Rapport du TP1-MS02 Homogénéisation Périodique

Bréhima Samaké

September 2024

1 Condition de Neumann:

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, et A un tenseur uniformément borné. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in \Omega$ et pour tout i, j, on ait :

$$|A_{ij}(x, y)| \leq C.$$

De plus, A satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme :
Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, on ait :

$$A(x, y)\xi \cdot \xi \geq C\|\xi\|^2.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$. Nous nous intéressons à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Neumann :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(x, y)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ A(x, y)\nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega uvd\Omega - \nabla.(A(x, y)\nabla u)vd\Omega = \int_\Omega fvd\Omega \text{ dans } \Omega$$

En utilisant la formule de Green et tenant compte de la condition au bord on a :

$$\int_\Omega uvd\Omega + . \int_\Omega A(x, y)\nabla u\nabla vd\Omega = \int_\Omega fvd\Omega$$

Le problème trouver $u \in H^1(\Omega)$ tg

$$\begin{cases} \forall v \in H^1(\Omega) \\ a(u, v) = L(v) \\ a(u, v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x, y)\nabla u.\nabla v \text{ et} \\ l(v) = \int_\Omega fv \end{cases}$$

Par le theorème de Lax-Milgram on peut montrer que le problème (1) est bien posé.
Trouver $u_h \in V_h, \forall v_h \in V_h$,

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, N\},\ a(u_h, w_j) = L(w_j)$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_h(S_i)w_i$$

$$\forall j,\ \sum_{i=1}^{N} u_h(S_i)a(w_i, w_j) = L(w_j) \text{donc } A_{ij} = a(w_i, w_j) \text{ et } \mathbb{L} = L(w_j)$$

$$A_{ij} = \int_\Omega A(x,y)\nabla w_i \cdot \nabla w_j + \int_\Omega w_i w_j \ \text{ et } \ \mathbb{L} = \int_\Omega f w_j$$

$$\mathbb{M} = \int_\Omega w_i w_j, \quad , \mathbb{K} = \int_\Omega A(x,y)\nabla w_i \cdot \nabla w_j \ \ et \ \ , (\mathbb{M}+\mathbb{K})U = \mathbb{L} \ \ \text{, avec } \ \mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_h(S_1) \\ u_h(S_2) \\ \vdots \\ u_h(S_I) \end{pmatrix}$$

On considère pour l'instant le cas A(x,y) = 1

Pour calacuelr les matrices élementaire s sur un triangle , on peut utiliser la formules ci-dessous:

$\int_\Omega F = \frac{aire(T_1)}{3}(F(\frac{S_1+S_2}{2}) + F(\frac{S_1+S_3}{2}) + F(\frac{S_3+S_2}{2}))$ c'est le cas de dimension 2

Avec cette formules on peut calculer la matrice élementtaire $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{M}_{ij} = \int_{T_l} w_i w_j = \begin{cases} \frac{\text{aire}(T_l)}{12} & \text{si } i = j, \\ \frac{\text{aire}(T_l)}{24} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Dans ce TP1 , ona $D = x_{33}y_{31} - x_{31}y_{33}$ où $x_{ij} = x_i - x_j$ et $|D| = 2.aire(T_l)$

$$\mathbb{K} = \int_\Omega \nabla w_i \cdot \nabla w_j = aire(T_l)B.B^T \ \ , B = \begin{pmatrix} y_{33} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{pmatrix}$$

Le calcul du second memebre:

$$l(v_h) = \int_\Omega \pi_h(f) v_h d\Omega$$

C'est à dire

$$L_i = \int_\Omega \pi_h(f) w_i d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} f(S_i) w_i w_i d\Omega = \sum_{i=1}^{N} f(S_i) \int_\Omega w_i w_i d\Omega = (\mathbb{M}F)_i$$

