Volumes finis pour des lois de conservation.

Ce TP est la suite naturelle du précédent qui était dédié au cas d'une équation scalaire. On s'intéressera ici à la discrétisation du système des équations de la dynamique des gaz 3×3 étudié en cours, c'est-à-dire le système

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t \rho E + \partial_x(\rho E u + p u) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ (\rho(0,.), u(0,\cdot), p(0,\cdot)) = (\rho^0, u^0, p^0), \quad x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{1}$$

avec ρ^0, u^0, p^0 des conditions initiales de type Riemann, c'est-à-dire $X^0(x) = X_L$ si $x < 0$ et $X^0(x) = X_R$ si $x > 0$, et

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1}$$

avec $\gamma = 1.4$ (par exemple).

1) Ecrire un code (dans le langage de votre choix) pour la résolution approchée de ce système que l'on écrira sous la forme condensée

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x f(\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{u}^0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{2}$$

avec un schéma de volumes finis écrit sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\Delta t} + \dfrac{f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, J, \\ \mathbf{u}_j^0 = \mathbf{u}^0(x_j), \quad j = 1, \ldots, J \end{array}\right. \tag{3}$$

où $\Delta x = 1/J$, avec $f_{j+1/2}^n = F(\mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n)$ et $\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho E)^T$ (attention, il est impératif de programmer le schéma (3) en variables conservatives $(\rho, \rho u, \rho E)$, et ce même si la condition initiale est souvent formulée en variables primitives (ρ, u, p)). Le calcul de $f_{1/2}^n$ et de $f_{J+1/2}^n$ nécessitera d'utiliser des conditions aux limites.

Pour cela, la structure générale du code suivante est proposée.

a) Définir des fonctions : flux f, valeurs propres du système u et $u \pm c$ où c est la vitesse du son. Les arguments d'entrée de ces fonctions seront ρ, u, p (considérés comme des vecteurs) et γ. Déclarer aussi une fonction $\mathbf{u}^0$ (qu'on pourra noter `u0`) de type Riemann.

b) Déclaration des variables et initialisation : J (nombre de cellules du maillage), Δx (noté `dx`), `X` $= (x_j)_j$ (vecteur des positions des centres de cellules, $x_j = (j - 1/2)\Delta x$ pour $j = 1, \ldots, J$), `U = u0(X)` (dans un langage qui permet cette écriture vectorielle), temps final `T`, temps courant `t = 0`, indice en temps courant `n = 0`.

c) Boucle en temps du type `while t<T`, dans laquelle figurent les opérations suivantes données à titre indicatif.

- calcul de tout paramètre intervenant dans la définition du flux numérique, calcul du pas de temps Δt (`dt`) en pensant, après le calcul du pas de temps souhaité, à écrire `dt = min(dt, T - t)` (pourquoi ?); incrémentation de t et de n ;
- boucle en espace pour le calcul des flux à gauche `fG(j)` $= f_{j-1/2}$, puis calcul des flux à droite `fD(j)` $= f_{j+1/2}$. On fera attention au traitement des conditions aux limites ;
- boucle en espace pour le calcul du nouveau vecteur `U` (dans les langages scilab, matlab ou python, ceci peut se faire de la manière vectorielle `U = U - dt/dx*(fD - fG)`) et affichage éventuel de la solution (pour voir le « film » de la solution) ;
- affichage de la solution à l'instant final, et éventuelle sauvegarde.

On pourra tester le schéma de Rusanov défini par

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u}_j) + f(\mathbf{u}_{j+1})) - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j)$$

avec

$$\lambda = \max_j \max(|u_j| + c_j, |u_{j+1}| + c_{j+1}),$$

où bien le flux de la méthode de relaxation

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u}_j) + f(\mathbf{u}_{j+1}))$$

$$-\frac{|u_j - a_{j+1/2}/\rho_j|}{2}(\mathbf{u}_{j+1/2,L} - \mathbf{u}_j) - \frac{|u_{j+1/2}|}{2}(\mathbf{u}_{j+1/2,R} - \mathbf{u}_{j+1/2,L}) - \frac{|u_{j+1} + a_{j+1/2}/\rho_{j+1}|}{2}(\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_{j+1/2,R})$$

avec

$$a_{j+1/2} = \max(\rho_j c_j, \rho_{j+1} c_{j+1}),$$

$$u_{j+1/2} := u_{j+1/2,L} = u_{j+1/2,R} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{1}{2a_{j+1/2}}(p_{j+1} - p_j),$$

$$p_{j+1/2} := p_{j+1/2,L} = p_{j+1/2,R} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2} - \frac{a_{j+1/2}}{2}(u_{j+1} - u_j),$$

$$E_{j+1/2,L} = E_j + \frac{p_j u_j - p_{j+1/2,L} u_{j+1/2,L}}{a_{j+1/2}}, \quad E_{j+1/2,R} = E_{j+1} - \frac{p_{j+1} u_{j+1} - p_{j+1/2,R} u_{j+1/2,R}}{a_{j+1/2}},$$

et les relations suivantes

$$u_j - a_{j+1/2}/\rho_j = u_{j+1/2,L} - a_{j+1/2}/\rho_{j+1/2,L}, \quad u_{j+1,R} + a_{j+1/2}/\rho_{j+1} = u_{j+1/2} + a_{j+1/2}/\rho_{j+1/2,R}$$

pour définir $\rho_{j+1/2,L}$ et $\rho_{j+1/2,R}$.

2) On pourra considérer plusieurs données initiales de type Riemann (avec des conditions aux limites de Neumann) pour observer les ondes mises en évidence en cours, par exemple
- Test 1 : $(\rho, u, p)_L = (1, 0, 1)$, $(\rho, u, p)_R = (0.125, 0, 0.1)$, $T = 0.20$;
- Test 2 : $(\rho, u, p)_L = (1, 0, 0.01)$, $(\rho, u, p)_R = (1, 0, 100)$, $T = 0.030$.

3) On pourra observer la continuité des invariants de Riemann à la traversée des ondes de détente et de contact et la validité des inégalités de Lax à la traversée des chocs.