信息学院本科生 2012——2013 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　姓名：　　　　　成绩：

说明：A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$ 表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示向量 α,β 的内积。

草　稿　区

得　分

一 .客观题：1–3 小题为判断题，在对的后面括号中填 “ √ ”，错的后面括号中填“×”，4–8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 若两个 n 维非零列向量 α 与 β 正交，则它们线性无关。（　　）

2. n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A-2E=O$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 A 不可逆。（　　）

A的行列式若为0，方程不满足：
IAIIA-3EI=2,所以IAI不为0

3. 若 T 为线性空间 V 中的正交变换，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$（$m$>1）为 V 中一个正交向量组，则 $T\alpha_1,T\alpha_2\cdots,T\alpha_m$ 一定是一个正交向量组。（　　）

4. 下列行列式的值可能不为 0 的是（　　）

（A）行列式 D 中有两列对应元素之和都为 0　　（B）行列式 D 中某行元素全为 0

（C）行列式 D 中有两行含有相同的公因子　　（D）行列式 D 中有一行与另一行元素对应成比例

有相同的公因子是指两行都是某个向量的相同倍数，但每一行对应的向量未知

5. 如果一个非齐次方程组有解，则有惟一解的充要条件是它的导出组（　　）

（A）有解　　（B）无解　　（C）只有零解　　（D）有非零解

6. 设 n 阶矩阵 A，B 和 C，则下列说法正确的是（　　）

（A）$AB=AC$，则 $B=C$　　（B）$AB=O$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

（C）$(AB)^T=A^TB^T$　　（D）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

7. 设 $\lambda=\frac{1}{2}$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $\left(3A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

8. 设 A，B 为 n 阶方阵，A^*，B^* 分别为 A，B 对应的伴随矩阵，分块矩阵

$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 C^* 等于（　　）

（A）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

得 分

二 、行列式计算 （第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **8** 分，共 **14** 分）

草 稿 区

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$ $a_i \neq 0 \quad i = 1,2\cdots n$.

得 分

三、求矩阵 X，使下式成立： （本题 8 分）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

草 稿 区

得 分

四、对于线性方程组： （本题 13 分）

一般将第三行放到第一行（未知数在最右边的）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

，λ为何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多解？

并在方程组有无穷多解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

草 稿 区

得 分

五、已知三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基：（本题 12 分）

I: $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$;

II: $\beta_1=(3,-5,4)^T$, $\beta_2=(2,-1,2)^T$, $\beta_3=(-2,5,-3)^T$;

1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

2）求在两组基下有相同坐标的向量。

草 稿 区

得 分

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ （本题 15 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出其正交变换矩阵 P;

同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定)。

草 稿 区

得 分

七、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，且 $\boldsymbol{AA^T=E}$，$|\boldsymbol{A}|=-1$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$ （本题 9 分）

（其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵）。

(A+E)的转置=A的转置+E的转置=A的转置+E

单位矩阵经常带有隐含条件
单位矩阵是正交的、是自身的转置、是对角的、是实对称的

草 稿 区

得 分

利用这个

八、设 X^* 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq O)$ 的一个解，$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是它导出组的基础解系，证明：$X^*,X^*-X_1,X^*-X_2,\cdots,X^*-X_{n-r}$ 线性无关。（本题 9 分）

草 稿 区

得 分

九、设 A 是 $m\times n$ 的实矩阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，

证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵。（本题 4 分）

草 稿 区

E是实对称矩阵，ATA也是实对称矩阵

XTBX=XT&EX+XTATAX=&+(AX)T(AX);AX为行向量，其与自身转置相乘得到的数为各元素的平方和大于等于0，&>0,所以只要X不为0向量，B都大于0