

TP2: Simulation numérique du système de la dynamique des gaz en 1D

Bréhima Samaké

Fevrier 2025

Ce rapport présente une simulation numérique des lois de conservation hyperboliques, avec application au système des équations de la dynamique des gaz. Ce travail constitue une extension des études effectuées pour une équation scalaire en se focalisant sur un système 3×3 formulé sous forme conservative :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p u) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où ρ est la densité, u est la vitesse, p est la pression, et ρE représente l'énergie totale par unité de volume donnée par :

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1},$$

avec $\gamma = 1.4$.

Ce système est résolu avec des conditions initiales de type Riemann et une méthode de volumes finis, basée sur le schéma de Rusanov.

$$(\rho(0, x), u(0, x), p(0, x)) = \begin{cases} (\rho_L, u_L, p_L), & \text{si } x < 0, \\ (\rho_R, u_R, p_R), & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où ρ_L, u_L, p_L et ρ_R, u_R, p_R sont les conditions initiales à gauche et à droite de la discontinuité. Ces conditions sont de type Riemann, ce qui permet d'analyser la structure des solutions.

Les équations d'Euler en 1D s'écrivent sous la forme hyperbolique :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0$$

Soit le vecteur d'état \mathbf{U} et le vecteur flux $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ donnés par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} U$$

La pression p est liée aux autres variables par l'équation d'état :

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right),$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques ($\gamma = 1.4$ pour l'air).

Matrice Jacobienne

La matrice Jacobienne $A(U)$ est définie par :

$$A(U) = \frac{\partial \mathbf{F}(U)}{\partial \mathbf{U}}.$$

La matrice Jacobienne $A(U)$ est essentielle pour analyser la structure des solutions du système d'Euler, en particulier pour les méthodes de résolution numérique comme les schémas de volumes finis. Les valeurs propres de $A(U)$ définissent les directions de propagation des ondes dans le fluide.

On définit $\mathbf{F}(U)$ par :

$$\mathbf{F}(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \rho u^2 + (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{\rho u^2}{2} \right) \\ \rho E u + (\gamma - 1) \left(\rho E u - \frac{\rho u^3}{2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1) \left(u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1} \right) \\ \frac{u_3 u_2}{u_1} + (\gamma - 1) \left(\frac{u_3 u_2}{u_1} - \frac{u_2^3}{2u_1^2} \right) \end{bmatrix}.$$

Après avoir calculé les dérivées partielles, la matrice Jacobienne $A(U)$ s'écrit :

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-3)}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \left(\frac{(\gamma-1)}{2} \frac{u^3}{\rho} - \gamma E u \right) & \left(\gamma E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 \right) & \gamma u \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres associées à ce système sont données par

$\det(A - \lambda I) = 0$ donc les solutions sont :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad \text{où } c \text{ est la vitesse du son : } c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

Puisque ces valeurs propres sont réelles et distinctes, le système est **strictement hyperbolique**.

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont :

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{bmatrix},$$

où l'enthalpie totale H est définie par :

$$H = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2.$$

Détermination des Invariants de Riemann:

Invariants de Riemann

Les invariants de Riemann sont des quantités conservées le long des courbes caractéristiques associées aux valeurs propres du système d'Euler :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c.$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_3 sont non linéaires, tandis que λ_2 correspond à un champ caractéristique linéairement dégénéré. Cette distinction est essentielle pour analyser les différents types d'ondes : chocs, détente et ondes de contact.

Invariants associés à $\lambda_1 = u - c$

Le long de $dx/dt = \lambda_1$, une quantité J^- est conservée. En intégrant l'équation de Bernoulli isentropique, on obtient :

$$J_1^- = u - \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constante}, \quad J_2^- = \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}.$$

Invariants associés à $\lambda_2 = u$

Pour $dx/dt = \lambda_2$, correspondant à une onde de contact, la vitesse et l'entropie restent constantes :

$$J_1^0 = u = \text{constante}, \quad J_2^0 = \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}.$$

Invariants associés à $\lambda_3 = u + c$

De manière analogue à λ_1 , la conservation de J^+ le long de $dx/dt = \lambda_3$ donne :

$$J_1^+ = u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{constante}, \quad J_2^+ = \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}.$$

Ondes dans la solution du problème de Riemann

La solution du problème de Riemann se compose de trois ondes séparées par un état intermédiaire \mathbf{U}^* :

- Une onde associée à λ_1 , pouvant être un choc ou une détente.
- Une onde de contact correspondant à λ_2 , où u et p sont conservés.
- Une onde associée à λ_3 , qui peut être un choc ou une détente.

