

I01 : MODÉLISATION ET SIMULATION DES ÉCOULEMENTS DE FLUIDES DANS LA GÉOSPHERE

Projet : Équation de la diffusion non-linéaire et solution
auto-semblable

BRÉHIMA SAMAKÉ

Professeurs : E.MOUCHE et MICHEL KERN

Table des matières

1	Introduction	2
2	Étude du Cas Linéaire $m = 1$	2
2.1	Présentation du Modèle	2
2.2	Schéma Numérique par la Méthode des Volumes Finis	3
3	Étude numérique de la diffusion non-linéaire	5
3.1	Étude numérique : Méthode des volumes finis	5
3.2	Cas non-linéaire à domaine infini $m > 1$	7
3.3	Cas non-linéaire : domaine demi-droite	11
4	Comparaison avec le cas linéaire :	15
5	Conclusion :	17

1 Introduction

On considère l'équation de diffusion non-linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x), \quad x \in I, \quad t > 0, \quad (1)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in I, \quad (2)$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} à préciser. Si I est fini, des conditions aux limites sont ajoutées. Le coefficient de diffusion $D(u)$ dépend de l'inconnue du problème.

Un cas particulier intéressant est celui de l'équation des milieux poreux, où :

$$D(u) = u^{m-1}, \quad (3)$$

pour un paramètre $m \geq 1$. Lorsque $m = 1$, on retrouve le cas linéaire de l'équation de la chaleur. Cette équation est couramment utilisée pour modéliser divers phénomènes en géosciences, physique des plasmas, thermique et turbulence.

Une solution particulière de cette équation a été obtenue par Barenblatt au début des années 50 en considérant un domaine infini et une condition initiale ponctuelle $u_0(x) = M\delta(x)$. En utilisant la théorie des solutions auto-semblables, la solution peut être recherchée sous la forme :

$$u(x, t) \sim t^{-\alpha} F\left(\frac{x}{t^\beta}\right). \quad (4)$$

Dans le cas $m > 1$, cette solution est explicitement donnée dans l'ouvrage de Vázquez : *“Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations : equations of porous medium type”* (2006). Il y est montré que la solution de Barenblatt converge vers une distribution gaussienne dans le cas linéaire ($m = 1$). En revanche, pour $m > 1$, la solution possède un support borné, ce qui est une conséquence directe de l'annulation du coefficient de diffusion $D(u)$ pour $u = 0$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution numérique de cette équation en prenant $f = 0$ et en appliquant une méthode de volumes finis. Cette méthode permet une discrétisation conservative adaptée aux équations de diffusion non-linéaires.

2 Étude du Cas Linéaire $m = 1$

2.1 Présentation du Modèle

Dans cette section, nous analysons le cas particulier où $m = 1$ donc $D(u) = 1$. L'équation de diffusion (1) se simplifie alors en :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

Cette équation de diffusion linéaire décrit la manière dont la chaleur, la matière ou d'autres grandeurs se propagent dans un milieu où le coefficient de diffusion est constant et indépendant de la concentration. Une application classique est la diffusion thermique, qui modélise la propagation de la chaleur dans un matériau homogène et isotrope, comme une plaque métallique dont la conductivité thermique et la capacité calorifique sont constantes.

Nous étudions plus précisément la diffusion d'une masse ponctuelle M représentée par une condition initiale de type Dirac. Cette condition modélise la diffusion d'un "paquet" de chaleur ou de particules initialement concentré en un point.

Par exemple, pour analyser la propagation de la chaleur dans une barre métallique, on peut employer une condition initiale de Dirac pour simuler une concentration de chaleur en un point précis de la barre. La solution attendue dans ce contexte est donnée par :

$$u_{\text{linéaire}}(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad (6)$$

2.2 Schéma Numérique par la Méthode des Volumes Finis

Pour résoudre numériquement cette équation dans le cas linéaire ($m = 1$), nous adoptons la méthode des volumes finis. Considérons un maillage défini par :

$$T_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}], \quad i = 1, \dots, N \quad (7)$$

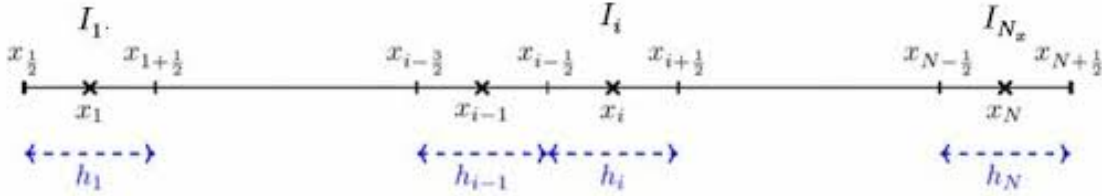


FIGURE 1 – Maillage en 1D pour la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis comprend principalement deux étapes :

1. **Définition des flux** : On intègre le terme diffusif sur chaque volume de contrôle T_i :

$$\int_{T_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

Pour le cas linéaire, le coefficient de diffusion $D = 1$.

2. **Approximation des flux** : Les dérivées spatiales sont discrétisées à l'aide de différences finies :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}, \quad (10)$$

où $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ et $h_{i-\frac{1}{2}} = x_i - x_{i-1}$.

En adoptant une discrétisation temporelle implicite, le schéma numérique obtenu est :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

où Δt désigne le pas de temps utilisé pour la simulation.

