TP1:Simulation numérique de la loi de conservation scalaire

Bréhima Samaké

Janvier 2025

1 Introduction

L'objectif de ce TP1 est d'écrire un code pour la résolution approchée de l'équation scalaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 & \text{pour } t > 0,\ x \in (0,1), \\ u(0,x) = u^0 & \text{pour } x \in (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

où $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$, avec un schéma de volumes finis à 3 points écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 & \text{pour } n \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, J, \\ u_j^0 = u(x_j^0) & \text{pour } j = 1, \ldots, J. \end{cases}$$

où J est le nombre de cellules utilisées pour mailler l'intervalle $(0,1)$, $\Delta x = \frac{1}{J}$, et $f_{j+\frac{1}{2}}^n = F(u_j^n, u_{j+1}^n)$ est un flux numérique à préciser. Le calcul de $f_{\frac{1}{2}}^n$ et $f_{J+\frac{1}{2}}^n$ se fera en utilisant des conditions aux limites bien choisies.

Nous pouvons donc écrire la formule de recurrence par:

$$\boxed{\mathrm{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n\right)}$$

D'après le TP, les conditions initiales sont définies par :

1. Type Riemann :

   $$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & \text{si } x < 0{,}5 \\ u_r, & \text{si } x \geq 0{,}5 \end{cases}$$

   où dans le cas Burgers $(u_l, u_r) = (-1, 2)$,$(u_l, u_r) = (2, -1)$ et le cas non linéaire $(u_l, u_r) = (2, -2)$.

2. Type sinusoïdal :

   $$u_0(x, 0) = \sin(2\pi x)$$

On impose également les contion aux limites de type Neumann et Periodique:

- **Conditions de Neumann** : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ à $x = 0$ et $x = 1$.
- **Conditions Périodiques** : $u(0,t) = u(1,t)$ et $u'(0,t) = u'(1,t)$.

On definit la condition CFL par :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2\max(|f'(u)|)}$$

2 Définitions du flux pour différentes methodes et Etude de la solution du problème de Riemann :

Pour résoudre l'équation de loi de conservation scalaires, plusieurs schémas numériques peuvent être utilisés. Dans ce TP1, trois schémas différents seront appliqués : Godunov, Rusanov et Roe. Chaque schéma diffère par la manière dont il traite les flux à l'interface entre les cellules de la grille.

Flux de Godunov:

Le flux associé a cette methode est definit par :

$$F(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \begin{cases} \min(f(\mathbf{u}_L), f(\mathbf{u}_R)) & \text{si } \mathbf{u}_L\mathbf{u}_R > 0 \text{ et } \mathbf{u}_L < \mathbf{u}_R \\ \max(f(\mathbf{u}_L), f(\mathbf{u}_R)) & \text{si } \mathbf{u}_L\mathbf{u}_R > 0 \text{ et } \mathbf{u}_L > \mathbf{u}_R \\ 0 & \text{si } \mathbf{u}_L\mathbf{u}_R \leq 0 \end{cases}$$

Flux de Rusanov

Le flux associé au schéma de Rusanov s'écrit :

$$F_{\text{Rusanov}}(u_L, u_R) = \frac{1}{2}\left(f(u_L) + f(u_R)\right) - \frac{1}{2}\max\left(\left|f'(u_L)\right|, \left|f'(u_R)\right|\right)(u_R - u_L).$$

Flux de Roe

Le flux associé à cette méthode s'écrit :

$$F_{\text{Roe}}(u_L, u_R) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(u_L) + f(u_R)\right) - \frac{1}{2}\left|\frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}\right|(u_R - u_L), & \text{si } u_L \neq u_R, \\ \frac{1}{2}\left(f(u_L) + f(u_R)\right) - \frac{1}{2}\left|f'(u_L)\right|(u_R - u_L), & \text{si } u_L = u_R. \end{cases}$$

Schéma numérique global

Dans les trois cas (Godunov, Rusanov, Roe), le schéma de volumes finis s'écrit :

$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n\right)}.$$

Pour implémenter ce schéma dans les trois cas, il suffit de changer à chaque fois le flux numérique.