Ces ondes se caractérisent ainsi :

- Une **onde de détente** associée à λ_1 , se propageant à gauche si la pression diminue. - Une **onde de contact** associée à λ_2 , conservant u et p . - Une **onde de détente** associée à λ_3 , se propageant à droite si la pression augmente.

Ces structures sont fondamentales pour la résolution des équations d'Euler. La suite de cette étude portera sur l'implémentation d'un schéma numérique de type HLL afin de résoudre ce système.

Schéma numérique :

Les relations de consistance au sens intégral s'écrivent ici :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = -\lambda(\mathbf{U}^* - \mathbf{U}_L) + \lambda(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}^*).$$

Après avoir calculer on a donc :

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_L + \mathbf{U}_R) - \frac{1}{2\lambda}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)).$$

Le schéma de volumes finis repose sur la discrétisation suivante :

$$\mathbf{U}_{j+1}^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - F(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j-1}^n)) \quad , f_{j+\frac{1}{2}} = F(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) \quad (2)$$

où le flux numérique de Rusanov est défini par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \frac{1}{2} (F(\mathbf{U}_R) + F(\mathbf{U}_L)) - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (3)$$

la condition CFL s'écrit

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2\lambda}$$

avec :

$$\lambda = \max(|u| - c, |u|, |u| + c) \quad (4)$$

où λ est la vitesse du son.

Validation : test 1 , $T = 0.20$, $J = 1000$ avec condition au bord de type Neumann

$$(\rho(0, x), u(0, x), p(0, x)) = \begin{cases} (1, 0, 1), & \text{si } x < 0, \\ (0.125, 0, 0.1), & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

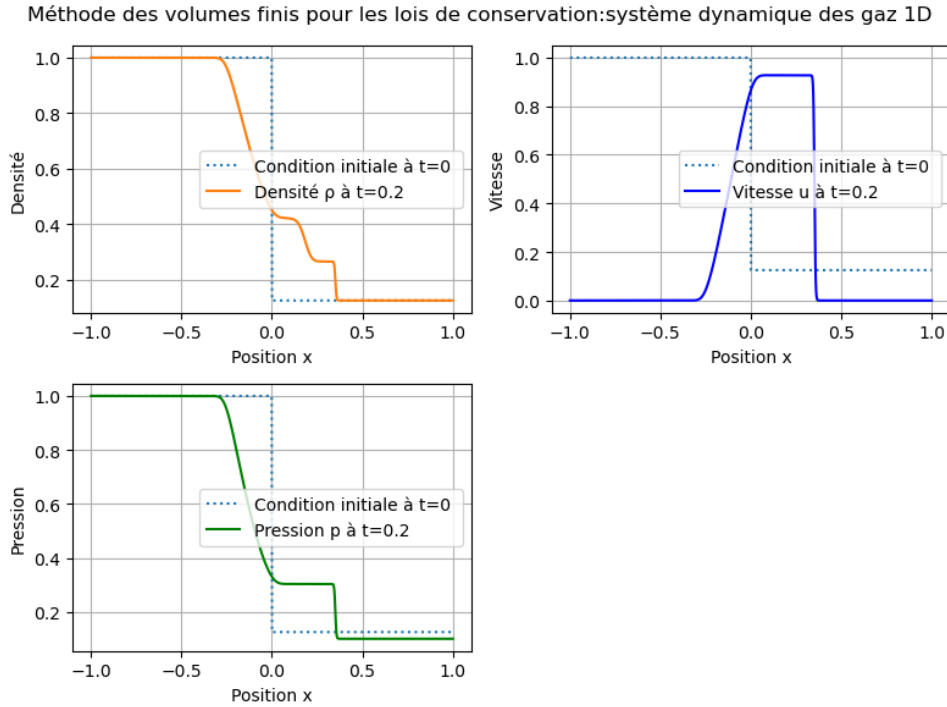


Figure 1: Résultat du test 1

Validation : test 2 , $T = 0.030$, $J = 1000$ avec condition au bord de type Neumann

$$(\rho(0, x), u(0, x), p(0, x)) = \begin{cases} (1, 0, 0.01), & \text{si } x < 0, \\ (1, 0, 100), & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

