信息学院本科生 **2012——2013** 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（**A** 卷）

参考答案及评分标准：

一、（每小题 **2** 分，共 **8** 小题）

1 对；　**2** 错；　**3** 对；　**4 C**；　**5 C**；　**6 B**；　**7 A**；　**8 B**

二、行列式计算

1、计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

解：根据行列式的性质，原行列式等于：

$$\text{原式} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad 2\text{分}$$

$$= -\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad 2\text{分}$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times 5 = -(-3\times 2+3)\times 5 = 15 \qquad 2\text{分}$$

2、计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \quad a_i \neq 0 \quad i = 1,2\cdots n.$$

解：根据行列式的性质，原行列式等于：

$$原式=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} \qquad 2分$$

且因为已知 $a_i \neq 0$， $i=1,2,\dots,n$ 。 2 分

所以有：

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} \qquad 2分$$

$$=(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n})a_2\cdots a_n=(1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n})a_1\cdots a_n \qquad 2分$$

三、求矩阵 *X*，使下式成立：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

解：

$$X=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} \qquad \mathbf{2}分$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{4}分$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{1}分$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{1}分$$

四．本题共 **13** 分

对于线性方程组：

$$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2\end{cases}$$

，λ为何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多解？

并在方程组有无穷多解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

解：此线性方程组的增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}$$ （2 分）

对此增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

（4 分）

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 3\lambda-3\end{pmatrix}$$

因此，当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，都等于 3，且等于未知数的个数。此时方程组有唯一解； （1 分）

当$\lambda = -2$时，系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，方程组无解； （1 分）

当$\lambda = 1$时，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩都为 1，方程组有无穷多组解。（1 分）

$\lambda = 1$时，方程组的增广矩阵化为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ （1 分）

取x_2和x_3为自由未知量，则非齐次方程组的导出组的基础解系为

$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （2 分）

非齐次方程组的特解为

$\xi^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

所以方程组通解表示为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k_2$，或表示为:

$\begin{cases} x_1 = -2 - k_1 - k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \end{cases}$ 其中 k_1，k_2 为任意实数。（1 分）

五、(本题共 12 分)

已知三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基：

I: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^T$；

II: $\boldsymbol{\beta}_1 = (3,-5,4)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (2,-1,2)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (-2,5,-3)^T$；

1）**求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；**

2）求在两组基下有相同坐标的向量。

解：根据已知，显然：

$\beta_1 = 3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 4\alpha_3$,
$\beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$, （2 分）
$\beta_3 = -2\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3\alpha_3$,

所以：$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ （2 分），

所以由 α 这组基到 β 这组基的过渡矩阵为：$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$。（1 分）

设在两组基下坐标相同的向量的坐标为 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，即：

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$ （1 分）

将前式代入得 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\-5 & -1 & 5\\4 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，（1 分）

因此有 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$满足：$\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\-5 & -1 & 5\\4 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$， （2 分）

解这个线性方程组，$\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\-5 & -2 & 5\\4 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，

得：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ，k 为数域中的任意数。 （2 分）

所以满足条件的向量为：$k\alpha_1+k\alpha_3=\begin{pmatrix}k\\0\\k\end{pmatrix}$，$k$ 为数域中的任意数。（1 分）

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出其正交变换矩阵 *P*;

同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定)。

（本题共 **15** 分）

解：二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\2 & 5 & -4\\-2 & -4 & 5\end{pmatrix}$$ （2 分）

其特征值方程为：$\left|A\text{-}\lambda E\right|=\begin{vmatrix} 2\text{-}\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5\text{-}\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5\text{-}\lambda \end{vmatrix}=0$ （1 分）

因此的 $-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10)=0$， 即

$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$ （2 分）

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，对应的特征向量满足方程组：(A-E)X=0

其系数矩阵为

$$(A\text{-}E)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 x_2,x_3 为自由未知量分别令它们为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

可得属于特征值 1 的特征向量子空间的一个基可为：

$\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （1 分）

对应的标准正交基为：

$\xi_1=\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$ （2 分）

当 $\lambda_3=10$ 时，对应的特征向量满足方程组：(A-10E)X=0

其系数矩阵为

$$(A\text{-}10E)=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 x_3 为自由未知量，令 $x_3=1$，

可得属于特征值 10 的特征向量子空间的一个基可为：$\alpha_3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （1 分）

对应的标准正交基为：

$$\xi_3=\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ （1 分）

令矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ （2 分）

它是一个正交矩阵。则当原二次型进行

正交变换：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 后可得二次型的标准型为：

$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$ （1 分）

该二次型是正定二次型 （2 分）

七、本题共 9 分

设 *A* 是 *n* 阶方阵，且 $AA^T = E$，$|A| = -1$，证明 $|A+E| = 0$.

（其中 *E* 是 *n* 阶单位矩阵）。

证明： $|A+E|=|A+AA^T|$ （2 分）

$=|A(E+A^T)|$ （1 分）

$=|A||E+A^T|$ （1 分）

$=-|E^T+A^T|$ （2 分）

$=-|(E+A)^T|$ （1 分）

$=-|A+E|$ （1 分）

所以 $|A+E|=0$ （1 分）

八、本题 9 分

设 X^* 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq O)$ 的一个解，$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是它导出组的基础解系，证明：$X^*,X^*-X_1,X^*-X_2,\cdots,X^*-X_{n-r}$ 线性无关。

证明：依题意有 $AX^*=\beta$, $AX_i=0, i=1,2,\cdots,n-r$ (1 分)

设有一组数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使得

$$k_0X^*+k_1(X^*-X_1)+\cdots+k_{n-r}(X^*-X_{n-r})=0$$

即：$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})X^*-k_1X_1-\cdots-k_{n-r}X_{n-r}=0$（1） (2 分)

用矩阵 A 左乘（1）两端得 $(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\beta=0$ (2 分)

而 $\beta\neq 0$，故得 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$ (1 分)

代入（1）式得 $-k_1X_1-k_2X_2\cdots-k_{n-r}X_{n-r}=0$

由 X_1，$X_2,\cdots$，X_{n-r} 为基础解系得 X_1，$X_2,\cdots$，X_{n-r} 线性无关，从而可得

$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$ (2 分)

由定义可得 X^*，$X_1\cdots$，X_{n-r} 线性无关。 (1 分)

九、（本题 4 分）

设 ***A*** 是 $m \times n$ 的实矩阵，已知矩阵 $B = \lambda E + A^T A$，其中 ***E*** 是 ***n*** 阶单位矩阵，证明：当 $\lambda > 0$ 时，矩阵 ***B*** 为正定矩阵。

证明：
$$
\begin{aligned}
B^T &= (\lambda E + A^T A)^T \\
&= (\lambda E)^T + (A^T A)^T \\
&= \lambda E + A^T A \\
&= B
\end{aligned}
$$
（1 分）

又 A 是实矩阵

所以， B 是实对称矩阵

设任意 X=$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0$ 是一 n 维实向量。

则
$$
\begin{aligned}
X^T B X &= X^T (\lambda E + A^T A) X \\
&= X^T (\lambda E) X + X^T (A^T A) X \\
&= \lambda X^T X + (AX)^T (AX)
\end{aligned}
$$
（1 分）

因为 X 是一不为 0 的实向量，所以有 $X^T X > 0$

又 A 是 $m \times n$ 的实矩阵，所以 AX 是 m 维实向量。

则 $(AX)^T (AX) \geq 0$。（1 分）

所以对于任意不为 0 的 n 维实向量 X，满足

$X^T B X > 0$

即 B 是正定矩阵（1 分）