Résolution du problème de Riemann:

Pour résoudre le problème (1) avec $u(x,0)$ défini comme suit :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < 0.5, \\ u_R, & \text{si } x \geq 0.5, \end{cases}$$

Dans le cas $f(u) = \frac{u^2}{2}$:

Ici la fonction flux est convexe

Cas1 $(u_L, u_R) = (-1, 2)$**:**

La fonction flux f étant strictement convexe et de plus $u_L < u_R$. En se référent au cours , la solution du problème de Riemann est une onde de detente donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \frac{x}{t} < -2, \\ \frac{x}{t}, & \text{si } -2 < \frac{x}{t} < 1, \\ 2, & \text{si } \frac{x}{t} > 1. \end{cases}$$

Cette forme représente une solution auto-similaire, où $u(x,t)$ dépend uniquement de la variable $\xi = \frac{x}{t}$.

Validation:

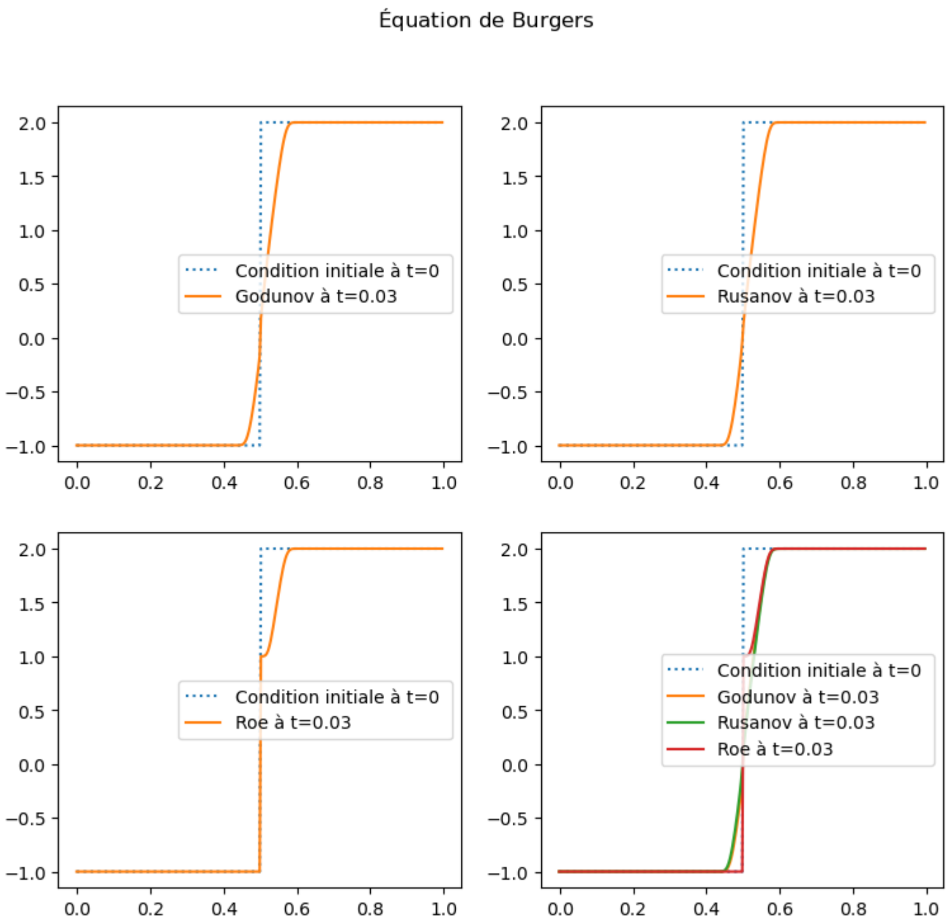

Figure 1: Méthodes de Godunov, Rusanov et Roe : comparaison à $t = 0.03$

Cas1 $(u_L, u_R) = (2, -1)$**:**

Dans ce cas comme f est strictement convexe et de plus $u_L > u_R$. Par conséquent, la solution du problème de Riemann est une onde de choc qui se propage à la vitesse σ donnée par la relation de Rankine Hugoniot d'après le resultat du cours abordé en classe :

