2015 级信息类一元函数微分学

（1）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=1$，则当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 与(　　C　　)是等价无穷小:

(A) $\ln(1-x)$; (B) $\sin|x|$;　(C) $\sqrt{1+2x}-1$;　(D) $1-\cos|x|$.

（2）设 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}, x\in(-\infty,+\infty)$，则函数 $f(x)$ 是(　　D　　):

(A) 有界函数; (B) 单调函数;　(C) 周期函数;　(D) 偶函数.

（3）设 $f(x)$ 对任意 x 满足 $f(x+1)=af(x)$，且 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　C　　）:

（A）不可导;（B）可导,且 $f'(1)=a$；（C）可导,且 $f'(1)=ab$；

（D）可导，且 $f'(1)=b$.

解法一　$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab.$

解法二　设 $f(x)=c\cdot a^x$，则 $f'(1)=ac\ln a=af'(0)=ab$，可排除选项 A,B,D.

(4) 设函数 $f(x)=(\sin x)\sin\dfrac{1}{x}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　A　　):

(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 无穷间断点;　(D) 振荡间断点.

(5) 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续的导函数，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=1$，则 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的(　　B　　),

(A) 驻点，但不是极值点; (B) 驻点，且是极小值点; (C) 驻点，且是极大值点; (D) 以上答案都不正确.

解法一　$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0.$

$f''(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=1>0.$（此处不可用洛必达，因为没说 f 二阶可导）

所以选 B.

解法二　设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=1$，可排除选项 A,C,D.

二、填空题（每小题 4 分）:

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=0$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x-1}\sin\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{3}$

（3）函数 $y=\ln[\cos(\arctan x)]$，则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{1+x^2}$

（4）设曲线 $y=ax^2+bx$ 在点(1,0)处的切线与直线 $y=x$ 平行，则 a =1, b = -1

（5）设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=e^{-0.5}$

三、求下列极限：（每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$

解　$1\le\sqrt[n^2]{n!}\le\sqrt[n^2]{n^n}=\sqrt[n]{n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=1$

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）:

（1）　设 $y=(1+x+x^2)^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$；

$$\frac{dy}{dx}=(e^{x\ln(1+x+x^2)})'=e^{x\ln(1+x+x^2)}(x\ln(1+x+x^2))'$$

$$=(1+x+x^2)^x(\frac{x+2x^2}{1+x+x^2}+\ln(1+x+x^2))$$

(2)　设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=at\cos t\\ y=at\sin t\end{cases}$ 所确定的函数，($a\neq 0$),求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$；

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(at\sin t\cos t)'}{(at\cos t)'}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t})'}{(at\cos t)'}=\frac{(\sin t+t\cos t)'(\cos t-t\sin t)-(\sin t+t\cos t)(\cos t-t\sin t)'}{a(\cos t-t\sin t)^3}$$

$$=\frac{t^2+2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$$

（3）设 $y = y(x)$ 由方程 $y\sin x - \cos(x-y) = 3y$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解　$y'\sin x + y\cos x + (1-y')\sin(x-y) = 3y'$

$$y' = \frac{y\cos x + \sin(x-y)}{3 - \sin x + \sin(x-y)}$$

（4）设 $f(x) = x^2\ln(1+x)$，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 2014 阶导数值.

$$f^{(2014)}(x) = C_{2014}^0 x^2(\ln(1+x))^{(2014)} + C_{2014}^1(x^2)'(\ln(1+x))^{(2013)} + C_{2014}^2(x^2)''(\ln(1+x))^{(2012)}$$

$$f^{(2014)}(0) = -\frac{(2014)!}{2012}$$

五、证明下列不等式：（每小题 6 分）

（1）当 $x>0, \ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$;

证　令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，则

$$f'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0, x \ge 0$$

所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 严格单增，

$x>0$ 时，$f'(x) > f'(0) = 0$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 严格单增，

$f(x) > f(0) = 0$，

即当 $x>0, \ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

（2）当 $\dfrac{\pi}{2} > x > 0, \sin x + \tan x > 2x$

证　令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$，则当 $\dfrac{\pi}{2} > x > 0$ 时，

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2 = \frac{\cos^3 x + 1 - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x - \cos^2 x)}{\cos^2 x} > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{2})$ 严格单增，

$f(x) > f(0) = 0$，

即当$\frac{\pi}{2} > x > 0, \sin x + \tan x > 2x$.

