

Rapport du TP2-MS02 Homogénéisation Périodique

Bréhima Samaké

October 2024

1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce TP au problème de Poisson dans un matériau ayant une microstructure périodique.

Trouver $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A_\epsilon \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v & , \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

Où $f \in L^2(\Omega)$, A_ϵ un tenseur caractéristique du matériau qui satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme et qui s'écrit :

$$A_\epsilon(x) = A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Avec $x = (x_1, x_2)$, ϵ la période de la microstructure et A un tenseur 1-périodique.

Nous allons commencer par calculer la solution exacte de ce problème pour différentes périodes (ϵ sera donc un paramètre du problème). Nous verrons notamment que les calculs deviennent prohibitifs pour des périodes de la microstructure très petites quand on veut avoir une bonne approximation de la solution. En effet, le pas du maillage devra être choisi assez petit par rapport à la période. Nous nous intéresserons ensuite à la solution du problème homogénéisé. Pour cela, il faudra calculer les coefficients du tenseur homogénéisé en résolvant les problèmes de cellule puis résoudre le problème à coefficients homogénéisés qui lui est beaucoup moins coûteux. Enfin, on validera ce processus en comparant la solution exacte et la solution homogénéisée, qualitativement et quantitativement.

2 Solution exacte:

En utilisant les routines écrites dans le précédent TP, écrire un programme principal qui résout le problème (7) discret avec des éléments finis \mathbb{P}^1 . La période ϵ du milieu sera un paramètre de votre programme qui pourra être changé facilement. Cette fonction est notée ici **principal_dirichlet_cellule.m**.

Validation:

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $u_{\epsilon,h}$ correcte. Pour cela, on résout le problème (7) avec une solution u égale à

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \text{ pour } (x, y) \in \Omega$$

Ici le maillage $h = 0.2$

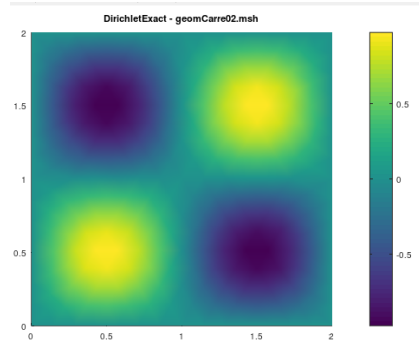
Nous avons donc l'expression du second membres pour les différentes valeurs de A :

1. Pour

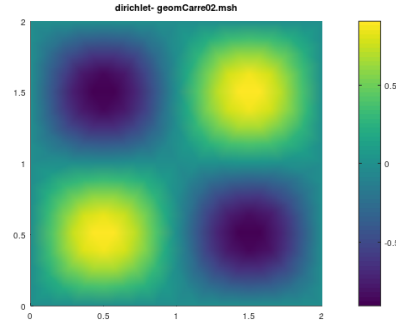
$$A = Id.$$

Nous obtenons

$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$



(a) Résultat exact avec conditions de Dirichlet



(b) Résultat approché avec conditions de Dirichlet

Figure 1: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions de Dirichlet

2. Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$f(x, y) = 3\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

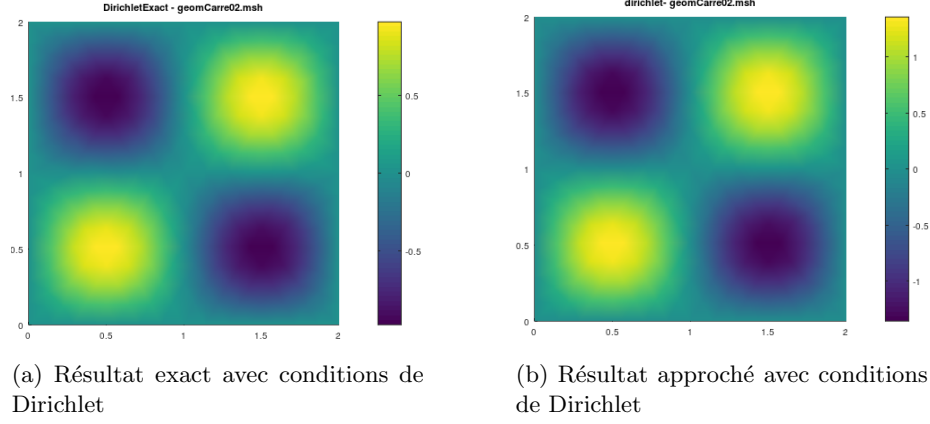


Figure 2: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions de Dirichlet

3. Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$f(x, y) = (1 + 6\pi^2) \sin(\pi y) + \pi^2 \sin(2\pi x) \sin(\pi x) \sin(\pi y) - 2\pi^2 \cos(2\pi x) \cos(\pi x) \sin(\pi y)$$