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{x}{t} < \sigma, \\ -1 & \text{si } \frac{x}{t} > \sigma. \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(2)^2}{2}}{-1-2} = \frac{1}{2}$$

Validation:

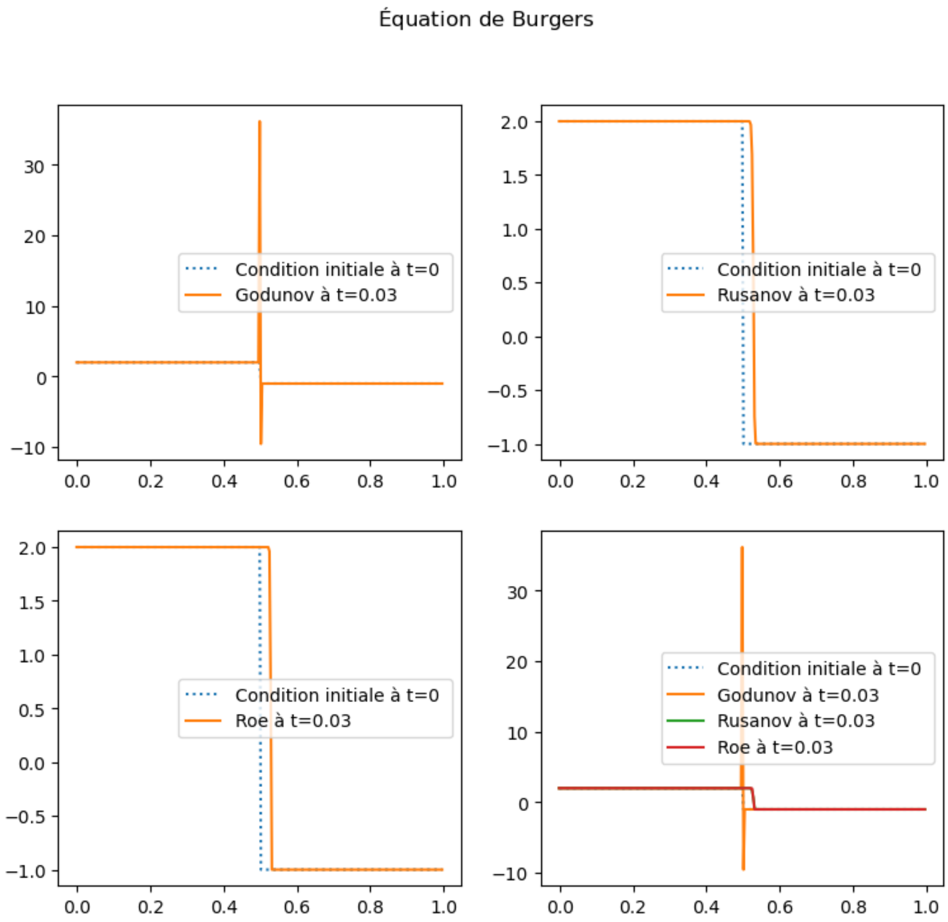

Figure 2: Méthodes de Godunov, Rusanov et Roe : comparaison à $t = 0.03$

Dans le cas $f(u) = -\frac{u^2}{2}$:

Dans cette partie la fonction flux est strictement concave ($f''(u) = -1 < 0$)

Cas1 $(u_L, u_R) = (-1, 2)$:

Dans le cas où la fonction flux f est strictement concave et $u_L < u_R$. En se référent toujours au cours , la solution du problème de Riemann est une onde de choc qui se propage à la vitesse σ donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{x}{t} < \sigma, \\ 2 & \text{si } \frac{x}{t} > \sigma. \end{cases}$$

Dont σ est definit par la rélation de Rankine-Hugoniot

$$\sigma = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{-\frac{(2)^2}{2} + \frac{(-1)^2}{2}}{2+1} = -\frac{1}{2}$$

Validation:

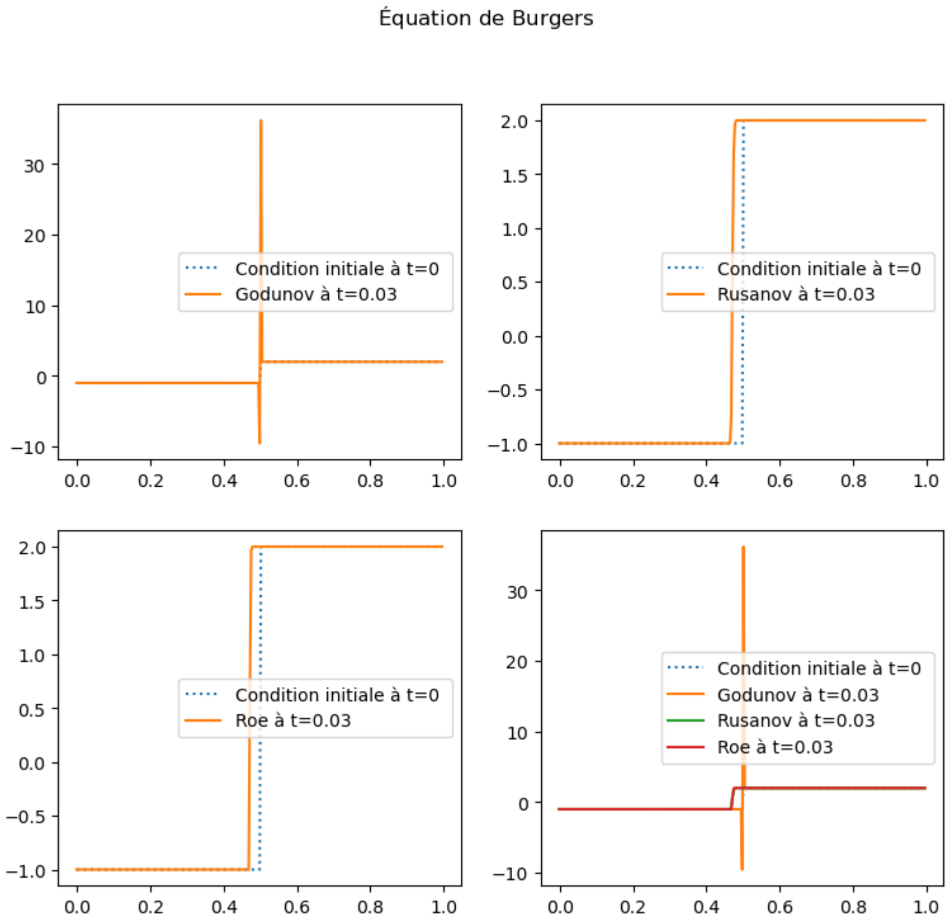

Figure 3: Méthodes de Godunov, Rusanov et Roe : comparaison à $t = 0.03$

Cas1 $(u_L, u_R) = (2, -1)$**:**

Dans ce cas comme f est strictement concave et de plus $u_L > u_R$. Par conséquent, la solution du problème de Riemann est une onde de detente qui est cohérent d'après le resultat du cours abordé en classe.