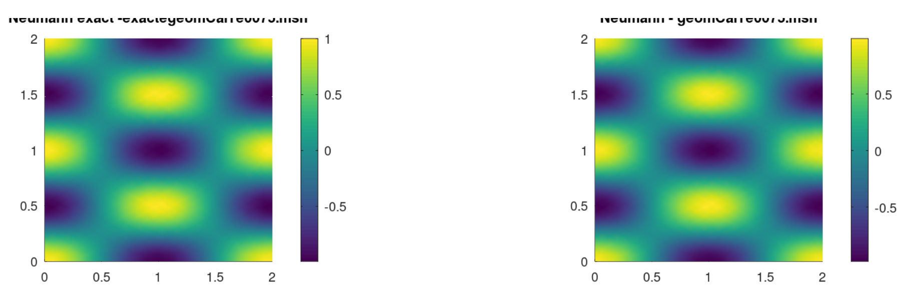
Validation:

Soit

$$u(x,y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y) \ \text{ pour } \ (x,y) \in \Omega^2.$$

Avec le second membre

$$f(x,y) = (1+5\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y) \ \ , h = 0.075.$$

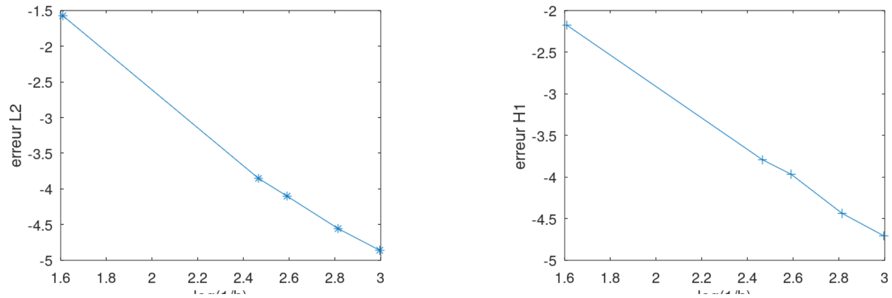


(a) Résultat exact avec conditions de Neumann

(b) Résultat approché avec conditions de Neumann

Figure 1: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions de Neumann

Pour $A(x,y) = A(nx, ny)$ avec $n = 2, 4, 8, 16, 32$, on a



(a) Erreur L2 (b) Erreur H1

Figure 2: Erreur L2 et Erreur H1 .
On observe bien que les erreurs L^2 et H^1 diminuent avec le pas du maillage (h).ici on observe une convergence en $O(h^2)$ pourles deux erreurs. Cela correspond à la convergence théorique de l'erreur L^2 . Pour l'erreur H^1 on s'attendrait plutôt à une convergence en $O(h)$ .Idem pour A variable

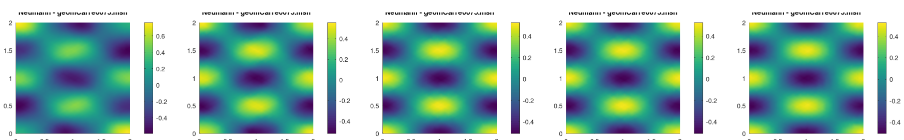


Figure 3: A(x,y) = A(nx , ny) avec n=2 ,4 ,8 ,16 ,32
On obtient les memes choses

On considère maintenant le cas général $A = A(x, y)$.

$$\int_\Omega F d\Omega \approx \sum_{q=1}^{N} w_l^q F(M_l^q)$$

En effectuant le changement de variable $M = F_l(\hat{M})$ .L'intégrale sur T_l devient :

$$\int_{T_l} A(M)\nabla w_I(M).\nabla w_J(M) d\Omega = \int_{T_l} A(F_l(\hat{M}))[dF_l(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_I(\hat{M}).[dF_l(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_J(\hat{M})|detdF_l(\hat{M})|d\Omega$$

Ou $dF_l(\hat{M})$ est la matrice jacobienne $\hat{M}$. Après avoir determiner F_l ona :

$$F_l(x, y) = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & y_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Validation:
On teste avec $A = I$.