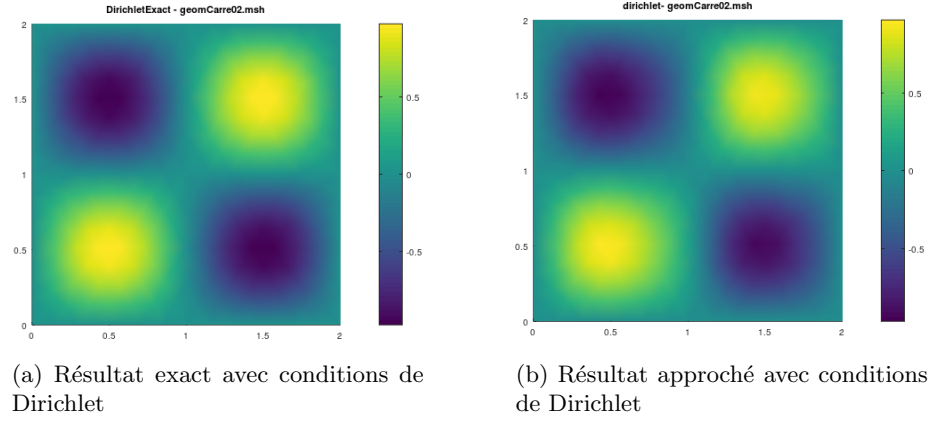


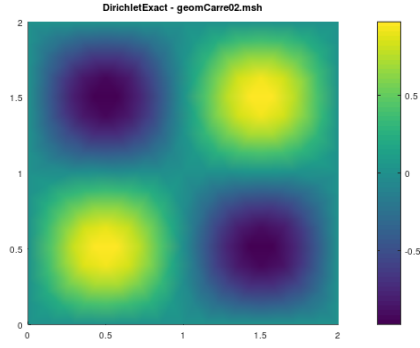
Figure 3: Comparaison des résultats exact et approché avec conditions de Dirichlet

4. Pour

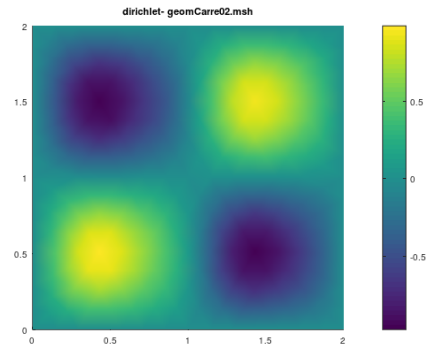
$$A = \begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & 4 + \sin(2\pi x) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$f(x, y) = (1+6\pi^2) \sin(\pi y) + 2\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(\pi x) \sin(\pi y) - 2\pi^2 \cos(2\pi x) \cos(\pi x) \sin(\pi y)$$



(a) Résultat exact Dirichlet problème de cellule



(b) Résultat approché de Dirichlet problème de cellule

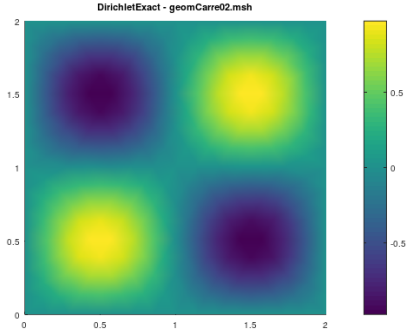
Figure 4: Comparaison des résultats exact et approché avec problème de cellule

5. Pour

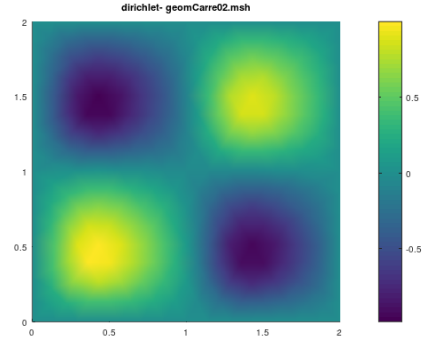
$$A = 2 + \sin(2\pi x) \times (4 + \sin(2\pi y) \times Id).$$