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & \text{si } \frac{x}{t} < -2, \\ -\frac{x}{t}, & \text{si } -2 < \frac{x}{t} < 1, \\ -1, & \text{si } \frac{x}{t} > 1. \end{cases}$$

Validation:

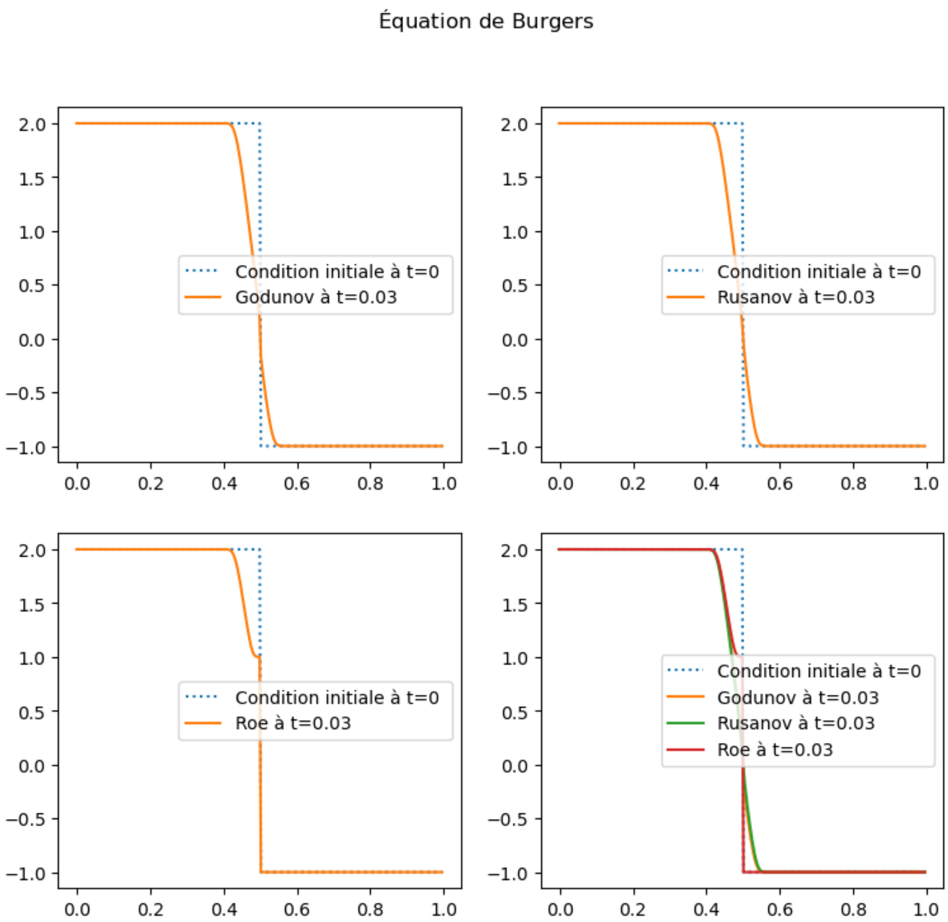

Figure 4: Méthodes de Godunov, Rusanov et Roe : comparaison à $t = 0.03$

Dans le cas $f(u) = u^3$:Cas non linéaire

$f'(u) = 3u^2$ et $f''(u) = 6u$

Cas1 $(u_L, u_R) = (2, -2)$:

Onde de detente $(u > 0)$

Pour $u > 0$, f est convexe. L'onde de detente est donnée par :

$$u(\xi) = \begin{cases} u_L, & \text{si } \xi < f'(u_L), \\ (f')^{-1}(\xi), & \text{si } f'(u_L) \leq \xi \leq f'(0), \\ 0, & \text{si } \xi > f'(0). \end{cases}$$

Dans notre cas, $f'(u) = 3u^2$, donc $(f')^{-1}(\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{3}}$. Ainsi :

$$u(\xi) = \begin{cases} 2, & \text{si } \xi < 12, \\ \sqrt{\frac{\xi}{3}}, & \text{si } 0 \leq \xi \leq 12, \\ 0, & \text{si } \xi > 12. \end{cases}$$

Onde de choc ($u < 0$)

