Modélisation et simulation des écoulements de fluides dans la géosphère

Projet: Diffusion non-linéaire

E. Mouche, Michel Kern
emmanuel.mouche@lsce.ipsl.fr, Michel.Kern@inria.fr

Description

On considère l'équation de diffusion non-linéaire suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x), \quad x \in I, t > 0, \tag{1}$$

avec une condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), x \in I$$

où I est un intervalle de $\mathbf{R}$ à préciser (si I est fini, on ajoute des conditions aux limites). Le coefficient de diffusion $D(u)$ dépend de l'inconnue du problème.

Un cas particulier est celui de l'équation des milieux poreux, où

$$D(u) = u^{m-1},$$

pour un paramètre $m \geq 1$ (si $m = 1$ on retrouve le cas linéaire). Cette équation décrit plusieurs phénomènes en géosciences mais aussi dans d'autres domaines tels que la physique des plasmas, la thermique et la turbulence, ... Elle n'a pas de solution analytique sauf dans le cas particulier d'un domaine infini et d'une condition initiale ponctuelle $u_0(x) = M\delta(x)$. Cette solution repose sur la théorie des fonctions auto-semblables développée par Barenblatt au début des années 50.. Celle-ci stipule que l'on peut chercher la solution sous la forme $u(x,t) \sim t^{-\alpha}F(x/t^{\beta})$. Dans le cas où $m > 1$ la solution est donnée dans le livre de Vázquez, J. L. (2006), "Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations : equations of porous medium type" (Vol. 33). OUP Oxford). L'intégrale apparaissant dans d peut être trouvée dans des tables ou évaluée numériquement. Vázquez montre que la solution de Barenblatt converge bien vers la Gaussienne lorsque $m = 1$ (cas linéaire). Lorsque $m > 1$ la solution est à support borné car $D(u)$ s'annule pour $u = 0$, ce qui n'est évidemment pas le cas lorsque $m = 1$.

Résolution des systèmes non-linéaires

On suppose qu'on sait discrétiser l'équation linéaire avec un coefficient de diffusion $D = D(x)$, et que l'on obtient, à chaque pas de temps t^n un système linéaire

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + A(D)U^{n+1} = f^{n+1},\ n \geq 0.$$

On a noté U^n le vecteur des inconnues discrètes, Δt le pas de temps, et $A(D)$ la matrice obtenue par la méthode de volumes finis à deux points.

Pour résoudre le système non-linéaire (1), on pourra utiliser une des méthodes suivantes. Étant donné une approximation U^n, on notera $D^n = D(U^n)$ le coefficient de diffusion correspondant.

Méthode semi-implicite À chaque pas de temps, on utilise l'approximation

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + A(D^n)U^{n+1} = f^{n+1},\ n \geq 0.$$

Autrement dit on rend explicite le terme non-linéaire, mais on traite toujours la diffusion de manière implicite.

Méthode de Picard Si on veut traiter la non-linéarité de manière implicite, on doit résoudre à chaque pas de temps un système non-linéaire

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + A(D^{n+1})U^{n+1} = f^{n+1},\ n \geq 0,$$

où cette fois la matrice $A(D^{n+1})$ dépend de la solution inconnue. On doit donc introduire une itération supplémentaire pour résoudre ce problème. On propose l'algorithme suivant, qui est une variante de la méthode du point fixe de Picard.

À chaque pas de temps, on calcule une suite $U^{n,k}$, initialisée par $U^{n,0} = U^n$ (pas de temps précédent), et à chaque itération on pose $D^{n+1,k} = D(U^{n+1,k}$, et on résout

$$\frac{U^{n+1,k+1} - U^n}{\Delta t} + A(D^{n+1,k})U^{n+1,k+1} = f^{n+1},\ k \geq 0,\ \ n \geq 0.$$

À la fin des itérations, on pose $U^{n+1} = U^{n+1,K+1}$, où $U^{n+1,K+1}$ est le dernier itéré calculé.

On pourra arrêter les itérations quand la différence relative $\frac{\|U^{n+1,k+1} - U^{n+1,k}\|}{\|U^{k+1,n}\|}$ est suffisamment petite.

Travail demandé

Il est Proposé de travailler en plusieurs étapes :

1. Cas linéaire écrite le code correspondant à $m = 1$. La solution sur $\mathbf{R}$ est connue, et correspond à une Gaussienne. Valide le code sur cet exemple, et étudier la convergence numérique ;
2. Cas non-linéaire sur une demi-droite. On se place sur $\mathbf{R}^+$, avec une condition de Dirichlet $u(x,t) = 1$ ou de Neumann (flux nul) $\partial_x u(0,t) = 0$ en $x = 0$. On pourra également prendre une condition $u(L,t) =$ ou de Neumann $\partial_x u(L,t) = 0$, où L est choisi de manière à simuler l'infini, compte-tenu de la durée de l'expérience. La solution est à support borné à chaque instant, mais ce support augmente au cours du temps. Évaluez numériquement la vitesse de déplacement de la frontière libre, comparez avec la solution exacte. On fera varier m entre 1 et 4 (par exemple). Comparer les méthodes semi-implicites et Picard sur cet exemple.
3. Cas non-linéaire sur la droite. On se place sur $\mathbf{R}$ On approche par un intervalle borné $[-L/2, L/2]$, avec L "assez grand", et des conditions aux limites $u(\pm L/2, t) = 0$ (sans importance puisque la solution reste à support borné). On prend une condition initiale de la forme $u_0(x) = M\delta(x)$. Comment faut-il représenter cette condition initiale ? On pourra choisir un maillage raffiné autour de 0. Comparer la solution obtenue à la solution exacte. Étudier l'influence de m sur la solution, et aussi sur les paramètres de discrétisation.