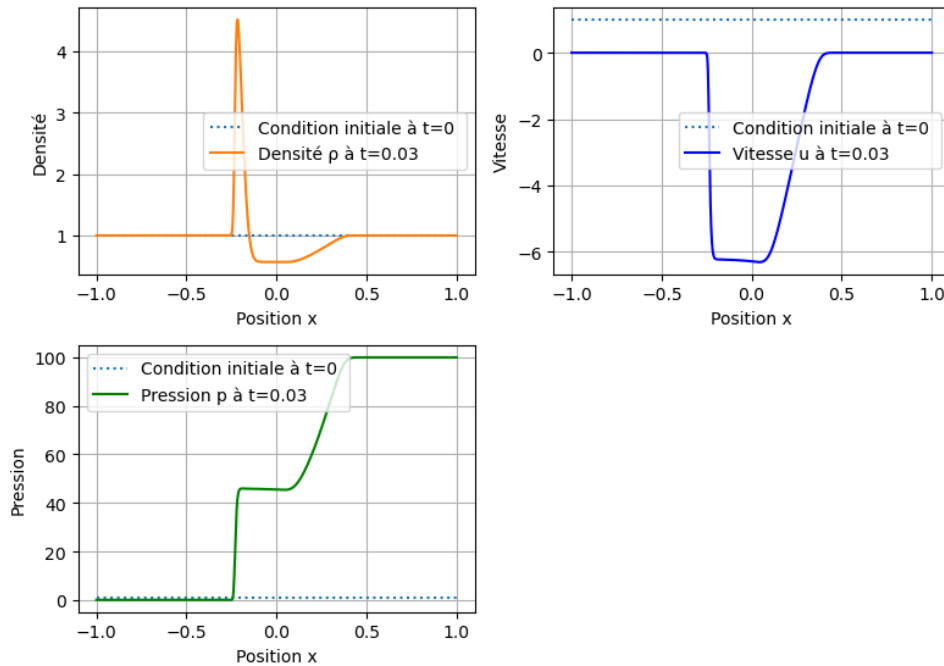


Figure 2: Résultat du test 2

Nous observons que :

Ondes de choc : La discontinuité initiale génère une onde de choc se propageant à une vitesse constante. Le schéma de Rusanov tend à "diffuser" le choc.

Ondes de contact : Ces ondes, caractérisées par une discontinuité de vitesse et de densité mais pas de pression, sont bien capturées, bien que présentant également une diffusion numérique.

Ondes de détente : Lors d'une expansion, les invariants de Riemann sont préservés, et l'onde de détente se déplace correctement avec une structure lissée.

Validité des inégalités de Lax : Les vitesses d'ondes obtenues respectent les contraintes imposées par la théorie des systèmes hyperboliques, assurant une bonne cohérence du schéma numérique.

Conclusion

Dans ce TP2, nous avons étudié la résolution numérique du système d'équations de la dynamique des gaz en 1D, en utilisant un schéma de volumes finis basé sur le flux numérique de Rusanov. Nous avons commencé par analyser les équations d'Euler sous forme conservative, en mettant en évidence leur structure hyperbolique à l'aide des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice Jacobienne.

L'étude du problème de Riemann nous a permis d'identifier trois types d'ondes fondamentales : les ondes de choc, les ondes de détente et les discontinuités de contact. Ces ondes structurent la solution et influencent directement le comportement du schéma numérique utilisé pour la simulation.

L'implémentation numérique a été validée à travers plusieurs tests, confirmant que :

- Les ondes de choc sont correctement capturées, bien que légèrement diffusées en

raison des propriétés dissipatives du schéma.

- Les discontinuités de contact sont bien suivies mais présentent également une diffusion numérique.
- Les ondes de détente sont reproduites avec une bonne précision, respectant les invariants de Riemann.
- Les vitesses d'ondes respectent les inégalités de Lax, garantissant la cohérence physique des solutions obtenues.

Bien que le schéma de Rusanov offre une solution robuste et stable, il présente une diffusion excessive, notamment dans les zones de discontinuité. Une amélioration possible serait d'utiliser un schéma plus précis, comme le schéma de HLLC ou une méthode basée sur des solveurs de Riemann exacts ou approchés.

En conclusion, cette étude met en évidence l'importance du choix du schéma numérique pour la simulation des écoulements compressibles. Les résultats obtenus sont cohérents avec la théorie et ouvrent la voie à des améliorations pour mieux capturer les structures fines des solutions aux équations d'Euler.