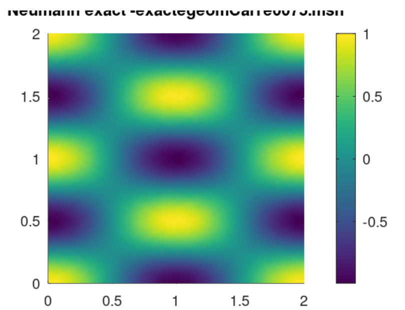
$\hat{M}_q$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$
$\hat{w}_q$	$\frac{-9}{32}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{96}$

Table 1: Les points et les poids de Quadrature de Gauss Lobato

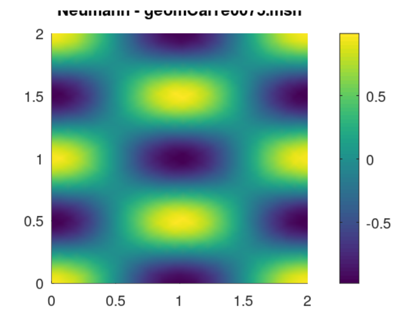
Le second membre est donné par :

$$f(x,y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y) + 10\pi^2\cos(2\pi y)\cos(\pi x) + \pi^2\sin(4\pi y)\cos(2\pi x)\sin(\pi x) \\ +9\pi^2\cos(2\pi y)\sin(2\pi y)\cos(\pi x)\sin(2\pi x)$$

La solution exacte est $u(x,y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)$ et $h = \frac{1}{16}$.

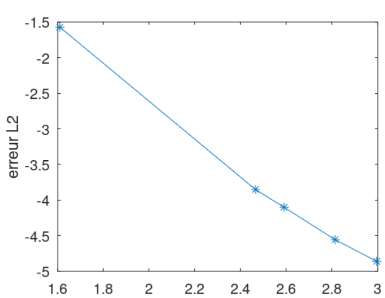


(a) Résultat exact avec conditions de Neumann

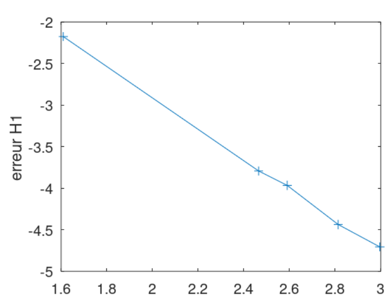


(b) Résultat approché avec conditions de Neumann

Figure 4: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions de Neumann



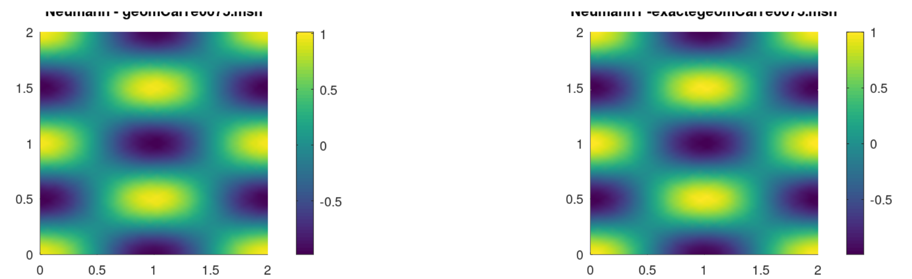
(a) Erreur L2



(b) Erreur H1

Figure 5: Erreur L2 et Erreur H1

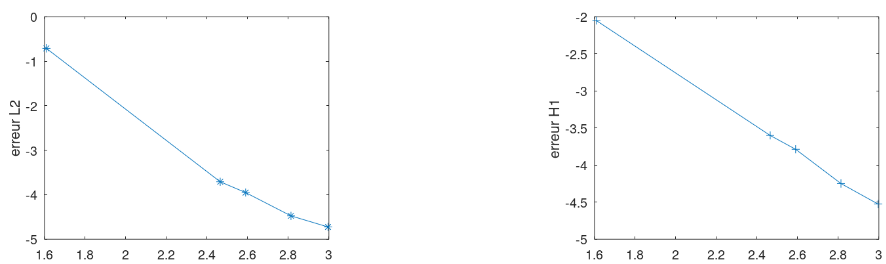
On teste avec $A = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 2$.



