$$B = [A:b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & \vdots & b \\ 3 & 2 & 1 & a & \vdots & -1 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

按部就班对增广矩阵进行化简

对增广矩阵进行初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3 \text{ 分})$$

因此当 $a \neq 1$ 时，系数矩阵的秩为 4，增广矩阵的秩也为 4，此时方程组有唯一解；(1 分)

当 $a = 1$ 时，系数矩阵的秩为 2，此时若 $b = -1$ ，增广矩阵的秩也为 2，因此方程组将有无穷多组解 (1 分)；若 $b \neq -1$ ，则增广矩阵的秩为 3，方程组将无解 (1 分)。

方程组有无穷多组解时 $a = 1$ 且 $b = -1$ ，此时方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

取 x_3, x_4 为自由未知量，方程组化为 $\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$

因此方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 \\ x_2 = 1 - 2\tilde{x}_3 - 2\tilde{x}_4 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \\ x_4 = \tilde{x}_4 \end{cases} \quad (2 \text{ 分}), \text{ 写成向量形式: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分}),$$

其中 \tilde{x}_3, \tilde{x}_4 为任意实数。(1 分)

五、解：设过渡矩阵为 M ，则有：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4) M \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

设向量 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 在最后一组基下的坐标为 $(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, 根据坐标变换公式有:

$$M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

所以:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

由初等变换求得 M 的逆矩阵为:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

所求坐标为:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ -\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ -\frac{1}{30}x_1 + \frac{1}{15}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

六、解：此二次型的矩阵为： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，（1分）

矩阵的特征多项式为：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}^2 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2, \quad (2 \text{ 分})$$

因此 A 的四个特征值为： $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ 。（1分）

解方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ ，方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ ，

求得的基础解系，也是 A 的关于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为：

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2 \text{ 分})$$

经简单计算即知 X_1 和 X_2 已经正交，因此无须正交化。（1分）

将 X_1 和 X_2 单位化，得到向量 $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_2$ 。（1分）

类似的，解方程组 $(\lambda_3 E - A)X = 0$ ，求 A 的关于 $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ 的特征向量为，并进行正交化和单位化，得到

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_3, \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_4, \quad (2 \text{ 分})$$

因此令四阶方阵 $C = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ， C 是正交矩阵（1分），且

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}。$$

对二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 作正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ (1 分),

二次型化为标准型: $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, (1 分),

二次型的正惯性指数为 2, 负惯性指数也为 2, 因此符号差为 0。(1 分)

说明: 求基础解系结果不惟一。

七、已知 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1$ 线性无关, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关。
(本题 9 分)

证法一: 反证法, 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性相关。 (1 分)

因为 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1$ 线性无关, 对任意一组数 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 有:

$$\text{当 } k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 + \alpha_5) + k_5(\alpha_5 + \alpha_1) = 0 \text{ 时} \quad (1)$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$$

$$\text{或者 } k_1 + k_2 = k_2 + k_3 = k_3 + k_4 = k_4 + k_5 = k_5 + k_1 = 0 \quad (2)$$

(3 分) k1=k2=k3=k4=k5=0 可以推出 k1+k2=k2+k3=...=0

对 (1) 式整理有:

$$(k_1 + k_5)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 + (k_3 + k_4)\alpha_4 + (k_4 + k_5)\alpha_5 = 0 \quad (3)$$

(2 分)

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性相关, 则 (3) 式中的系数不全为零。 (2 分)

这与 (2) 式结论矛盾, 所以假设不成立, 既 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关。(1 分)

证法二:

设任意一组数 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 + k_5\alpha_5 = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{即: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} = 0^\circ$$

又因为:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

所以有

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} = 0$$

因为 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1$ 线性无关, 所以有:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

又因为矩阵:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 为可逆矩阵} \quad (1 \text{ 分})$$

所以有: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$ (1 分)

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关 (1 分)

八、证明: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则 $D \neq 0$ 。

解: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 在 V 中某标准正交基下的坐标列向量依次为 X_1, X_2, \dots, X_n , (2 分)

则 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = X_i^T X_j$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 线性无关,

令 $M = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 则 M 为 n 阶方阵且 $|M| \neq 0$, (2 分)

$$\begin{aligned} \text{于是 } D &= \begin{vmatrix} X_1^T X_1 & X_1^T X_2 & \dots & X_1^T X_n \\ X_2^T X_1 & X_2^T X_2 & \dots & X_2^T X_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n^T X_1 & X_n^T X_2 & \dots & X_n^T X_n \end{vmatrix} = |M^T M| \\ &= |M^T| \cdot |M| = |M|^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (3 \text{ 分}) \quad (2 \text{ 分})$$

九、自然数 m, n 满足 $m > n > 0$ 。 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 且

$$\text{秩}(A) = \text{秩}(B) = n,$$

证明: $\text{秩}(AB) = n$ 。(本题 4 分)

证明: 因 $\text{秩}(AB) \leq \text{秩}(B) = n$, (2 分), 以下只需证明 AB 的列向量中确可找到 n 个线性无关的向量。

记 B 的第 i 列为列向量 β_i , 由矩阵乘法, AB 的第 i 列为 $A\beta_i$ 。

因已知 $\text{秩}(B) = n$, 因此 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的秩为 n , 即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的极大线性无关组包含 n 个向量, 设这个极大线性无关组为 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_n}$ 。考虑 AB 的第 i_1, i_2, \dots, i_n 列共 n 个列向

量 $A\beta_{i_1}, A\beta_{i_2}, \dots, A\beta_{i_n}$ 。若数 k_1, k_2, \dots, k_n 使

$$k_1 A\beta_{i_1} + k_2 A\beta_{i_2} + \dots + k_n A\beta_{i_n} = 0,$$

寻找向量组线性无关向量的个数
则设出其最大线性无关组，通过定义去找其系数的解只有全0

$$\text{即 } A \begin{pmatrix} \beta_{i_1} & \beta_{i_2} & \dots & \beta_{i_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0,$$

找矩阵乘积的秩，一般都需要将乘积拆开化成分别判断单个矩阵的秩

因 $\text{秩}(A) = n$ ， A 的 n 个列向量线性无关，所以由上式有：

$$\begin{pmatrix} \beta_{i_1} & \beta_{i_2} & \dots & \beta_{i_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

但 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_n}$ 线性无关，所以 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 。

因此 $A\beta_{i_1}, A\beta_{i_2}, \dots, A\beta_{i_n}$ 线性无关，故 $\text{秩}(AB) \geq n$ 。结合前面式子，知命题成立。（2分）