Alors

$$f(x, y) = 4\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$



(a) Résultat exact Dirichlet problème de cellule



(b) Résultat approché avec conditions de Dirichlet

Figure 5: Comparaison des résultats exact et approché Dirichlet problème de cellule

3 Solution du problème homogénéisé:

Pour déterminer le tenseur homogénéisé, il faut résoudre les problèmes de cellule suivants (écrits directement sous leur forme variationnelle) :

Pour $i \in \{1, 2\}$, trouver $w_i \in V$ tel que

$$\forall \phi \in V, \quad \int_Y (A(y) \nabla_h w_i, \nabla_y \phi(y)) dy = - \int_Y (A(y) e_i, \nabla_y \phi(y)) dy \quad (8)$$

où $Y = (0, 1)^2$, $y = (y_1, y_2)$ et $V = \left\{ \psi \in H_{\#}^1(Y) \mid \int_Y \psi(y) dy = 0 \right\}$.

On peut réécrire ce problème sous la forme

$$a(u, v) = l(v)$$

$$\text{Avec } a(u, v) = \int_Y (y) \nabla u \nabla v dy, \quad \text{et } l(v) = - \int_Y A(y) e_i \nabla v dy$$

1. La forme bilinéaire $a(., .)$ est continue :

$$|a(u, v)| = \left| \int_Y (A(y) \nabla u \nabla v dy \right| \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2},$$

où A est bornée, avec $C \geq 0$.

2. a est coercive :

$$a(u, u) = \int_Y A(y) \nabla u \nabla u dy \geq c \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq c \|u\|_{H_{\#}^1}^2 \quad (\text{inégalité de Poincaré de la version moyenne nulle}).$$

- Continuité de $l(.)$:

$$|l(\phi)| = \left| \int_Y A(y) e_i \nabla v dy \right| \leq C \|\nabla v\|_{L^2} \leq C \|v\|_{H_{\#}^1}$$

V muni de la $\|\cdot\|_{H_1}$ est un espace de Hilbert donc d'après le théorème de Lax-Milgram le problème est bien posé.

Ici, nous choisissons la méthode de pénalisation, qui consiste à calculer la solution du problème suivant :

Soit $\eta \geq 0$. Pour $i \in \{1, 2\}$, trouver $w_i^\eta \in H_{\#}^1(Y)$ tel que $\forall \phi \in H_{\#}^1(Y)$

$$\int_Y (A(y) \nabla_h w_i^\eta(y), \nabla_y w_i(y)) dy + \int_Y w_i^\eta(y) \phi(y) dy = - \int_Y (A(y) e_i, \nabla_y \phi(y)) dy \quad (3)$$

On peut également écrire ce problème sous la forme :

$$a(u, v) = l(v)$$

avec

$$a(u, v) = \int_Y A(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dy + \eta \int_Y A(y) uv \, dy$$

$$l(v) = - \int_Y A(y) e_i \nabla v \, dy$$

- a est continue :

$$|a(u, v)| = \left| \int_Y A(y) \nabla u \nabla v \, dy + \eta \int_Y uv \, dy \right|$$

$$\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \eta \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\leq (\eta + C) \|u\|_{H_{\#}^1} \|v\|_{H_{\#}^1} \quad (1)$$

- a est coercive :

$$a(u, u) = \int_Y (A(y) \nabla u \nabla u \, dy + \eta \int_Y |u|^2 \, dy) \geq \min(c, \eta) \|u\|_{H_{\#}^1}^2$$

Comme $H_{\#}^1$ muni de la $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert donc d'après le théorème de Lax-Milgram le problème est bien posé.

De plus quand η est petit, la constante de coercivité devrait aussi être petite.

