一、选择题(每小题 4 分)

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限是函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 (B):

(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C)充分必要条件; (D) 不充分，也不必要条件.

(2) 当 $x \to 0$ 时，下列无穷小量中最高阶的是(D):

(A) $2x^2$； (B) $1-\cos x$； (C) $\sqrt{1+x^2}-1$； (D) $3x^3$.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{(x-1)^2}$ 的值为 (C):

(A) ∞; (B) 1; (C) 0; (D) -1;

(4) 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，则（3 阶导数） $f'''(0)$ 是(A):

(A) 6; (B) 5; (C) 4; (D) 3.

(5) 曲线 $y^3=6y-x^2$ 在 $(-2,2)$ 处的切线斜率为(B),

(A) 1/3; (B) 2/3; (C) 1/2; (D) 1.

二、填空题（每小题 4 分）:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan(1/x), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 则 $f'_-(0)=$ $-\frac{\pi}{2}$

(2) 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $f'(1)=1$，令 $F(x)=f(1/x)-f(x^2)$，则 $F'(1)=$ -3

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+(e^x-1)}{\ln(1+4x)}=$ 1

(4) 设函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)\dots(x+16)$，则 $f'(0)$ 为 $16!$，

(5) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=1$，则 $a=$ 1， $b=$ -2

三、求下列极限：（每小题 5 分）

（1）$\lim_{x\to+\infty}(\cos\frac{1}{x}+3\sin\frac{1}{x})^{x}$；

$=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(\cos\frac{1}{x}+3\sin\frac{1}{x})}$

$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\cos\frac{1}{x}+3\sin\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}=e^{3}$

（2）$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$

（3）$\lim_{x\to+\infty}(x^2+e^x)^{1/x}$

$=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x^2+e^x)}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}}$

$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^x}{2x+e^x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2+e^x}}=e$

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）：

（1）设 $y=(x^2+x+2)^{x+1}$，求 $\frac{dy}{dx}$；

解：$\ln y=(x+1)\ln(x^2+x+2)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y'=\ln(x^2+x+2)+\frac{(x+1)(2x+1)}{x^2+x+2}$

$\Rightarrow y'=(x^2+x+2)^{x+1}\left[\ln(x^2+x+2)+\frac{(x+1)(2x+1)}{x^2+x+2}\right]$

（2）设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^3)\\ y=t^2\sin t\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\frac{dy}{dx}$；

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\sin t+t^2\cos t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}=\frac{(t^3+1)(2\sin t+t\cos t)}{3t}$

任课教师

（3）设 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$

解：$\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}$

五、证明下列不等式：（每小题 6 分）

（1）当 $\frac{\pi}{2} \geq x > 0$, $(1+\sin x)\ln(1+\sin x) > x\cos x$;

五题得分

解：$f(x)=(1+\sin x)\ln(1+\sin x)-x\cos x$

$f'(x)=\cos x\ln(1+\sin x)+\cos x-(\cos x-x\sin x)$

$=\cos x\ln(1+\sin x)+x\sin x$

$0<x\leq\frac{\pi}{2}$ 时

$f'(x)>0$ ∴ $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ ↑

∴ $f(x)>f(0)=0$ 即 $(1+\sin x)\ln(1+\sin x)>x\cos$

（2）当 $x>0$, $2\ln(1+x)<x+\frac{x}{1+x}$

解：$f(x)=2\ln(1+x)-x-\frac{x}{1+x}$, $f'(x)=\frac{2}{1+x}-1-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{-x^2}{(1+x)^2}<0$ $(x>0)$

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ ↓ $f(x)<f(0)=0$

∴ $\ln(1+x)<x+\frac{x}{1+x}$

六题得分

六、求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+6$ 的极值.（本题 6 分）

六、求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+6$ 的极值.（本题 6 分）

解：$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ 或 $x=-2$

列表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

∴ $f(x)$ 极大值 $f(-2)=26$. 极小值 $f(1)=-1$

七、(6分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}, x>0\end{cases}$，其中 $\alpha,\beta>0$，试分别讨论 α,β 满足什么条件时，

(1) $f'(0)$ 存在；(2) $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(2) $f'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \alpha\cdot x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}+\beta\cdot x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}} & x>0\end{cases}$

解：(1) $\cancel{f'(0)=0}$ ∵ $f'(0)$ 存在

$\cancel{f'_{+}(0)=}$

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ ∴ ~~f(x)左~~ 则连续

显然 $f(x)$ 左连续　∵ $\alpha>0$

~~而~~ ∴ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}=0$

$\cancel{\alpha>0}$

∵ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

左导存在且为0

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha-1}\cdot\cos\frac{1}{x^{\beta}}$

∴ $\alpha-1>0$. $\beta>0$ 即 $\alpha>1$. $\beta>0$

∵ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续　显然 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处左连续

∴ $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$ 成立

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-1>0\\ \alpha-\beta-1>0\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha>1$　$\alpha>\beta+1$

八、(6分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在不同的 $\alpha,\beta\in(0,1)$，使 $f'(\alpha)f'(\beta)=1$

八题得分	

任课教师

八、(6分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在不同的 $\alpha,\beta\in(0,1)$，使 $f'(\alpha)f'(\beta)=1$

证明：(1) 设 $F(x)=f(x)+x-1$　∴ $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续. 在 $(0,1)$ 可导

∵ $F(0)=f(0)-1=-1<0$　$F(1)=f(1)+1-1=1>0$

∴ $\exists\,\xi\in(0,1)$　$F(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=1-\xi$

即 $\exists\,\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) ∵ $\exists\,\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=1-\xi$　由拉格朗日中值定理：

$\exists\,\alpha\in(0,\xi)$，$f'(\alpha)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$

$\exists\,\beta\in(\xi,1)$. $f'(\beta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{\xi}{1-\xi}$

∴ $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=1$

即 $\exists$ 不同 α $\beta\in(0,1)$ 使 $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=1$