2014 级一元函数积分（信息类）

一、选择题(每小题 4 分)

（1）设 $f(x)=\int_{x}^{x+2\pi} e^{\cos t}\sin t dt$，则 $f(x)=$ (　　　　):

(A) 为正常数; (B) 为负常数; (C) 恒为零;　(D) 不为常数。

（2）设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1<x\le 2 \end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)=$（　　　　）：

（A）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$；（B）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ 2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$；

（C）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{3}x^3+2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$；（D）$\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$

(3) 设 $f(x)=\int_0^{x^2}(1-\cos t)dt, g(x)=x^4+x^5$，则当 $x\to 0$，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 (　　　　):

（A）低阶无穷小; （B）高阶无穷小; (C) 等价无穷小; (D) 同阶，不等价无穷小。

（4）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程 $\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt=0$，在 (a,b) 内的根有（　　　　）：

（A）0 个；（B）2 个；（C）1 个；（D）无穷多个

(5) 对函数 $z=f(x,y)$，下列结论正确的是(　　　　),

(A) f 有偏导数，则 f 连续; (B) f 可微，则 f 有连续偏导数;

(C) f 偏导数存在，则 f 可微; (D) f 可微，则它有偏导数.

二、填空题（每小题 4 分）：

（1）$\int_0^{14}|x-7|dx=$

（2）设 $\int f(x)dx=\arctan x^2+C$，则 $f(x)=$

（3）设非零连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=\frac{3}{4}x^4$, 则 $f(x)=$

（4）原点到平面 $2x+2y+z+6=0$ 的距离是

（5）$\lim_{x\to 0}[\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt}{\ln(1+x^6)}]=$

三、求下列不定积分：（每小题 5 分）

（1）$\int\frac{x^2}{(x-1)^8}dx$；（2）$\int x^2\arctan x dx$；

（3）$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$；（4）$\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x+2}dx$

四、求下列定积分（含定积分的应用）（每小题 5 分）：

（1）$\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$；

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3+(\arcsin\frac{x}{2})^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$；

（3）求由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围的图形，绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

（4）设 $f(2)=1, f'(2)=0, \int_0^2 f(x)dx=1,$ 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$ 。

五、（8 分）设函数 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，$z=f(xy,\frac{x}{y})$，

（1）试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；（2）若 $f_u'(0,1)=1, f_v'(0,1)=-1,$ 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(x,y)=(0,1)}$

六、（6 分）设函数 $f(x)$ 连续，$\phi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，（$A$ 为常数），

（1）求 $\phi'(x)$；（2）证明：$\phi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

七、(6 分) 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\cos t^2 dt$，证明：$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

2015 级一元函数积分（信息类）

一、选择题(每小题 4 分)

（1）在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $F^{'}(x)=f(x)$，则 $\int f(\sqrt{x}+1)\frac{dx}{\sqrt{x}}=$（　　　　）:

（A） $F(\sqrt{x}+1)$；（B） $F(\sqrt{x}+1)+C$；（C） $2F(\sqrt{x}+1)+C$；（D） $\frac{1}{2}F(\sqrt{x}+1)+C$

(2) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t dt, g(x)=\int_0^{2x}\ln(1+t)dt$,则当 $x\to 0$ 时, $f(x))$ 与 $g(x)$ 相比较是(　　　　):

（A）等价无穷小; （B）同阶但非等价无穷小; (C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小

（3）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,令 $F(x)=\int_{1/x}^{\ln x}f(t)dt, x>0$,则 $F^{'}(x)=$（　　　　）:

（A） $\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(1/x)$；（B） $f(\ln x)+f(1/x)$；（C） $\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f(1/x)$；（D） $f(\ln x)-f(1/x)$

(4) 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x,(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为(　　　):

(A) 4/3; (B) $\frac{2}{3}\pi$; (C) $\frac{4}{3}\pi$; (D) $\frac{4}{3}\pi^2$

(5) 二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域存在偏导数 $f_x^{'}(x,y), f_y^{'}(x,y)$,则下列结论正确的是(　　　　),

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续; (B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微;

(C) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 存在切平面; (D) 以上说法都不正确..