六、设函数 $f(x)$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续,在$(0,\frac{\pi}{2})$内可导,且 $f(0)=0$,

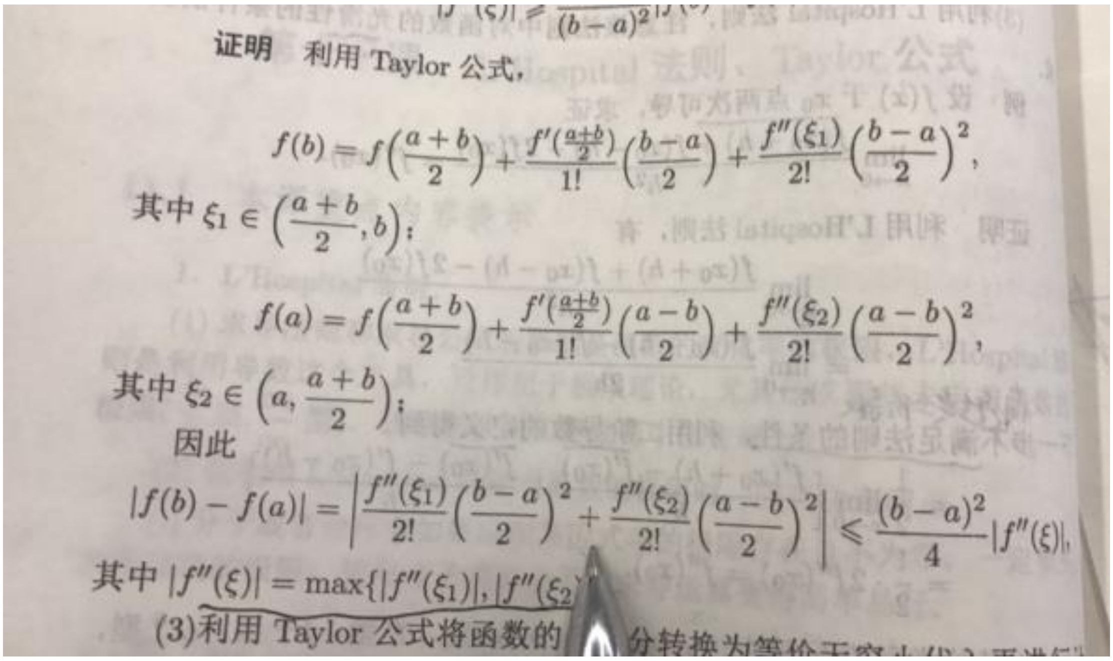
证: 存在$\xi \in (0,\frac{\pi}{2})$,使 $f^{'}(\xi)\cos\xi - f(\xi)\sin\xi = 0$.（本题 7 分）

证　令$F(x) = f(x)\cos x$，对$F(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上使用罗尔定理即可。

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内有二阶导数,且 $f^{'}(\frac{a+b}{2})=0$,

证明： 存在$\xi \in (a,b)$，使$\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| \le |f^{''}(\xi)|$

证明参见习题课讲义 79 页最后一行。80 页 9 行等号后面两项应该相减。



证明 利用 Taylor 公式,

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'(\frac{a+b}{2})}{1!}\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

其中 $\xi_1 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$;

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'(\frac{a+b}{2})}{1!}\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

其中 $\xi_2 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$;

因此

$$|f(b)-f(a)| = \left|\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|,$$

其中 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)$

(3)利用 Taylor 公式将函数的

笔指的地方改成减号