南开大学 2014 级"一元函数微分(信)"结课统考试卷(A卷) 2014年11月29日

(说明:答案务必写在装订线右侧,写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。)

题号	_	 111	四	五.	六	七	卷面 成绩	核分 签名	复核 签名
得分									

一、选择题(每小题 4 分)

— 题 得分

草稿区

- (1) 以下条件中, ( )不是函数 f(x) 在  $x_0$  点连续的充分条件:
- (A)  $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ; (B)  $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ; (C)  $f'(x_0)$  存在; (D) f(x) 在 $x_0$  处可微。
- (2) 设  $f(x) = x^2 \sin x$ ,下列等式正确的是(

(A) 
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0;$$
 (B)  $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1;$  (C)  $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0;$  (D)  $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1;$ 

- (3) 以下条件中, ( ) 是函数 f(x) 在  $x_0$  点可导的充要条件:
  - (A) f(x) 在  $x_0$  点连续; (B) f(x) 在  $x_0$  点可微;

(C) 
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$
存在; (D)  $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ 存在。

- (4) 设 f(x) 在 [a,b] 上连续,在 (a,b) 内可导,且 f'(x) > 0 ,那么,必有(

  - (A) 在[a,b]上f(x) > 0; (B) 在[a,b]上f(x)单调减少;

  - (C) 在[a,b]上f(x)单调增加; (D) f(x)在[a,b]上是上凸的.
- (5) 设  $f(x) = (x^2 3x + 2)\sin x$ ,则方程 f'(x) = 0 在  $(0,\pi)$  内实根的个数为(
- (A) 0 个; (B) 至多 1 个; (C) 2 个; (D) 至少 3 个.

二、填空题 (每小题 4 分):

(1) 设函数  $f(x) = \begin{cases} (1-\sin x)^{1/x} & x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}$  在 x = 0 处连续,则 a =\_\_\_\_\_\_\_

二题 得分 草稿

- (2) 曲线  $y = x + \sin^2 x$  在点  $(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2})$  处的切线方程是\_\_\_\_\_
- (4) 设a > 0,若 $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} dx) = 3$ ,则a 与 d的关系是\_\_\_\_\_\_
- 三、求下列极限: (每小题5分)
- $(1) \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5\sin x}{4x-3\cos x};$

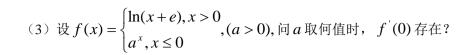
(2)  $\lim_{x\to\infty} (e^{5/x} - 1)x$ ;

三题 得分

- (3)  $\lim_{x\to 0} (\frac{\sin x}{x})^{1/x^2}$
- 四、求下列函数的导数(每小题5分):
- (1) 设  $y = \arctan \frac{x+1}{x-1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

四题 得分

(2) 设 y = y(x) 是参数方程  $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1 + t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$  所确定的函数,求  $\frac{d^2 y}{dx^2};$ 



(4) 设方程  $e^{x+y}=xy+1$ 确定了隐函数 y=y(x),求  $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$ ,并求该曲线在 x=0处的切线方程。

五、证明下列不等式: (每小题 6 分)

(1) 
$$\stackrel{\text{def}}{=} x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x);$$

(2) 对任意的  $x > 0, x^x \ge (\frac{1}{e})^{1/e}$ 

## 草稿区

五题

得分

六、求函数  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在区间[-3,3]上的极值、最大值、最小值。(本题 7 分)

六题 得分

得分

草稿区

七、(6分) 设f(x)在区间[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且f(0) = f(1) = 0,

证明: (1) 存在 $\xi \in (0,1)$ , 使 $f'(\xi) + \xi f(\xi) = 0$ ;

(2) 存在 $\eta_1 \in (0, \frac{1}{2}), \eta_2 \in (\frac{1}{2}, 1), 使 f(\eta_1) + \eta_1 f'(\eta_1) + \frac{1}{2} f'(\eta_2) = 0$ 

七题 得分