Validation : Cas $m = 1$

En exploitant le schéma numérique décrit dans l'équation (11) ainsi que les scripts Python élaborés au cours des séances de travaux pratiques, nous avons obtenu les résultats suivants :

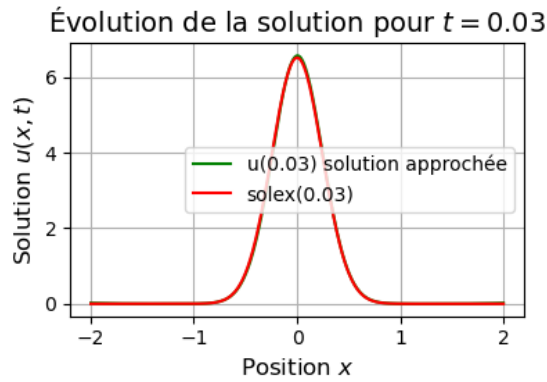


FIGURE 2 – Solution approchée et solution analytique : cas linéaire

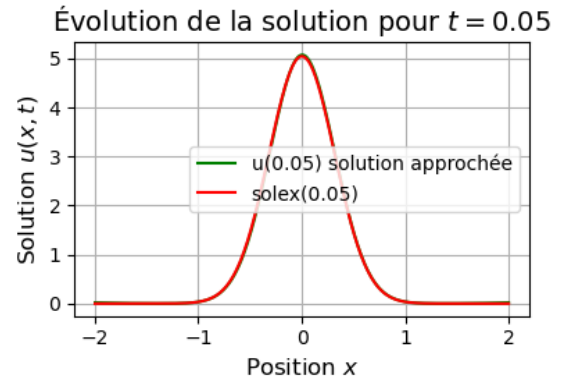


FIGURE 3 – Solution approchée et solution analytique : cas linéaire

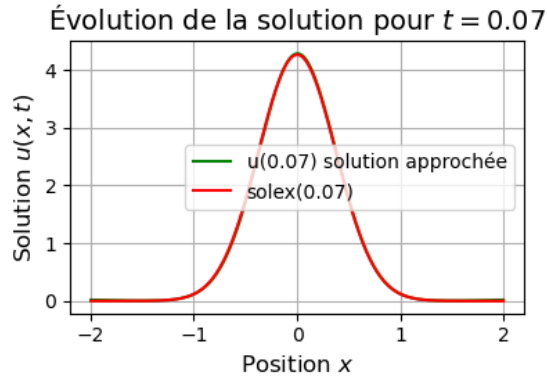


FIGURE 4 – Solution approchée et solution analytique : cas linéaire

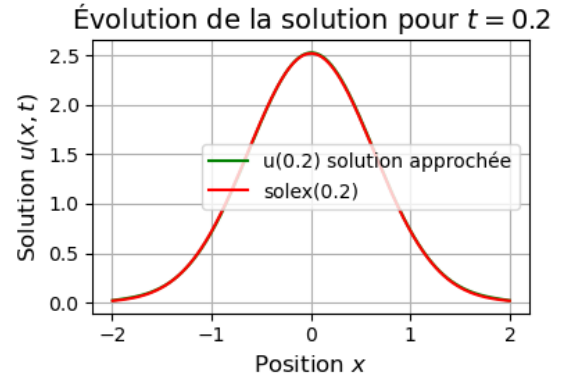


FIGURE 5 – Solution approchée et solution analytique : cas linéaire

Il apparaît que la solution numérique coïncide avec la courbe Gaussienne à chaque instant. Cela nous permet de valider notre premier schéma numérique.

3 Étude numérique de la diffusion non-linéaire

L'étude du cas où $m > 1$ met en évidence une diffusion non linéaire caractérisée par des profils compacts, en raison de l'annulation du coefficient de diffusion $D(u)$ pour $u = 0$. Ce phénomène contraste avec le comportement plus étendu observé dans le cas linéaire. Une solution notable est celle de Barenblatt, qui décrit l'évolution asymptotique de la diffusion via des fonctions auto-similaires. Afin d'analyser ces effets, une résolution numérique de l'équation est envisagée, permettant de comparer les résultats obtenus avec cette solution théorique et d'explorer les implications physiques associées.

3.1 Étude numérique : Méthode des volumes finis

Dans de nombreux problèmes physiques modélisés par des équations aux dérivées partielles, il est courant de rencontrer des termes non-linéaires, notamment dans les équations de diffusion. Lorsque ces termes sont présents, il est nécessaire de résoudre des systèmes non-linéaires à chaque pas de temps. La méthode de Picard, également appelée méthode du point fixe, est une technique classique pour traiter ces non-linéarités de manière implicite.

Ce rapport présente l'algorithme de la méthode de Picard appliquée à la résolution d'équations de type diffusion avec un terme de non-linéarité dépendant de la solution.

À chaque pas de temps, nous devons résoudre le système non-linéaire suivant :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + A(D^{n+1})U^{n+1} = f^{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (12)$$

où $A(D^{n+1})$ est une matrice dépendant de la solution inconnue U^{n+1} . Ce système est difficile à résoudre directement en raison de la non-linéarité dans $A(D^{n+1})$. Pour cela, nous devons introduire une itération supplémentaire afin d'approximer U^{n+1} de manière implicite.

La méthode de Picard propose une approche itérative pour résoudre le problème non-linéaire. À chaque pas de temps n , on calcule une suite d'approximations $U^{n+1,k}$ qui converge vers la solution U^{n+1} . L'algorithme est initialisé avec la solution du pas de temps précédent $U^{n+1,0} = U^n$.

À chaque itération k , nous effectuons les étapes suivantes :

- Calculer $D^{n+1,k} = D(U^{n+1,k})$.
- Résoudre le système linéaire suivant pour $U^{n+1,k+1}$:

$$\frac{U^{n+1,k+1} - U^n}{\Delta t} + A(D^{n+1,k})U^{n+1,k+1} = f^{n+1}, \quad k \geq 0, \quad n \geq 0. \quad (13)$$

Cette itération est répétée jusqu'à ce que la différence relative entre deux itérations consécutives soit suffisamment petite, c'est-à-dire :

$$\frac{\|U^{n+1,k+1} - U^{n+1,k}\|}{\|U^{n+1,k+1}\|} < \text{tolérance}, \quad (14)$$

où la tolérance est un critère choisi à l'avance pour arrêter les itérations.

À la fin des itérations, la solution du pas de temps est donnée par la dernière itération calculée, soit $U^{n+1} = U^{n+1,K+1}$.

