主要目的

熟悉模型(model)、视角(view)、投影(projection)矩阵的使用

实验内容

1. 填写model矩阵，本次实验为绕z轴旋转。
2. 填写projection矩阵，要求完成透视投影。

实验原理

对于空间中的物体，通过以下几个步骤将其投影到二维平面：

1. 对3D顶点围成的三维图形变换(旋转、平移等)。这一步为model变换。
2. 将摄像机平移到原点，并调整观测方向为-$\hat{z}$，向上方向为$\hat{y}$。这一步为view变换，将世界坐标系转为相机坐标系。
3. 将该范围内的顶点投影到近平面上。这一步为projection变换。
4. 将获得的近平面上的投影进一步转化为屏幕上的坐标。这一步为viewport变换

实验过程

model矩阵

这里只需要完成绕z轴的旋转即可，对应的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Eigen::Matrix4f get_model_matrix(float rotation_angle)
{
    Eigen::Matrix4f model = Eigen::Matrix4f::Identity();

    // TODO: Implement this function
    // Create the model matrix for rotating the triangle around the Z axis.
    // Then return it.
    Eigen::Matrix4f rotate;
    rotation_angle = rotation_angle / 180 * MY_PI;
    //注意三角函数接收的参数是弧度制的，需要转换
    rotate <<
        cos(rotation_angle), -sin(rotation_angle), 0, 0,
        sin(rotation_angle), cos(rotation_angle), 0, 0,
        0, 0, 1, 0,
        0, 0, 0, 1;

    model = rotate * model;

    return model;
}
```

view矩阵

因为给定的视角方向已经正确，只需要平移至原点即可。
对应的平移矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -eye\_pos_x \\ 0 & 0 & 0 & -eye\_pos_y \\ 0 & 0 & 0 & -eye\_pos_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Eigen::Matrix4f get_view_matrix(Eigen::Vector3f eye_pos)
{
    Eigen::Matrix4f view = Eigen::Matrix4f::Identity();

    Eigen::Matrix4f translate;
    translate <<
        1, 0, 0, -eye_pos[0],
        0, 1, 0, -eye_pos[1],
        0, 0, 1, -eye_pos[2],
        0, 0, 0, 1;

    view = translate * view;

    return view;
}
```

projection矩阵

设n和f是视锥的近点和远点，都为负数(因为看向-$\hat{z}$)
具体来讲，透视投影矩阵分为三个部分。

1. 将视锥变换为长方体，即将透视投影转化为正交投影。
   对应的矩阵为

$$M_{persp\to ortho} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 将长方体中心平移至原点。假设在上述投影后，长方体为$[l,r]\times[b,t]\times[n,f]$。则对应的平移矩阵为：

$$M_{orthoTran} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-(l+r)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(b+t)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(n+f)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 将长方体缩放为标准立方体$[-1,1]^3$

$$M_{orthoScale} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最终得到的透视投影矩阵M_{persp}为:

$$M_{persp} = M_{orthoScale} M_{orthoTran} M_{persp \to ortho}$$

这里注意相乘的顺序，必须是从右到左依次变换。
对应的代码如下。这里给定的eye_fov为视角，满足

$$\tan(\frac{eye\_fov}{2}) = \frac{t}{n}$$

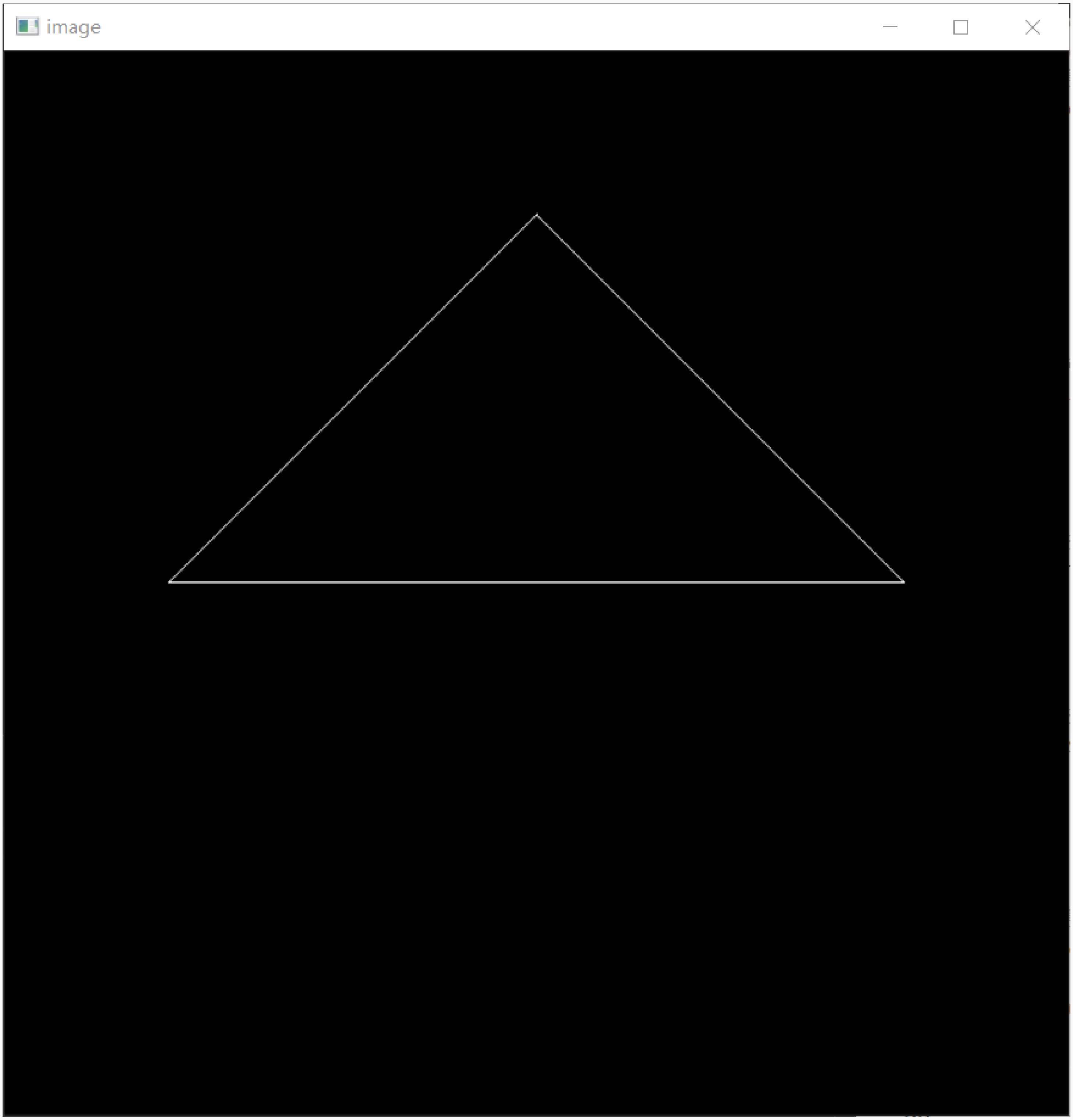
aspect_ratio为长宽比,满足

$$aspect\_ratio = \frac{r}{t}$$

```cpp
Eigen::Matrix4f get_projection_matrix(float eye_fov, float aspect_ratio,
    float zNear, float zFar)
{
    // Students will implement this function

    Eigen::Matrix4f projection = Eigen::Matrix4f::Identity();

    // TODO: Implement this function
    // Create the projection matrix for the given parameters.
    // Then return it.
    //注意：传入的zNear和zFar都是正数，需手动调整为负
    eye_fov = eye_fov / 180 * MY_PI;
    float n = -zNear;
    float f = -zFar;
    float t = tan(eye_fov / 2) * abs(zNear);
    float b = -t;
    float r = t * aspect_ratio;
    float l = -r;
    Eigen::Matrix4f p2o, orthoScale, orthoTran;

    //透视转正交
    p2o <<
        n, 0, 0, 0,
        0, n, 0, 0,
        0, 0, n + f, -n * f,
        0, 0, 1, 0;
    //正交移动
    orthoTran <<
        1, 0, 0, -(l + r) / 2,
        0, 1, 0, -(t + b) / 2,
        0, 0, 1, -(f + n) / 2,
        0, 0, 0, 1;
    //正交缩放
    orthoScale <<
        2 / (r - l), 0, 0, 0,
        0, 2 / (t - b), 0, 0,
        0, 0, 2 / (n - f), 0,
        0, 0, 0, 1;

    //注意顺序，从右往左
    projection = orthoScale * orthoTran * p2o;
```

```
    return projection;
}
```

得到的结果如图：



viewport变换

这一部分并不是需要实现的内容，但为了加深对原理的理解，我们有必要对其代码做解析。
代码在rasterizer.cpp的draw函数中可以找到:

```
...
float f1 = (50 - 0.1) / 2.0;
float f2 = (50 + 0.1) / 2.0;
...
for (auto & vert : v)
{
    vert.x() = 0.5 * width * (vert.x() + 1.0);
    vert.y() = 0.5 * height * (vert.y() + 1.0);
    vert.z() = vert.z() * f1 + f2;
}
```

一般地，对视口变换的矩阵目的是将$[-1,1]^2$的平面转换为$[0,width]\times[0,height]$的屏幕，所以其对应矩阵应为:

$$M_{viewport}=\begin{pmatrix} \frac{width}{2} & 0 & 0 & \frac{width}{2} \\ 0 & \frac{height}{2} & 0 & \frac{height}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