En particulier, si on prend

$$\phi(y) = 1$$

qui est bien un élément de $H_{\#}^1$, on a alors:

$$\eta \int_Y w_i^\eta \, dy = 0$$

Donc $w_i^\eta \in V$. Donc $(w_i - w_i^\eta) \in V$. On a donc

$$\int_Y (A(y) \nabla w_i \nabla (w_i - w_i^\eta) \, dy = - \int_Y (A(y) e_i \nabla (w_i - w_i^\eta) \, dy$$

De plus comme $V \subset H_{\#}^1$, on a donc

$$\int_Y (A(y) \nabla w_i^\eta \nabla (w_i - w_i^\eta) \, dy + \eta \int_Y w_i (w_i - w_i^\eta) \, dy = - \int_Y (A(y) e_i \nabla (w_i - w_i^\eta) \, dy$$

Donc d'après ce qui précède, on a

$$\int_Y (A(y) \nabla (w_i - w_i^\eta) \cdot \nabla (w_i - w_i^\eta)) \, dy = \eta \int_Y w_i^\eta (w_i - w_i^\eta) \, dy \rightarrow 0 \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0$$

En utilisant la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ dans V , on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup \|w_i - w_i^\eta\|_{H_{\#}^1} \leq 0$$

Dans la suite, nous discrétisons le problème (3) avec une constante η choisie suffisamment petite.

Discrétisation des problèmes de cellule:

On sait que $FF = \mathbb{K} + \eta\mathbb{M}$. Nous allons maintenant calculer le second membre. En utilisant le fait que $\nabla_{y_i} = e_i$,

$$-\int_Y (A(y)e_i, \nabla_y \phi(y)) dy = -\int_Y (A(y)\nabla y_i, \nabla_y \phi(y)) dy$$

où y_i peut être écrit sous forme :

$$y_i = \sum_{j=1}^{N_{\text{son}}} y_i(S_j) w_j$$

Ainsi, nous aurons

$$-\int_Y (A(y)\nabla y_i, \nabla_y \phi(y)) dy = \sum_{j=1}^{N_{\text{son}}} y_i(S_j) \int_Y (A(y)w_j, \nabla_y w_i) dy = -\mathbb{K}y_i$$

Nous appliquons ici la méthode de pseudo-élimination d'après le TP précédent. La matrice devient alors $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbb{K} + \eta\mathbb{M})\mathbb{P}^t$.

Validation : periodique_cellule.m

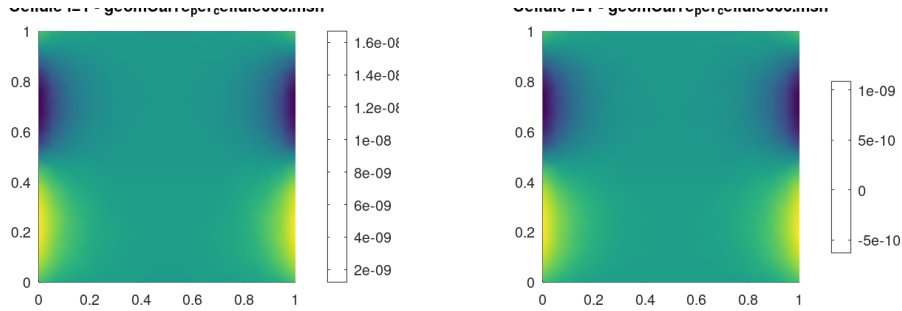
Soit le maillage $h = 0.006$. En considérant $A = \text{Id}$, le problème (2) devient :

$$\begin{cases} -\text{div}(\nabla_y w_i) = \text{div}(e_i) & \text{dans } Y, \\ \int_Y w_i = 0 & (\text{condition de moyenne nulle}), \end{cases}$$

On peut facilement voir que dans ce cas $w_i = 0$.

Calculons maintenant la solution approchée $w_{i,h}^\eta$ en considérant $A = \text{Id}$ dans le problème (2).

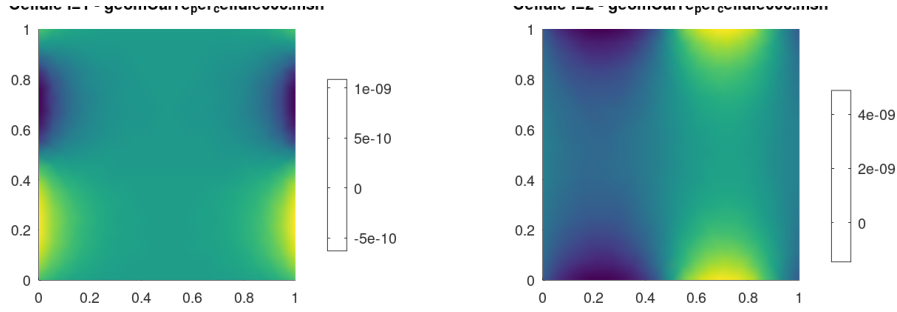
La visualisation graphique nous montre :