二、填空题（每小题 4 分）:

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\bullet\bullet\bullet+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=$

（2）设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(t)dt$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

（3）原点到平面 $2x-2y+z+15=0$ 的距离是

（4）设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$

（5）$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(x-t)^2 dt=$

三、求下列不定积分：（每小题 6 分）

（1）$\int \frac{x^2}{(x-1)^7}dx$；

（2）$\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx$；

（3）$\int \frac{\arctan x}{x^2}dx$；

四、求下列定积分（每小题 7 分）：

（1）$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$；

(2) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$；

(3）$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$。

五、（8 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), x^2+y^2>0\\ 0, x=y=0\end{cases}$

试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续、是否可微？

六、（7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$\mathrm{f}(1)=2\int_0^{1/2} e^{1-x^4} f(x)dx$，

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)-4\xi^3 f(\xi)=0$

七、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意 $x\in[0,1], 0<a\le f(x)\le b$，

证明：$\frac{1}{a}\int_0^1 f(x)dx+b\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\le 1+\frac{b}{a}$

2016 级一元函数积分（信息类）

一、选择题(每小题 4 分)

（1）设 $f(x)=\int_{x}^{x+2\pi} e^{\cos t}(2+\sin t)dt$，则 $f(x)=$ (　　　　)

(A) 为负常数; (B) 为正常数; (C) 恒为零; (D) 不为常数。

（2）在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(\sqrt{x}-1)\frac{dx}{\sqrt{x}}=$（　　　　）

（A） $F(\sqrt{x}-1)$;（B） $F(\sqrt{x}-1)+C$;

（C） $\frac{1}{2}F(\sqrt{x}-1)+C$; （D） $2F(\sqrt{x}-1)+C$

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}\frac{\sin 2t}{t}dt, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，则当 a 取(　　　　)时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续

（A）2; （B）1; (C) -1; (D) 0

（4）设 $f(x)$ 为可导函数， $z=e^x-f(2x+y)$，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 为（　　　　）

（A） $e^x+f'(2x+y)$； B） $e^x-f'(2x+y)$；(C） $e^x-2f'(2x+y)$；（D） $e^x+2f'(2x+y)$

(5) 下列结论正确的是(　　　　),

(A) 若偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(B) 若偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微;

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，偏导数 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(D) 若偏导数 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

二、填空题（每小题 4 分）

（1） $\int_0^{10}|x-5|dx=$ ______________

（2）设 $f(x)=4x-\int_0^1 f(t)dt$ 为连续函数，则 $f(x)=$_________________________

（3） yOz 平面上的曲线 $y^2+3z^2=1$ 绕 z 轴旋转一周,所得旋转曲面的方程为____

（4）设 $f(x)$ 为连续函数，满足 $\int_{-1}^{x^3-1} f(t)dt=x$, 则 $f(7)=$__________________

（5）曲线 $y=1-x^2,(0\le x\le 1)$ 与 x 轴，y 轴所围的图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积=______________

三、求下列不定积分：（每小题 6 分）

（1）$\int \frac{x^2}{(x+1)^8}dx$；

（2）$\int e^x\ln(1+e^x)dx$；

（3）$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx$；

四、求下列定积分（每小题 7 分）

（1）$\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(2) $\int_{-1}^{1}(|x|+2016x)e^{-|x|}dx$；

（3）$\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+3^x}dx$

五、（8 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos(x^2+2y^2)^{-1}, x^2+y^2>0\\ 0, x=y=0\end{cases}$,试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续、是否可微？

六、（7 分）求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t\ \ )e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值。

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可导，且 $f(\frac{a+b}{2})=0$，

取 $M=\max\{|f''(x)|; x\in[a,b]\}$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{24}(b-a)^3$$