

装 订 线	姓名	装 订 线
	学号	
	院系	
	专业	
二	任课教师	一

南开大学 2017 级一元函数微分试卷 (A 卷) 2017 年 11 月 25 日

(说明: 答案务必写在装订线右侧, 写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。)

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核分签名	复核签名
得分										

一题
得分

一、选择题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于

A. $\ln 3$; B. $-\ln 3$; C. $-\ln 2$; D. $\ln 2$.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调, $f(a)f(b) < 0$, 则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上没有零点; B. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上只有一个零点;
C. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上只有两个零点; D. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上至少有两个零点。

3. 设有函数 $x + \frac{1}{x}$, 则下列说法正确的是

A. 函数 $x + \frac{1}{x}$ 只有垂直渐近线; B. 函数 $x + \frac{1}{x}$ 既有垂直渐近线也有斜渐近线;
C. 函数 $x + \frac{1}{x}$ 只有斜渐近线; D. 函数 $x + \frac{1}{x}$ 没有渐近线。

4. 设 $f(x)$ 于 $x = 0$ 点可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 则下列说法错误的是

A. $f(x)$ 于 $x = 0$ 点连续; B. $f(0) = 0$;
C. $f'(0) = 1$; D. $f'(0+0) = 1$ 。

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = a$, 则下列说法正确的是

A. 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点取得极大值; B. 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点取得极小值;
C. 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点取得极大值; D. 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点取得极小值。

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用 $o(x)$ 表示 x 的高阶无穷小量, 则下列说法错误的是

A. $x \cdot o(x) = o(x^2)$; B. $o(x) \cdot o(x) = o(x^2)$;
C. $o(x) + o(x) = o(x)$; D. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$ 。

二、填空题: (每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设函数 $f(x) = -\arctan x$, 则 $f(x)$ 于 $x = 0$ 点的微分 $df|_{x=0} =$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x+a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$

3. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=1} =$

4. 设曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(1, -1)$, 则 $a =$, $b =$

二题
得分

姓名

学号

院系

专业

任课教师

三、计算下列各题：(3 小题，共 25 分)

1. 求函数 $f(x) = \arcsin\sqrt{x+1}$ 的导数。(9)

三题
得分

2. 确定函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$ 的单调区间和极值点。(8 分)

3. 确定曲线 $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的凹凸性与拐点。(8)

姓名
学号
院系
专业
任课教师

四、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 2x}{2x^3}$, (10分)

四题 得分	
----------	--

五、证明当 $x > 0$ 时, $\frac{1}{x} > \frac{\pi}{2} - \arctan x$, (10分)

草稿区

姓名	学号	院系	专业	任课教师	南开大学 2017 级一元函数微分试卷 (A 卷) 2017 年 11 月 25 日										草稿区	
					(说明: 答案务必写在装订线右侧, 写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。)											
					题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核分签名		复核签名
					得分											

一题得分	
------	--

一、选择题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于 (C)
2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调, $f(a)f(b) < 0$, 则下列说法正确的是 (B)
3. 设有函数 $x + \frac{1}{x}$, 则下列说法正确的是 (B)
4. 设 $f(x)$ 于 $x = 0$ 点可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 则下列说法错误的是 (D)
5. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = a$, 则下列说法正确的是 (B)
6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用 $o(x)$ 表示 x 的高阶无穷小量, 则下列说法错误的是 (D)

二、填空题: (每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设函数 $f(x) = -\arctan x$, 则 $f(x)$ 于 $x = 0$ 点的微分 $df|_{x=0} = -dx$.
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x+a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = 1$.
3. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=1} = -\frac{1}{8}$.
4. 设曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(1, -1)$, 则 $a = -3$, $b = 0$.

二题得分	
------	--

姓名	学号	院系	专业	任课教师	三、计算下列各题: (3 小题, 共 25 分)										草稿区
					1. 求函数 $f(x) = \arcsin \sqrt{x+1}$ 的导数. (9)										
					解: $(\arcsin \sqrt{x+1})'$										
					$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x+1})^2}} (\sqrt{x+1})'$ (6分)										

三题得分	
------	--

2. 确定函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$ 的单调区间和极值点. (8分)									
解: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$, $f'(1) = 0$ (2分)									
当 $1 > x > 0$ 时, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 单调减 (4分)									
当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增 (6分)									
$x=1$ 是极小值点 (8分)									

3. 确定曲线 $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的凹凸性与拐点. (8分)									
解: $f'(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$ (2分)									
$f''(x) = \frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$ (4分)									
当 $x > 2$ 时, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 下凹 (或...) (6分)									
当 $x < 2$ 时, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 上凸 (或...) (8分)									
$x=2$ 是拐点 (8分)									

姓名	
学号	
院系	
专业	
任课教师	

四、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 2x}{2x^3}$, (10分)

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 2x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x}{2x^3} \quad (2分)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2}{6x^2} \quad (3分)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{3} \quad (10分)$$

四题得分	
------	--

五、证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{2} > \frac{\pi}{2} - \arctan x$. (10分)

解: 设 $f(x) = 1 - x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$, $f(0) = 1$, \downarrow $(1分)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \quad (3分)$$

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} + \arctan x + \frac{x}{1+x^2}, f'(0) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, (3分)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0 \Rightarrow f'(x) \text{ 单调增} \Rightarrow f'(x) < 0 \quad (3分)$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ 单调减} \Rightarrow f(x) > 0. \quad (10分)$$

五题得分	
------	--

草稿区