La fonction `heat_1D` permet de résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire en utilisant une méthode numérique basée sur l'approximation de Picard. Les paramètres d'entrée sont définis comme suit :

- $-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$: Bornes de l'intervalle spatial sur lequel l'EDP est résolue.
- **N** : Nombre de points de discrétisation en espace.
- **Kfun** : Fonction définissant le coefficient de diffusion $D(u)$, calculé à partir de la solution à l'instant précédent **ukold**.
- **rhsfunc** : Fonction qui calcule le second membre $f(x, t)$ en chaque point de l'intervalle.
- **bclleft**, **bcrigh** : Types et valeurs des conditions aux limites.
- **moyenne** : Type de moyenne utilisé pour l'approximation numérique.
- **dt** : Pas de temps pour la discrétisation temporelle.
- **theta = 1** : Définit un schéma implicite pour la résolution temporelle.
- **uold** : Vecteur représentant la solution numérique à l'instant précédent.

Les valeurs calculées au cours de l'algorithme sont :

- **K = Kfun(ukold)** : Évaluation du coefficient de diffusion $K(u)$ en chaque point de discrétisation.
- **A = getmatrhs1D(mesh, K, bcllist, rhsfunc)** : Construction de la matrice de discrétisation de l'EDP en utilisant la méthode des différences finies.
- **b = getmatrhs1D(mesh, K, bcllist, rhsfunc)** : Calcul du vecteur du second membre en utilisant la fonction **rhsfunc**.
- **B** : Construction de la matrice du système linéaire discrétisé.
- **b = 1/theta * (f + mesh.mes*uold/dt - (1-theta)*A.dot(uold))** : Calcul du vecteur du second membre en utilisant les contributions discrètes.
- **uknew = spsolve(B, b)** : Résolution du système linéaire discrétisé pour obtenir la solution à l'instant suivant.

Dans notre cas particulier, nous utilisons $\theta = 1$ (schéma entièrement implicite) et $rhs = 0$. La discrétisation spatiale est définie par $h = \frac{L}{N-1}$, garantissant un maillage homogène pour la simulation.

Schéma numérique

La détermination du schéma numérique suit la même idée que dans la première section, c'est-à-dire dans le cas linéaire. Nous avons :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D_{1+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - D_{1-\frac{1}{2}} \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

Le flux s'écrit :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = D_{1+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad F_{i-\frac{1}{2}} = D_{1-\frac{1}{2}} \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

Les expressions des moyennes arithmétique et harmonique sont les suivantes :

— Moyenne arithmétique :

$$D_{i+\frac{1}{2}} = \frac{D_{i+1} + D_i}{2} \quad \text{et} \quad D_{i-\frac{1}{2}} = \frac{D_i + D_{i-1}}{2}$$

— Moyenne harmonique :

$$D_{i+\frac{1}{2}} = \frac{D_i D_{i+1} h_{i+\frac{1}{2}}}{D_i h_{i+\frac{1}{2}} + D_{i+1} h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad D_{i-\frac{1}{2}} = \frac{D_i D_{i-1} h_{i-\frac{1}{2}}}{D_i h_{i-\frac{1}{2}} + D_{i-1} h_{i-\frac{1}{2}}}$$

Choix des conditions aux bords :

— Condition de Dirichlet homogène :

$$u\left(\frac{-L}{2}, t\right) = u_g \quad , \quad u\left(\frac{L}{2}, t\right) = u_d \implies F_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}} \frac{u_1 - u_g}{h_{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad F_{N+\frac{1}{2}} = D_{N+\frac{1}{2}} \frac{u_1 - u_d}{h_{\frac{1}{2}}}$$

— Condition de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{-L}{2}, t\right) = u_g \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{L}{2}, t\right) = u_d \implies F_{\frac{1}{2}} = g_g \quad \text{et} \quad F_{N+\frac{1}{2}} = g_d$$

En particulier, nous choisissons la moyenne arithmétique. Bien que la moyenne harmonique soit souvent plus précise, elle ne s'adapte pas bien aux cas où la condition initiale est une fonction de Dirac, qui est quasi nulle partout, sauf en un point donné.

De plus, nous considérerons également le cas des conditions de Dirichlet aux bords. Toutefois, leur influence reste limitée dans notre étude, car les solutions recherchées possèdent un support compact et ne sont donc que faiblement affectées par ces conditions aux limites.

Ainsi, pour résoudre numériquement l'équation (1), nous avons implémenté en **Python** les fonctions suivantes :

- `darcy_1D.py` : construit la matrice associée à l'opérateur différentiel et calcule le second membre du système.
- `heat_1D.py` : applique la méthode de Picard pour résoudre l'équation non linéaire de manière itérative.
- `Diffusion_non_lineaire_sur_demi_droite.ipynb`, `Diffusion_non_lineaire_R.ipynb` : calcule la solution approchée de l'équation (1) en utilisant `heat_1D.py` pour différentes valeurs du paramètre m .
- `barenblatt_solution_1.py`, `barenblatt_solution.py` : implémente la solution analytique de Barenblatt pour comparaison, dans le cas du domaine infini et le cas du domaine demi-droite.

Afin de valider notre code, nous comparons les solutions numériques obtenues avec la solution de Barenblatt pour différentes valeurs de m .

3.2 Cas non-linéaire à domaine infini $m > 1$

Construction de la solution de Barenblatt

Cette partie vise à construire la fonction de Barenblatt à partir de l'article de Vázquez, J. L. (2006) *Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations : equations of porous medium* type (Vol. 33). OUP Oxford, afin de la comparer à notre solution approchée et de valider notre calcul.

Nous utilisons les résultats suivants tirés de l'article :

$$U(x, t; M) = t^{-\alpha} F\left(\frac{x}{t^{\alpha/n}}\right), \quad F(\xi) = \left(C - k\xi^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} \quad (15)$$

avec

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \quad k = \frac{(m-1)\alpha}{2n}, \quad \gamma = \frac{n}{2(m-1)\alpha} \quad (16)$$

$$d = n\omega_n \int_0^\infty (1 - ky^2)_+^{\frac{1}{m-1}} y^{n-1} dy \quad (17)$$

où $n = 1$ et $\omega_n = 1$.