(a) Résultat exact avec conditions de Neumann

(b) Résultat approché avec conditions de Neumann

Figure 6: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions de Neumann $A = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 2$



(a) Erreur L2

(b) Erreur H1

Figure 7: Erreur L2 et Erreur H1 $A = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 2$

2 Condition de Dirichlet:

On s'intérèsse maintenant à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet:
Trouver $u \in H_0^1$ tq:

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

Soit $v \in H_0^1$

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega div(A(x,y)\nabla u)v = \int_\Omega fv$$

Par la formule de Green et condition au bord on a la formulation variationnelle suivante:

$$\int_\Omega uv\, d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla u.\nabla v\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega$$

De même par le théorème de Lax-Milgram le problème (2) est bien posé.
Comme dans la partie précédente on peut determiner de la même façon la formulation variationnelle , on obtient :

$$\mathbb{A}^0 = (\mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0)\mathbb{U}^0 = \mathbb{L}^0$$

$$\mathbb{M}^0_{ij} = \int_\Omega A(x,y)\nabla w_i \cdot \nabla w_j \ \ , \mathbb{K}^0_{ij} = \int_\Omega w_i w_j \ \text{ et } \ \mathbb{L} = \int_\Omega f w_j$$

Introduisons une matrice $\mathbb{P}$ qui envoie $V_h$dans V_h^0 , on a:

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^T$$

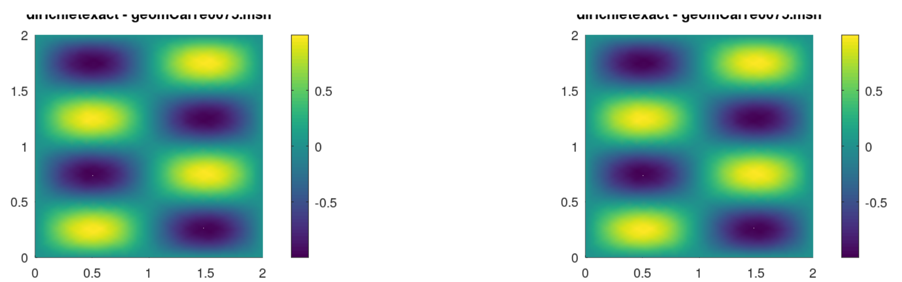
Validation:

A est une matrice identitée et

$$u_{\text{exact}}(x,y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y) \ \text{ et } \ h = 0.075$$

Avec le second membre

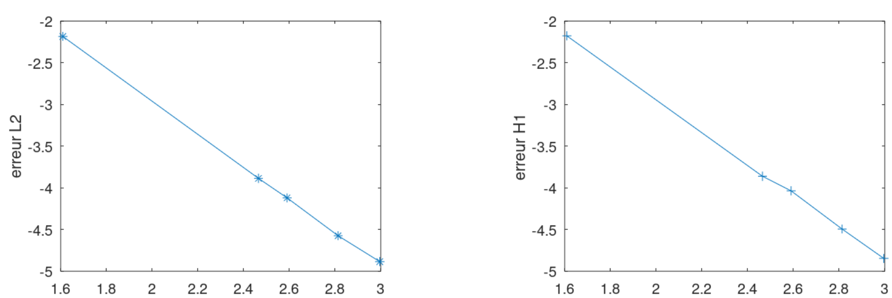
$$f(x,y) = (1 + 5\pi^2)\sin(\pi x)\sin(2\pi y)$$