(a) Résultat exact Dirichlet probleme de cellule

(b) Cas1: W1 probleme de cellule periodique

Figure 6: Comparaison des résultats exact et approché Dirichlet probleme de cellule



(a) Cas 2 : W1 probleme de cellule periodique

(b) Casi : W2 probleme de cellule periodique

Figure 7: Comparaison des résultats exact et approché Dirichlet probleme de cellule

On rappelle que le tenseur homogénéisé est donné par :

$$A_{jk}^{\text{eff}} = \int_Y (A(y)(e_k + \nabla_y w_k(y)), (e_j + \nabla_y w_j(y))) dy.$$

D'après la méthode utilisée précédemment, en considérant $e_k = \nabla_y w_k$ et $y_k = \sum_{j=1}^{N_{\text{son}}} y_k(S_j)w_j$, on a :

$$A_{jk}^{\text{eff}} = \int_Y (A(y)(e_k + \nabla_y w_k(y)), (\nabla_y y_j + \nabla_y w_j(y))) dy.$$

Cela peut être décomposé comme suit :

$$A_{jk}^{\text{eff}} = \int_Y (A(y)\nabla_y w_k, \nabla_y y_j) + (A(y)\nabla_y w_k, \nabla_y w_j(y)) + (A(y)\nabla_y w_k(y), \nabla_y y_j) + (A(y)\nabla_y w_k(y), \nabla_y w_j(y)).$$

En termes matriciels, cela se simplifie en :

$$A_{jk}^{\text{eff}} = (Ky_k, y_j) + (Kw_k, y_j) + (Ky_k, w_j) + (Kw_k, w_j),$$

où K est symétrique.

Nous allons maintenant calculer les coefficients du tenseur homogénéisé A^{eff} en utilisant les données fournies dans la question 4 précédente.

```
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from 00e+00
periodique_cellule at line 128 column 11olum
warning: matrix singular to machine precision
Tenseur homogénéisé : cas line 155 column 12
Aeff =periodique_cellule at line 128 column 11
1.0000e+00 1.9797e-15
2.8177e-15 1.0000e+002
erreur L2 = 0.000000 et erreur H1 = 0.000000
```

(a) Cas 1 : $A = \text{id}$

```
tenseur homogénéisé : cas 2
Aeff =
1.0000e+00 -2.1069e-15
1.0681e-15 2.0000e+00
erreur L2 = 0.000000 et erreur H1 = 0.000000
```

(b) Cas 2 : $A = \text{diag}(1, 2)$

Figure 8: Calcul du tenseur homogénéisé : Cas 1 et Cas 2


```

Tenseur homogénéisé : cas 3
Aeff =
  1.7358e+00  4.1803e-13
  4.2382e-13  4.0000e+00
erreur L2 = 0.059969 et erreur H1 = 0.517445

```

(a) Cas 3 : $A = \text{diag}(2 + 2 \sin(2\pi x), 4)$

```

Tenseur homogénéisé : cas 4
Aeff =
  1.7356e+00  5.9452e-12
  5.9393e-12  4.0000e+00
erreur L2 = 0.060024 et erreur H1 = 0.517653

```

(b) Cas 4 : $A = \text{diag}(2 + \sin(2\pi x), 2 + \sin(2\pi x))$

Figure 9: Calcul du tenseur homogénéisé : Cas 3 et Cas 4

```

Tenseur homogénéisé : cas 5
Aeff =
  6.9390e+00  3.3698e-05
  3.3698e-05  7.7484e+00
erreur L2 = 0.066570 et erreur H1 = 1.147565

```

Figure 10: Cas 5 : $A = \text{diag}(2 + \sin(2\pi x) \cdot (4 + \sin(2\pi y)), 2 + 2 \sin(2\pi x) \cdot (4 + \sin(2\pi y)))$

Les images précédentes présentent les tenseurs approximatives pour les cas 1, 2, 3, 4. On constate que les valeurs sont approximativement les memes valeurs que le tenseurs qui sont données par:

1. $A^{eff}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A^{eff}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. $A^{eff}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
4. $A^{eff}(x, y) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} \end{pmatrix}$

Où $\sqrt{3} \approx 1,732$, $4 \cdot \sqrt{3} \approx 6,928$, $2 \cdot \sqrt{15} \approx 7,7459$

Calcul de la Solution du problème homogénéisé:

Le problème homogénéisé est le suivant :

Trouver $u_0 \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^{eff} \nabla u_0) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On utilise la matrice définie plus haut et le code de la partie 1. En prenant $u_0^{exact} = \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$ dans $\Omega = (0, 1)^2$, nous pouvons déterminer la solution approchée.