Pour calculer la masse M sur \mathbb{R} de la solution $U(x, t; M)$, nous devons intégrer $U(x, t; M)$ par rapport à x sur tout l'espace. La masse est définie par :

$$M = \int_{-\infty}^\infty U(x, t; M) dx.$$

La solution $U(x, t; M)$ a un support compact pour tout $t > 0$. Le support est donné par :

$$\text{supp}(U) = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \left| \frac{x}{t^{\alpha/n}} \right| \leq \sqrt{\frac{C}{k}} \right\}.$$

Calcul de la masse M

La masse M est obtenue en intégrant $U(x, t; M)$ par rapport à x :

$$M = \int_{-\infty}^\infty U(x, t; M) dx = t^{-\alpha} \int_{-\infty}^\infty F\left(\frac{x}{t^{\alpha/n}}\right) dx.$$

Effectuons un changement de variable $\xi = \frac{x}{t^{\alpha/n}}$, ce qui implique $dx = t^{\alpha} d\xi$. Ainsi :

$$M = t^{-\alpha} \int_{-\infty}^\infty F(\xi) \cdot t^{\alpha} d\xi = \int_{-\infty}^\infty F(\xi) d\xi.$$

La fonction $F(\xi)$ est non nulle uniquement lorsque $C - k\xi^2 \geq 0$, c'est-à-dire pour $|\xi| \leq \sqrt{\frac{C}{k}}$ (la solution est à support borné). Par conséquent, l'intégrale devient :

$$M = \int_{-\sqrt{\frac{C}{k}}}^{\sqrt{\frac{C}{k}}} \left(C - k\xi^2\right)^{\frac{1}{m-1}} d\xi = C^{\frac{1}{m-1}} \int_{-\sqrt{\frac{C}{k}}}^{\sqrt{\frac{C}{k}}} \left(1 - \frac{k}{C}\xi^2\right)^{\frac{1}{m-1}} d\xi.$$

Par symétrie, on a :

$$M = 2C^{\frac{1}{m-1}} \int_0^{\sqrt{\frac{C}{k}}} \left(1 - \frac{k}{C}\xi^2\right)^{\frac{1}{m-1}} d\xi.$$

En effectuant le changement de variable $y = \frac{\xi}{\sqrt{C/k}}$, on obtient :

$$M = 2C^{\frac{1}{m-1} + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{1}{m-1}} dy.$$

Or, pour $n = 1$ et $C = 1$, on définit :

$$d = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{1}{m-1}} dy.$$

Ainsi, nous avons l'expression :

$$M = 2C^{\frac{1}{m-1} + \frac{1}{2}} d$$

En isolant C , on obtient :

$$C = \left(\frac{M}{2d}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

où $\gamma = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{2}$.

$$\boxed{C = \left(\frac{M}{2d}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Cette expression permet de déterminer la constante C en fonction de la masse M et du paramètre m . La solution ainsi obtenue est implémentée dans le fichier `barenblatt_solution.py`. La forme explicite du profil $F(\xi)$ dépend de la valeur de m et s'annule au-delà d'un certain support compact, illustrant ainsi la nature limitée de la diffusion pour $m > 1$. L'objectif de cette construction est de comparer cette solution analytique aux résultats numériques obtenus par la méthode de discrétisation implicite. Cette comparaison permettra de valider la convergence et la précision du schéma numérique dans le contexte de la diffusion non linéaire sur un domaine infini.

En plus, on impose une condition initiale :

$$u(x, 0) = M\delta(x)$$

où $\delta(x)$ est le Dirac en x .

Validation : domaine infini

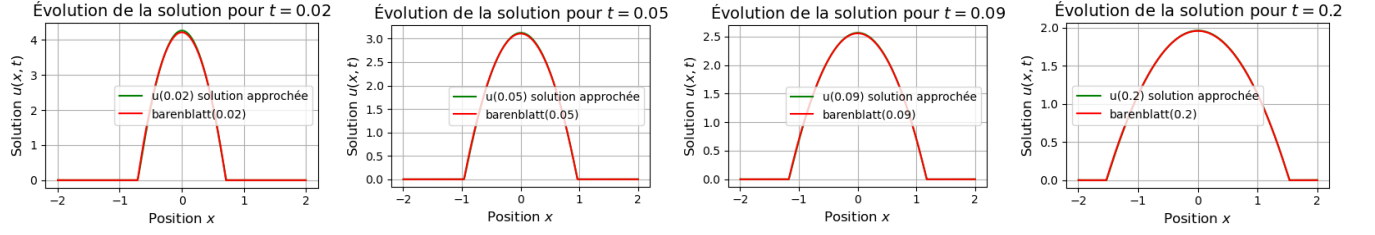


FIGURE 6 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 2$ et $t = \{0.02, 0.05, 0.09, 0.2\}$, $N = 700$, $Nt = 400$, $M = 4$

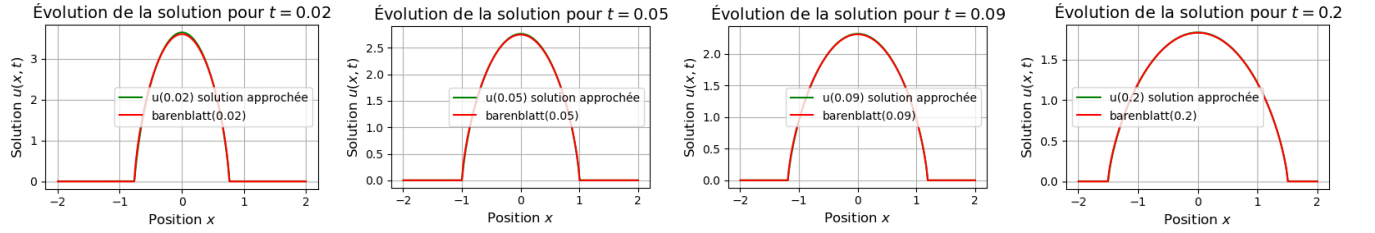


FIGURE 7 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 2.4$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N = 500$, $Nt = 100$, $M = 4$