(a) Résultat exact avec conditions de Dirichlet

(b) Résultat approché avec conditions de Dirichlet

Figure 8: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions de Dirichlet



(a) Erreur L2

(b) Erreur H1

Figure 9: Erreur L2 et Erreur H1

3 Condition périodique:

Soit $\Omega = [0, L]^2$ un carré de taille L.On s'intéresse à la résolution numérique du problème Poisson avec condition aux limites periodique et coefficients variables : trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} = u|_{y=0} = u|_{y=L} \\ A(x,y)\nabla u \cdot e_x|_{x=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_x|_{x=L}, \\ A(x,y)\nabla u \cdot e_y|_{y=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_y|_{y=L} \end{cases} \tag{3}$$

Pour la formulation variationnelle , il suffira de faire comme précédente
$\forall u \in H^1_{\#}(\Omega)$ et $\forall v \in H^1_{\#}(\Omega)$

$$\int_\Omega uv - \int_\Omega div(A(x,y)\nabla)v = \int_\Omega fv$$

D'après la formule de Greenn et les conditions périodiques , on a la formulation variationnelle:

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv$$

Comme $H^1_{\#}(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{H^1(\Omega)}$est un espace de Hilbert , alors par le théorème de Lax-Milgram le problème (3) est bien posé.

Solution discrétisée:

En étendant la techniquevpour les condition de dirichlet aux conditions périodiques, nous pouvons contruire la matricede projection $\mathbb{P}$ qui envoie $V_h$dans $V_h^{\#}$.

On a

$$\mathbb{A}^{\#} = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^T \ \ ,\mathbb{L}^{\#} = \mathbb{P}.\mathbb{L} \ \text{ et } \ \mathbb{U} = \mathbb{P}^T\mathbb{U}^{\#}$$

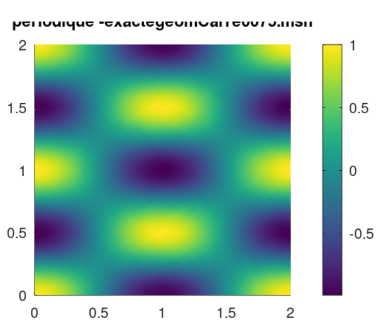
Validation:

A est une matrice identitée et

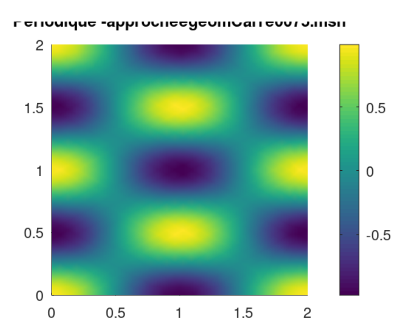
$$u_{\text{exact}}(x,y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y) \ \text{ et } \ h = 0.075$$

Avec le second membre

$$f(x,y) = (1 + 5\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y)$$

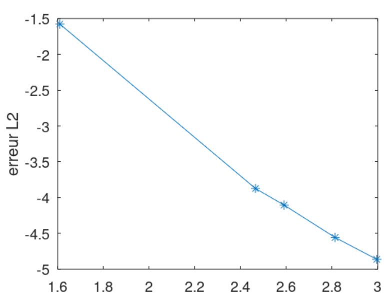


(a) Résultat exact avec conditions Périodique

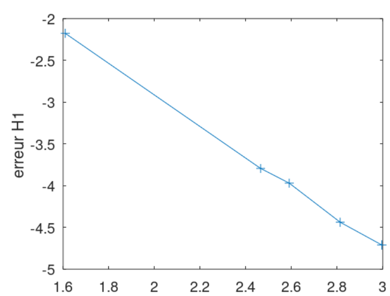


(b) Résultat approché avec conditions Périodique

Figure 10: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions périodique



(a) Erreur L2



(b) Erreur H1

Figure 11: Erreur L2 et Erreur H1