南开大学 2015 级信息类一元函数微分学统考试卷 (A卷) 2015年11月28日

## (说明:答案务必写在装订线右侧,写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。)

| 题号 | _ | <br>= | 四 | 五. | 六 | 七 | 卷面<br>成绩 | 核分<br>签名 | 复核<br>签名 |
|----|---|-------|---|----|---|---|----------|----------|----------|
| 得分 |   |       |   |    |   |   |          |          |          |

- 一、选择题(每小题 4 分)
- (1) 设 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 1$ , 则当 $x\to 0$ 时, 函数f(x)与( B )是等价无穷小:

一 题 得分 草稿区

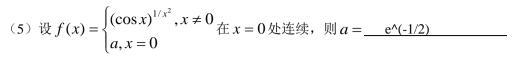
- (A)  $\ln(1-x)$ ; (B)  $\sin |x|$ ; (C)  $\sqrt{1+2x}-1$ ; (D)  $1-\cos |x|$ .
- (2) 设  $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}, x \in (-\infty, +\infty)$ , 则函数 f(x) 是( D ):
  - (A) 有界函数; (B) 单调函数; (C) 周期函数; (D) 偶函数.
- (3) 设 f(x) 对任意 x 满足 f(x+1) = af(x),且 f'(0) = b.其中 a,b 为非零常数,则 f(x) 在 x = 1 处 ( C ):
  - (A) 不可导; (B) 可导,且f'(1) = a; (C); 可导,且f'(1) = ab
  - (D) 可导, 且f'(1) = b.
- (4) 设函数  $f(x) = (\sin x) \sin \frac{1}{x}$  ,则 x = 0 是 f(x) 的( D ):
  - (A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 无穷间断点; (D) 振荡间断点.
- (5) 设 f(x) 在 x = 1 处有连续的导函数,又  $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x-1} = 1$  ,则 x = 1 是函数 f(x) 的( D ),
  - (A) 驻点, 但不是极值点; (B) 驻点, 且是极小值点; (C) 驻点, 且是极大值点; (D) 以上答案都不正确.
- 二、填空题 (每小题 4 分):

(1) 
$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\qquad \qquad 0}$$

二 题得分

(2) 
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x - 1} \sin \frac{1}{x + 1} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(4) 设曲线  $y = ax^2 + bx$  在点(1,0)处的切线与直线 y = x 平行,则 a = 1 , b = -1



三、求下列极限: (每小题5分)

(1)  $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$ ;

(2)  $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right);$ 

三 题 得分

 $(3) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$ 

四、求下列函数的导数(每小题5分):

四 题得分

(2) 设 
$$y = y(x)$$
 是参数方程 
$$\begin{cases} x = at \cos t \\ y = at \sin t \end{cases}$$
 所确定的函数, $(a \neq 0)$ ,求 $\frac{dy}{dx}$ , $\frac{d^2y}{dx^2}$ ;

草稿

(3) 设 
$$y = y(x)$$
 由方程  $y \sin x - \cos(x - y) = 3y$  所确定,求  $\frac{dy}{dx}$ 

(4) 设  $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ , 求 f(x) 在 x = 0 处的 2014 阶导数值.

五、证明下列不等式: (每小题 6 分)

(1) 
$$\stackrel{\text{def}}{=} x > 0, \ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x};$$

(2) 
$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} > x > 0, \sin x + \tan x > 2x$$

草稿

五 题 得分 六、设函数 f(x) 在区间  $[0,\frac{\pi}{2}]$  上连续,在  $(0,\frac{\pi}{2})$  内可导,且 f(0)=0,

证: 存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,使 $f'(\xi)\cos \xi - f(\xi)\sin \xi = 0$ . (本题 7 分)

草稿区

六 题 得分

构造,中值定理

七、(6分) 设 f(x) 在区间 [a,b] 上连续,在 (a,b) 内有二阶 导数,且  $f'(\frac{a+b}{2})=0$ ,

证明: 存在 $\xi \in (a,b)$ ,使 $\frac{4}{(b-a)^2} |f(b)-f(a)| \le |f''(\xi)|$ 

七题 得分