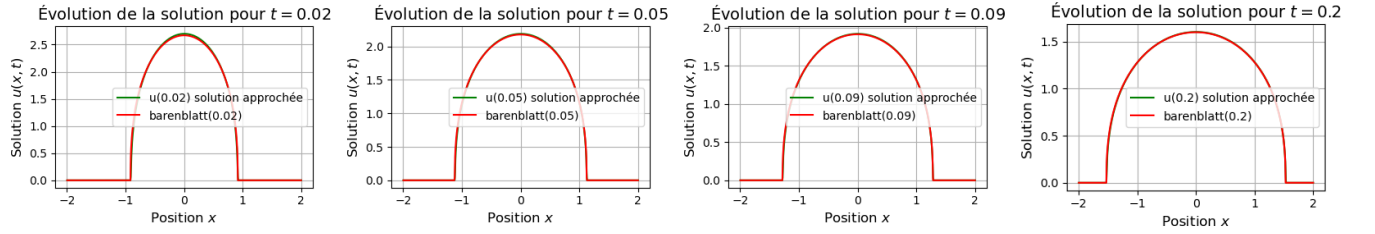


FIGURE 8 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 3.5$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N = 500$, $Nt = 100$, $M = 4$

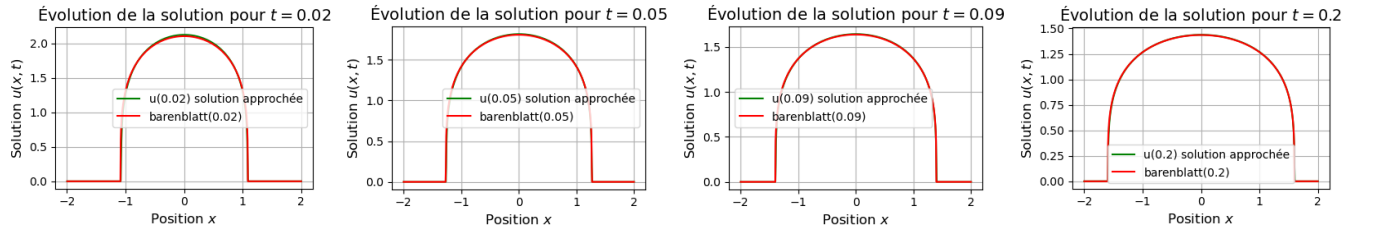


FIGURE 9 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 5$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N = 500$, $Nt = 100$, $M = 4$

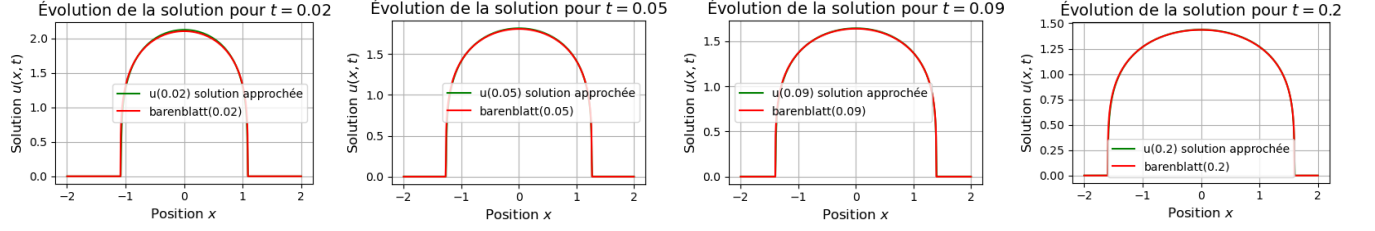


FIGURE 10 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 6$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N = 500$, $Nt = 100$, $M = 4$

Lorsque m augmente, la diffusion devient plus restreinte et localisée, avec un support compact de plus en plus marqué. Pour $m = 2$, la diffusion est rapide et homogène, s'ajustant bien à la solution de Barenblatt. Pour $m > 2$, la non-linéarité ralentit la propagation et crée des fronts nets. À $m = 5$ et $m = 6$, la diffusion est fortement confinée autour du centre, avec une annulation brutale aux bords. Ces résultats confirment la validité de l'approche numérique et illustrent l'impact de m sur la dynamique de diffusion.

3.3 Cas non-linéaire : domaine demi-droite

Dans cette section, nous étudions le cas de la diffusion non linéaire sur la demi-droite \mathbb{R}^+ . Ce choix de domaine est motivé par de nombreuses applications physiques et mathématiques où les phénomènes de diffusion sont naturellement contraints à une région semi-infinie, comme dans les problèmes de propagation en milieu semi-ouvert.

En exploitant la symétrie du problème, nous pouvons en déduire une analyse détaillée de la solution de Barenblatt dans ce cadre restreint. Cette approche permet de mieux comprendre le comportement de la diffusion non linéaire lorsque la solution est limitée à un domaine borné d'un côté.

En procédant ainsi, nous obtenons l'expression explicite de la solution dans ce contexte particulier, ce qui facilite la comparaison avec les résultats numériques et permet de valider la précision des schémas de discrétisation employés.

Solution de Barenblatt sur \mathbb{R}^+

La solution de Barenblatt est donnée par :

$$U(x, t) = t^{-\alpha} \left(C - k \left(\frac{x}{t^{\alpha/n}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (18)$$

avec la condition $C - k\xi^2 \geq 0$, sinon $U(x, t) = 0$.

La fonction $F(\xi)$ est définie comme :

$$F(\xi) = \left(C - k\xi^2 \right)_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Cette fonction est supportée sur $\xi \in [-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$, où ξ_{\max} est défini par :

$$\xi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Puisque nous nous plaçons sur \mathbb{R}^+ , l'intégration se fait uniquement sur $[0, \xi_{\max}]$.

Calcul de M

L'intégrale qui définit M devient donc :

$$M = \int_0^{\xi_{\max}} (C - k\xi^2)^{\frac{1}{m-1}} d\xi.$$

Cette intégrale correspond à la **moitié** de l'intégrale prise sur tout \mathbb{R} , soit :

$$M = \frac{1}{2} \int_{-\xi_{\max}}^{\xi_{\max}} (C - k\xi^2)^{\frac{1}{m-1}} d\xi.$$

Or, en dimension $n = 1$, l'intégrale normalisée d est définie par :

$$d = \int_{-\xi_{\max}}^{\xi_{\max}} (1 - k\xi^2)^{\frac{1}{m-1}} d\xi.$$

En comparant les expressions, nous obtenons la relation :

$$\frac{1}{2} C^{\frac{m}{m-1}} d = M.$$

En réarrangeant, nous trouvons :

$$\boxed{C = \left(\frac{2M}{d} \right)^{\frac{m-1}{m}}}$$

Conditions aux limites de type Neumann

Les conditions aux limites imposées sont de type Neumann homogène :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

Conditions Initiales

La condition initiale est une distribution gaussienne centrée en $x = 0$:

$$u(x, 0) = \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

avec $\sigma = 10^{-1}$.