Voici les résultats obtenus pour les quatre matrices :

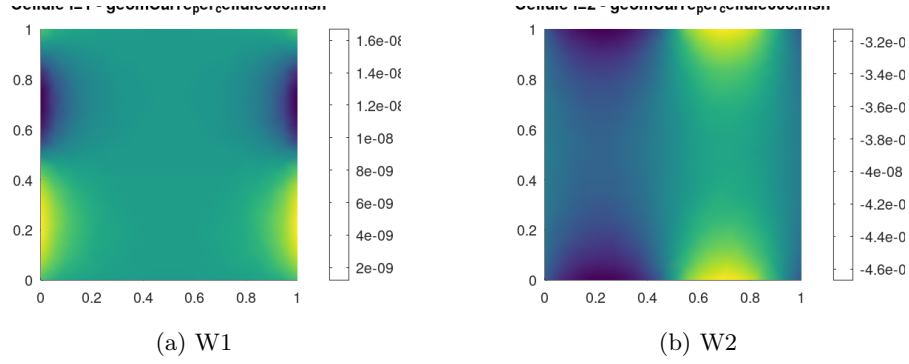


Figure 11: W1 et W2

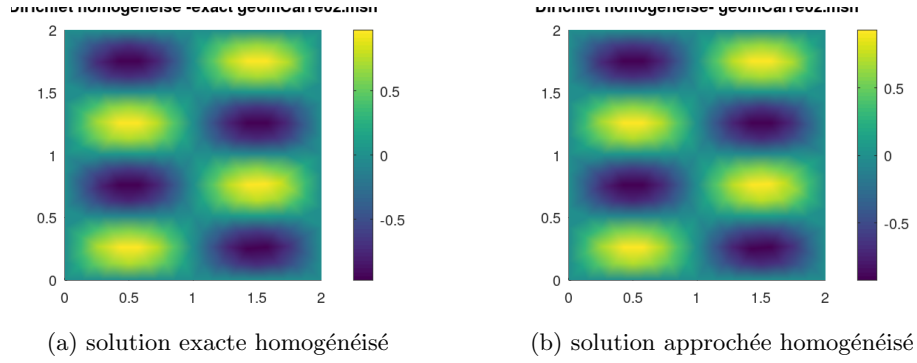


Figure 12: Comparaison de solution exacte et approchée du problème homogénéisé

D'après les images précédentes, on a l'approximation de la solution du problème homogénéisé est cohérente avec la solution exacte, l'erreur de L^2 et celle de H^1 sont petite

Comparaison de la solution exacte avec la solution du problème homogénéisé:

Maintenant , on va étudier le comportement de la solution u_ϵ quand ϵ varie , et la comparée avec la solution u_{exact} . Supposons que

$$u_0^{\text{exact}} = \sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$$

On utilise l'implémentation `principal_dirichlet_cellule_homogene.m` , en plus le maillage $h = 0.02$

