一.客观题：

1 √ 2 √　　3 ×　　4 D　　5 B　　6 B　　7 C　　8 D

二、行列式计算

1、答案

$$\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$$

第 2,3,4 列加到第 1 列= $\begin{vmatrix} 10+a & 2 & 3 & 4 \\ 10+a & 2+a & 3 & 4 \\ 10+a & 2 & 3+a & 4 \\ 10+a & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$　　（1 分）

$= (10+\mathrm{a})\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$　　（1 分）

第 2,3,4 行分别减去第 1 行= $(10+\mathrm{a})\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$　　（2 分）

$= a^4 + 10a^3$　　（2 分）

2、答案

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & 0 & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & 0 & \dots & x & x & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 & x & 1 \\ x & x & x & \dots & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

前 n-1 行每行都减去 x 倍的第 n 行=

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

（3 分）

前 n-1 列都乘以 1/x 倍，加到第 n 列上去=

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{n-1}{x} \end{vmatrix}$$

（3 分）

$$=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$$

（2 分）

三．解：

写出矩阵$\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}$，再进行初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\1&2&-1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&2&-1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&-1&-3&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&3&2&-1\end{pmatrix}$$，（4 分）

因此，$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}$。（2 分）

前面已经算出A可逆，因此，（2 分）

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\3+(-1)\times2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}.$$（2 分）

解：设增广矩阵为 B，对其进行初等变换：

$$B=\begin{bmatrix}\lambda&1&1&\lambda-3\\1&\lambda&1&-2\\1&1&\lambda&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&\lambda&-2\\1&\lambda&1&-2\\\lambda&1&1&\lambda-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&\lambda-1\end{bmatrix}$$

可知，当$\boldsymbol{\lambda\neq1}$且$\boldsymbol{\lambda\neq-2}$时，矩阵B的秩为$\boldsymbol{R(B)=3}$，此时方程组有唯一解。

当$\boldsymbol{\lambda=-2}$时，方程组无解。当$\boldsymbol{\lambda=1}$时，$\boldsymbol{R(B)=1}$，方程组有无穷多解。

当$\boldsymbol{\lambda=1}$时，增广矩阵 B 变为：$B=\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，并

有：$x_1=-x_2-x_3-2$，取

$x_2=0,x_3=0$，得方程组的一个解：

$\eta^T=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

再分别取 $x_2=0,x_3=1$ 及 $x_2=1,x_3=0$ 可得齐次线性方程组的一组基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$$

于是所求通解为：

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$c_1,c_2\in R$$

五　（1）证明 T 是线性变换

证明：设 A 和 B 是空间 V 中的两个二阶实对称矩阵，k 为实数

则有　$\boldsymbol{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{P}=\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{T}(\mathbf{A})+\mathbf{T}(\mathbf{B})$

（2 分）

同时有 $\mathbf{T}(\mathbf{kA})=\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{kA})\mathbf{P}=\mathbf{kP}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{kT}(\mathbf{A})$

（2 分）

所以 T 是线性变换。

（2）求 T 对应的矩阵

$$\mathbf{T}(\mathbf{A}_1)=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}=[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_3]\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$ （1 分）

$$\mathbf{T(A_2)}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}=[\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\mathbf{A_3}]\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$$ （1 分）

$$\mathbf{T(A_3)}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}=[\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\mathbf{A_3}]\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$ （1 分）

所以 T 在基 $[\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\mathbf{A_3}]$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ （2 分）

六．解：

该二次型的矩阵为：

$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，（2 分）

计算 A 的特征多项式：

$$\phi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)[(\lambda-1)^2-1]=(\lambda-3)^2(\lambda-1),$$ （2 分）

因此 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 和 $\lambda_3=1$。（1 分）

求 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量，即解齐次线性方程组

$$(3E-A)X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得到此方程组的一个基础解系，也就是 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量为

$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.（2 分）

由于 X_1,X_2 已经正交，所以无需再作施密特正交化。（1 分）

求 A 的对应于 $\lambda_3=1$ 的特征向量，即解齐次线性方程组

$$(1E-A)X=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到此方程组的一个基础解系，也就是 A 的对应于 $\lambda_3=1$ 的特征向量为