Ces expressions permettent de calculer la constante C en fonction de la masse M et du paramètres m dans le cas \mathbb{R}^+ . Cette solution est implémentée dans la fonction `barenblatt_solution_1.py`.

Sur \mathbb{R}^+ , la forme explicite du profil $F(\xi)$ dépend de la valeur de m et s'annule au-delà d'un certain support compact, ce qui traduit la nature limitée de la diffusion pour $m > 1$.

L'objectif de cette construction est de comparer cette solution analytique avec les résultats numériques obtenus à l'aide de la méthode de discrétisation implicite. Cette comparaison nous permettra de valider la convergence et la précision de notre schéma numérique dans le cadre de la diffusion non linéaire sur un domaine semi-infini \mathbb{R}^+ .

Cette fois-ci, la solution de Barenblatt possède une intégrale égale à la masse fournie au départ, et les solutions concordent quel que soit m . Cela permet donc de valider les codes implémentés.

Validation : domaine \mathbb{R}^+

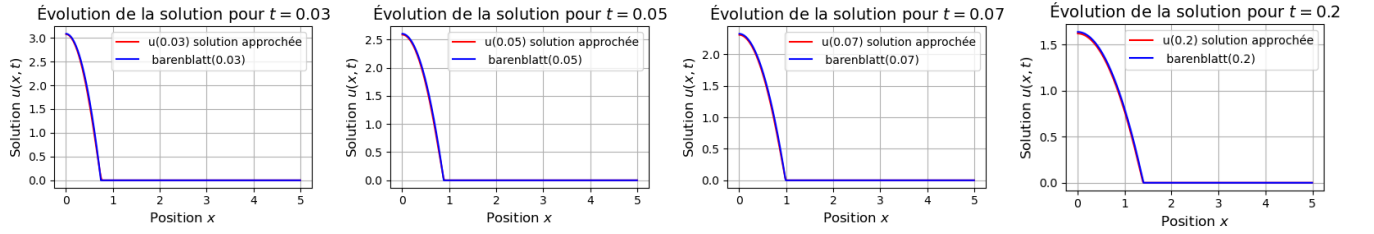


FIGURE 11 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 2$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N = 500$, $Nt = 100$, $M = 3$

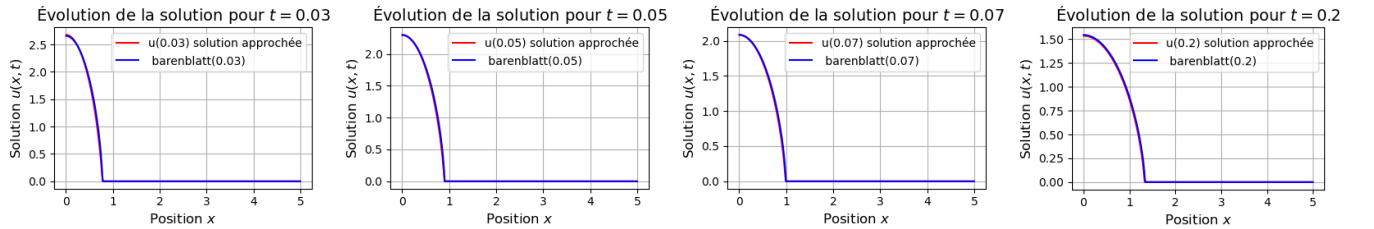


FIGURE 12 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 2.5$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N = 500$, $Nt = 100$, $M = 3$

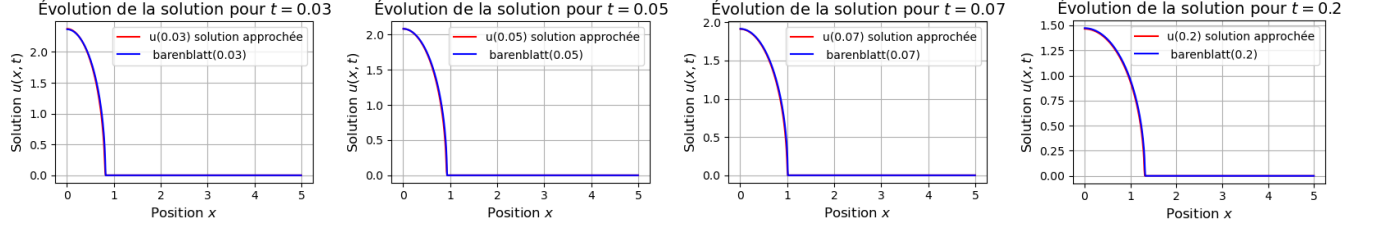


FIGURE 13 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 3$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=500$, $Nt = 200$, $M = 3$

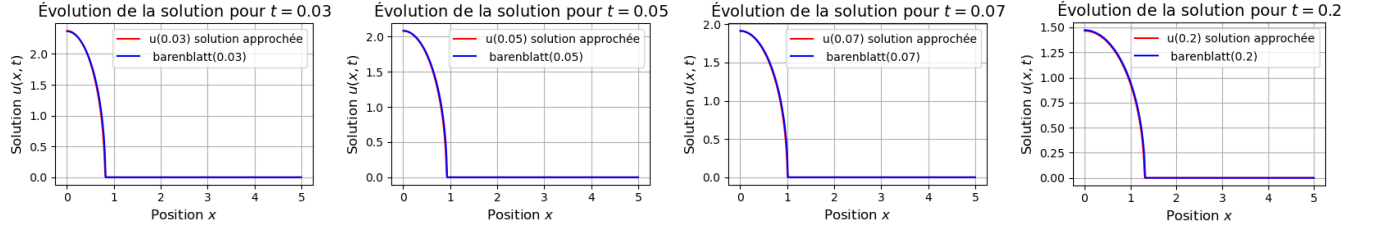


FIGURE 14 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 4$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=500$, $Nt = 200$, $M = 3$

Les résultats présentés illustrent l'évolution de la solution de Barenblatt et de la solution approchée pour différentes valeurs de m et à plusieurs instants t . Nous pouvons faire les observations physiques suivantes : Pour chaque valeur de m , on observe une diffusion progressive du profil de la solution au cours du temps. Ceci est en accord avec la théorie de la diffusion non linéaire régie par l'équation de Barenblatt, où l'étalement est plus prononcé pour des temps plus grands.