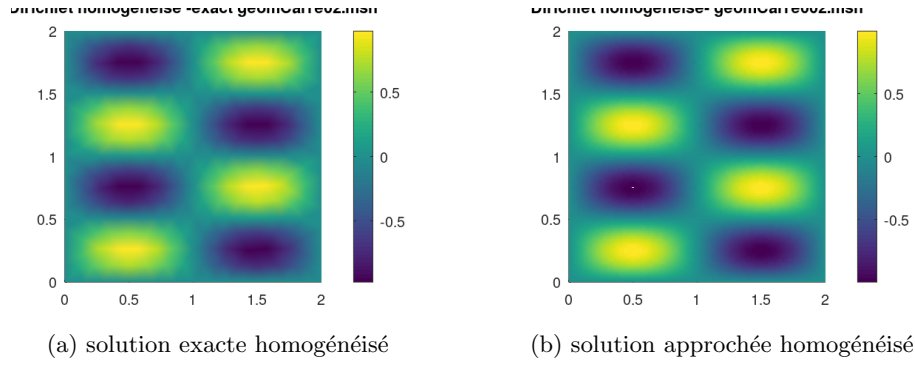


Figure 13: Comparaison de solution exacte et approchée du problème homogénéisé

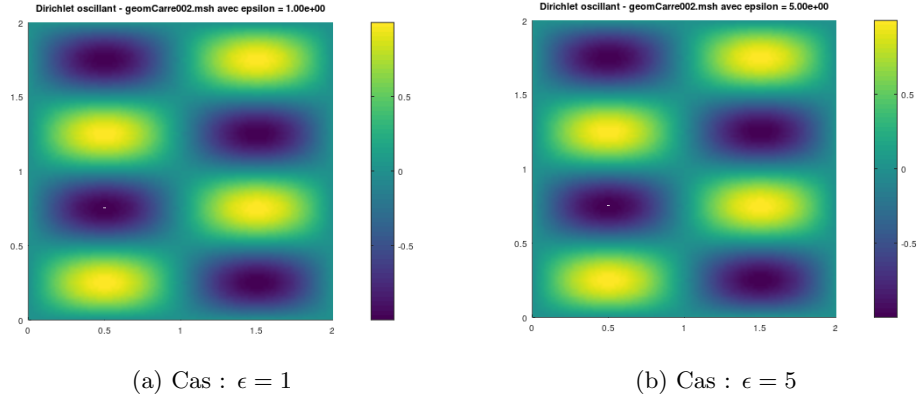


Figure 14: Comparaison des solutions exacte et approchée du problème homogénéisé

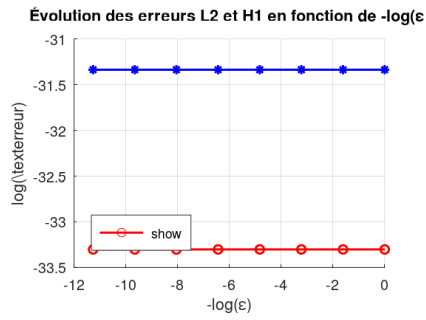


Figure 15: Erreur L^2 et erreur H^1

D'après les graphiques précédents, lorsque la valeur de h est suffisamment petite, la solution u_ϵ se rapproche fortement de u_0^{exact} , entraînant ainsi des erreurs L^2 et H^1 négligeables.

Le graphique montre l'évolution de l'erreur en fonction de $-\log(\epsilon)$ pour les erreurs en norme L_2 et H_1 . À mesure que ϵ devient plus petit, nous devons observer une diminution de l'erreur (représentée en fonction du logarithme de l'erreur), ce qui est attendu si la méthode de discrétisation est convergente. Le comportement typique devrait être que l'erreur L_2 montre une décroissance plus rapide que l'erreur H_1 , et les pentes des courbes peuvent fournir des informations sur la convergence du schéma.

Lors de l'étude de la solution pour des très petites valeurs de ϵ , il peut y avoir une stabilisation des erreurs en raison de la limite de la précision du maillage, comme mentionné dans le code avec l'effet de l'échantillonnage et des contraintes numériques associées aux très petites tailles de ϵ . Lorsque ϵ devient très petit, la solution devient de plus en plus oscillante, ce qui peut rendre difficile une approximation précise des dérivées de la solution. En conséquence, même si l'erreur L_2 peut continuer à diminuer, l'erreur H_1 peut se stabiliser ou diminuer moins rapidement en raison de l'amplitude croissante des oscillations dans la solution.

4 Conclusion

Pour conclure ce rapport de TP, nous avons abordé la résolution numérique de problèmes elliptiques avec différentes conditions aux limites, en mettant l'accent sur la mise en œuvre pratique des méthodes d'homogénéisation. Dans la première partie, nous avons résolu le problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet à l'aide d'une discrétisation par éléments finis. Cela nous a permis de développer une compréhension approfondie des calculs matriciels élémentaires (rigidité et masse), ainsi que de la construction et l'assemblage des matrices globales dans un cadre numérique. Nous avons ensuite validé les résultats en comparant les solutions approchées aux solutions analytiques connues, et en étudiant la convergence des erreurs en fonction du maillage.

La deuxième partie s'est concentrée sur la résolution du problème de Poisson dans des milieux avec microstructure périodique, suivie de la comparaison entre la solution exacte et la solution du problème homogénéisé. Nous avons constaté que la solution homogénéisée permet de simplifier les calculs tout en restant précise pour de petites valeurs du paramètre de périodicité.

En somme, ce TP a permis de mettre en pratique des techniques de calcul avancées, confirmant la puissance des méthodes numériques dans la résolution de problèmes d'homogénéisation.