$X_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.（1 分）

将 X_1,X_2,X_3 分别单位化，得到：$\varepsilon_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}X_1,\varepsilon_2=X_2,\varepsilon_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}X_3$.（1 分）

因此，构造出正交矩阵：$C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，和正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$,（1 分）

原二次型经过此正交变换化为 $f=3y_1^2+3y_2^2+y_3^2$,（1 分）。

该二次型经过正交变换后得到的平方和平方项系数都为正数，因此该二次型正定。（2 分）

第七题：

解：设与 $\boldsymbol{\alpha_1}$ 正交的向量为 $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$，那么有：

$$x_1+2x_2+3x_3=0$$

求解此方程，分别令 $x_2=0,x_3=1$，$x_2=1,x_3=0$ 得到一组解：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T,\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$$

对 ξ_1 和 ξ_2 进行施密特正交化可得：

$$\xi_2'=\xi_2-\frac{<\xi_2,\xi_1>}{<\xi_1,\xi_1>}\xi_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\ 1\\ -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

因此得到 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}^T$

此外，如果交换顺序：

分别令 $x_2=0,x_3=1$， $x_2=1,x_3=0$ 得到一组解：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

对 ξ_1 和 ξ_2 进行施密特正交化可得：

$$\xi_2'=\xi_2-\frac{<\xi_2,\xi_1>}{<\xi_1,\xi_1>}\xi_1=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ -\frac{6}{5}\\ 1\end{bmatrix}$$

因此得到 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 1\end{pmatrix}^T$

八、证明：

设存在一组数 $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_k}$ 使得：

$$\boldsymbol{\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots\lambda_kA^{k-1}\alpha=O} \qquad (1) \qquad （2 分）$$

（1）式左右两端同左乘 $\boldsymbol{A^{k-1}}$，得：

$$\boldsymbol{\lambda_1A^{k-1}\alpha+\lambda_2A^k\alpha+\cdots\lambda_kA^{2(k-1)}\alpha=O} \quad (2) \quad （2 分）$$

因为 $\boldsymbol{A^k\alpha=O}$，所以

$$\boldsymbol{A^{k+1}\alpha=A^{k+2}\alpha=\cdots=A^{2(k-1)}\alpha=O} \qquad （1 分）$$

所以（2）式变成：

$$\boldsymbol{\lambda_1A^{k-1}\alpha=O}$$

又因为 $\boldsymbol{A^{k-1}\alpha\neq O}$，所以有：

$$\boldsymbol{\lambda_1=0} \qquad （2 分）$$

同理可得： $\boldsymbol{\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_k=0}$ （1 分）

所以向量组线性无关 （1 分）

九．证：

因为 P 为正交矩阵，所以

$$\left\langle \beta,\beta \right\rangle=\beta^{\mathrm{T}}\beta=(P\alpha)^{\mathrm{T}}(P\alpha)=\alpha^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}P)\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\left\langle \alpha,\alpha \right\rangle.$$（1 分）

因为 A 为实对称矩阵，所以可以找到一个正交变换 $X=CY$，将二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 化为平方和

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个实特征值。取 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 中最大的数，记为 u，则

$$X^{\mathrm{T}}AX=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2\le uY^{\mathrm{T}}Y=u(C^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}X)=uX^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})X=uX^{\mathrm{T}}X,$$

取 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 中最小的数，记为 v，同样得到，

$$X^{\mathrm{T}}AX=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2\ge vY^{\mathrm{T}}Y=v(C^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}X)=vX^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})X=vX^{\mathrm{T}}X,$$

因此，取 u,v 中绝对值大的那个数为 g，就有，

$$-gX^{\mathrm{T}}X\le X^{\mathrm{T}}AX\le gX^{\mathrm{T}}X,$$

也就是 $\left|X^{\mathrm{T}}AX\right|\le gX^{\mathrm{T}}X$ 。（4 分）