L'augmentation de m semble ralentir la diffusion, ce qui est conforme aux propriétés de l'équation de diffusion avec un exposant $m > 1$.

La solution approchée semble suivre la tendance générale de la solution de Barenblatt, ce qui indique une bonne validation du modèle. Les écarts éventuels entre les deux solutions pourraient être dus aux effets numériques, aux conditions aux limites ou aux méthodes d'approximation utilisées.

À mesure que m augmente, la solution devient plus localisée et présente un profil plus marqué, ce qui est caractéristique des solutions auto-semblables associées à des processus de diffusion non linéaire.

Pour $m = 2$, on observe une diffusion plus rapide qu'avec $m = 4$, ce qui correspond aux attentes théoriques.

Les figures montrent une évolution temporelle cohérente : une solution initialement plus concentrée qui s'étale progressivement en conservant une structure auto-semblable. À des temps plus grands ($t = 0.2$), la solution est plus lisse et largement étalée, illustrant le phénomène de diffusion.

En conclusion, les résultats confirment les comportements attendus pour une solution de type Barenblatt et montrent une bonne cohérence entre la solution théorique et l'approche

numérique.

4 Comparaison avec le cas linéaire :

Dans cette étude, nous nous intéressons à la comparaison entre la diffusion linéaire classique et la diffusion non linéaire, représentée par la solution de Barenblatt. La diffusion linéaire est bien décrite par l'équation de la chaleur, dont la solution fondamentale est la fonction gaussienne. En revanche, pour $m > 1$, la diffusion devient non linéaire, modifiant profondément la dynamique de propagation de la masse initiale.

L'objectif est d'analyser l'évolution de la solution de Barenblatt en fonction du paramètre m et du temps, en comparant les résultats numériques obtenus aux solutions analytiques connues. Nous cherchons notamment à vérifier la proposition de Barenblatt, selon laquelle sa solution tend vers la gaussienne lorsque $m \rightarrow 1$. Cette comparaison permet de mieux comprendre l'influence de la non-linéarité sur la diffusion et de valider les schémas numériques utilisés pour l'approximation de la solution.

Cas : domaine infini

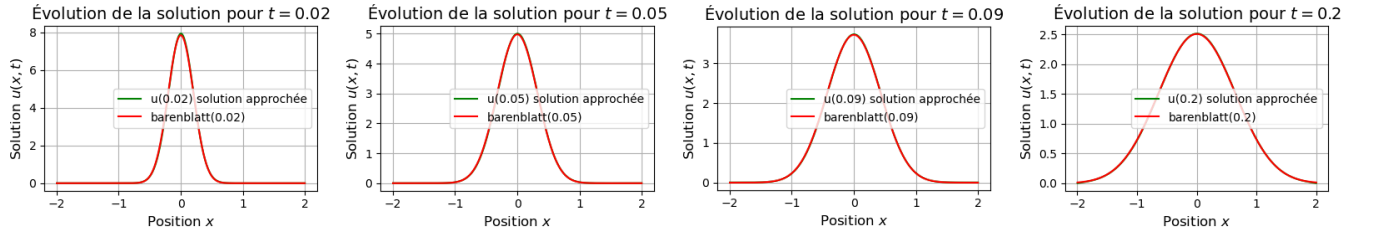


FIGURE 15 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 1.02$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=500$, $Nt = 200$, $M = 4$

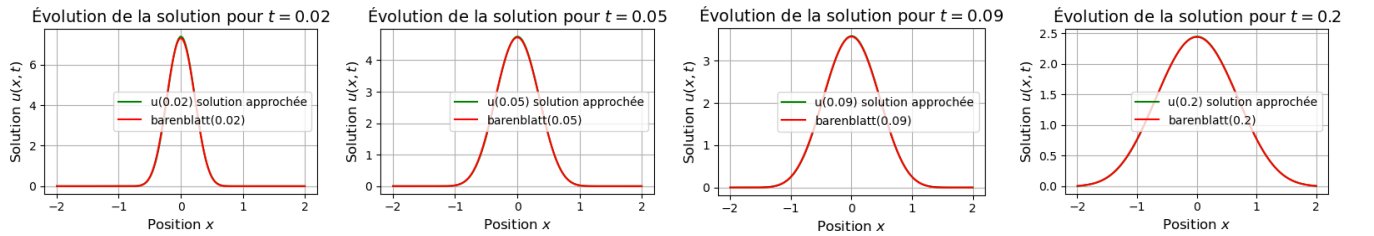


FIGURE 16 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 1.1$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=500$, $Nt = 200$, $M = 4$

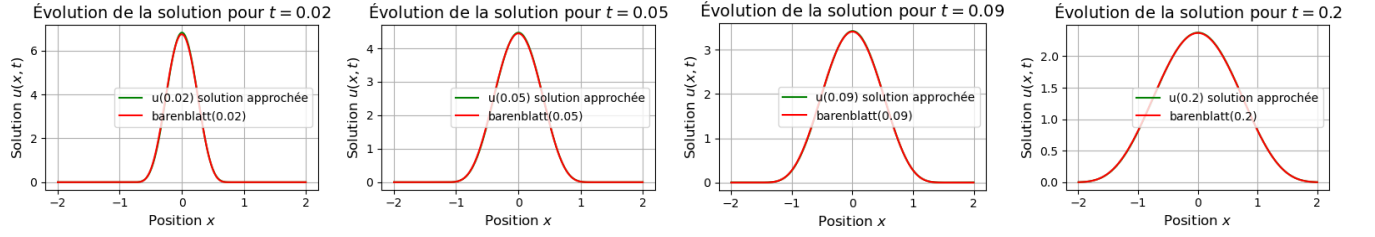


FIGURE 17 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 1.2$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=500$, $Nt = 200$, $M = 4$