需要注意的点是，作为显示器屏幕的xy坐标轴是x轴向下，y轴向右的，如果不进一步转换画出的内容会与预期不符。例如，在经过所有矩阵变换后，用断点查看得到三个顶点的二维坐标变化为:

$$(2,0)\to(591,350)$$
$$(0,2)\to(350,591)$$
$$(-2,0)\to(108,350)$$

如果以正常的x向右y向上的平面坐标系，则这些屏幕坐标是完全对应的。但在实际的坐标系中，得到的三角形会是倾斜的。
这里的调整方法是在get_index、set_pixel等函数中进行修改，如下:

```
int rst::rasterizer::get_index(int x, int y)
{
    return (height - 1 - y) * width + x;
}

void rst::rasterizer::set_pixel(const Eigen::Vector3f& point, const Eigen::Vector3f& color)
{
    //old index: auto ind = point.y() + point.x() * width;
    if (point.x() < 0 || point.x() >= width ||
        point.y() < 0 || point.y() >= height)
        return;
    auto ind = (height - 1 - point.y()) * width + point.x();
    frame_buf[ind] = color;
}
```

核心在于index=(height-1-y)*width+x。对于左上角坐标为(0,height-1)的点，其index=0；对于右上角坐标为(width-1,height-1)的点，其index=width-1;对于右下角坐标为(width-1,0)的点，其index=(height-1)×width+width-1=height×weight-1。这样就完成了坐标系上的转换。
另外一点在于这里对z也进行了修改(本次实验其实用不到，在assignment2中做深度测试时用处较大)，要理解这个变换，我们要从投影变换开始计算。
首先，透视投影矩阵为

$$M_{persp} = M_{orthoScale} M_{orthoTran} M_{persp \to ortho} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n-f} & -\frac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以经过这个变换后，原本相机空间中$[f, n]$上的z变为

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\frac{n+f}{n-f} z - \frac{2fn}{n-f}}{z} \\ &= \frac{n+f}{n-f} - \frac{2fn}{(n-f)z} \end{aligned}$$

这里除去的z实际上是变换后的w，在做齐次化。
我们看这里的f和n，满足

$$f = -50$$

$$n = -0.1$$

(给定的是正数，我们手动转换成了负数)
所以

$$f_1 = \frac{n-f}{2}$$
$$f_2 = -\frac{n+f}{2}$$

现在对z'变换，得到

$$z'' = f_1 z' + f_2$$
$$= \frac{n-f}{2} z' - \frac{n+f}{2}$$
$$= -\frac{nf}{z}$$

这也就是说,原本$[f, n]$上的z转换为了$[-n, -f]$上的z'，对原本的$z_1 > z_2$(指z_1比z_2更远)变为了$z_1'' > z_2''$(在正数意义上，z_2"反而更远了)。因此这一步操作的实际意义就是将得到的负数坐标z又转换成了正数，这也就是为什么在后面的assignment中深度检测时判断更近用的是小于号；但远近关系是出现了问题的，这是框架上的问题，使得在作业2中三角形的遮挡关系相反，作业3中小牛屁股对着相机，解决方法有以下2种:

1. 将z轴翻转，即在projection矩阵上的(3,3)位置取反。
2. 代码改成

```
vert.z() = -vert.z() * f1 + f2;
```

这样也是将坐标从$[-1, 1]$映射到$[-n, -f]$，但远近关系能够保持一致。
在之后的assignment2和3中我们统一使用方法2。

提高部分

要求实现绕任意过原点的三维向量旋转。
利用$Rodrigues$旋转定律:

$$\text{设向量为}\vec{a}, \text{旋转角度为}\theta, \text{则相应的旋转矩阵为：}$$

$$R(\vec{a},\theta) = \cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\vec{a}\vec{a}^T + \sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

```
Eigen::Matrix4f get_rotation(Vector3f axis, float angle)
{
    //用Rodrigues旋转定律
    angle = angle / 180 * MY_PI;

    Matrix3f I = Eigen::Matrix3f::Identity();
    Matrix3f N, R;
    N <<
        0, -axis[2], axis[1],
        axis[2], 0, -axis[0],
        -axis[1], axis[0], 0;
    R = cos(angle) * I + (1 - cos(angle)) * axis * axis.transpose() + sin(angle) * N;

    Matrix4f result;
    result <<
        R(0, 0), R(0, 1), R(0, 2), 0,
        R(1, 0), R(1, 1), R(1, 2), 0,
        R(2, 0), R(2, 1), R(2, 2), 0,
        0, 0, 0, 1;

    return result;
}
```