Pour $u < 0$, f est concave. L'onde de choc se déplace avec une vitesse donnée par la condition de saut de Rankine-Hugoniot :

$$s = \frac{f(u_R) - f(0)}{u_R - 0} = \frac{(-2)^3 - 0}{-2 - 0} = -4.$$

Ainsi, pour $\xi < 0$, la solution est constante :

$$u(\xi) = \begin{cases} -2, & \text{si } \xi < -4, \\ 0, & \text{si } -4 \leq \xi < 0. \end{cases}$$

Étape 3 : Solution finale

En combinant les deux parties, la solution complète est donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} -2, & \text{si } \frac{x}{t} < -4, \\ 0, & \text{si } -4 \leq \frac{x}{t} \leq 0, \\ \sqrt{\frac{x}{3t}}, & \text{si } 0 \leq \frac{x}{t} \leq 12, \\ 2, & \text{si } \frac{x}{t} > 12. \end{cases}$$

Cette solution auto-similaire décrit la propagation d'une onde de choc pour $\xi < 0$ et d'une onde de detente pour $\xi > 0$. Elle est cohérente avec le comportement physique attendu pour $f(u) = u^3$ et $(u_L, u_R) = (2, -2)$

Validation:

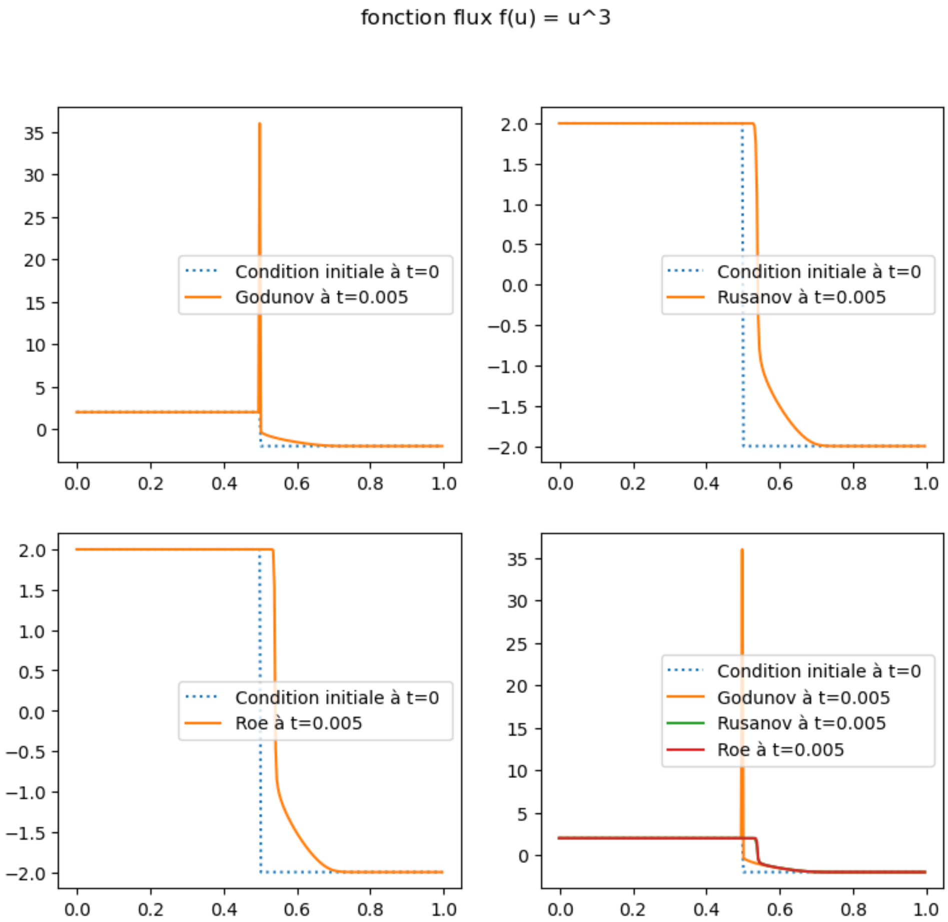

Figure 5: Méthodes de Godunov, Rusanov et Roe : comparaison à $t = 0.005$

NB:

Ces validations ont été fait en utilisant la conditon au bord de type Neumann (Cas de Burgers et le cas non linéaire)

3 Solution régulière: conditions aux bords de type périodique

Condition initiale régulière:

$$u_0(x) = \sin(2\pi x)$$

On observe qu'avec une condition initiale régulière, la solution demeure régulière pendant un certain temps fini. Au-delà de cette période, elle devient non régulière, ce qui est en accord avec la théorie dans le cas d'une fonction flux non linéaire $f(u) = \frac{u^2}{2}$, même lorsque la condition initiale est régulière.

Validation : Cas $f(u) = -\frac{u^2}{2}$

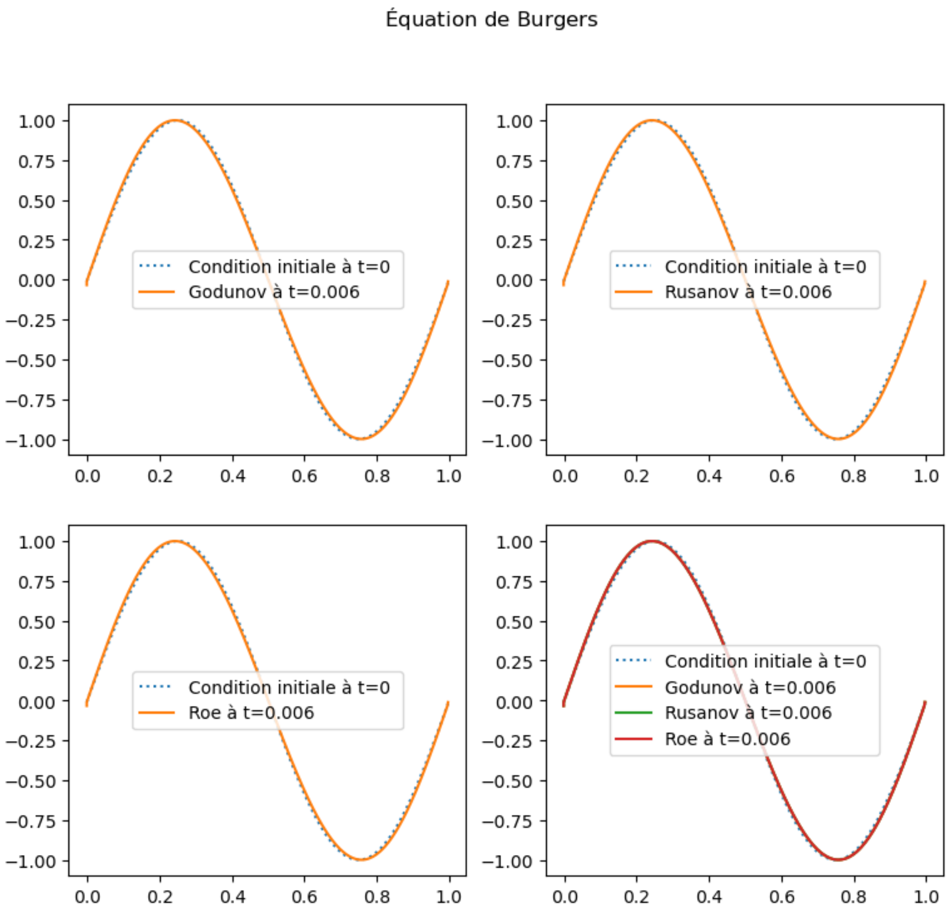

Figure 6: Méthodes de Godunov, Rusanov et Roe : comparaison à $t = 0.006$

Validation : Cas $f(u) = \frac{u^2}{2}$

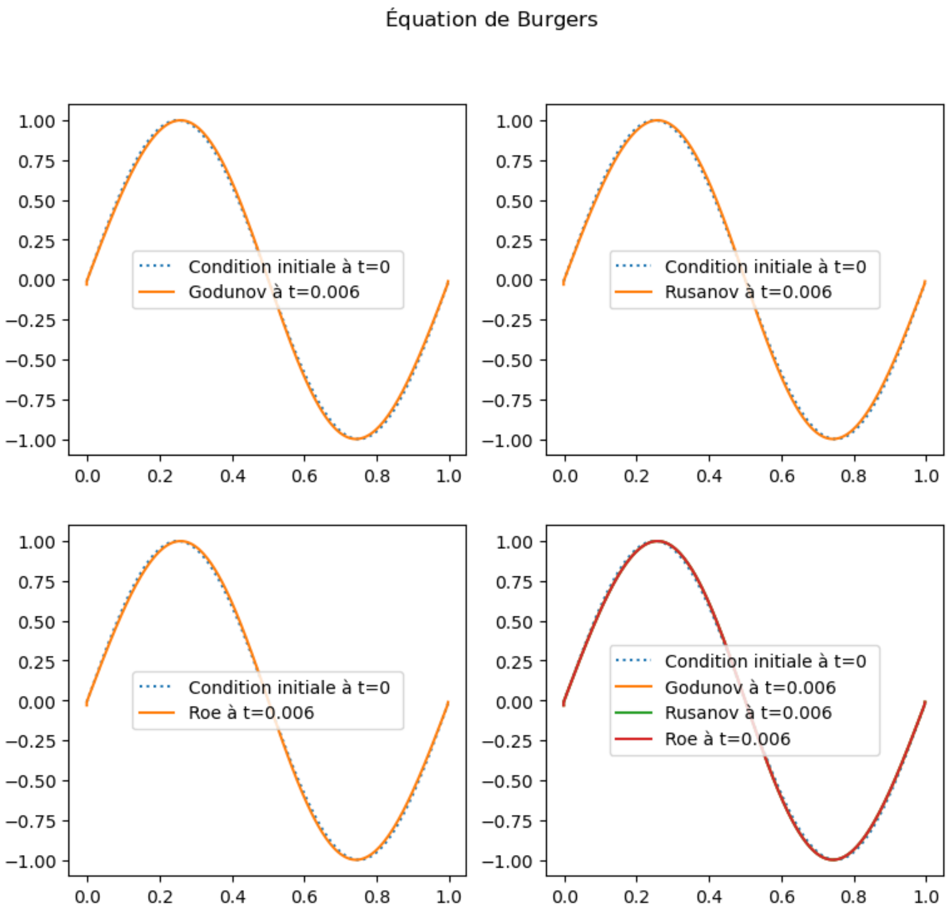

Figure 7: Méthodes de Godunov, Rusanov et Roe : comparaison à $t = 0.006$

4 Conclusion

Ce travail a permis d'étudier la résolution numérique des équations de conservation scalaires à l'aide de schémas de volumes finis. Trois méthodes ont été comparées : **Godunov, Rusanov et Roe**. Les résultats obtenus montrent que :

- **Les schémas capturent bien les ondes de choc et de détente**, avec des différences notables en termes de diffusion et de précision.
- **Le schéma de Godunov** est plus fidèle à la solution exacte mais nécessite la résolution d'un problème de Riemann.
- **Le schéma de Rusanov** est plus diffusif mais simple à mettre en œuvre.
- **Le schéma de Roe** offre une bonne précision mais peut échouer pour des discontinuités fortes.

L'analyse des différentes conditions aux limites (Neumann et périodique) et des différentes conditions initiales (discontinue et régulière) a confirmé la cohérence des résultats avec la théorie.

Ce travail valide donc l'efficacité des méthodes numériques pour résoudre ces équations.