Cas : demi-droite

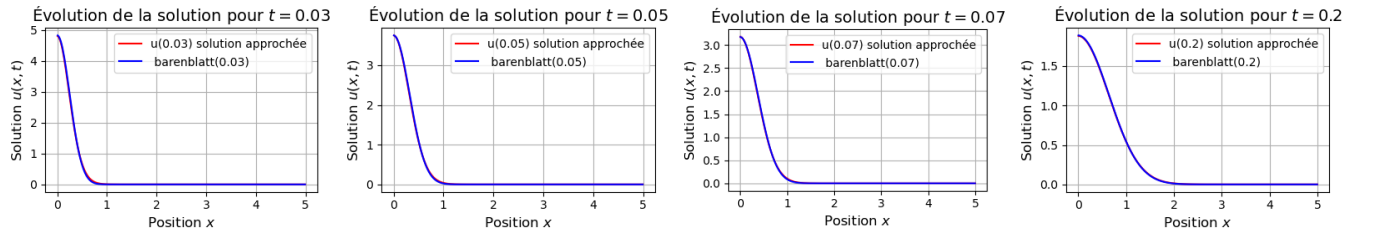


FIGURE 18 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 1.02$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=300$, $Nt = 50$, $M = 3$

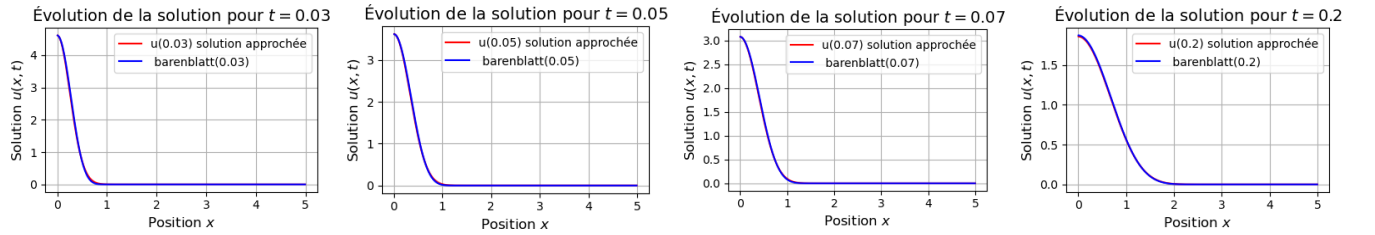


FIGURE 19 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 1.1$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=300$, $Nt = 50$, $M = 3$

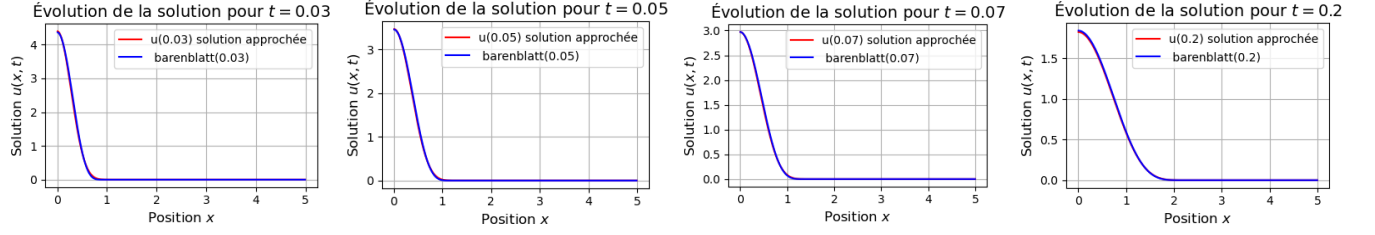


FIGURE 20 – Solution Barenblatt et la solution approchée pour $m = 1.2$ et $t = \{0.03, 0.05, 0.07, 0.2\}$, $N=300$, $Nt = 50$, $M = 3$

En comparaison avec la solution du cas linéaire, nous remarquons dans un premier temps que, quel que soit $m > 1$, la solution est à support borné. C'est-à-dire que la solution est identiquement nulle en dehors d'une zone autour de la masse initiale. Cette zone s'étend dans le temps, pendant que la solution s'aplatit : la masse est diffusée dans cet espace.

Plus m est grand, plus la courbe a une forme circulaire en son sommet. La solution semble presque tendre vers un créneau lorsque m grandit.

Par ailleurs, nous avons également cherché à vérifier la proposition de Barenblatt, qui explique que sa solution tend vers la Gaussienne de la partie 1 lorsque $m \rightarrow 1$.

Les résultats obtenus sont en accord avec la théorie et montrent que le schéma numérique utilisé permet de capturer correctement la dynamique de diffusion. La bonne adéquation entre la solution de Barenblatt et les solutions approchées dans les différents cas testés (domaine infini et demi-droite) valide la méthode et met en évidence l'impact du paramètre m sur la diffusion.

5 Conclusion :

Ce projet a exploré l'équation de diffusion non linéaire en utilisant une méthode numérique basée sur les volumes finis. La comparaison avec la solution de Barenblatt a validé l'efficacité de notre approche.

Les principaux résultats montrent que, pour $m = 1$, la diffusion est rapide et homogène, en accord avec la solution gaussienne. Pour $m > 1$, la diffusion devient non linéaire, plus localisée et avec un support compact, ralentissant à mesure que m augmente. Les solutions numériques obtenues sont cohérentes avec la théorie et illustrent bien la transition entre diffusion linéaire et non linéaire.

Pour améliorer la précision, l'utilisation de schémas d'ordre supérieur et de maillages adaptatifs pourrait être envisagée. L'étude pourrait également être étendue à des géométries plus complexes et des dimensions supérieures. Ces méthodes sont applicables à d'autres phénomènes physiques impliquant une diffusion non linéaire.

Les résultats obtenus confirment l'importance des approches numériques pour analyser des équations aux dérivées partielles complexes et ouvrent des perspectives pour des applications avancées en modélisation physique.